УДК 517.538.3+517.542

И. Н. Бруй
Учреждение образования «Барановичский государственный университет», Барановичи, Республика Беларусь

К ПОНЯТИЮ СОПРЯЖЁННОГО РЯДА И СОПРЯЖЁННОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ РЯДОВ ПО МНОГОЧЛЕНАМ ФАБЕРА И ПО ИХ АНАЛОГАМ

Введение. В обозначениях мы следуем двухтомнику Р. Эдвардса [1; 2] и монографии В. К. Дзядыка [3, гл. IX]: с большим яблоко-образным контуром Γ_{Apple} связываем большие заглавные буквы Φ, Ψ, F_n, а с малым дискообразным контуром Γ_{Discus} связываем малые прописные буквы φ, ψ, f_n.

Функция $z = \psi(C \setminus [-1, 1], w) := w - \sqrt{w^2 - 1}$, где $\sqrt{1} = 1$, является обратной к функции Н. Е. Жуковского $w = \varphi(|z| < 1, z) := \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$; $\psi(C \setminus [-1, 1], \infty) = 0$. Она проходимую в положительном направлении (против хода часовой стрелки) единичную окружность $w = e^{it}$, $-\pi \le t \le +\pi$, в комплексной w-плоскости переводит в проходимую в противоположном отрицательном направлении (по ходу часовой стрелки) кривую $\Gamma_{\text{Discus}} := \left\{z = e^{it} - \sqrt{e^{i2t} - 1} : -\pi \le t \le +\pi\right\}$, которая напоминает контур осевого сечения диска (симметричной двояковыпуклой линзы) и которая имеет в z-плоскости в качестве осей симметрии вещественную $\operatorname{Re} z$ и мнимую $i \operatorname{Im} z$ оси и начало системы координат $z_0 = 0$ в качестве центра симметрии.

Значению параметра $t_1 = 0$ соответствует точка $z_1 = e^{i\cdot 0} - \sqrt{e^{i2\cdot 0} - 1} = 1$ на вещественной оси $\operatorname{Re} z$, а для значения параметра $t_2 = \pi/2$ по формуле Эйлера $\forall z \in C \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z$ получаем точку $z_5 = e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} - \sqrt{e^{i2\cdot\frac{\pi}{2}} - 1} = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2} - \sqrt{\cos\pi + i\sin\pi - 1} = -\left(\sqrt{2} - 1\right)i$ на мнимой оси $i \operatorname{Im} z$. В случае значения параметра $t = \pi/4$ имеем точку

$$z_6 = e^{i\cdot\frac{\pi}{4}} - \sqrt{e^{i2\cdot\frac{\pi}{4}} - 1} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} - \sqrt{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{-1 + i}\,.$$

Для корня квадратного по выбору ветви с $\sqrt{1} = 1$ получаем:

$$\sqrt{-1 + i} = \sqrt{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right).$$

Согласно известным формулам тригонометрии

$$\cos\frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{3\pi}{4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}\,,$$

$$\sin\frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{3\pi}{4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}\,.$$

Подводим итог предыдущему: значению параметра $t = \pi/4$ соответствует точка

$$z_6 = \left(\sqrt{2} - \sqrt[4]{12 - 8\sqrt{2}}\right)\Big/2 + i\left(\sqrt{2} - \sqrt[4]{12 + 8\sqrt{2}}\right)\Big/2 \approx 0{,}3 - 0{,}4\,i$$

на комплексной $(\mathrm{Re}z + i\,\mathrm{Im}z)$-плоскости.

В точках $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$ выпуклая дискообразная область $\mathrm{Int}\Gamma_{\mathrm{Discus}}$ имеет внешние углы в радианах раствора $3\pi/2$.

Линии уровня $\psi(C \setminus [-1,\, 1],\, re^{ix})$ с $r < 1$, т. е. образы окружностей $|w| = r < 1$, могут использоваться для расчёта обводов опор мостов, подвергаемых воздействию шуги, т. е. H_2O в двух фазовых состояниях: льда и воды.

Замкнутое двусвязное множество $\Gamma_{\mathrm{Apple}} \cup \Gamma_{\mathrm{Discus}} \cup \left(\mathrm{Int}\,\Gamma_{\mathrm{Apple}} \cap \mathrm{Ext}\,\Gamma_{\mathrm{Discus}}\right)$ имеет нежорданову границу $\Gamma_{\mathrm{Apple}} \cup \Gamma_{\mathrm{Discus}}$ и выглядит как объединение двух симметричных серпов.

В настоящей работе рассматривается приближение функций $f(z)$ на этом объединении двух симметричных серпов.

Основная часть. Согласно определению [3, с. 375] аналог многочлена Фабера n-ого $\left(n \in Z_1 := \{1, 2, 3, \ldots\}\right)$ порядка есть немногочленная часть функции $[\varphi(z)]^n = \left[\dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)\right]^n$. По формуле бинома Ньютона находим первые четыре аналога многочленов Фабера для неограниченной замкнутой внешности дискообразной кривой [4, с. 119]:

$$f_1\left(\Gamma_{\mathrm{Discus}} \cup \mathrm{Ext}\Gamma_{\mathrm{Discus}},\, z\right) = \frac{1}{2z},\quad f_2\left(\Gamma_{\mathrm{Discus}} \cup \mathrm{Ext}\,\Gamma_{\mathrm{Discus}},\, z\right) = \frac{1}{4z^2},$$

$$f_3\left(\Gamma_{\mathrm{Discus}} \cup \mathrm{Ext}\Gamma_{\mathrm{Discus}},\, z\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{z} + \frac{1}{z^3}\right),\quad f_4\left(\Gamma_{\mathrm{Discus}} \cup \mathrm{Ext}\Gamma_{\mathrm{Discus}},\, z\right) = \frac{1}{16}\left(\frac{4}{z^2} + \frac{1}{z^4}\right).$$

В общем случае видим [4, с. 119], что аналоги многочленов Фабера с чётными номерами являются чётными функциями:

$$\forall k \in Z_1\quad f_{2k}\left(\Gamma_{\mathrm{Discus}} \cup \mathrm{Ext}\Gamma_{\mathrm{Discus}},\, z\right) = \frac{1}{2^{2k}}\left(\frac{C_{2k}^{k+1}}{z^2} + \frac{C_{2k}^{k+2}}{z^4} + \frac{C_{2k}^{k+3}}{z^6} + \ldots + \frac{C_{2k}^{2k-2}}{z^{2k-4}} + \frac{C_{2k}^{2k-1}}{z^{2k-2}} + \frac{C_{2k}^{2k}}{z^{2k}}\right),$$

где биномиальные коэффициенты $\forall n \in Z_+\ \ \forall m \in [0,\, n] \cap Z_+\ \ C_n^m := \dfrac{n\,!}{m\,!\ (n-m)\,!}$, а аналоги многочленов Фабера с нечётными номерами являются уже нечётными функциями:

$$\forall k \in Z_+\quad f_{2k+1}\left(\Gamma_{\mathrm{Discus}} \cup \mathrm{Ext}\Gamma_{\mathrm{Discus}},\, z\right) = \frac{1}{2^{2k+1}}\left(\frac{C_{2k+1}^{k+1}}{z} + \frac{C_{2k+1}^{k+2}}{z^3} + \frac{C_{2k+1}^{k+3}}{z^5} + \ldots + \frac{C_{2k+1}^{2k-1}}{z^{2k-3}} + \frac{C_{2k+1}^{2k}}{z^{2k-1}} + \frac{C_{2k+1}^{2k+1}}{z^{2k+1}}\right).$$

Каждый аналог многочлена Фабера [3, с. 375]

$$\forall n \in Z_1\ \ \forall z \in C \setminus \{0\}\ \ f_n\left(\Gamma_{\mathrm{Discus}} \cup \mathrm{Ext}\,\Gamma_{\mathrm{Discus}},\, z\right) = F_n\left(\Gamma_{\mathrm{Apple}} \cup \mathrm{Int}\,\Gamma_{\mathrm{Apple}},\, \frac{1}{z}\right) - F_n\left(\Gamma_{\mathrm{Apple}} \cup \mathrm{Int}\,\Gamma_{\mathrm{Apple}},\, 0\right).$$

Отсюда, так как

$$\frac{1}{\psi(w)} := \frac{1}{w - \sqrt{w^2 - 1}} = \frac{w + \sqrt{w^2 - 1}}{\left(w - \sqrt{w^2 - 1}\right)\left(w + \sqrt{w^2 - 1}\right)} = w + \sqrt{w^2 - 1} =: \Psi(w),$$

имеем

$$F_n\left[\Gamma_{\mathrm{Apple}} \cup \mathrm{Int}\,\Gamma_{\mathrm{Apple}},\, \Psi\left(e^{ix}\right)\right] = f_n\left[\Gamma_{\mathrm{Discus}} \cup \mathrm{Ext}\,\Gamma_{\mathrm{Discus}},\, \psi\left(e^{ix}\right)\right] + F_n\left(\Gamma_{\mathrm{Apple}} \cup \mathrm{Int}\,\Gamma_{\mathrm{Apple}},\ 0\right). \qquad (1)$$

Отклонение алгебраической суммы

$$f\left[\Psi\left(e^{ix}\right)\right]+f\left[\psi\left(e^{ix}\right)\right]-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left[\psi\left(e^{it}\right)\right]dt \tag{2}$$

от средних Фейера её ряда по многочленам Фабера

$$\sum_{n=0}^{N}\left(1-\frac{n}{N+1}\right)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left\{f\left[\Psi\left(e^{it}\right)\right]+f\left[\psi\left(e^{it}\right)\right]-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f\left[\psi\left(e^{it}\right)\right]dt\right\}e^{-int}\,dt\cdot F_n\left[\Gamma_{\text{Apple}}\cup\operatorname{Int}\Gamma_{\text{Apple}}\,,\ \Psi\left(e^{ix}\right)\right]$$

с учётом (1) принимает вид

$$f\left[\Psi\left(e^{ix}\right)\right]-\sum_{n=0}^{N}\left(1-\frac{n}{N+1}\right)\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f\left[\Psi\left(e^{it}\right)\right]e^{-int}\,dt\right\}\cdot F_n\left[\Gamma_{\text{Apple}}\cup\operatorname{Int}\Gamma_{\text{Apple}}\,,\ \Psi\left(e^{ix}\right)\right]+$$

$$+f\left[\psi\left(e^{ix}\right)\right]-\sum_{n=1}^{N}\left(1-\frac{n}{N+1}\right)\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f\left[\psi\left(e^{it}\right)\right]e^{-int}\,dt\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{f_n\left[\Gamma_{\text{Discus}}\cup\operatorname{Ext}\Gamma_{\text{Discus}}\,,\psi\left(e^{ix}\right)\right]+F_n\left(\Gamma_{\text{Apple}}\cup\operatorname{Int}\Gamma_{\text{Apple}}\,,\ 0\right)\right\}-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f\left[\psi\left(e^{it}\right)\right]dt\,. \tag{3}$$

Понятия сопряжённого ряда и сопряжённой функции возникли в теории тригонометрических рядов Фурье. Инициаторами рассмотрения понятия сопряжённости для рядов Фурье по другим системам ортогональным функций были ученики А. Зигмунда американские математики Е. М. Стейн и Б. Макенхоупт: ультрасферические ряды [5, с. 24, (2.4)], ряды Эрмита [6, с. 256, теорема 2, (с)], ряды Лагерра [7, с. 416, теорема 2, (с)]. Рассматривались также ряды Уолша [8, с. 29, (3.5)], ряды Фурье по многочленам П. Л. Чебышёва первого рода [9, с. 56, (4.9)], ряды Дирихле [10], разложения Штурма—Лиувилля [11] и др. Нами вводится новое понятие диско-сопряжённой функции $f\left[\psi\left(e^{ix}\right)\right]$.

Из (3) вытекает следующая теорема.

Теорема. *Если у функции* $f(z)\in\mathbf{A}\left[\Gamma_{\text{Apple}}\cup\Gamma_{\text{Discus}}\cup\left(\operatorname{Int}\Gamma_{\text{Apple}}\cap\operatorname{Ext}\Gamma_{\text{Discus}}\right)\right]$ *сложная функция* $f\left[\Psi\left(e^{ix}\right)\right]$ *и диско-сопряжённая функция* $f\left[\psi\left(e^{ix}\right)\right]$, *во-первых, абсолютно непрерывны:* $f\left[\Psi\left(e^{ix}\right)\right]\in\mathbf{AC}(T)$ & $f\left[\psi\left(e^{ix}\right)\right]\in\mathbf{AC}(T)$, *во-вторых, имеют существенно-ограниченные производные:* $\left\{f\left[\Psi\left(e^{ix}\right)\right]\right\}'\in\mathbf{L}^{\infty}(T)$ & $\left\{f\left[\psi\left(e^{ix}\right)\right]\right\}'\in\mathbf{L}^{\infty}(T)$, *и, в-третьих, алгебраическая сумма — сложная функция* $f\left[\Psi\left(e^{ix}\right)\right]$ *плюс диско-сопряжённая функция* $f\left[\psi\left(e^{ix}\right)\right]$ *минус интегральное среднее диско-сопряжённой функции* $f\left[\psi\left(e^{ix}\right)\right]$ *на отрезке* $-\pi\le x\le+\pi$ *— имела комплексный тригонометрический ряд Фурье степенного типа, то в* $\mathbf{A}\left[\Gamma_{\text{Apple}}\cup\Gamma_{\text{Discus}}\cup\left(\operatorname{Int}\Gamma_{\text{Apple}}\cap\operatorname{Ext}\Gamma_{\text{Discus}}\right)\right]$ *имеет место такая суммируемость со скоростью (summability with speed) функции* $f(z)$ *средними Фейера ряда по многочленам Фабера и средними Фейера ряда по смещённым аналогам многочленов Фабера*

$$\max_{-\pi\le x\le+\pi}\left|f\left[\Psi\left(e^{ix}\right)\right]-\sum_{n=0}^{N}\left(1-\frac{n}{N+1}\right)\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f\left[\Psi\left(e^{it}\right)\right]e^{-int}\,dt\right\}\cdot F_n\left[\Gamma_{\text{Apple}}\cup\operatorname{Int}\Gamma_{\text{Apple}}\,,\ \Psi\left(e^{ix}\right)\right]+\right.$$

$$+f\left[\psi\left(e^{ix}\right)\right]-\sum_{n=1}^{N}\left(1-\frac{n}{N+1}\right)\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f\left[\psi\left(e^{it}\right)\right]e^{-int}\,dt\right\}\cdot$$

$$\left.\cdot\left\{f_n\left[\Gamma_{\text{Discus}}\cup\operatorname{Ext}\Gamma_{\text{Discus}}\,,\psi\left(e^{ix}\right)\right]+F_n\left(\Gamma_{\text{Apple}}\cup\operatorname{Int}\Gamma_{\text{Apple}}\,,\ 0\right)\right\}-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f\left[\psi\left(e^{it}\right)\right]dt\right|=O\left(\frac{1}{N}\right),\ N\to+\infty\,.$$

В случае функции $f(z) := z$ алгебраическая сумма

$$f\left[\Psi\left(e^{ix}\right)\right] + f\left[\psi\left(e^{ix}\right)\right] - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left[\psi\left(e^{it}\right)\right]dt :=$$

$$:= \left[e^{ix} + \sqrt{\left(e^{ix}\right)^2 - 1}\right] + \left[e^{ix} - \sqrt{\left(e^{ix}\right)^2 - 1}\right] - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left[\psi\left(e^{it}\right)\right]dt = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left[\psi\left(e^{it}\right)\right]dt + 2e^{ix},$$

очевидно, имеет комплексный тригонометрический ряд Фурье степенного типа.

Таким образом, множество $\mathbf{A}\left[\Gamma_{\text{Apple}} \cup \Gamma_{\text{Discus}} \cup \left(\operatorname{Int}\Gamma_{\text{Apple}} \cap \operatorname{Ext}\Gamma_{\text{Discus}}\right)\right]$ функций, удовлетворяющих требованиям нашей теоремы, не является пустым.

Заключение. Если на комплексный тригонометрический ряд Фурье [4, (12)] смотреть как на ряд Лорана на вырожденном кольце $1-0 \le |z| \le 1+0$, то «внешней» окружности $|z| = 1+0$ соответствует ряд по многочленам Фабера

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left[\Psi\left(e^{it}\right)\right]e^{-int}\,dt\right\}\cdot F_n\left[\Gamma_{\text{Apple}} \cup \operatorname{Int}\Gamma_{\text{Apple}},\ \Psi\left(e^{ix}\right)\right],$$

а «внутренней» окружности $|z| = 1-0$ соответствует ряд по смещённым аналогам многочленов Фабера

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left[\psi\left(e^{it}\right)\right]e^{-int}\,dt\right\}\cdot\left\{f_n\left[\Gamma_{\text{Discus}} \cup \operatorname{Ext}\Gamma_{\text{Discus}}, \psi\left(e^{ix}\right)\right] + F_n\left(\Gamma_{\text{Apple}} \cup \operatorname{Int}\Gamma_{\text{Apple}},\ 0\right)\right\}.$$

Нами получена суммируемость со скоростью $O\left(\frac{1}{N}\right)$, $N \to +\infty$, алгебраической суммы (2) средними Фейера ряда по многочленам Фабера и средними Фейера ряда по смещённым аналогам многочленов Фабера.

Список цитируемых источников

1. *Эдвардс, Р.* Ряды Фурье в современном изложении : в 2 т. / Р. Эдвардс. — М. : Мир, 1985. — Т. 1. — 264 с.
2. *Эдвардс, Р.* Ряды Фурье в современном изложении : в 2 т. / Р. Эдвардс. — М. : Мир, 1985. — Т. 2. — 400 с.
3. *Дзядык, В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В. К. Дзядык. — М. : Наука, 1977. — 512 с.
4. *Бруй, И. Н.* К понятию сопряжённости в теории рядов по многочленам Фабера / И. Н. Бруй // Экономика, технологии и право в современном мире : материалы Междунар. науч.-практ. конф. факультета экономики и права и инженерного факультета, Барановичи, 20 октября 2016 г. / редкол.: А. В. Никишова (гл. ред.), Ю. Е. Горбач, В. Н. Кременевская (отв. секр.) [и др.]. — Барановичи : БарГУ, 2017. — С. 113—122.
5. *Muckenhoupt, B.* Classical expansions and their relation to conjugate harmonic functions / B. Muckenhoupt, E. M. Stein // Trans. Amer. Math. Soc. — 1965. — Vol. 118, № 6. — P. 17—92.
6. *Muckenhoupt, B.* Hermite conjugate expansions / B. Muckenhoupt // Trans. Amer. Math. Soc. — 1969. — Vol. 139. — P. 243—260.
7. *Muckenhoupt, B.* Conjugate functions for Laguerre expansions / B. Muckenhoupt // Trans. Amer. Math. Soc. — 1970. — Vol. 147, № 2. — P. 403—418.
8. *Hunt, R. A.* Developments related to the a. e. convergence of Fourier series / Richard A. Hunt // Studies in harmonic analysis : Proceedings of the Conference in Chicago on June 29 — Juli 02 1974. — Washington, DC : Mathematical Association of America, 1976. — P. 20—37. — (Studies in mathematics, 13).
9. *Butzer, P. L.* The Operational Properties of the Chebyshev Transform. II. Fractional Derivatives / P. L. Butzer, R. L. Stens // Теория приближения функций : Труды Междунар. конф. по теории приближения функций, Калуга, 24—28 июля 1975 г. — М. : Наука, 1977. — С. 49—61.
10. *Joó, I.* On the conjugate function of Dirichlet series / I. Joó // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. — 1992. — Tomus 35. — P. 59—67.
11. *Joó, I.* On some notions of harmonic analysis for Sturm — Liouville expansions / I. Joó // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. — 1992. — Tomus 35. — P. 77—98.