Выбором постоянных l, m в формулах (9), (10), (11) можно достичь максимальной близости эффективных постоянных к их действительным значениям. Так, сравнение с экспериментальными данными для пористых материалов [2, 5], а также с расчетами стеклопластиков регулярной структуры [1] показывает, что для матричных смесей следует положить $l = \langle K \rangle - \frac{2}{3}\langle \mu \rangle$, $m = \langle \mu \rangle$, если жесткость включений меньше жесткости матрицы, и $l = \langle K^{-1} \rangle^{-1} - \frac{2}{3}\langle \mu^{-1} \rangle^{-1}$, $m = \langle \mu^{-1} \rangle^{-1}$, если жесткость включений больше жесткости матрицы.

В случае равных температур фаз ($\Delta\theta = 0$) соотношения (7), (8) представляют собой закон Дюгамеля—Неймана для рассматриваемых сред.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван Фо Фы Г. А. Теория армированных материалов. К., «Наук. думка», 1971. 232 с.
2. Киндже ри В. Д. Измерения при высоких температурах. М., Металлургиздат, 1963. 466 с.
3. Нигматулин Р. И. Методы механики сплошной среды для описания многофазных смесей.— Прикл. мат. и мех., 1970, 34, № 6, с. 1097—1112.
4. Савин Г. Н., Хорошун Л. П. К вопросу об упругих постоянных стохастических армированных материалов.— В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., 1972, с. 437—444.
5. Хорошун Л. П., Маслов Б. П. Прогнозування пружних властивостей композитів, зміцнених дискретними волокнами.— Вісн. АН УРСР, 1976, № 10, с. 21—28.

Институт механики АН УССР
Киев

Поступила
25.V 1976 г.

УДК 539.3

С. И. Волк, А. Я. Макарон

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ЗАМКНУТЫХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С МЕРИДИОНАЛЬНЫМИ РЕБРАМИ

§ 1. Расчетные схемы некоторых элементов конструкций представляются в виде тонких конических оболочек с меридиональными ребрами. Обзор существующих методов исследования напряженно-деформированного состояния ребристых оболочек приводится в монографии [1]. Алгоритм численного метода решения задачи в перемещениях описан в статье [2].

В настоящей работе разрешающая система дифференциальных уравнений записывается в смешанных статико-кинематических разрешающих функциях. Предлагаемая нормальная форма представления дифференциальных уравнений удобна для их численного интегрирования на ЭВМ. Кроме того, она обладает и другими важными преимуществами: простотой трансформации системы для получения решений с различной степенью точности; возможностью составления универсальных программ расчета на ЭВМ оболочек переменной толщины, что обеспечивается отсутствием в коэффициентах уравнений производных от жесткостных ха-

Репозиторий БарГУ

рактеристик оболочки; простотой формулировки граничных условий и условий сопряжения отдельных участков оболочки (в случае ломаной образующей).

Задача рассматривается при тех же исходных предположениях, что и в работе [3]. Упругая коническая оболочка переменной толщины подкреплена регулярно расположенными одинаковыми меридиональными ребрами-стержнями; система подвергается силовым и температурным воздействиям, симметричным относительно ребер. На линиях сопряжения оболочки с ребрами соблюдаются условия совместности деформаций и равенства контактных сил взаимодействия, приложенных к оболочке и ребрам.

§ 2. В монографии [4] для гладкой конической оболочки выводятся система дифференциальных уравнений равновесия и соотношения упругости в частных производных. Путем представления заданной нагрузки и компонентов напряженно-деформированного состояния тригонометрическими рядами по окружной координате θ выполнен переход к обыкновенным производным. Такой переход в уравнениях равновесия возможен и при наличии контактных сил взаимодействия оболочки и ребер, если последние представить в виде

$$q_l = \sum_{k=0}^{\infty} a_\lambda p_l; \qquad q_z = \sum_{k=0}^{\infty} a_\lambda p_z, \tag{2.1}$$

где $a_\lambda = \dfrac{\lambda_k n}{\pi r}$; p_l, p_z — составляющие интенсивности сил взаимодействия вдоль образующей и главной нормали к ней; n — число ребер; k — номер члена тригонометрического ряда; r — радиус параллели оболочки; $\lambda_k = \dfrac{1}{2}$ при $k = 0$ и $\lambda_k = 1$ при $k \geqslant 1$; угол θ отсчитывается от плоскости симметрии одного из ребер, проходящей через ось вращения оболочки.

После разделения переменных уравнения равновесия и соотношения упругости для оболочки, а также уравнения равновесия и зависимости для ребра имеют вид

$$(lN_{lk})' + a_2 N_{\theta lk} - N_{\theta k} + lq^*_{lk} + a_\lambda l p_l = 0; \tag{2.2}$$

$$(lN_{l\theta k})' - a_2 N_{\theta k} + N_{\theta lk} + a_1 Q_{\theta k} + lq^*_{\theta k} = 0; \tag{2.3}$$

$$(lQ_{lk})' + a_2 Q_{\theta k} - a_1 N_{\theta k} + lq^*_{zk} + a_\lambda l p_z = 0; \tag{2.4}$$

$$(lM_{lk})' + a_2 M_{\theta lk} - M_{\theta k} - lQ_{lk} = 0; \tag{2.5}$$

$$(lM_{l\theta k})' - a_2 M_{\theta k} + M_{\theta lk} - lQ_{\theta k} = 0; \tag{2.6}$$

$$l(N_{l\theta k} - N_{\theta lk}) - a_1 M_{\theta lk} = 0; \tag{2.7}$$

$$N' + p^*_l - p_l = 0; \quad Q' + p^*_z - p_z = 0; \quad M' - Q + m^*_l = 0; \tag{2.8}$$

$$N_{lk} = \frac{1}{l}(\nu u_k + l u'_k + \nu a_2 v_k + \nu a_1 w_k) D_1 - N^0_k; \tag{2.9}$$

$$N_{\theta k} = \frac{1}{l}(u_k + \nu l u'_k + a_2 v_k + a_1 w_k) D_1 - N^0_k; \tag{2.10}$$

$$N_{l\theta k} = -\frac{\mu}{l}\left[\frac{a_2}{2} D_1 u_k + D_c (v_k - l v'_k) + \frac{a_1 a_2}{l} D_2 \left(\frac{1}{l} w_k + \vartheta_k\right)\right]; \tag{2.11}$$

Репозиторий БарГУ

$$N_{\theta lk} = -\frac{\mu}{2l}(a_2 u_k + v_k - l v_k')\, D_1; \tag{2.12}$$

$$M_{lk} = \left[\frac{\nu}{l^2}(a_1 a_2 v_k + a_2^2 w_k + l\vartheta_k) + \vartheta_k'\right] D_2 - M_k^0; \tag{2.13}$$

$$M_{\theta k} = \frac{1}{l^2}(a_1 a_2 v_k + a_2^2 w_k + l\vartheta_k + \nu l^2 \vartheta_k')\, D_2 - M_k^0; \tag{2.14}$$

$$M_{l\theta k} = M_{\theta lk} = -\frac{\mu}{l}\left[a_1\left(\frac{1}{l} v_k - v_k'\right) + a_2\left(\frac{1}{l} w_k + \vartheta_k\right)\right] D_2; \tag{2.15}$$

$$N = D_3 u_l' + D_5 \vartheta_l' - N_l^0; \qquad M = D_5 u_l' + D_4 \vartheta_l' - M_l^0. \tag{2.16}$$

Здесь l — меридиональная координата точки срединной поверхности, отсчитываемая от ее вершины; N_l, $N_{l\theta}$, M_l, $M_{l\theta}$, Q_l и N_θ, $N_{\theta l}$, M_θ, $M_{\theta l}$, Q_θ — усилия и моменты в сечениях $l = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$; N, Q, M — усилия и момент в сечении ребра; u, v, w — меридиональная, окружная и нормальная составляющие перемещения точки срединной поверхности оболочки; ϑ — угол поворота нормали к срединной поверхности в меридиональной плоскости; u_l, w_l — составляющие перемещения точки на линии сопряжения оболочки и ребра; ϑ_l — угол поворота сечения ребра; q_l^*, q_θ^*, q_z^* и p_l^*, p_z^* — составляющие интенсивности внешней нагрузки на оболочку и ребро; m_l^* — интенсивность моментной нагрузки на ребро; N^0, M^0 и N_l^0, M_l^0 — усилие и момент, вызванные нагревом оболочки и ребра; α — половина угла раствора конической поверхности; D_1, D_2 и D_3, D_4, D_5 — жесткостные характеристики соответственно оболочки и ребра; E, E_1 — модули упругости материалов оболочки и ребра; ν — коэффициент Пуассона материала оболочки; $\mu = 1 - \nu$; $a_1 = \operatorname{ctg}\alpha$; $a_2 = \dfrac{kn}{\sin\alpha}$; $D_c = \dfrac{1}{2} D_1 + \dfrac{1}{l^2} a_1^2 D_2$; индексом k в формулах помечены амплитудные значения соответствующих величин.

Перемещения линии контакта ребра с оболочкой u_l, w_l, ϑ_l, входящие в (2.16), представим в виде

$$u_l = \sum_{k=0}^{\infty} u_k; \qquad w_l = \sum_{k=0}^{\infty} w_k; \qquad \vartheta_l = \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_k. \tag{2.17}$$

§ 3. В качестве разрешающих функций принимаем кинематические и статические величины, в которых непосредственно записываются граничные условия задачи, а также условия сопряжения участков оболочки

$$y_{1k} = u_k; \qquad y_{2k} = v_k; \qquad y_{3k} = w_k; \qquad y_{4k} = \vartheta_k; \tag{3.1}$$

$$y_{5k} = N_{lk} + a_\lambda N; \qquad y_{6k} = N_{l\theta k} + \frac{a_1}{l} M_{l\theta k};$$

$$y_{7k} = M_{lk} + a_\lambda M; \qquad y_{8k} = Q_{lk} + \frac{1}{l} a_1 a_2 M_{l\theta k} + a_\lambda Q. \tag{3.2}$$

Для получения разрешающей системы уравнений необходимо в соотношениях (2.2) — (2.16) перейти к функциям (3.1), (3.2). Преобразуем вначале зависимости (2.9) — (2.16). Для этого формулы (2.16) умножим на a_λ и образуем из них и соотношений (2.9), (2.11), (2.15) путем сложения новые зависимости, левые части которых представляют функ-

Репозиторий БарГУ

ции y_{5k}, y_{6k}, y_{7k}. Решив алгебраически полученные уравнения, найдем производные y'_{1k}, y'_{2k}, y'_{4k}. Далее, из уравнений (2.3), (2.4) исключаем величину Q_{0k} на основании уравнения (2.6), а из (2.2), (2.4) — силы взаимодействия p_l, p_z, используя их выражения из (2.8).

В полученной таким путем системе четырех дифференциальных уравнений освобождаемся от величин N_{0k}, M_{0k}, M_{l0k}, заменяя их выражениями (2.10), (2.14) и (2.15).

Запишем разрешающую систему уравнений в окончательном виде

$$y'_{1k} = \frac{d_{2k+1}}{d}; \quad y'_{2k} = \sum_{j=1}^{8} \alpha_{2j} y_{jk}; \quad y'_{3k} = -y_{4k}; \quad y'_{4k} = \frac{d_{2k+2}}{d};$$

$$y'_{5k} = \sum_{j=1}^{8} \alpha_{5j} y_{jk} + l_1 \frac{d_{2k+1}}{d} - f_{5k}; \qquad y'_{6k} = \sum_{j=1}^{8} \alpha_{6j} y_{jk} + l_{2p} \frac{d_{2k+1}}{d} + \tag{3.3}$$

$$+ q_{2p} \frac{d_{2k+2}}{d} - f_{6k}; \qquad y'_{7k} = \sum_{j=1}^{8} \alpha_{7j} y_{jk} + q_4 \frac{d_{2k+2}}{d} - f_{7k};$$

$$y'_{8k} = \sum_{j=1}^{8} \alpha_{8j} y_{jk} + l_3 \frac{d_{2k+1}}{d} + q_{3p} \frac{d_{2k+2}}{d} - f_{8k}.$$

Здесь приняты обозначения $d = \frac{1}{4} \| e_{ij} \|$ — симметричный определитель бесконечного порядка с элементами: при $i \neq j$

для четных i, j $e_{ij} = \frac{n}{\pi r} D_4$; для нечетных i, j $e_{ij} = \frac{n}{\pi r} D_3$;

для сочетания четных и нечетных i, j $e_{ij} = \frac{n}{\pi r} D_5$;

при $i = j$

для четных $i, j > 2$ $e_{ij} = D_2 + \frac{n}{\pi r} D_4$; $\quad e_{22} = 2D_2 + \frac{n}{\pi r} D_4$;

для нечетных $i, j > 1$ $e_{ij} = D_1 + \frac{n}{\pi r} D_3$; $\quad e_{11} = 2D_1 + \frac{n}{\pi r} D_3$;

$$d_{2k+1} = \sum_{p=0}^{\infty} \left[A_{ij} \left(y_{5p} - \sum_{\gamma=1}^{4} l_{\gamma p} y_{\gamma p} \right) + A_{hj} \left(y_{7p} - \sum_{\gamma=1}^{4} q_{\gamma p} y_{\gamma p} \right) \right] - T_j; \tag{3.4}$$

$$l_{1p} = l_1 = \frac{\nu}{l} D_1; \qquad l_{2p} = \frac{\nu}{l} a_2 D_1; \qquad l_{3p} = l_3 = \frac{\nu}{l} a_1 D_1; \quad l_{4p} = q_{1p} = 0;$$

$$q_{2p} = \frac{\nu}{l^2} a_1 a_2 D_2; \qquad q_{3p} = \frac{\nu}{l^2} a_2^2 D_2; \qquad q_{4p} = q_4 = \frac{\nu}{l} D_2;$$

$$T_j = \sum_{p=0}^{\infty} (l_p^0 A_{ij} + q_p^0 A_{hj}); \qquad l_p^0 = -(N_p^0 + a_\lambda N_l^0); \qquad q_p^0 = -(M_p^0 + a_\lambda M_l^0);$$

Репозиторий БарГУ

$$\alpha_{21}=\frac{1}{2l}fa_2D_1;\qquad \alpha_{22}=\frac{1}{l};\qquad \alpha_{23}=\frac{2}{l^3}fa_1a_2D_2;\qquad \alpha_{24}=\frac{2}{l^2}fa_1a_2D_2;$$

$$\alpha_{26}=\frac{f}{\mu};\qquad \alpha_{25}=\alpha_{27}=\alpha_{28}=0;\qquad \alpha_{51}=\frac{1}{l^2}\left(1+\frac{\mu}{l^2}fa_1^2a_2^2D_2\right)D_1;$$

$$\alpha_{52}=\frac{1}{l^2}a_2D_1;\qquad \alpha_{53}=\frac{1}{l^2}a_1\left(1-\frac{\mu}{l^2}fa_2^2D_2\right)D_1;\qquad \alpha_{54}=-\frac{\mu}{l^3}a_1a_2fD_1D_2;$$

$$\alpha_{55}=-\frac{1}{l};\qquad \alpha_{56}=-\frac{1}{2l}fa_2D_1;\qquad \alpha_{57}=\alpha_{58}=0;\qquad \alpha_{61}=\alpha_{52};$$

$$\alpha_{62}=\frac{1}{l^2}a_2^2\left(D_1+\frac{1}{l^2}a_1^2D_2\right);\qquad \alpha_{63}=\frac{1}{l^2}a_1a_2\left(D_1+\frac{1}{l^2}a_2^2D_2\right);$$

$$\alpha_{64}=\frac{1}{l^3}a_1a_2D_2;\qquad \alpha_{66}=-\frac{2}{l};\qquad \alpha_{65}=\alpha_{67}=\alpha_{68}=0;\qquad \alpha_{71}=\alpha_{54};$$

$$\alpha_{72}=\alpha_{64};\qquad \alpha_{73}=\frac{1}{l^3}a_2^2(1+\mu fD_1)D_2;\qquad \alpha_{74}=\frac{1}{l^2}(1+\mu fa_2^2D_1)D_2;$$

$$\alpha_{75}=0;\qquad \alpha_{76}=-\frac{2}{l^2}fa_1a_2D_2;\qquad \alpha_{77}=\alpha_{55};\qquad \alpha_{78}=1;$$

$$\alpha_{81}=\frac{1}{l^2}a_1\left(1-\frac{\mu}{l^2}fa_2^2D_2\right)D_1;\qquad \alpha_{82}=\frac{1}{l^2}a_1a_2\left(D_1+\frac{1}{l^2}a_2^2D_2\right);$$

$$\alpha_{83}=\frac{1}{l^2}\left[a_1^2D_1+\frac{1}{l^2}a_2^2(a_2^2+\mu fD_1)\right]D_2;\qquad \alpha_{84}=\alpha_{73};\qquad \alpha_{86}=-\frac{2}{l^3}fa\,a_2D_2;$$

$$\alpha_{85}=\alpha_{87}=0;\qquad \alpha_{88}=\alpha_{55};\qquad f=2l^2(l^2D_1+4a_1^2D_2)^{-1};$$

$$f_{5k}=\frac{1}{l}N_k^0+q_{lk}^*+a_\lambda p_l^*;\qquad f_{6k}=\frac{1}{l^2}a_2\left(N_k^0+\frac{l}{a_1}M_k^0\right)+q_{\theta k}^*;$$

$$f_{7k}=\frac{1}{l}M_k^0+a_\lambda m_l^*;\qquad f_{8k}=\frac{1}{l}a_1N_k^0+\frac{1}{l^2}a_2^2M_k^0+q_{zk}^*+a_\lambda p_z^*;$$

A_{ij}, A_{hj} — алгебраические дополнения к элементам e_{ij}, e_{hj} определителя d при $i=2p+1$, $j=2k+1$, $h=2p+2$.

Определитель d_{2k+2} вычисляется по формуле (3.4) при тех же значениях i, h и $j=2k+2$.

§ 4. В определители (3.4) системы (3.3) разрешающие функции входят под знаками бесконечных сумм; поэтому система является бесконечной. Если число членов разложения в ряды ограничить некоторым значением m, то из (3.3) получим «усеченную» конечную систему порядка $8m+6$, которую можно использовать для приближенного решения задачи. Порядок определителя (3.4) при этом равен $2m+2$.

Величина m выбирается в зависимости от требуемой точности решения задачи, объема памяти ЭВМ и устанавливается для конкретных задач путем пробных вычислений. При $m=0$ разрешающая система (3.3) имеет шестой порядок и описывает осесимметричное напряженно-деформированное состояние ребристой оболочки, соответствующее ее конструктивно ортотропной расчетной схеме.

Репозиторий БарГУ

Некоторый опыт численного интегрирования систем дифференциальных уравнений высокого порядка с использованием дискретного ортонормирования в форме С. К. Годунова описан в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Амиро И. Я., Заруцкий В. А., Поляков П. С. Ребристые цилиндрические оболочки. К., «Наук. думка», 1973. 248 с.
2. Волк С. И. Циклически симметричная деформация оболочек вращения с меридиональными ребрами.— Прикл. механика, 1971, 7, № 8, с. 16—23.
3. Ільїн Л. О. Диференціальні рівняння пружної рівноваги оболонок обертання з меридіональними ребрами при силових і температурних навантаженнях.— Прикл. механіка, 1964, 10, № 3, с. 254—262.
4. Коваленко А. Д., Григоренко Я. М., Ильин Л. А. Теория тонких конических оболочек. К., Изд-во АН УССР, 1963. 287 с.

Житомирский филиал
Киевского политехнического института

Поступила
4.VI 1975 г.

УДК 539.3

В. А. Сабадаш

К РАСЧЕТУ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ ИЗ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

К особенности расчета большинства конструкций из полимерных материалов относится необходимость учета таких факторов, как нелинейность диаграммы растяжения и влияние перерезывающих сил.

Раздельное влияние указанных факторов на динамическое поведение стержней изучалось в ряде работ, например [1, 3, 4, 5]. В данной работе рассмотрим совместное влияние физической нелинейности материала и сдвига поперечных сечений на свободные колебания сжатых стержней, при этом будем учитывать смещение нейтральной линии, вызванное сжимающей силой.

Пусть шарнирно опертый стержень прямоугольного поперечного сечения площадью $F=bh$ сжат продольной силой P. Зависимость σ—ε примем в виде

$$\sigma = K\varepsilon^{\frac{1}{n}}, \tag{1}$$

где K, n — постоянные определяемые экспериментально; σ, ε — нормальное напряжение и деформация.

В соответствии с данными работы [4] представим изменение прогиба в виде двух слагаемых

$$y'(x, t) = \psi + \beta \tag{2}$$

(штрих означает дифференцирование по координате x), из которых первое зависит только от M, второе — от перерезывающей силы Q.

Как известно,

$$Q = k_1\beta FG = k_1(y' - \psi)FG, \tag{3}$$

причем k_1 — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения; G — модуль сдвига.

Репозиторий БарГУ