Докажем лемму для $1 < p < \frac{1}{\alpha}$. Воспользуемся вначале тем, что $(A+B)^{\frac{1}{q}} \le A^{\frac{1}{q}} + B^{\frac{1}{q}}$, для $A, B \ge 0$, $0 \le \frac{1}{q} \le 1$ и затем известным свойством нормы $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$. Тогда можем записать следующие оценки:

$$\left\| I^{\alpha,-\varepsilon}\varphi \right\|_{L_q(a;b)} = \left(\int_{a+\varepsilon}^{b} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^{x} (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\,dt \right|^q dx + \int_{a}^{a+\varepsilon} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\,dt \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \left(\int_{a+\varepsilon}^{b} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^{x} (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\,dt \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_{a}^{a+\varepsilon} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\,dt \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$= \left(\int_{a+\varepsilon}^{b} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\,dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^{a} (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\,dt \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} + \tag{3}$$

$$+ \left(\int_{a}^{a+\varepsilon} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\,dt \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\int_{a+\varepsilon}^{b} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\,dt \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ \left(\int_{a+\varepsilon}^{b} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^{a} (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\,dt \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_{a}^{a+\varepsilon} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\,dt \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \le 3 \left\| I_{+a}^{\alpha}\varphi \right\|_{L_q(a;b)}$$

Из оценки (3) и теоремы Харди-Литтлвуда (см. [2]) следует доказательство леммы.

Список цитируемых источников

1. *Grinko, A. P.* Generalized Abel type integral equations with localized fractional integrals and derivatives/ *A.P. Grinko* // Integral Transforms and Special Functions. — 2018. — Vol. 29, № 6. — P. 489—504.

2. *Hardy, G. H,* The maximum of a certain bilinear form / G. H. Hardy, J. E. Littwood, G. Polya // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. — 1926. — Vol. 25. — P. 265—282.

УДК 519.25:519.281:52.08:528.111

И. В. Джунь
Учреждение образования «Международный экономико-гуманитарный университет имени академика Степана Демьянчука», Ровно, Украина

КОНЦЕПЦИЯ ДЖЕФФРИСОВЫХ ОШИБОК НАБЛЮДЕНИЙ И ЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ СОВРЕМЕННЫХ АВТОМАТИЗИРОВАНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Введение. Концепция закона распределения погрешностей наблюдений является основополагающей при их математической обработке. Основной классический способ обработки данных и математического моделирования — метод наименьших квадратов (МНК), основан на аксиоме нормальности погрешностей, т. е. на законе ошибок Гаусса. В течение многих лет, начиная с 1806 года, этот метод успешно применялся вплоть до появления автоматизированных наблюдений, которые отличались большими объемами. Как известно, в соответствии с законом больших чисел, при возрастании числа измерений, начинают проявляться неизвестные, более тонкие особенности явлений, в том числе становятся заметными новые закономерности распределений ошибок. Впервые их заметил и математически описал знаменитый кембриджский профессор Г. Джеффрис в работах [1; 2] и в своем фундаментальном труде «Theory of Probability» [3], который, начиная с 1939 года, выдержал в Англии девять переизданий. Новое универсальное распределение, получившее название джеффрисовых ошибок или закона погрешностей Пирсона-Джеффриса (*PJ*-распределение), позволяет эволюционизировать классические процедуры обработки данных, являясь, как мы увидим далее, их необходимым развитием и усовершенствованием. В настоящем сообщении раскрыта суть и значение эволюционных процедур, которые необходимо применять при математической обработке современных автоматизированных и компьютеризованных экспериментов объема n > 500, как правило имеющих, при корректных постановке и моделировании, джеффрисовы погрешности.

Основная часть. Рассмотрим более подробно суть необходимой эволюции методов математической обработки данных в связи с изменением взглядов на закон ошибок наблюдений. В принципе возможность такой эволюции предусмотрел еще великий математик К. Ф. Гаусс в своем труде по теории МНК [4], который принес ему мировую славу. Создавая МНК он определил концепцию нормальности ошибок, с оглядкой на будущую его эволюцию, в виде такого соотношения [4]:

$$f'(x)\ /\ \vartheta f(x) = \text{const}, \tag{1}$$

где $f'(x)$ — закон плотности вероятности результатов измерений;
$\vartheta = x - a$ — погрешность измерения;
α — математическое ожидание закона ошибок *f(x)*

Соотношение (1) является очень провидческим и глубоким по смыслу. К сожалению, возможно поэтому, многие исследователи в надлежащей мере не поняли его происхождения и значения, придумывая, впоследствии различные эвристические (робастные) процедуры вместо того, чтобы более внимательно взглянуть на левую часть формулы (1) в которой как раз и была заложена дальнейшая эволюция МНК. А дело в том, что левая часть в (1) вытекает из применения Гауссом метода максимального правдоподобия (ММП), который не предполагает концепции нормальности $f(x)$. А вся формула (1) в целом описывает лишь частный, наиболее желательный и простой случай при обработке данных и моделировании.

Для того, чтобы понять смысл левой части в (1) рассмотрим, как она появилась. Она есть результатом минимизации функции максимального правдоподобия L в ММП:

$$L = \Pi\, f\ (x_i), \tag{2}$$

где (x_i) — плотность распределения вероятности погрешности ϑ_i в точке x_i.

Логарифмируя (2) и полагая, что L зависит только от a, имеем:

$$dln\, L/da = \sum^n [f'(x)/f(x)] = 0 \tag{3}$$

Умножая числитель и знаменатель в формуле (3) на $\vartheta_i = x_i - a$ получаем оценку $\overline{a}$ параметра a, применяя метод последовательных приближений:

$$\overline{a} = \sum[x_i \mathrm{P}(\vartheta_i)] / \sum \mathrm{P}(\vartheta_i), \tag{4}$$

$\mathrm{P}(\vartheta_i)$ рассчитывается по формуле

$$\mathrm{P}(\vartheta_i) = f'(x_i)/\vartheta_i f(x_i) \tag{5}$$

Стоит отметить, что (5) есть не что иное, как весовая функция распределения погрешностей, (не обязательно нормальных), в общем виде, которую и привел Гаусс в левой части формулы (1). Кроме того, Гаусс предупреждал, что «никто не может сказать, каким на самом деле будет закон распределения ошибок наблюдений, если их продолжать до бесконечности» [5]. К сожалению, смысла левой части формулы (1) не поняли, а потому и не оценили ее значения многие исследователи и поэтому окунулись в эвристический хаос, так называемых, эвристических процедур, характерных для американской школы математиков-статистиков, которые не проявили в данном случае достаточной проницательности. Но если мы хотим использовать новый закон ошибок с весовой функцией (5), то он должен быть во всех отношениях столь же замечательным, как и закон Гаусса, т. е. быть:

– симметричным, иначе измерения теряют свой смысл;

– регулярным в области от –∞ до + ∞;

– иметь независимые, как у закона Гаусса параметры, что означает требование диагональности информационной матрицы распределения погрешностей.

Огромная научная и историческая заслуга Джеффриса как раз и состоит в том, что он предложил новый, математически безукоризненный закон ошибок (*PJ* — распределение), которое удовлетворяет всем трём выше перечисленным требованиям. Но, кроме обычных для закона Гаусса параметров, — математического ожидания и меры точности, джеффрисовы ошибки имеют ещё и третий, новый, ключевой параметр *m*, зависящий от эксцесса распределения и тонко реагирующий на так называемое «жужжание» процесса измерений по точности со временем. Следует сказать, что ещё А. Эддингтон сформулировал теорему, доказывающую, что смесь распределений ошибок с одинаковыми математическими ожиданием и различными дисперсиями неизбежно вызывает положительный эксцесс суммарного распределения [6]. Более фундаментально рассмотрел этот вопрос ученик А. Н. Колмогорова, Н. А. Бородачев в своей замечательной, и ещё сталинских времён, книге [7].

Столкнувшись с автоматизированными результатами наблюдений в Гринвиче на плавающем на ртути зениттелескопе [2], а также с массовыми наблюдениями К. Пирсона, объемом около 500 наблюдений [8], Джеффрис пришел к выводу, что гипотеза Гаусса о нормальности ошибок и практически, и теоретически не есть состоятельной, если число наблюдений $n > 500$!

Он пишет: «Решающим вопросом в комбинации наблюдений есть знание того, действительно ли распределения следуют нормальному закону, если это не так, то необходимо применять другие методы, свойственные данному закону» [2], Этот вывод Джеффриса оказался очень важным и своевременным, особенно в XXI веке, когда вследствие автоматизации и компьютеризации измерений, объемы выборок стали значительно превышать установленный Джеффрисом предел $n > 500$.

Джеффрисовы ошибки имеют такой закон распределения плотности вероятности [2]:

$$f(x) = \frac{c}{\sigma}\left[1 + \frac{0{,}5}{M}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2\right]^{-m}, \tag{6}$$

где $c = \left[(2m-1)B\left(m+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}$; $B(w,z)$ — бэта-функция;

$M = (m-0{,}5)^3 m^{-2}$; m — ключевой параметр закона (6), зависящий от его положительного эксцесса распределения;

a, σ — соответственно математическое ожидания и мера рассеивания распределения;

Используя формулу (5) получаем весовую функцию джеффрисовых ошибок ϑ_i:

$$P(\vartheta i) = \left[\left(\frac{m-0{,}5}{m}\right)^3 \sigma^2 + \frac{\vartheta i^2}{2m}\right]^{-1}, \tag{7}$$

где σ, m –ММП — оценки параметров распределения (6), наиболее простой алгоритм определения которых приведен в работах [9; 10].

Как известно, вес наблюдения — это его обратная дисперсии. Таким образом $P(\vartheta i)$ в (7) — это вес наблюдения x_i, джеффрисовая погрешность которого ϑ_i.

Заключение. Рассмотрим, что конкретно может дать использование распределения (6) и его весовой функции (7) для усовершенствования практики обработки наблюдений большого объема.

1. Использование весовой функции (7) позволяет реализовать МНК в случае, когда:

$$\frac{f' x_i}{\vartheta f(x_i)} = P(\vartheta_i) \neq \text{const},$$

но при условии $\sum P(\vartheta_i)\vartheta_i^2 = min$.

2. Получать эффективные оценки взвешенной средней в случае, когда объемы выборок $n > 500$.

3. Нормализовать джеффрисовы погрешности в тех случаях, когда это необходимо в критериальных процедурах, путем использования следующего, очень простого оператора:

$$x_{\text{н}i} = x_i\sqrt{P(\vartheta_i)},$$

где $x_{\text{н}i}$ — нормализованные погрешности,

ϑ_i — джеффрисовы погрешности;

$P(\vartheta_i)$ — вес наблюдения x_i который вычисляется по формуле (7).

4. Приводить к стационарному ввиду нестационарные по дисперсии динамические ряды при их спектральном анализе.

5. Диагностировать качество проведенного эксперимента в случае попадания ММП — оценки параметра m распределения (6) в границы $3 \le m \le 5$, что по Джеффрису есть свидетельством чисто случайного характера ошибок ϑ_i [2].

Перечисленные выше возможности существенно расширяют арсенал математических процедур, отражают их необходимую эволюцию при обработке современных автоматизированных и компьютеризированных экспериментов большего объема, что есть наиболее существенной их особенностью в экспериментах XXI века.

Список цитируемых источников

1. *Jeffreys, H.* The Law of Errors and the Combinations of Observations / H. Jeffreys // Philos. Trans. Roy. Soc. — London. — 1937. — Ser. A, № 237. — Pp. 231—271.

2. *Jeffreys, H.* The Law of Errors in the Greenwich Variation of Latitude observations / H. Jeffreys // *Mon. Not. Of the RAS*. — 1939. — Vol. 99, № 9. — Pp. 703—709.

3. *Jeffreys, H.* Theory of Probability. Sec. Edition / H. Jeffreys. — Oxford University, 1998. — 470 p.

4. *Gauss, C. F.* Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium / C. F. Gauss. — Hamburgi, 1809.

5. *Гаусс, К. Ф.* Избранные геодезические сочинения / К. Ф. Гаусс ; под. ред. Г. В. Багратуни. — М. : Геодезиздат, 1975. — Т. 1 : Способ наименьших квадратов. — 262 с.
6. *Eddington, A. S.* Notes on the Method of Least-Squares / A. S. Eddington // The Proceedings of the Phisical Society. — 1933. — Vol. 45, part 2, № 247. — Pp. 135—365.
7. *Бородачев, Н. А.* Основные вопросы теории точности производства / Н. А. Бородачев ; под ред. А. Н. Колмогорова. — М.—Л. : Изд. АН СССР, 1950. — 360 с.
8. *Pearson, R.* On the Mathematical Theory of Errors of Judgment with special Reference to the Personal Equation / R. Pearson // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. — 1902. — Ser, A, № 198. —Pp. 235—236.
9. *Джунь, И. В.* Неклассическая теория погрешностей измерений / И. В. Джунь. — Ровно: Естеро. —- 168 с.
10. *Dzhun, I. V.* Non-Classical Theory Measurements Errors / I. V. Dzhun. — USA : Amazon. — 200 p.

УДК 330.101:519.233:519.86

И. В. Джунь
Учреждение образования «Международный экономико-гуманитарный университет имени академика Степана Демьянчука»,. Ровно, Украина

ЦИКЛИЧНОСТЬ РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МАТЕМАТИКА

Введение. В работах экономистов, занимающихся анализом основных показателей западной экономики (ВВП и других), можно услышать мысль о циклическом характере ее развития [1]. Цель изучения цикличности — моделирование развития показателей. При этом выделяются большие циклы, длительностью 40—60 лет [1; 2], циклы деловой активности Кузнеца, продолжительностью 20—24 года [3,4], которые включают среднесрочные циклы Жюгляра (6—8 лет), и малые циклы Китчина (3—4 года) [4—6]. Й. Шумпетер принял без доказательства такой механизм циклов: каждый цикл Кондратьева (48—50 лет) имеет целое число циклов Жюгляра (6—8 лет), которые содержат целое число циклов Китчина (3—4 года) [1]. Понимая всю приблизительность этой цикломании Б. Б. Дунаев с некоторой растерянностью сообщает: «Существует много причин цикличности экономики, … но все они приводят к несоответствию между потреблением и производством» [1].

Основная часть. Рассмотрим причины такого несоответствия. Они понятны для математика, поскольку неточное, описательное представление о циклах с какими-то растянутыми периодами, приравнивается к математическому моделированию объекта, что имеет иную природу и основывается на однозначных математических представлениях. Математическое моделирование основывается на ансамблях совершенно точных постулатов, а не на весьма туманных представлениях о циклах, периоды, которых могут «плавать» в промежутке, например, 40—60 лет. Заметим, что вся математика — это игра точных положений, т.е. аксиом, начатая еще Евклидом 2200 лет назад в его «Началах», которые И. Ньютон считал одной из важнейших книг в истории. Современное понимание принципиальной важности точных математических абстракций не только в математике, но и при исследовании реального мира (в том числе и экономики), отражено в следующем замечании А. Н Уайтхеда [7]: «Парадокс, окончательно установленный ныне, состоит в том, что именно предельные абстракции являются тем истинным оружием, которое правит нашим осмыслением конкретного факта».

Успешное моделирование западной экономики на основе столь рассмотренных выше приблизительных данных о циклах исключено, использование их совершенно не продуктивно:

– во-первых потому, что математическая модель динамики процесса представляет суперпозицию разных гармоник с точно установленными значениями амплитуды, периода и фазы каждой волны на фоне неизбежных шумов; в выше изложенных представлениях же об экономических циклах нет ничего похожего;

– во-вторых, простое удлинение интервала наблюдений, как правило, приводит к несколько иной модели исследуемого процесса и к возможному дроблению найденных ранее гармоник.

Фактически же ми имеем в наличии, например, обнаруженный спектральным анализом, набор гармоник, которыми можно представить тот или иной экономический процесс на определенном интервале времени. Но следует помнить, что есть две никогда не совпадающие вещи — это потрясающая экономическая реальность с одной стороны и с другой — наше представление о ней — своеобразный, полный надежд миф, создаваемый экономистами, а также и математиками. Но принципиальное отличие математического мифа в том, что он основан на совершенно точных предположениях, используя которые можно прийти к тем предельным абстракциям, о которых говорит Уайтхед в [7]. Использование же экономических мифов, например, циклов Кузнеца, Жюгляра или Китчина (чего только не сделаешь ради вящей славы) и есть главная причина того, что экономическая наука Запада столь бессильна — она не предсказала ни единого экономического кризиса.

Как тут не вспомнить экономику Китая, у которой нет этой абракадабры с циклами, а есть устойчивое, бескризисное развитие, нет толпы нобелевских мудрецов-экономистов, но зато есть небывалый рост экономики, который в прошлом году составил 18,5 %, что даже во снах не могло присниться лидерам стран Запада. Каждый год Китай выходит на первое место в мире по тому или иному важнейшему экономическому