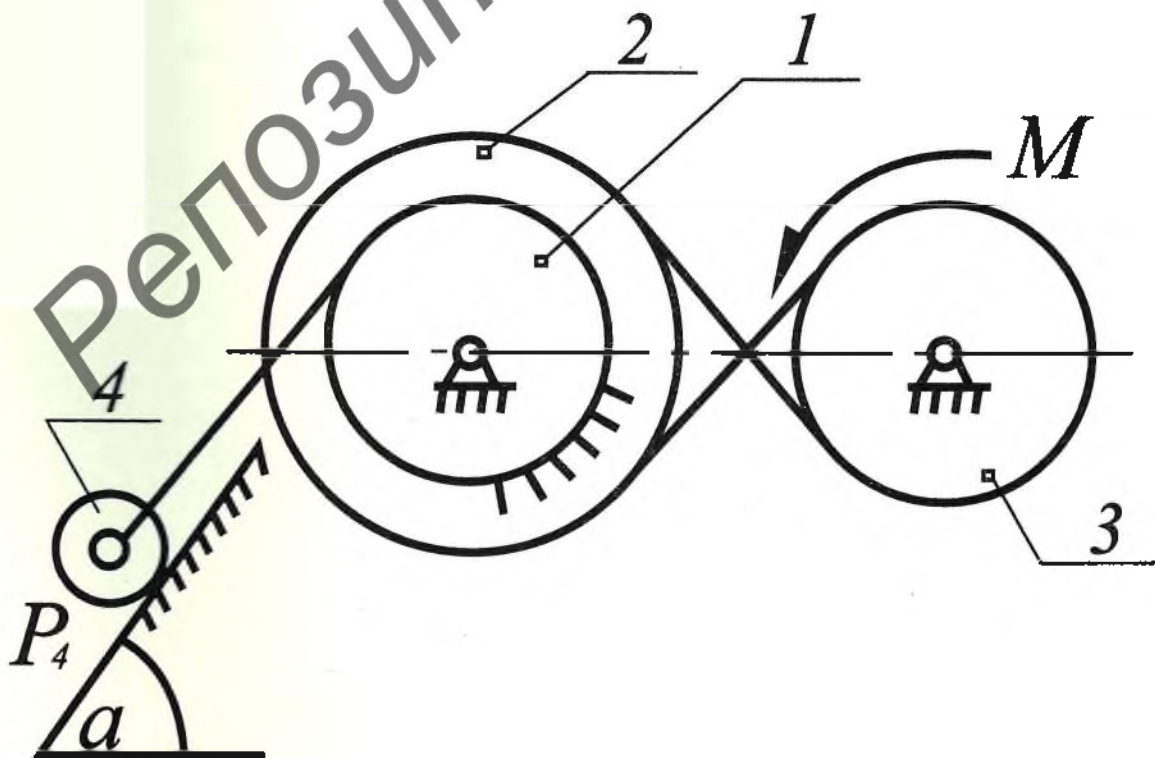


С. І. РУСАН  
А. К. ГАЎРЫЛЕНЯ  
Л. Л. СОТНІК

# ТЭХНІЧНАЯ МЕХАНІКА



Міністэрства адукацыі Рэспублікі Беларусь  
Установа адукацыі «Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт»

С. І. Русан, А. К. Гаўрыленя, Л. Л. Сотнік

# ТЭХНІЧНАЯ МЕХАНІКА

Метадычныя рэкамендацыі  
для студэнтаў інжынерных спецыяльнасцей  
устаноў вышэйшай адукацыі

Баранавічы  
БарДУ  
2018

Міністэрства адукацыі Рэспублікі Беларусь  
Учреждение образования  
Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт  
БІБЛІОТЕКА

УДК 621.81(072)  
ББК 34.44я73  
P11

Аўтары:

*С. І. Русан, А. К. Гаўрыленя, Л. Л. Сотнік*

Рэцэнзенты:

кандыдат тэхнічных навук, дацэнт кафедры тэхналогіі машынабудавання ўстановы адукацыі «Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт» *М. В. Чычка*;  
кандыдат тэхнічных навук дацэнт кафедры тэхнічнага забеспячэння сельскагаспадарчай вытворчасці і аграноміі ўстановы адукацыі «Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт» *У. А. Драмук*

**Русан, С. І.**

P11 Тэхнічная механіка : метады рэкамендацыі для студэнтаў інжынер. спецыяльнасцей выш. навуч. устаноў / С. І. Русан, А. К. Гаўрыленя, Л. Л. Сотнік. — Баранавічы : БарДУ, 2018. — 52 с. — 42 экз.  
ISBN 978-985-498-820-7.

Метадычныя рэкамендацыі знаёмяць з некаторымі прасцейшымі аб'ектамі прыкладной механікі, метадыкай вызначэння іх стану пад дзеяннем механічных сіл (рух, раўнавага, выгін) і маюць на мэце падрыхтоўку студэнтаў да выканання тыповых заданняў па агульнатэхнічных дысцыплінах і асэнсаванне іх вывучэнне ў цэлым. Змест метадычных рэкамендацый адпавядае адукацыйным стандартам спецыяльнасцей і вучэбнай праграме дысцыпліны.

Адрасуецца студэнтам інжынерных спецыяльнасцей устаноў вышэйшай адукацыі.

УДК 621.81(072)  
ББК 34.44я73

## ЗМЕСТ

<i>Уводзіны</i> .....	4
1 Механічныя сістэмы, механізмы, звенні механізмаў .....	5
2 Рух і раўнавага механізмаў пры адсутнасці трэння. Заданне № 1 .....	5
3 Прыклады выканання задання № 1 .....	5
4 Раўнавага механізмаў з улікам трэння слізгання. Абсяг раўнавагі. Заданне № 2 .....	10
5 Прыклады выканання задання № 2 .....	12
6 Раўнавага механізмаў пры наяўнасці трэння качэння. Абсяг раўнавагі. Заданне № 3 .....	18
7 Прыклады выканання задання № 3 .....	21
8 Простыя стрыжнявыя сістэмы. Нагрузкі, сувязі, рэакцыі сувязей .....	26
9 Дэфармацыі простых пругкіх стрыжнявых сістэм .....	28
10 Прыклады выканання задання № 4 .....	30
Дадаткі: варыянты і схемы механічных сістэм да заданняў № 1—4	
Дадатак А .....	36
Дадатак Б .....	40
Дадатак В .....	44
Дадатак Г .....	48
<i>Заклучэнне</i> .....	50
<i>Спіс выкарыстаных крыніц</i> .....	51

## УВОДЗІНЫ

У змешчаных тут прыватных задачах прыкладной механікі развіваецца ідэя, сфармуляваная ў практычным дапаможніку [1]. Яе аснова — укараненне ў вучэбны працэс пры вывучэнні цыкла складаных агульнанавуковых дысцыплін элементаў індуктыўнага метаду, стварэнне перадумоў для набывання студэнтамі доўгатэрміновых ведаў і развіцця інжынернай інтуіцыі. Досведам устаноўлена мэтазгоднасць пачынаць вывучэнне названых дысцыплін з задач паніжанага ўзроўню складанасці, што дазваляе студэнтам лягчэй у абмежаваны час уключыцца ў вучэбны працэс і падрыхтавацца да выканання тыповых заданняў. І такім чынам, у методыцы выкладання пазбегнуць парушэння педагагічнага *прынцыпа даступнасці* пры вывучэнні дысцыпліны. Для практычнай рэалізацыі выкладзенай ідэі распрацаваны чатыры заданні з шырокім асартыmentам задач. У заданнях № 1—3 разглядаюцца механічныя сістэмы з адной ступенню свабоды — механізмы. Вывучаюцца ўмовы іх раўнавагі пры адсутнасці трэння ў сістэмах і з улікам як трэння слізгання, так і трэння качэння. Устанаўліваюцца паняцці *вугла трэння* і *вобласці раўнавагі* механізма. У заданні № 4 на якасным узроўні вывучаюцца пругкія стрыжнявыя аб'екты — бэлькі і рамы. Усе заданні забяспечваюцца падрабязнымі прыкладамі іх выканання. Змест кожнага прыклада самадастатковы для ўспрымання (без азнаяшлення з іншымі прыкладамі). Паўтараем: апісанья, пераважна якасныя, заданні выконваюцца не замест тыповых заданняў, а ў якасці падрыхтоўкі да іх выканання і да асэнсаванага вывучэння дысцыплін у цэлым. Яны таксама могуць выкарыстоўвацца і самастойна на пачатку практычных заняткаў, у аўдыторных кантрольных работах, на заліках і экзаменах.

Аўтары метадычных рэкамендацый удзячны І. В. Ліс за набор тэксту рэкамендацый і студэнту І. А. Валасных — за афармленне большасці рысункаў да іх.

# 1 МЕХАНИЧНЫЯ СІСТЭМЫ, МЕХАΝІЗМЫ, ЗВЕННІ МЕХАΝІЗМАЎ

Аб'екты тэхнікі, утвораныя з цвёрдых целаў, маюць агульную назву — *механічныя сістэмы*. Механічныя сістэмы ў залежнасці ад прызначэння маюць безліч канкрэтных назваў: аўтамабіль, самалёт, камбайн, станок, маставая арка, ферма і г. д. Механічныя сістэмы (ці іх часткі) у выкарыстанні бываюць рухомыя і нерухомыя. Да рухомах адносяцца, у прыватнасці, *механізмы*. Яны таксама складаюцца з некалькіх целаў, пераважна цвёрдых: стрыжняў, дыскаў, колаў, пласцін і г. д. У тэхніцы шырока распаўсюджаны *перадатчныя* механізмы і сярод іх — так званыя *простыя* перадатчныя механізмы, восі колаў якіх нерухомыя. Асобныя целы ці іх жорсткія ўтварэнні, што ўваходзяць у склад механізмаў, называюць *звеннямі*. Больш дакладныя азначэнні і класіфікацыя механічных сістэм і іх рух вывучаюцца ў курсах тэорыі механізмаў і машын і тэарэтычнай механікі [2—4].

## 2 РУХ І РАЎНАВАГА МЕХАΝІЗМАЎ ПРЫ АДСУТНАСЦІ ТРЭННЯ. ЗАДАНИЕ № 1

У заданнях № 1—3 даследуюцца толькі самыя простыя характарыстыкі стану механізмаў: напрамкі павароту звенняў пад дзеяннем зададзеных сіл і ўмовы раўнавагі. Напрамак павароту кола вызначаецца шляхам яго параўнання з напрамкам руху стрэлкі гадзінніка. Пры некаторых значэннях геаметрычных параметраў і сіл, што дзейнічаюць на механізм, ён можа заставацца нерухомым. Такі стан механізма называюць *ураўнаважаным*. Інакш: механізм знаходзіцца ў *раўнавазе*, калі ўсе яго звенні нерухомыя.

Канкрэтызуем змест задання № 1 (дадатак А). Яно ўключае чатыры тыпы механізмаў, утвораных:

- з двух плоскіх колаў (схемы 1, 3, 5, 6);
- з аднаго ступеньчатага кола (схема 2);
- з аднаго ступеньчатага і аднаго плоскага кола (схемы 4, 8, 10, 12);
- з аднаго ступеньчатага кола і адной ці дзвюх зубчастых рэек (схемы 7, 9, 11).

Механічнае ўздзеянне на механізм уключае адну сілу  $F$  ці  $F_2$  і адну пару сіл з момантам  $M_1$  ці  $M_2$ . Сіла і пара сіл накіраваны такім чынам, што імкнуцца паварочваць колы механізма (ці адно кола) у процілеглыя бакі. Выніковы напрамак павароту залежыць ад лікавых значэнняў сіл, момантаў і радыусаў колаў.

Варыянты заданняў прыведзены ў табліцы 1. Нумар варыянта задаецца выкладчыкам. У табліцы 1 ён прадстаўлены дзвюма лічбамі, напрыклад, 5.3. Першая з іх азначае нумар схемы механізма, другая — нумар радка, на пачатку якога запісаны лічбы 5,3; у гэтым радку зададзена ўся астатняя інфармацыя:  $F_1 = 80 \text{ Н}$ ,  $M_1 = 40 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ,  $r_1 = 0,3 \text{ м}$ ,  $r_2 = 1,4 \text{ м}$ , ...

Пасля атрымання варыянта задання студэнту неабходна:

- 1) перанесці ў сшытак схему механізма, захаваўшы на ёй толькі зададзеныя механічныя ўздзеянні  $F_1$ ,  $M_1$  ці  $F_2$ ,  $M_2$ . Прытрымлівацца маштабу не абавязкова;
- 2) абазначыць на рысунку літарамі  $O$  і  $r$  восі і радыусы колаў; для абазначэння індэксаў выкарыстаць тыя ж лічбы 1, 2, 3, якімі абазначаны колы і іх ступені на схеме механізма;
- 3) устанавіць і паказаць на рысунку напрамак павароту зададзенага звяна 1, 2 ці 3;
- 4) знайсці новае значэнне ўказанага ў заданні параметра (сілы, моманта ці радыуса кола), пры якім механізм будзе заставацца ў раўнавазе.

## 3 ПРЫКЛАДЫ ВЫКАНАННЯ ЗАДАНИЯ № 1

Каб вызначыць стан механізма пад дзеяннем адвольнай сістэмы сіл — рухомы ці ўраўнаважаны, — неабходна ўсе сілы прывесці да аднаго звяна (кола). Выбранае звяно будзем называць *звяном прывядзення*. Калі механізм утвораны з аднаго кола, то яно заўжды і будзе звяном прывядзення. Для вызначэння ўраўнаважвальнай сілы ці пары сіл выбіраецца *аб'ект*

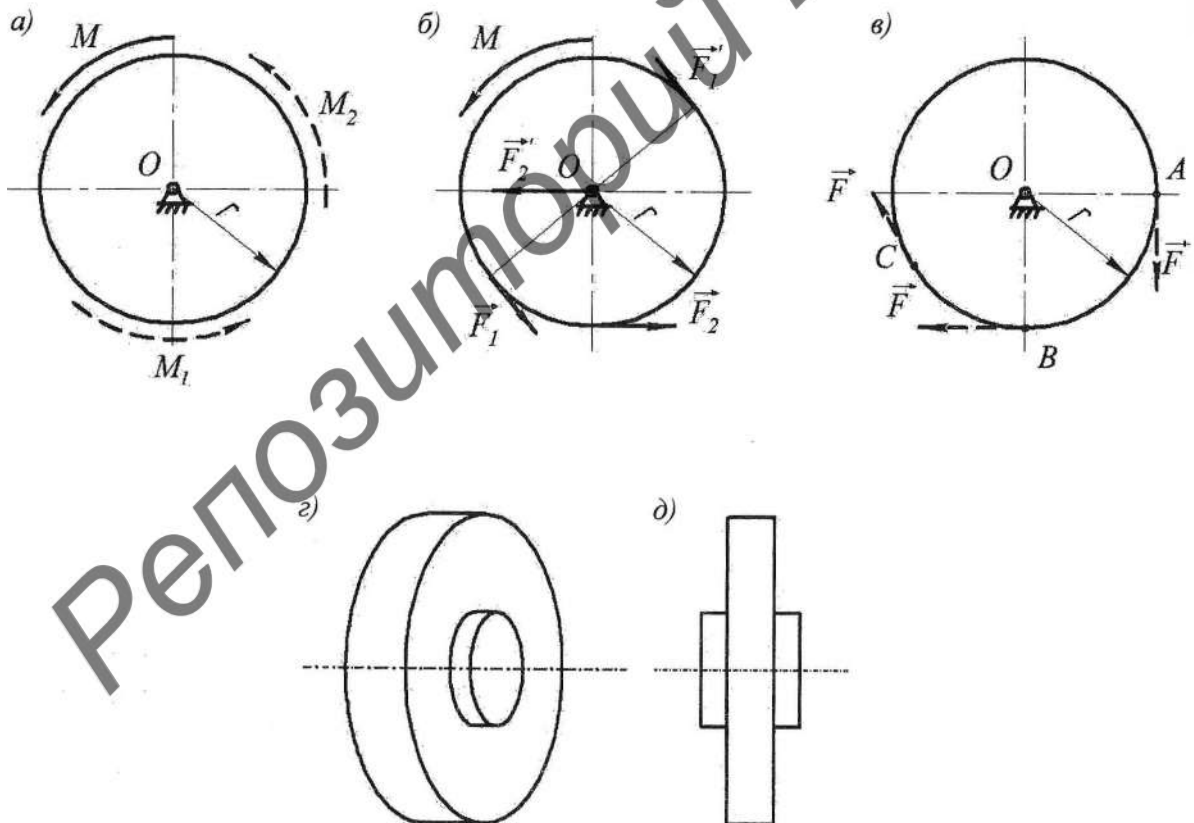
раўнавагі, да якога неабходна прыкладзі ўсе сілы. Ім, у прыватнасці, можа быць і звязно прывядзення. Вярчальнае ўздзеянне сілы на кола вызначаецца яе момантам адносна цэнтра кола, да якога яна прыкладзена:  $F \cdot r$ . Параўноўваючы моманты дзвюх сіл, высвятляем, якая з іх пераважае і вызначае напрамак павароту.

Пераўтвараючы пары і пераносячы сілы ў працэсе прывядзення да аднаго звязна, неабходна ўлічваць некаторыя іх уласцівасці. Дугавую стрэлку, што абазначае пару  $M$ , можна адвольна перамяшчаць уздоўж контура акружнасці. На рысунку 3, а, яна перанесена ў становішча  $M_1, M_2$ . Пару сіл з момантам  $M$  можна прадстаўляць таксама ў выглядзе дзвюх паралельных процілеглых накіраваных сіл, напрыклад, як на рысунку 3, б:  $(F_1, F_1'), (F_2, F_2')$ . Пры гэтым  $F_1' = F_1 = M/2r$ ,  $F_2' = F_2 = M/r$ . Вярчальнае ўздзеянне сілы  $F$  на кола, прыкладзенай у пункце  $A$  (рыс. 3, в), не змяніцца пры яе пераносе ў пункты  $B, C, \dots$ .

*Заўвага.* Пры пераносе сілы  $F$  у пункты  $B, C$  змяняецца напрамак рэакцыі апоры  $O$ . Але гэтая рэакцыя не ўплывае на паварот і раўнавагу кола. Трэба, аднак, ведаць, што сіла  $F$  аказвае вярчальнае ўздзеянне на аб'ект толькі ў пары з рэакцыяй апоры — восі кола.

Сіла ці момант перадаюцца (пераносяцца) з аднаго кола на другое праз паверхню (лінію) іх узаемадзеяння (кантакта). На рысунку 3.1 лінія ўзаемадзеяння праекцуецца ў пункт  $B$ . Мяркуецца, што на лініі кантакта адсутнічае праслізганне колаў.

У некаторых механізмах выкарыстоўваюцца ступеньчатыя колы. Такое кола ўяўляе сабою адно цвёрдае цела (гл. рыс. 3, г, д).



Рысунак 3 (а, б, в, г, д)

### Приклад 1

Зададзены прасты перадацны механізм з унутраным зачэпленнем колаў 1, 2 і механічныя ўздзеянні на яго:  $F = 50 \text{ Н}$ ,  $M = 40 \text{ Н} \cdot \text{м}$  (рыс. 3.1). Радыусы колаў роўны:  $r_1 = 0,2 \text{ м}$ ;  $r_2 = 0,6 \text{ м}$ . Неабходна вызначыць напрамак павароту кола 2 і ўраўнаважвальную сілу  $F'$ , якую трэба прыкладзі да кола 2 у пункце А, каб механізм заставаўся нерухомым.

#### Рашэнне.

1. Абазначым восі і радыусы колаў літарамі  $O_1, O_2, r_1, r_2$ .

2. Вызначаем напрамак павароту кола 2. Як відаць на рысунку 3.1, сіла  $F$  імкнецца паварочваць колы 1, 2 па стрэлцы гадзінніка, а пара сіл з момантам  $M$  — супраць. Пры гэтым вярчальны момант сілы  $F$  адносна восі  $O_1$  (яе прыводзім да кола 1, уяўна пераносячы ў пункт В), як і на рысунку 3, в, роўны  $F \cdot r_1 = 50 \cdot 0,2 = 10 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Як бачым,  $M > F \cdot r_1$ . Таму абодва колы паварочваюцца ў напрамку пары  $M$  — супраць руху стрэлкі гадзінніка. Напрамак павароту  $\varphi_2$  кола 2 паказваем на рысунку стрэлкай.

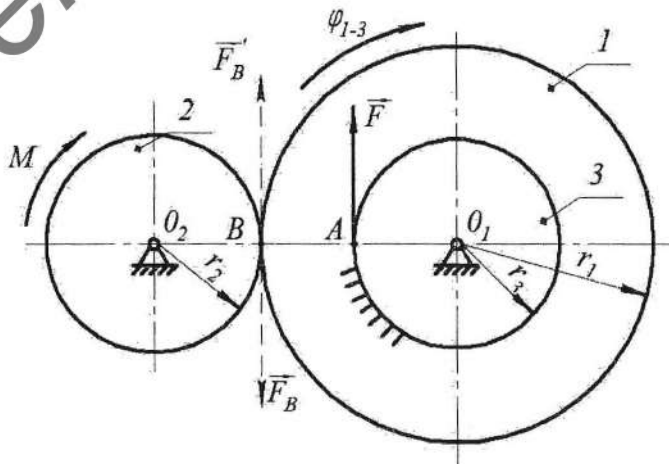
3. Знаходзім ураўнаважвальную сілу  $F'$ . У якасці аб'екта раўнавагі прымаем кола 1. Да яго з пункта А у пункт В пераносім шукаемую сілу  $F'$ . Цяпер на кола дзейнічаюць пара  $M$  і сіла  $F'$ . Яно будзе ў раўнавазе (нерухома) пры ўмове, што моманты сіл процілеглых напрамкаў адносна цэнтра  $O_1$  роўны паміж сабою:  $F \cdot r_1 = M$ . Атрыманую роўнасць будзем называць умовай раўнавагі кола 1. Яе можна запісаць і ў выглядзе  $F \cdot r_1 - M = 0$ . З умовы раўнавагі атрымаем:  $F' = M/r_1 = 40/0,2 = 200 \text{ Н}$ .

Заўвага. Калі ўраўнаважаны механізм вывесці са стану раўнавагі, то пры адсутнасці сіл супраціўлення яго звенні будуць выконваць раўнамерны вярчальны рух.

Калі аб'ектам раўнавагі прыняць кола 2, то шукаемая сіла  $F'$  застаецца ў пункце А, дзеянне пары  $M$  на кола 2 будзе выражацца сілай  $F_B = M/r_1 = 40/0,2 = 200 \text{ Н}$ . Умова раўнавагі прыме выгляд:  $F' \cdot r_2 = F_B \cdot r_2$ , адкуль  $F' = F_B = 200 \text{ Н}$ . Вынікі супадаюць.

### Приклад 2

Просты перадацны механізм са знешнім зачэпленнем утвораны з двух колаў: ступеньчатага 1—3 і гладкага 2 (рыс. 3.2). Зададзены знешнія механічныя ўздзеянні на яго:  $F = 40 \text{ Н}$ ,  $M = 30 \text{ Н} \cdot \text{м}$  і радыусы  $r_1 = 0,6 \text{ м}$ ,  $r_2 = r_3 = 0,3 \text{ м}$ . Неабходна вызначыць напрамак павароту кола 1—3 і ўраўнаважвальную пару  $M'$ , прыкладзеную да кола 2 замест пары  $M$ .



Рысунк 3.2

### Рашэнне.

1. Абазначаем на рысунку восі, радыусы колаў і ступеней літарамі  $O_1, O_2, r_1, r_2, r_3$ .

2. Вызначаем напрамак павароту кола 1—3. На рысунку 3.2 відаць, што сіла  $F$  імкнецца паварочваць яго ў напрамку стрэлкі гадзінніка, а пара  $M$  — супраць. У якасці аб'екта прывядзення сіл прымем кола 1—3. Дзеянне пары сіл на гэтае кола перадаецца ў выглядзе сілы  $F_B = M/r_2 = 30/0,3 = 100$  Н, прыкладзенай ў пункце зачэплення колаў  $B$  (на рысунку паказана пункцірам). Знаходзім моманты сіл, прыкладзеных да аб'екта прывядзення — кола 1—3:  $F_{r_1} = 40 \cdot 0,3 = 12$  Н·м,  $F_B \cdot r_1 = 100 \cdot 0,6 = 60$  Н·м. Як бачым,  $F_B \cdot r_1 > F_{r_1}$ . Выснова: кола 1—3 паварочваецца супраць ходу стрэлкі гадзінніка.

3. Знаходзім ураўнаважвальную пару  $M'$ . Аб'ектам раўнавагі таксама прымаем кола 1—3. Цяпер замест папярэдняй няроўнасці выкарыстаем роўнасць  $F_B \cdot r_1 = F \cdot r_3$  (яе можна запісаць і ў выглядзе  $F_B \cdot r_1 - F \cdot r_3 = 0$ ). Адкуль  $F_B = M'/r_2 = F_{r_3}/r_1 = 40 \cdot 0,3/0,6 = 20$  Н і  $M' = F_B \cdot r_2 = 20 \cdot 0,3 = 6$  Н·м.

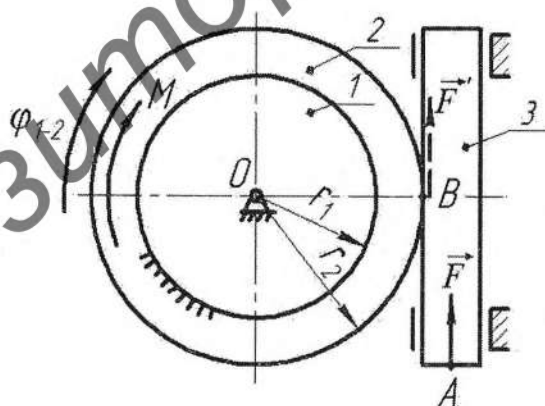
Паглядзім, як зменіцца паслядоўнасць вызначэння моманту  $M'$ , калі ў якасці аб'екта раўнавагі прыняць кола 2. У гэтым варыянце рашэння спачатку неабходна знайсці сілу  $F'_B$  (гл. рыс. 3.2) — уздзеянне, што перадаецца ад кола 1—3 на кола 2. З умовы раўнавагі кола 1—3  $F'_B \cdot r_1 = F \cdot r_3$  атрымліваем:  $F'_B = F \cdot r_3/r_1 = 40 \cdot 0,3/0,6 = 20$  Н. Цяпер запісваем раўнавагі кола 2:  $F'_B \cdot r_2 = M'$ . Знаходзім:  $M' = 20 \cdot 0,3 = 6$  Н·м.

### Прыклад 3

Просты перадачны механізм утвораны са ступеньчатага зубчастага кола 1—2 і зубчастай рэйкі 3 (рыс. 3.3). На яго звенні дзейнічаюць сіла  $F = 30$  Н, прыкладзеная ў пункце  $A$ , і пара сіл з момантам  $M = 24$  Н·м. Параметры кола:  $r_1 = 0,2$  м,  $r_2 = 0,3$  м. Неабходна вызначыць напрамак павароту кола 1—2 і велічыню ўраўнаважвальнай сілы  $F'$ , прыкладзенай да рэйкі ў пункце  $A$ .

### Рашэнне.

1. Абазначаем вось кола і радыусы яго ступеней  $O, r_1, r_2$ .



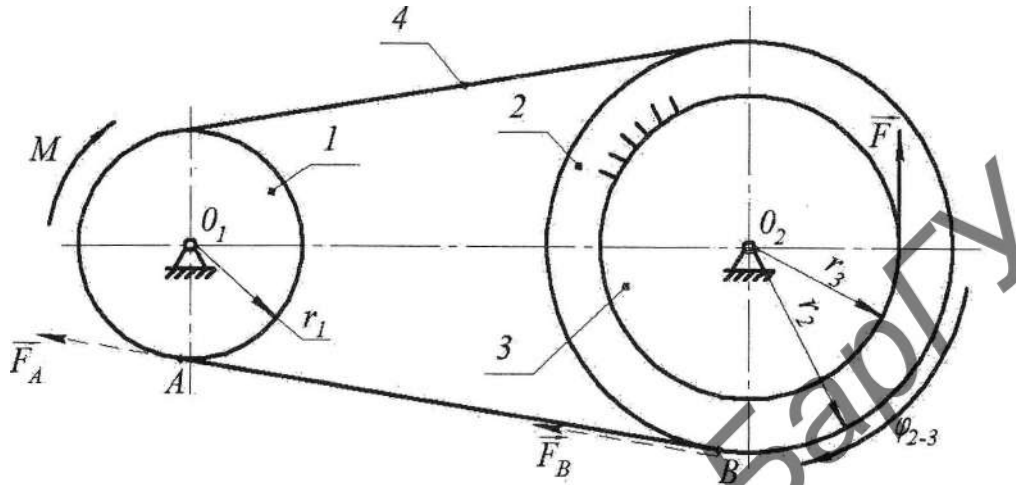
Рысунак 3.3

2. Знаходзім напрамак павароту кола 1—2. Як відаць на рысунку, сіла  $F$  імкнецца праз рэйку павярнуць кола супраць руху стрэлкі гадзінніка, а пара  $M$  — наадварот. Каб параўнаць уздзеянне сілы і пары, пераносім сілу  $F$  на той аб'ект, дзе прыкладзена пара, — на кола 1—2 у пункт  $B$ . У новым становішчы сілу абазначаем літарай  $F'$ . Пры пераносе сілы таўшчынёй рэйкі ігнаруем. Знаходзім вярчальны момант сілы  $F'$  адносна восі  $O$ :  $F' \cdot r_2 = 30 \cdot 0,3 = 9$  Н·м. Як бачым,  $M > F' \cdot r_2$ . Значыць, кола паварочваецца ў напрамку пары  $M$ , г. зн. па ходу стрэлкі гадзінніка. На рысунку 3.3 напрамак павароту паказваем стрэлкай і абазначаем  $\varphi_{1-2}$ .

3. Знаходзім значэнне ўраўнаважвальнай сілы  $F'$ ; г. зн. новае значэнне зададзенай сілы  $F$ . Аб'ектам раўнавагі прымаем кола 1—2. Умова раўнавагі мае выгляд:  $F' \cdot r_2 = M$ . Адкуль  $F' = M/r_2 = 24 \cdot 0,3 = 80$  Н.

#### Приклад 4

Раменны перадачны механізм утвораны з гладкага кола 1 і ступеньчатага 2—3. Вярчэнне ад кола 1 да кола 2—3 перадаецца з дапамогай рэменя (паса) 4. На звенні механізма дзейнічаюць сіла  $F = 10 \text{ Н}$  і пара з момантам  $M = 30 \text{ Н} \cdot \text{м}$  (рыс. 3.4). Радзус кола і радзусы ступеней роўны:  $r_1 = 0,15 \text{ м}$ ,  $r_2 = 0,30 \text{ м}$ ,  $r_3 = 0,20 \text{ м}$ . Неабходна вызначыць напрамак павароту кола 2—3 і велічыню ўраўнаважвальнай пары  $M'$ , прыкладзенай да кола 1.



Рысунак 3.4

#### Рашэнне.

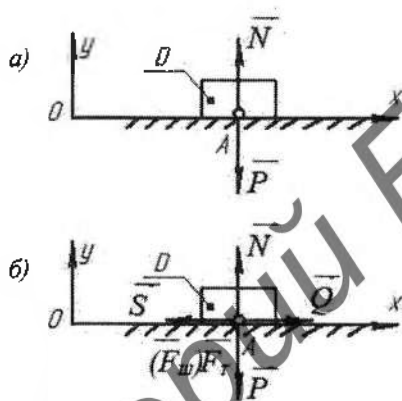
1. Абазначаем на рысунку восі колаў, іх радзусы літарамі  $O_1, O_2, r_1, r_2, r_3$ .  
2. Вызначаем напрамак павароту кола 2—3. На рысунку 3.4 відаць, што сіла  $F$  імкнецца павярнуць гэтае кола супраць руху стрэлкі гадзінніка, а пара  $M$  праз рамень — у адваротным напрамку. У якасці аб'екта прывядзення сіл выкарыстоўваем кола 2—3. Пару  $M$  замяняем парай  $(\vec{F}_{O_1}, \vec{F}_A)$ , дзе сіла  $F_A = M/r_1 = 30/0,15 = 200 \text{ Н}$  прыкладзена да кола 1 у пункце  $A$  (на рысунку  $\vec{F}_{O_1}$  не паказана, а сіла  $F_A$  паказана пункцірам). Затым пераносім сілу  $F_A$  ў пункт  $B$  і абазначаем літарай  $F_B$ . Улічваем, што  $F_B = F_A$ . Цяпер усе сілы прыкладзены да звяна прывядзення. Знаходзім вярчальныя ўздзеянні на яго сіл  $F_B$  і  $F$ , г. зн. іх моманты адносна восі  $O_2$ :  $F_B \cdot r_2 = 200 \cdot 0,3 = 60 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ,  $F \cdot r_3 = 10 \cdot 0,20 = 2 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Як бачым,  $F_B \cdot r_2 > F \cdot r_3$ ; таму кола 2—3 будзе паварочвацца ў напрамку, вызначаемым сілай  $F_B$ , — па ходу стрэлкі гадзінніка (гл.  $\varphi_{2-3}$ ).

3. Знаходзім ўраўнаважвальную пару  $M'$ . Відавочна, каб механізм заставаўся нерухомым, зададзеную пару  $M$  давядзецца зменшыць да велічыні  $M'$ . У якасці аб'екта раўнавагі прыяем кола 2—3. Яно будзе нерухомым пры ўмове. Што  $F_B \cdot r_2 = F \cdot r_3$  (інакш:  $F_B \cdot r_2 - F \cdot r_3 = 0$ ). Адсюль знаходзім:  $F_B = F_A = M'/r_1 = F \cdot r_3/r_2 = 10 \cdot 0,2/0,3 = (20/3) \text{ Н}$  і  $M' = F_B \cdot r_1 = (20/3) \cdot 0,15 = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

*Заўвага.* Мы ўстанавілі, што механізм пад уздзеяннем сілы  $F = 10 \text{ Н}$  і моманта  $M' = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$  застаецца нерухомым. Але калі яго вывесці са стану спакою, то яго колы могуць раўнамерна (без паскарэння) вярцецца.

#### 4 РАЎНАВАГА МЕХАНІЗМАЎ З УЛКАМ ТРЭННЯ СЛІЗГАННЯ. АБСЯГ РАЎНАВАГІ. ЗАДАННЕ № 2

Калі змясціць цела  $D$ , сіла цяжару якога роўна  $P$ , на шурпатую гарызантальную плоскасць (рыс. 4.1, а), то актыўная сіла  $P$  акажа на яе механічнае дзеянне — ціск. У выніку з боку паверхні кантакту з цэлам узнікне сіла супрацьдзеяння  $N$ . Так адрэагуе плоскасць на дзеянне сілы  $P$ . Таму сілу  $N$  інакш называюць *рэактыўнай сілай* ці, карацей, *рэакцыяй* плоскасці. Паколькі вектар  $N$  перпендыкулярны да плоскасці, то яго назва канкрэтызуецца — *нармальная рэакцыя* плоскасці. Размерамі цела ігнаруем; лічым, што сілы  $P$  і  $N$  прыкладзены да яго ў плоскасці кантакту і засяроджаны ў пункце  $A$ . Адна з аксіём статыкі сцвярджае: калі цела знаходзіцца ў раўнавазе (не рухаецца) пад дзеяннем дзвюх сіл, то яны роўныя па велічыні і накіраваны па адной прамой у процілеглыя бакі. Значыць, у нашым выпадку  $N = P$ . Да такой жа высновы можна прыйсці і не звяртаючыся да аксіёмы. Паколькі цела  $D$  пад дзеяннем вертыкальных сіл  $P$  і  $N$  не рухаецца па вертыкалі, то яны ўраўнаважваюцца, г. зн.  $N = P$ .



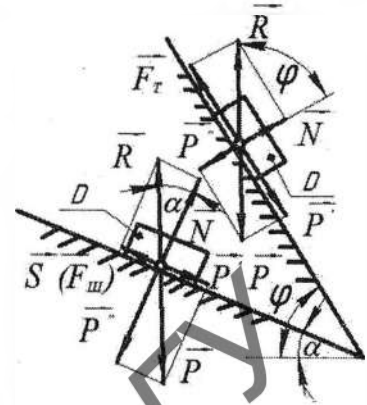
Рысунк 4.1

Прыкладзем да цела  $D$  пераменную гарызантальную сілу  $Q$  — акажам новае дзеянне. У плоскасці судакранання ўзнікае новае процідзеянне — рэактыўная сіла супраціўлення  $S$ , накіраваная ў процілеглы бок (гл. рыс. 4.1, б). Пры малых значэннях сілы  $Q$  цела  $D$  не рухаецца па плоскасці — знаходзіцца ў раўнавазе. Для такога яго стану справядліва наступная ўмова раўнавагі: сіла (ці раўнадзейная сіла), накіраваная ўлева, роўна сіле (або раўнадзейнай сіле), накіраванай управа. Паводле гэтай умовы  $S = Q$ . Пры нерухомым стане цела  $D$  сілу  $S$  называюць *сілай шчаплення* і абазначаюць  $F_{ш}$ . Калі сілу  $Q$  паступова павялічваем, то будзе ўзрастаць і сіла  $S$ , але не бязмежна, а толькі да таго часу, пакуль цела  $D$  застаецца нерухомым. У момант, калі яно акажацца на мяжы зруху са стану спакою, або ўжо раўнамерна рухаецца і трэцца аб плоскасць, сіла  $S = F_{ш}$  дасягае максімальнага значэння  $S = F_T$ ; яно вызначаецца паводле закона Кулона:  $F_T = fN = fP$ . Сіла  $F_T$  называецца *сілай трэння слізгання*, а безразмерная велічыня  $f$  — *каэфіцыентам трэння слізгання*.

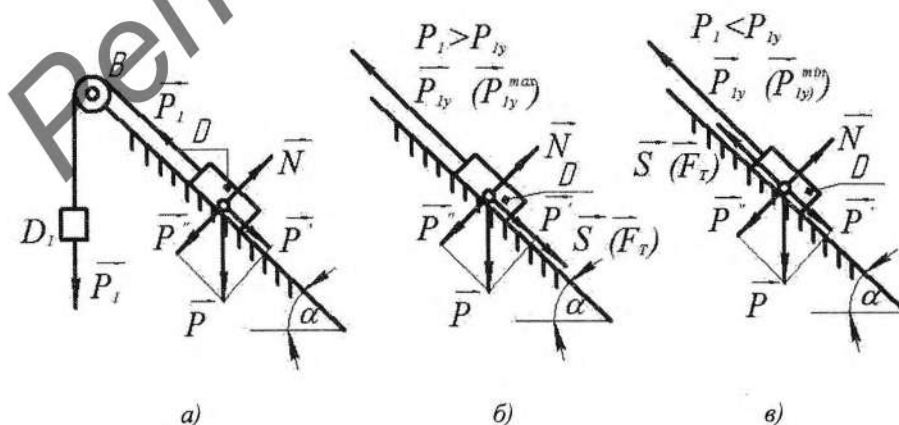
Змесцім цела  $D$  на шурпатую нахіленую плоскасць (рыс. 4.2). Высветлім, пры якіх значэннях вугла нахілу  $\alpha$  цела будзе заставацца ў раўнавазе. Яго сілу цяжару  $P$  прадставім у выглядзе сумы складаемых  $P' = P \sin \alpha$  і  $P'' = P \cos \alpha$  паводле формулы  $\vec{P} = \vec{P}' + \vec{P}''$ . Складаемая сіла  $P'$  імкнецца зрушыць цела  $D$  уніз па плоскасці. Ёй перашкаджае рэактыўная сіла процідзеяння  $S = F_{ш}$ , велічыня якой знаходзіцца з той жа ўмовы раўнавагі, што і на гарызантальнай плоскасці:  $F_{ш} = P'$ . Складаемая  $P''$  ураўнаважваецца нармальнай рэакцыяй  $N = P''$ . Пры павялічванні вугла  $\alpha$  велічыня  $P'$  узрастае, а разам з ёй — і сіла шчаплення  $F_{ш}$ . Пры некаторым значэнні  $\alpha = \varphi$  раўнавага цела дасягае мяжы (ці нават парушаецца); пры гэтым сіла  $F_{ш}$  дасягае гранічнага значэння  $F_{ш} = F_T = fN$ . Адпаведны сіле  $F_T$  вугал нахілу плоскасці  $\varphi$

называється *вуглом трэння*. Вугал трэння вызначае таксама і нахіл вектара  $\vec{R} = \vec{F}_T + \vec{N}$  да вектара  $\vec{N}$  (гл. рыс. 4.2). З раўнавагі цела на нахіленай плоскасці знаходзім:  $fN = P'$ ,  $fP \cos \varphi = P \sin \varphi$ ,  $\text{tg } \varphi = f$ . Мы прыйшлі да цікавай залежнасці: *тангенс вугла трэння роўны каэфіцыенту трэння слізання*. Такім чынам, цела на нахіленай плоскасці застаецца ў раўнавазе пры  $0 \leq \alpha \leq \varphi$ .

Далучым да цела  $D$  праз блок  $B$  цела  $D_1$ , сіла цяжару якога роўна  $P_1$  (рыс. 4.3, а). Сілу  $P_1$  перанясём да цела  $D$ . У залежнасці ад лікавых значэнняў велічынь  $P$ ,  $P_1$ ,  $f$  і  $\alpha$  магчымы тры станы цела  $D$  на плоскасці: яно зрушваецца ўверх па плоскасці, уніз, застаецца ў раўнавазе. Знойдзем спачатку значэнне сілы  $P_1 = P_{1y}$ , якая ўраўнаважвае цела  $D$  на гладкай плоскасці ( $f = 0$ ). (Тут літара «у» ў абазначэнні сілы  $P_{1y}$  запазычана са слова «ўраўнаважвальная»). У гэтым выпадку на цела дзейнічаюць сілы:  $\vec{P} = \vec{P}' + \vec{P}''$ ,  $P_1 = P_{1y} + N$ . Цела не будзе рухацца па плоскасці пры ўмове, што прыкладзеныя да яго і паралельныя да плоскасці сілы роўны паміж сабою, г. зн.  $P_{1y} = P' = P \sin \alpha$ . Звяртаем увагу, што для цела на гладкай плоскасці ўраўнаважвальная сіла  $P_{1y}$  мае толькі адно значэнне. Калі ж цела знаходзіцца на шурпатай плоскасці, то такіх значэнняў мноства (*абсяг*). Знойдзеную вышэй сілу  $P_{1y}$  можна ў пэўных межах памяншаць ці павялічваць, а цела  $D$  будзе заставацца нерухомым, бо ўплываць на яго раўнавагу будзе і сіла супраціўлення  $S$ . Пры павялічванні сілы  $P_{1y}$ , што мае месца пры  $P_1 > P'$ , сіла  $S$  накіравана ўніз па плоскасці (гл. рыс. 4.3, б), пры памяншэнні ( $P_1 < P'$ ) — наадварот. Найбольшага значэння  $S = F_T$  яна дасягае на мяжы зруху цела са стану раўнавагі (або ўжо пры яго пераходзе ў раўнамерны рух). У гэтыя ж моманты і ўраўнаважвальная сіла  $P_{1y}$  дасягае экстрэмальных значэнняў —  $P_{1y}^{\min}$ , ці  $P_{1y}^{\max}$ . Для ілюстрацыі гранічных станаў цела  $D$  на нахіленай плоскасці выкарыстаем рысункі 4.3, б, в. Для гэтага сіле  $S$  прыдамо значэнне  $F_T$ , а сіле  $P_{1y}$  — значэнні  $P_{1y}^{\min}$ ,  $P_{1y}^{\max}$ . Тады ўмовы раўнавагі — роўнасць сіл накіраваных уверх і ўніз па нахіленай плоскасці, — па рысунках 4.3, б, в, прымаюць выгляд:  $P_{1y}^{\max} = P' + F_T$ ,  $P_{1y}^{\min} + F_T = P'$ . Адсюль знаходзім:  $P_{1y}^{\max} = P(\sin \alpha + f \cos \alpha)$ ,  $P_{1y}^{\min} = P(\sin \alpha - f \cos \alpha)$ . Такім чынам, абсяг значэнняў ураўнаважвальнай сілы  $P_{1y}$  вызначаецца паводле формулы  $P_{1y}^{\min} \leq P_{1y} \leq P_{1y}^{\max}$ . Звяртаем увагу, што пры  $f = 0$   $P_{1y}^{\max} = P_{1y}^{\min} = P_1 \sin \alpha = P'$ , г. зн. што на гладкай нахіленай плоскасці складаемая  $P_1$  сілы  $P_1$  на раўнавагу цела  $D$  не ўплывае. У гэтым мы пераканаемся ніжэй і пры разглядзе прыкладаў (гл. п. 5).

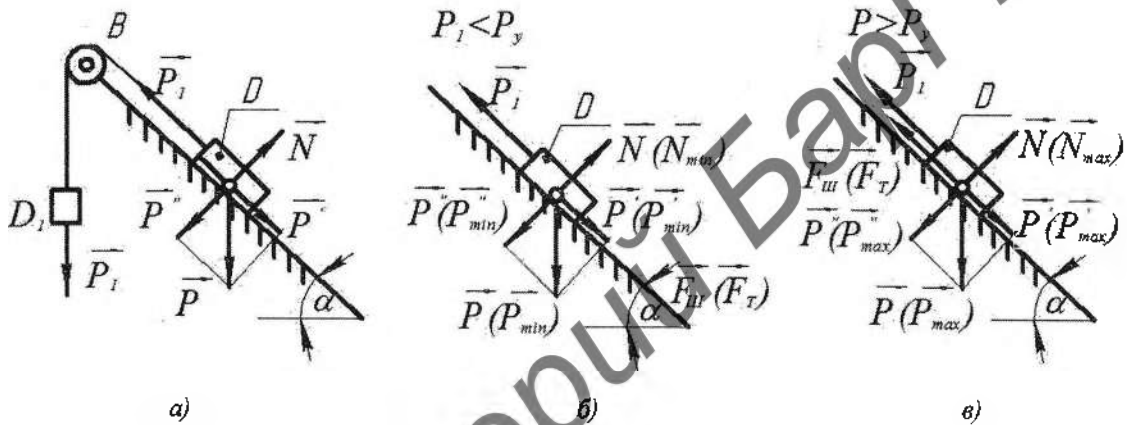


Рысунк 4.2



Рысунк 4.3

Разгледзім адваротную задачу: сіла цяжару  $P_1$  цела  $D_1$  застаецца пастаяннай, а неабходна вызначыць абсяг значэнняў сілы цяжару  $P$  цела  $D$ , якая ўраўнаважвае цела  $D_1$ . Знойдзем спачатку значэнне ўраўнаважвальнай сілы  $P_y$  пры  $f = 0$ . На цела  $D$  дзейнічаюць сілы  $\vec{P}'_y = \vec{P}'_y + \vec{P}''_y$ ,  $N$  і  $P_1$  (гл. рыс. 4.4, а). Умова раўнавагі цела  $D$  на нахіленай плоскасці:  $P'_y = P_y$ . Адсюль  $P_y \sin \alpha = P_1$  і  $P_y = P_1 / \sin \alpha$ . Пры  $P < P_y$  сіла  $P_1$  зрушыць цела  $D$  уверх па плоскасці, а пры  $P > P_y$ , сіла  $P$  пацягне яго ўніз. Таму, калі цела змясціць на шурпатую плоскасць, то ў першым выпадку сіла шчаплення (супрацьдзеяння)  $F_{ш}$  будзе накіравана ўніз, у другім — уверх па нахіленай плоскасці (гл. рыс. 4.4, б, в). Пры дасягненні сілай  $P$  экстрэмальных значэнняў  $P_{\min}$ ,  $P_{\max}$  цела знаходзіцца на мяжы зруху са стану раўнавагі, а сіла  $F_{ш}$  дасягае значэння  $F_T$ . Для гэтых гранічных станаў па рысунках 4.4, б, в, запісваем умовы раўнавагі:  $P_1 = P'_{\min} + F_T^{\min}$ ,  $P_1 + F_T^{\max} = P'_{\max}$ . Інакш:  $P_1 = P_{\min} \sin \alpha + f P_{\min} \cos \alpha$ ,  $P_1 = P_{\max} \sin \alpha - f P_{\max} \cos \alpha$ . Адсюль знаходзім:  $P_{\min} = P_1 / (\sin \alpha + f \cos \alpha)$ ,  $P_{\max} = P_1 / (\sin \alpha - f \cos \alpha)$ . Ураўнаважвальнае значэнне  $P_y$  сілы  $P$  знаходзіцца ў межах  $P_{\min} \leq P_y \leq P_{\max}$ .



Рысунк 4.4

## ЗАДАНИЕ № 2

Варыянты заданняў і схемы механізмаў прыведзены ў дадатку Б. Змест заданняў і парадак іх выканання такія ж, як і выкладзеныя раней у п. 2 (с. 5) пры апісанні задання № 1. Адрозніваецца толькі чацвёртае дзеянне, яно фармулюецца наступным чынам:

4. Вызначыць абсяг значэнняў, зададзеных у табліцы 2 сіл ці момантаў, пры якіх механізм знаходзіцца ў раўнавазе.

## 5 ПРЫКЛАДЫ ВЫКАНАННЯ ЗАДАНИЯ № 2

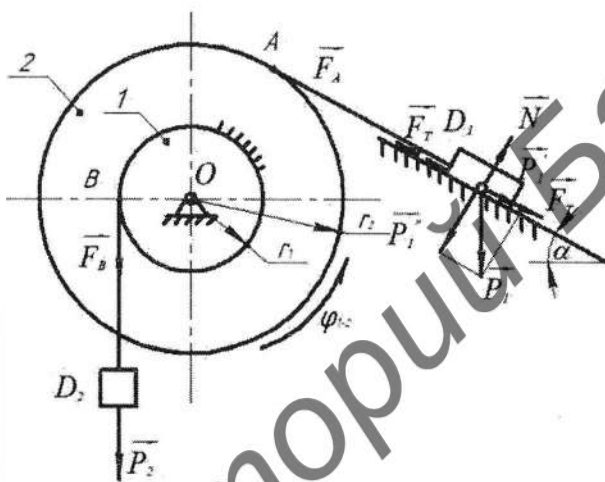
### Прыклад 1

Механічная сістэма ўтворана са ступеньчатага кола  $l-2$  і целаў  $D_1, D_2$  (рыс. 5.1). Дадзена:  $P_1 = 100$  Н;  $P_2 = 150$  Н;  $r_1 = 0,5$  м;  $r_2 = 1,0$  м;  $f = 0,1$ ;  $\alpha = 30^\circ$ . Неабходна вызначыць напрамак павароту кола  $l-2$  і абсяг значэнняў ураўнаважвальнай сілы  $P_1$ .

Рашэнне.

1. Абазначаем вось кола і радыусы літарамі  $O, r_1, r_2$ .
2. Вызначаем напрамак павароту кола  $l-2$ . Спачатку сілай трэння на нахіленай плоскасці ігнаруем. Звяном прывядзэння сіл прымаем кола  $l-2$ . Сілу цяжару  $P_2$  пераносім у пункт  $B$  і абазначаем літарай  $F_B$ ; улічваем, што  $F_B = P_2$ . Сілу  $P_1$  раскладваем на дзве складаемыя паводле

формулы  $\vec{P}_1 = \vec{P}'_1 + \vec{P}''_1$ , дзе  $P'_1 = P_1 \sin \alpha$ ,  $P''_1 = P_1 \cos \alpha$ . Сілу  $P'_1$  пераносім у пункт  $A$  і абазначаем літарай  $F_A$ . Сілы  $F_A$  і  $F_B$  уяўляюць нацяжэнні тросаў, на якіх замацаваны цэлы  $D_1, D_2$  пры ўраўнаважанай сістэме і  $f = 0$ . Знаходзім вярчальнае ўздзеянне на кола сіл, прыкладзеных у пунктах  $A$  і  $B$ :  $F_A r_2 = P_1 \sin \alpha r_2 = 100 \cdot 0,5 \cdot 1,0 = 50 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;  $F_B \cdot r_1 = 150 \cdot 0,5 = 75 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Як бачым,  $F_B r_1 > F_A r_2$ , г. зн. пры адсутнасці сілы трэння кола  $1-2$  паварочваецца супраць руху стрэлкі гадзінніка, а цела  $D_1$  падываецца ўверх па нахіленай плоскасці. Напрамак руху цела нам патрэбны для вызначэння накірунку сілы трэння слізгання  $F_T$ , якая можа «затармазіць» паварот кола. Яна накіравана ўніз і роўна  $F_T = fN = fP''_1 = fP_1 \cos \alpha = 0,1 \cdot 100 \sqrt{3}/2 = 8,66 \text{ Н}$ . Уяўна пераносім сілу  $F_T$  у пункт  $A$ . Новы вярчальны момант па ходу стрэлкі гадзінніка цяпер роўны  $(F_A + F_T)r_2 = (50 + 8,66) \cdot 1,0 = 58,66 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Няроўнасць не змянілася; па-ранейшаму  $F_B r_1 > (F_A + F_T)r_2$ . Прыходзім да канчатковай высновы: кола  $1-2$  паварочваецца супраць руху стрэлкі гадзінніка. Напрамак павароту паказваем на рысунку 5.1 стрэлкай і абазначаем  $\varphi_{1-2}$ . Такім чынам, пры наяўнасці ў сістэме сілы трэння даводзіцца двойчы ўстанаўліваць напрамак павароту кола: папярэдні пры  $f = 0$  і канчатковы пры  $f \neq 0$ .



Рысунк 5.1

3. Вызначаем абсяг значэнняў сілы  $P_1 = P_{1y}$ , пры якіх механічная сістэма будзе заставацца нерухомай. Сілу цяжару  $P_2$  лічым незменнай. Для гэтага апошняю няроўнасць прадстаўляем у выглядзе роўнасці:  $F_B r_1 = (F_A + F_T)r_2$  ці  $P_2 r_1 = (P_{1y} \sin \alpha + f P_{1y} \cos \alpha)r_2$ . Адсюль  $P_{1y} = P_2 r_1 / (\sin \alpha + f \cos \alpha)r_2$ . Тут знойдзена мінімальнае значэнне ўраўнаважвальнай сілы  $P_{1y} = P_{1y}^{\min}$ , пры якім механічная сістэма застаецца нерухомай. Калі сілу  $P_{1y}^{\min}$  зменшыць, то сістэма прыйдзе ў рух; пры гэтым цела  $D_1$  пачне падывацца па нахіленай плоскасці. Пры павелічэнні сілы  $P_{1y}^{\min}$  цела  $D_1$  будзе заставацца ў раўнавазе. Максімальнага значэння  $P_{1y}^{\max}$  ураўнаважвальная сіла  $P_{1y}$  дасягае ў той момант, калі цела пачынае рухацца ўніз (або знаходзіцца на мяжы зруху). Пры гэтым сіла  $F_{III} = F_T$  накіравана ўверх па плоскасці (на рысунку паказана пункцірам). Таму папярэдняя роўнасць прымае выгляд:  $P_2 r_1 = (P_{1y}^{\max} \sin \alpha - f P_{1y}^{\max} \cos \alpha)r_2$ , адкуль  $P_{1y}^{\max} = P_2 r_1 / (\sin \alpha - f \cos \alpha)r_2$ . Абсяг змянення сілы  $P_{1y}$  вызначаецца паводле формулы:  $P_{1y}^{\min} \leq P_{1y} \leq P_{1y}^{\max}$ .

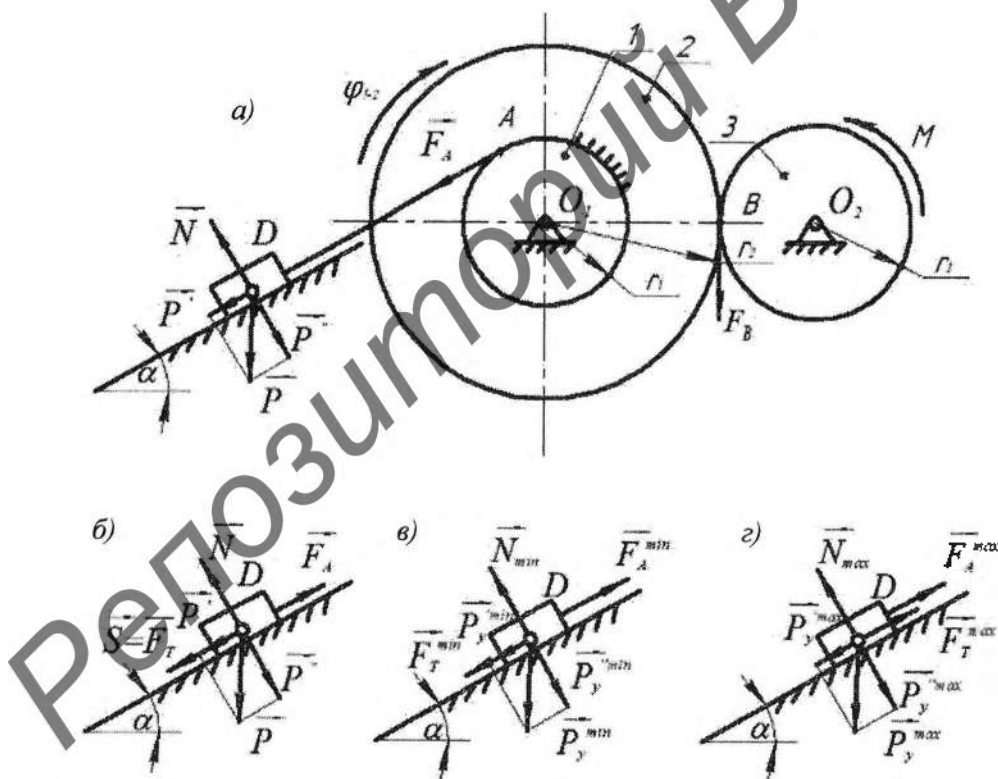
### Прыклад 2

Механізм утвораны са ступеньчатага  $1-2$  і плоскага 3 колаў. Да кола  $1-2$  з дапамогай троса прымацавана цела  $D$  на нахіленай плоскасці вагою  $P$ , а да кола 3 прыкладзена пара сіл, момант якой роўны  $M$ . Дадзена:  $P = 100 \text{ Н}$ ;  $M = 210 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $f = 0,2$ ;  $r_1 = r_3 = 0,2 \text{ м}$ ;  $r_2 = 0,4 \text{ м}$  (гл. рыс. 5.2, а). Вызначыць: напрамак паваротаў кола  $1-2$ ; абсяг значэнняў ураўнаважвальнай сілы  $P$  і ўраўнаважвальнага моманту  $M$ .

**Раішэнне.**

1. Абазначаем на рысунку восі, радыусы колаў і цэла літарамі  $O_1, O_2, r_1, r_2, r_3, D$ .

2. Вызначаем напрамак павароту кола 1—2. Сілу цяжару  $P$  раскладваем на кампаненты паводле формулы:  $\vec{P}_1 = \vec{P}' + \vec{P}''$ , дзе  $P' = P \sin \alpha$ ,  $P'' = P \cos \alpha$ . Спачатку паверхню плоскасці лічым гладкай ( $f = 0$ ). У якасці аб'екта раўнавагі прымаем кола 1—2. Да яго ў пункт  $A$  пераносім сілу  $P'$ ; абазначаем яе літарай  $F_A$ . У пункце  $B$  прыкладваем сілу  $F_B = \frac{M}{r_3}$ . Знаходзім вярчальныя ўздзеянні сіл  $F_A$  і  $F_B$  на кола 1—2 — іх моманты адносна  $O_1$ :  $F_A r_1 = P_1 \sin \alpha r_1 = 100 \cdot 0,5 \cdot 0,2 = 11 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;  $F_B r_2 = (M/r_3) r_2 = (210/0,2) \cdot 0,4 = 420 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Як бачым,  $F_B r_2 > F_A r_1$ . Значыць, пры адсутнасці трэння кола 1—2 паварочваецца па стрэлцы гадзінніка. Пры наяўнасці шурпатасці ў плоскасці судакранання цэла  $D$  з паверхняй узнікае сіла супраціўлення  $S$ , накіраваная ўніз па нахіленай плоскасці (гл. рыс. 5.2, б). Максимальнае значэнне яна прымае ў той жа момант, калі цэла  $D$  пачынае рухацца ўверх па плоскасці (або знаходзіцца на мяжы зруху):  $S = F_T = fN = fP \cos \alpha = 0,2 \cdot 100 \cdot 0,8660 = 17,32 \text{ Н}$ . Але сіла  $F_B$  можа цяпер і не зрушыць кола. Таму правяраем яго стан з улікам трэння. Сілу  $S = F_T$  уяўна пераносім у пункт  $A$ . Новы момант сіл адносна восі  $O_1$ , якія перашкаджаюць павароту кола 1—2 па стрэлцы гадзінніка, роўны  $F_A r_1 + F_T r_1 = 11 + 17,32 \cdot 0,2 = 14,464 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Як бачым, па-ранейшаму  $F_B r_2 > (F_A r_1 + F_T r_1)$ . Прыходзім да канчатковай высновы: у зададзеным механізме з цэлам  $D$  на шурпатай плоскасці кола 1—2 паварочваецца, як стрэлка гадзінніка.



Рысунак 5.2

3. Вызначаем абсяг значэнняў ураўнаважвальных сілы  $P_y$  і моманту  $M_y$ . Спачатку вызначым абсяг значэнняў сілы  $P_y$ . Момант  $M$  лічым нязменным. З папярэдніх падлікаў відаць, што зададзеную сілу  $P$  патрэбна значна павялічыць да значэння  $P_y$ , каб яна магла ўраўнаважыць пару  $M$ . За аб'ект раўнавагі прымаем кола 1—2. На яго дзейнічаюць новая (ураўнаважвальная) сіла  $F_{Ay}$ , прыкладзеная ў пункце  $A$ , і ранейшая сіла  $F_B = M/r_3$  у пункце  $B$ . Пры гэтым  $F_{Ay}$  можа змяняцца ў межах ад  $F_{Ay} = F_{Ay}^{\min}$  да  $F_{Ay}^{\max}$ . Мінімальнае значэнне  $F_{Ay}^{\min}$  сіла  $F_{Ay}$  прымае ў той

момант, калі цела  $D$  знаходзіцца на мяжы зруху *ўверх* па нахіленай плоскасці. Сіла супраціўлення  $S$  руху цела  $D$  у гэты момант дасягае максімальнага значэння  $S_{\max} = F_T$  і накіравана *ўніз* (гл. рыс. 5.2, в). Велічыню  $F_{Ay}^{\min}$  вызначаем з умовы раўнавагі кола 1—2:  $F_{Ay}^{\min} r_1 = F_B r_2$ . Атрымліваем:  $F_{Ay}^{\min} = F_B r_2 / r_1$ . Але нам неабходна знайсці  $P_y^{\min}$ . Каб устанавіць залежнасць паміж велічынямі  $F_{Ay}^{\min}$  і  $P_y^{\min}$ , разгледзім раўнавагу цела  $D$  на нахіленай плоскасці. Цела не будзе слізгаць па ёй пры ўмове, што сумы сіл, паралельных да нахіленай плоскасці і накіраваных у процілеглыя бакі, роўны паміж сабою:  $F_{Ay}^{\min} = P_y^{\min} + F_T^{\min}$  (інакш гэту ўмову раўнавагі можна запісаць у выглядзе:  $F_{Ay}^{\min} - P_y^{\min} - F_T^{\min} = 0$ ). Падстаўляем сюды значэнні складаемых:  $F_B r_2 / r_1 = P_y^{\min} \sin \alpha + f P_y^{\min} \cos \alpha$ . Адсюль  $P_y^{\min} = F_B r_2 / (\sin \alpha + f \cos \alpha) r_1$ .

Максімальнае значэнне  $F_{Ay}^{\max}$  сіла  $F_{Ay}$  прымае тады, калі цела  $D$  знаходзіцца на мяжы зруху *ўніз* па нахіленай плоскасці. Сіла трэння ў гэтым выпадку накіравана *ўверх* па плоскасці (гл. рыс. 5.2, з). Умовы раўнавагі для кола 1—2 і цела  $D$  запісваюцца ў выглядзе:  $F_{Ay}^{\max} r_1 = F_B r_2$ ,  $F_{Ay}^{\max} + F_T^{\max} = P_y^{\max}$ . Адсюль, паўтараючы дзеянні па вызначэнні  $P_y^{\min}$ , знаходзім:  $P_y^{\max} = F_B r_2 / (\sin \alpha - f \cos \alpha) r_1$ . Абсяг значэнняў ураўнаважвальнай сілы  $P_y$  вызначаецца паводле формулы  $P_y^{\min} \leq P_y \leq P_y^{\max}$ .

Вызначым абсяг значэнняў ураўнаважвальнай пары  $M$ . Цяпер будзем лічыць, што сіла цяжару  $P$  застаецца нязменнай. Выкарыстаем той жа рысунак 5.2. Найперш знойдзем гранічныя значэнні  $F_{By}^{\min}$  і  $F_{By}^{\max}$  сілы  $F_{By}$ . Яна прымае мінімальнае значэнне ў той момант, калі цела  $D$  знаходзіцца на мяжы зруху *ўніз* па нахіленай плоскасці. Тады сіла шчаплення дасягае максімальнага значэння  $F_{ш} = F_T$ ; вектар  $F_T$  накіраваны *ўверх* па плоскасці. Калі яго ўяўна перанесці ў пункт  $A$ , то ўмова раўнавагі кола 1—2 набывае выгляд:  $F_{By}^{\min} r_2 = (F_A - F_T) r_1$ . Адсюль  $F_{By}^{\min} = (F_A - F_T) r_1 / r_2 = (P \sin \alpha - f P \cos \alpha) r_1 / r_2 = P (\sin \alpha - f \cos \alpha) r_1 / r_2$ . Цяпер знаходзім:  $M_y^{\min} = F_{By}^{\min} r_3$  ці  $M_y^{\min} = P (\sin \alpha - f \cos \alpha) r_1 r_3 / r_2$ . Максімальнае значэнне сіла  $F_{By}$  прымае ў той момант, калі цела  $D$  знаходзіцца на мяжы зруху *ўверх* па нахіленай плоскасці. Пры гэтым сіла трэння  $F_T$  накіравана *ўніз* па плоскасці. Умова раўнавагі запісваецца ў выглядзе:  $F_{By}^{\max} r_2 = (F_A + F_T) r_1$ . Адсюль:  $F_{By}^{\max} = P (\sin \alpha + f \cos \alpha) r_1 / r_2$  і  $M_y^{\max} = P (\sin \alpha + f \cos \alpha) r_1 r_3 / r_2$ . Такім чынам, атрымліваем наступны абсяг ураўнаважвальных значэнняў момантаў:  $M_y^{\min} \leq M_y \leq M_y^{\max}$ .

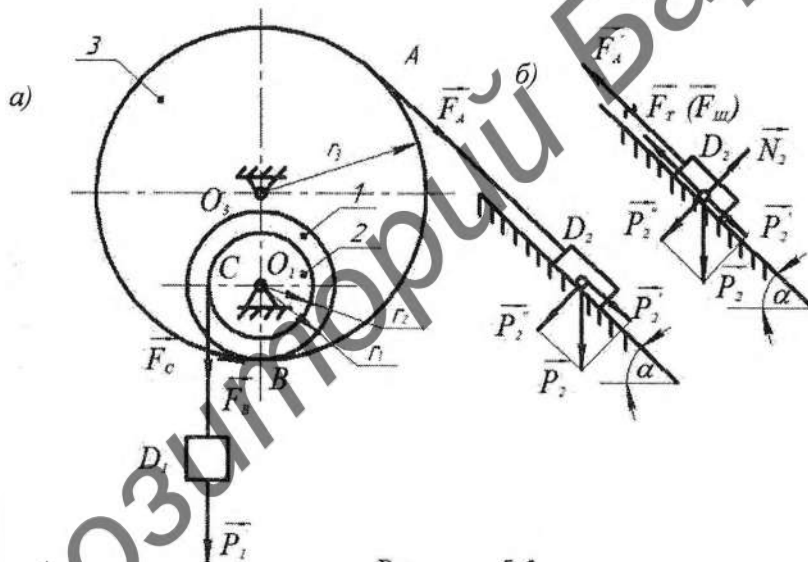
### Прыклад 3

Механічная сістэма ўтворана са ступеньчатага 1—2 і плоскага 3 колаў, да якіх з дапамогай тросаў прымацаваны два целы: іх сілы цяжару роўны  $P_1$ ,  $P_2$  (рыс. 5.3). Дадзена:  $P_1 = 200$  Н;  $P_2 = 240$  Н;  $\alpha = 45^\circ$ ;  $f = 0,3$ ;  $r_1 = 0,3$  м;  $r_2 = 0,2$  м;  $r_3 = 0,8$  м. Неабходна вызначыць напрамак павароту кола 1—2 і абсяг значэнняў ураўнаважвальнай сілы  $P_2$ .

#### Рашэнне.

1. Абазначаем восі колаў, іх радыусы і целы літарамі  $O_1, O_3, r_1, r_2, r_3, D_1, D_2$ .
2. Знаходзім напрамак павароту кола 1—2. Аб'ектам прывядзення сіл выбіраем гэтае ж кола. Спачатку трэннем цела  $D_2$  ігнаруем. Сілу цяжару  $P_1$  пераносім у пункт  $C$  і абазначаем літарай  $F_C$ . Сілу цяжару  $P_2$  раскладваем на кампаненты  $P_2', P_2''$  паводле формулы:  $\vec{P}_2 = \vec{P}_2' + \vec{P}_2''$ , дзе  $P_2' = P_2 \sin \alpha$  — нацяжэнне троса, на якім замацавана цела  $D_2$ ,  $P_2'' = P_2 \cos \alpha$  — ціск цела  $D_2$  на плоскасць. Складальную  $P_2'$  пераносім спачатку ў пункт  $A$ , дзе абазначаем літарай  $F_A$  і ўлічваем, што  $F_A = P_2'$ ; затым — у пункт  $B$  да кола 1—2; тут яе абазначаем літарай  $F_B$ , пры гэтым  $F_B = F_A = P_2'$ . Знаходзім вярчальныя ўздзеянні сіл  $F_C$  і  $F_B$  на кола 1—2:  $F_C r_2 = P_1 r_2 = 200 \cdot 0,2 = 40$  Н·м;  $F_B r_1 = P_2' r_1 = P_2 \sin \alpha r_1 = 240 \cdot 0,7071 \cdot 0,3 = 50,912$  Н·м. Як бачым,  $F_B r_1 > F_C r_2$ . Папярэдня выснава: пры адсутнасці шурпатасці кола 1—2 паварочваецца ў напрамку руху стрэлкі гадзінніка, а цела  $D_2$  апускаецца па нахіленай плоскасці. Значыць, сіла супраціўлення  $S$  руху цела  $D_2$  накіравана *ўверх* па плоскасці і стварае дадатковую перашкоду

яго руху. І таму пакуль невядома, ці будзе цела  $D_2$  рухацца, калі ўлічыць сілу  $S$ . Найбольшага значэння  $S = F_T$  яна дасягае пры ўмове, што цела  $D_2$  пачне слізаць. Правярэем яго раўнавагу. Дапускаем, што цела  $D_2$  слізае раўнамерна. Знаходзім сілу трэння:  $F_T = fN = fP'_2 = fP_2 \cos \alpha = 0,3 \cdot 240 \cdot 0,7071 = 50,912$  Н. Паводле ўмовы раўнавагі сілы, накіраваныя ўверх па нахіленай плоскасці (гл. рыс. 5.3, б), ураўнаважваюцца сіламі, накіраванымі ўніз:  $F'_A + F_T = P'_2$ . Адсюль знаходзім новае нацяжэнне троса:  $F'_A = P'_2 - F_T = 240 \cdot 0,7071 - 50,912 = 118,794$  Н. Атрыманую сілу  $F'_A$  пераносім у пункт  $A$ , затым у пункт  $B$  на кола 1—2 і знаходзім новае вярчальнае ўздзеянне на яго:  $F'_B r_1 = 118,794 \cdot 0,3 = 35,638$  Н·м. Параўноўваем атрыманы вынік з вярчальным уздзеяннем сілы  $P_1$ , роўным  $F_C r_2$ . Як бачым, цяпер ужо, у адрозненне ад папярэдняга,  $F'_B r_1 < F_C r_2$ . Запісаную няроўнасць трэба разумець наступным чынам. Наша дапушчэнне аб тым, што цела  $D_2$  і пры наяўнасці супраціўлення працягвае слізаць ўніз, не пацвердзілася — сіла цяжару  $P_2$  ужо недастатковая, каб зрушыць яго. Па гэтай прычыне сіла супраціўлення  $S$  не дасягае максімальнага значэння  $F_T$ , а абмежавана нейкім значэннем  $S = F_{ш}$ . Канчатковая выснова: пры наяўнасці сілы ішччлення на нахіленай плоскасці кола 1—2 не паварочваецца. Дзеля цікавасці, знойдзем сілу ішччлення цела  $D_2$  з плоскасцю. Будзем лічыць, што на рысунку 5.3, б, паказана сіла  $F_{ш}$  (замест  $F_T$ ). Тады нацяжэнне троса  $F'_A = P'_2 - F_{ш}$ . Аб'ектам раўнавагі пакідаем кола 1—2. Запісваем для яго ўмову раўнавагі:  $F'_A r_1 = F_C r_2$  ці  $(P'_2 - F_{ш}) r_1 = F_C r_2$ . Адсюль  $F_{ш} = (P'_2 r_1 - F_C r_2) / r_1 = (240 \cdot 0,7071 \cdot 0,3 - 200 \cdot 0,2) / 0,3 = 36,372$  Н.



Рысунк 5.3

3. Вызначым абсяг значэнняў ураўнаважвальнай сілы  $P_{2y}$ . Сілу цяжару  $P_2$  пакідаем нязменнай. Разгледзім два гранічныя станы цела  $D_2$  на плоскасці: на мяжы яго зруху са стану спакою ўверх па нахіленай плоскасці і на мяжы зруху ўніз. У кожным з іх сіла супраціўлення руху  $S$  дасягае найбольшага значэння  $S = F_T$ . Пры гэтым у першым стане нацяжэнне троса  $F_A$  прымае найменшае значэнне  $F_A = F_A^{\min}$ , пры якім сіла трэння  $F_T^{\min}$  накіравана ўніз па нахіленай плоскасці, у другім — сіла  $F_A$  дасягае найбольшай велічыні  $F_A = F_A^{\max}$ , а сіла  $F_T^{\max}$  накіравана ўверх па плоскасці. Для ілюстрацыі другога стану можа быць выкарыстаны рысунк 5.3, б, пры  $S = F_T^{\max}$  і  $F_A = F_A^{\max}$ . Паводле яго  $F_A^{\max} + F_T^{\max} = P_2^{\max}$ , адкуль  $F_A^{\max} = P_2^{\max} - F_T^{\max} = P_2^{\max} \sin \alpha - f P_2^{\max} \cos \alpha = P_2^{\max} (\sin \alpha - f \cos \alpha)$ . Каб выразіць сілу  $F_A^{\max}$  праз сілу цяжару  $P_1$ , разгледзім раўнавагу кола 3 (можна разглядаць і раўнавагу кола 1—2). Да яго ў пункце  $A$  прыкладваем сілу  $F_A^{\max}$ , накіраваную ўніз па нахіленай плоскасці, а ў пункце  $B$  — сілу  $F_B = r_2 F_C / r_1 = r_2 P_1 / r_1$  (знойдзеную з умовы  $F_B r_1 = F_C r_2$ ), накіраваную ўправа (на рысунку не паказана). Паводле ўмовы раўнавагі кола 3  $F_A^{\max} r_3 = F_B r_3$ , адкуль  $F_A^{\max} = F_B = r_2 P_1 / r_1$

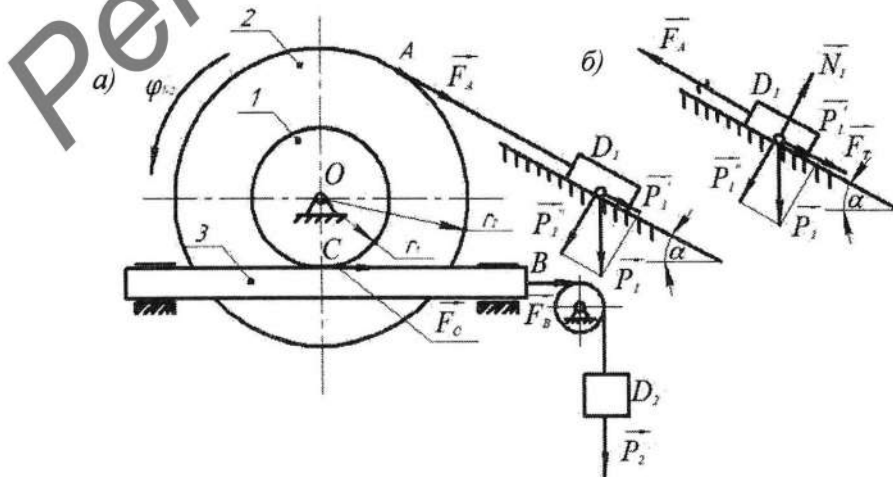
ці  $P_{2y}^{\max}(\sin \alpha - f \cos \alpha) = r_2 P_1 / r_1$  і  $P_{2y}^{\max} = r_2 P_1 / (\sin \alpha - f \cos \alpha) r_1$ . Вяртаемся зноў да цела  $D_2$  у момант, калі яно знаходзіцца на мяжы зруху ўверх па плоскасці. Цяпер сіла нацяжэння троса  $F_A = F_A^{\min}$ , а сіла  $F_T^{\min}$  накіравана ўніз. Умова раўнавагі цела мае выгляд:  $F_A^{\min} = P_2^{\min} + F_T^{\min} = P_{2y}^{\min}(\sin \alpha + f \cos \alpha)$ . Разгледзім раўнавагу кола 3; канчаткова атрымаем:  $P_{2y}^{\min} = r_2 P_1 / (\sin \alpha + f \cos \alpha) r_1$ . Ураўнаважвальная сіла  $P_{2y}$  абмежавана значэннямі:  $P_{2y}^{\min} \leq P_{2y} \leq P_{2y}^{\max}$ . На падставе атрыманых вынікаў лёгка вызначаецца і абсяг змяненняў сілы шчаплення:  $f P_{2y}^{\min} \cos \alpha \leq F_{\text{ш}} \leq f P_{2y}^{\max} \cos \alpha$ .

#### Прыклад 4

Механічная сістэма ўтворана са ступеньчатага кола 1—2, зубчастай рэйкі 3 і двух целаў, сілы цяжару якіх роўны  $P_1, P_2$  (рыс. 5.4, а). Дадзена:  $P_1 = 110 \text{ Н}$ ,  $P_2 = 200 \text{ Н}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $f = 0,4$ ,  $r_1 = 0,2 \text{ м}$ ,  $r_2 = 0,4 \text{ м}$ . Вызначыць: напрамак павароту кола 1—2 і абсяг змяненняў ураўнаважвальнай сілы  $P_{1y}$ .

#### Рашэнне.

1. Абазначаем вось кола, яго радыусы і цэлы літарамі  $O, r_1, r_2, D_1, D_2$ .
2. Вызначаем напрамак павароту кола 1—2. Спачатку шурпатаць нахіленай плоскасці не ўлічваем. Аб'ектам прывядзення сіл прымаем гэтае ж кола. Сілу цяжару  $P_1$  раскладваем на кампаненты паводле формулы  $\vec{P}_1 = \vec{P}_1' + \vec{P}_1''$ , дзе  $P_1' = P_1 \sin \alpha$  — складальная, роўная нацяжэнню троса пры  $f = 0$ ;  $P_1'' = P_1 \cos \alpha$  — нармальны ціск цела  $D_1$  на плоскасць. Пераносім складальную  $P_1'$  на кола 1—2 у пункт  $A$ ; абазначаем яе тут літарай  $F_A$ . Будзем улічваць, што  $F_A = P_1'$ . Сілу цяжару  $P_2$  спачатку пераносім у пункт  $B$ , затым — у пункт  $C$  на кола 1—2. У новых пунктах прыкладання абазначаем яе літарамі  $F_B, F_C$ . Памятаем, што  $F_C = F_B = P_2$ . Пры пераносе сілы  $F_B$  у пункт  $C$  таўшчынёй рэйкі ігнаруем. Находзім вярчальнае ўздзеянне сіл  $F_A$  і  $F_C$  на кола 1—2:  $F_A r_2 = P_1' r_2 = P_1 \sin \alpha r_2 = 110 \cdot 0,5 \cdot 0,4 = 22 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;  $F_C r_1 = 200 \cdot 0,2 = 40 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Як бачым,  $F_C r_1 > F_A r_2$ . Адсюль папярэдня высьнова: пры адсутнасці трэння слізгання на нахіленай плоскасці кола 1—2 паварочваецца супраць руху стрэлкі гадзінніка. Улічым шурпатаць нахіленай плоскасці. Мяркуем, што і пры наяўнасці сілы супраціўлення  $S$ , цела  $D_1$  зрушваецца ўверх па плоскасці. Тады сіла  $S = F_T$ , пры гэтым вектар  $F_T$  накіраваны ўніз (гл. рыс. 5.4, б). Новае нацяжэнне троса  $F_A$  знаходзім з умовы, што сілы, накіраваныя ўверх і ўніз па нахіленай плоскасці, ураўнаважваюцца. Атрымліваем:  $F_A' = P_1' + F_T = P_1 \sin \alpha + f N_1 = P_1 \sin \alpha + f P_1 \cos \alpha = P_1 (\sin \alpha + f \cos \alpha) = 110(0,5 + 0,4 \cdot 0,866) = 110 \cdot 0,8464 = 93,104 \text{ Н}$ . Атрыманую сілу  $F_A'$  прыкладваем да кола 1—2 у пункце  $A$  (замест сілы  $F_A$ ) і знаходзім яе вярчальнае ўздзеянне:  $F_A' r_2 = 93,104 \cdot 0,4 = 37,242 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Такім чынам, па-ранейшаму,  $F_C r_1 > F_A' r_2$ . Канчатковая выснова: кола 1—2 паварочваецца супраць руху стрэлкі гадзінніка і пры наяўнасці сілы трэння. Напрамак павароту  $\varphi_{1-2}$  паказваем на рысунку 5.4, а, стрэлкай.



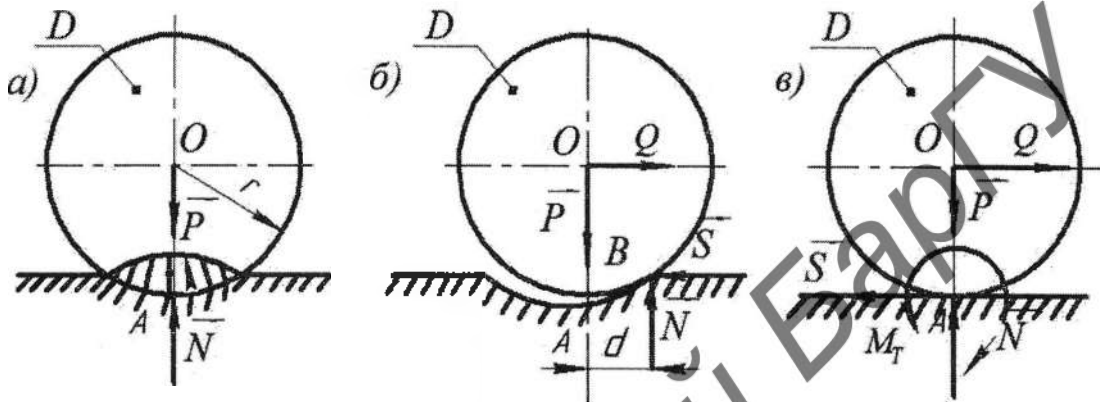
Рысунк 5.4

3. Вызначаем абсяг змянення ўраўнаважвальнай сілы  $P_{1y}$ . Сілу  $P_2$  лічым нязменнай. Калі цела  $D_1$  знаходзіцца на гладкай плоскасці, то магчыма толькі адно значэнне сілы  $P_1 = P_{1y}$ , якая ўраўнаважвае сілу  $P_2$ . Яно знаходзіцца з умовы раўнавагі кола 1—2:  $F_A r_2 = F_C r_1$ , дзе  $F_C = P_2$ ,  $F_A = P_1' = P_{1y} \sin \alpha$ . Адсюль  $F_A = F_C r_1 / r_2 = P_2 r_1 / r_2$  ці  $P_{1y} \sin \alpha = r_1 P_2 / r_2$ ; адсюль  $P_{1y} = r_1 P_2 / r_2 \sin \alpha = (r_1 / r_2 \sin \alpha) P_2 = (0,2 / (0,4 \cdot 0,5)) P_2 = P_2$ . Як бачым, у нашым прыватным выпадку цела  $D_2$  і ўся сістэма будуць ураўнаважвацца цэлам  $D_1$ , сіла цяжару якога  $P_{1y} = P_2$ . Калі ж цела  $D_1$  знаходзіцца на шурпатай паверхні, то сіла  $P_{1y}$  мае сукупнасць (абсяг) значэнняў, г. зн., што знойдзеную сілу  $P_{1y}$  можна ў пэўных межах павялічваць ці памяншаць, а сістэма будзе заставацца нерухомай. Калі сілу  $P_{1y}$  памяншаць да зруху цела  $D_1$  уверх, то яна дасягне мінімальнага значэння  $P_{1y} = P_{1y}^{\min}$ , а калі павялічыць да яго зруху ўніз, то павялічыцца да максімальнага значэння  $P_{1y} = P_{1y}^{\max}$ . У абодвух выпадках супраціўленне руху  $S$  дасягае максімальнага значэння  $S = F_T$ . Рэалізуем апісаны алгарытм вызначэння абсягу значэнняў ураўнаважвальнай сілы  $P_{1y}$ . Знаходзім  $P_{1y}^{\min}$ . Для гэтага памяншаем сілу  $P_{1y}$  да значэння  $P_{1y}^{\min}$ , пры якім цела  $D_1$  пад дзеяннем сілы  $P_2$  зрушыцца ўверх па нахіленай плоскасці. У якасці ілюстрацыі выкарыстоўваем рысунак 5.4, б, на якім замест сілы  $P_1$  належыць прыняць  $P_{1y}^{\min}$ , а замест  $F_A$  —  $F_A^{\min}$ . Застаецца і запісаная паводле гэтага рысунка роўнасць  $F_A^{\min} = P_{1y}^{\min} + F_T^{\min} = P_{1y}^{\min} (\sin \alpha + f \cos \alpha)$ . Пераносім сілу  $F_A^{\min}$  на кола 1—2 у пункт  $A$  і з яго раўнавагі запісваем:  $F_A^{\min} r_2 = F_C r_1$ . Адсюль  $F_A^{\min} = F_C r_1 / r_2 = r_1 P_2 / r_2$ . Аб'ядноўваем дзве атрыманыя формулы для сілы  $F_A^{\min}$ ; атрымліваем:  $P_{1y}^{\min} (\sin \alpha + f \cos \alpha) = r_1 P_2 / r_2$ . Адсюль  $P_{1y}^{\min} = r_1 P_2 / (\sin \alpha + f \cos \alpha) r_2$ . Калі ж ураўнаважвальную сілу  $P_{1y}$  павялічваюць да максімальнага значэння  $P_{1y}^{\max}$ , то на рысунку 5.4, б, зменіцца напрамак сілы  $F_T$ . І з умовы раўнавагі цела  $D_1$  атрымаем  $F_A^{\max} = P_{1y}^{\max} - F_T^{\max}$ . Умова раўнавагі кола 1—2 не змяняецца. Папярэдняя паслядоўнасць дзеянняў прыводзіць да формулы  $P_{1y}^{\max} = r_1 P_2 / (\sin \alpha - f \cos \alpha) r_2$ . Такім чынам, значэнні ураўнаважвальнай сілы  $P_{1y}$  знаходзяцца ў межах  $P_{1y}^{\min} \leq P_{1y} \leq P_{1y}^{\max}$ .

## 6 РАЎНАВАГА МЕХАНІЧНЫХ СІСТЭМ ПРЫ НАЯЎНАСЦІ ТРЭННЯ КАЧЭННЯ. АБ'ЯГ РАЎНАВАГІ. ЗАДАННЕ № 3

Супраціўленне, што ўзнікае пры качэнні аднаго цела па паверхні другога нерухомага цела, называецца *трэннем качэння*. Асноўнай прычынай узнікнення такога супраціўлення з'яўляюцца дэфармацыі паверхняў цел. На рысунку 6.1, а, цыліндрычнае цела  $D$  не рухаецца па паверхні цела  $E$ . Апошняя будзем разглядаць, як сувязь, накладзенную на цела  $D$ . Для нагляднасці і спрашчэння мадэлі на рысунку паказана значна павялічаная дэфармацыя толькі сувязі (ці плоскасці). На самай справе дэфармуецца і цыліндр. На цела дзейнічае сіла цяжару  $P$  і сіметрычна размеркаваная адносна вертыкальнага дыяметра цыліндра рэакцыя плоскасці. Яе раўнадзейную абазначым літарай  $N$  і будзем называць *нормальнай рэакцыяй* сувязі. Паколькі цыліндр знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем дзвюх сіл, то абодва вектары  $N$  і  $P$  размешчаны на агульнай лініі дзеяння — вертыкальнай восі сіметрыі цыліндра — і пры гэтым  $N = P$ . Прыкладзем да цэнтру цела  $D$  адвольную сілу  $Q$ . Тады сіметрыя размеркаванай рэакцыі плоскасці парушыцца, а пункт  $A$  прыкладання рэакцыі  $N$  перамясціцца ў напрамку сілы  $Q$  у пункт  $B$  на адлегласць  $d$ . Пры паступовым павелічэнні сілы  $Q$  адлегласць  $d$  таксама павялічваецца. У момант пераходу цела са стану спакою ў раўнамернае качэнне велічыня  $d$  дасягае максімальнага значэння  $\delta$ , якое называюць *каэфіцыентам трэння качэння*. Каэфіцыент  $\delta$  вымяраецца ў адзінках даўжыні (звычайна ў сантыметрах). Канчатковая мадэль качэння цыліндра па шурпатай дэфармуемай плоскасці атрымліваецца шляхам пераносу рэакцыі  $N$  улева на вось сіметрыі цыліндра (гл. рыс. 6.1, в). Пры гэтым да дзеючых на цыліндр сіл далучаецца пара з момантам  $M_T = \delta N$ , называемая *момантам трэння качэння*. Момант трэння

з'яўляецца асноўнай характарыстыкай супраціўлення качэнню. Сіла  $S$  на рысунках 6.1, б, в, уяўляе сабою сілу супраціўлення слізганню цыліндра  $D$  па плоскасці. Такім чынам, на цыліндр у пераходны момант да качэння (ці пры раўнамерным качэнні) дзейнічаюць узаемаўраўнаважаныя пары: актыўная  $M_a$ , утвораная сіламі  $Q, S$ , і роўная  $M_a = Qr$ , і рэактыўная  $M_r = \delta N = \delta P$ . З роўнасці  $M_a = M_r$  ці  $Qr = \delta P$  знаходзім сілу, неабходную для качэння цыліндра:  $Q_K = \delta P/r$ . Пры пэўнай уласцівасці паверхні сувязі цыліндр можа слізгаць па ёй; тады  $S = fN = fP$ . А паколькі  $S = Q$ , то сіла  $Q_C$ , што здольна выклікаць слізганне цэла  $D$ , роўна  $Q_C = fP$ . З досведу вядома, што ў формулах для  $Q_K$  і  $Q_C$  паміж каэфіцыентамі маюць месца суадносіны  $\delta/r \ll f$ ; таму  $Q_K \ll Q_C$ . Апошняя няроўнасць пацвяджаецца практыкай: каціць цела па шурпатай паверхні намога лягчэй, чым рухаць яго паступальна. Адзначым, што цела  $D$  застаецца ў раўнавазе (не коціцца) на гарызантальнай плоскасці пры значэнні сілы  $Q$  у межах  $0 < Q < \delta P/r$ .



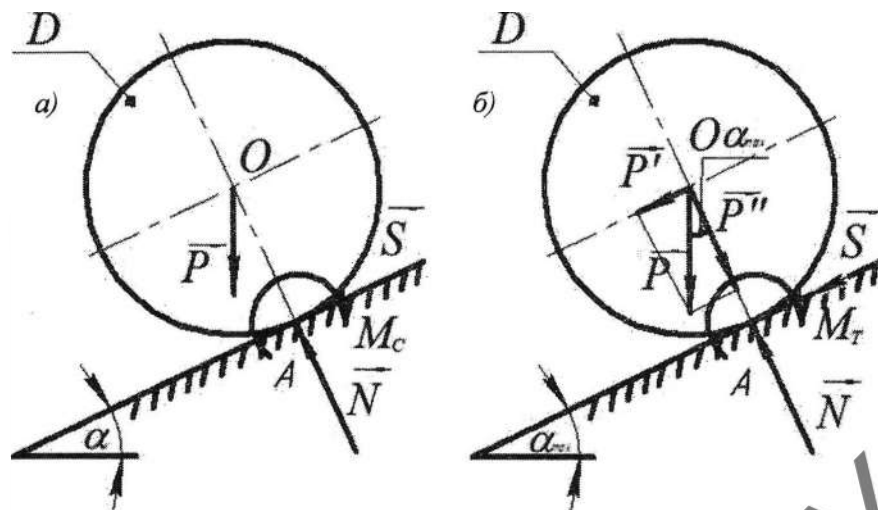
Рысунк 6.1

Абагульняючы вынікі, атрыманыя ў пунктах 4 і 6, прыходзім да высновы:

- пры  $Q \leq fN$  і  $Q \leq \frac{\delta}{r} N$  адсутнічаюць і слізганне, і качэнне цыліндра па плоскасці;
- пры  $Q < fN$  і  $Q \geq \frac{\delta}{r} N$  цыліндр толькі коціцца (без слізгання);
- пры  $Q \geq fN$  і  $Q < \frac{\delta}{r} N$  цыліндр толькі слізгае (без качэння);
- пры  $Q \geq fN$  і  $Q \geq \frac{\delta}{r} N$  маюцца качэнне цыліндра са слізганнем.

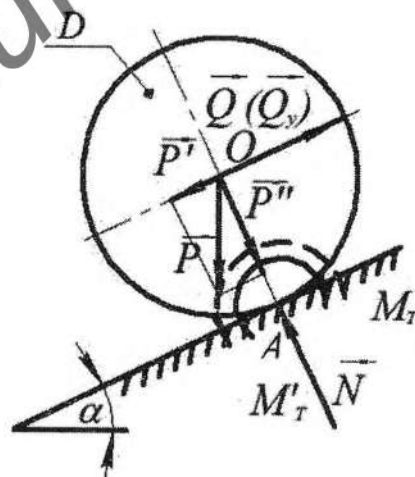
Змесцім цела  $D$  на шурпату нахіленую плоскасць (рыс. 6.2, а). На яго дзейнічаюць сіла цяжару  $P$ , нармальная рэакцыя  $N$ , сіла супраціўлення слізганню  $S = F_{\text{ш}}$  і момант супраціўлення качэнню  $M_C = Nd$ . Пры паступовым павелічэнні вугла  $\alpha$  раўнавага цела парушыцца — яно пакоціцца ўніз па плоскасці. Вызначым абсяг значэнняў вугла  $\alpha$ , пры якіх цела  $D$  застаецца нерухомым. Сілу  $P$  прадставім у выглядзе сумы  $\vec{P} = \vec{P}' + \vec{P}''$  (рыс. 6.2, б), дзе  $P' = P \sin \alpha$ ,  $P'' = P \cos \alpha$ . У гэты момант параметр  $d$  (гл. рыс. 6.1, б) дасягне велічыні  $\delta$  — каэфіцыента трэння качэння, — а момант  $M_C$  прыме максімальнае значэнне  $M_C = M_r = \delta N = \delta P \cos \alpha_{\text{max}}$ . Як і на гарызантальнай плоскасці, на цыліндр дзейнічаюць дзве ўзаемаўраўнаважаныя пары сіл: актыўная  $M_a = P'r$ , утвораная сіламі  $P'$  і  $S$ , і рэактыўная (момант трэння)  $M_r$ . З роўнасці  $M_a = M_r$  ці  $P'r = \delta P \cos \alpha_{\text{max}}$ ,  $P \sin \alpha_{\text{max}} r = \delta P \cos \alpha_{\text{max}}$  знаходзім:  $\sin \alpha_{\text{max}} r = \delta \cos \alpha_{\text{max}}$ ,  $\text{tg} \alpha_{\text{max}} = \delta/r$ ,  $\alpha_{\text{max}} = \text{arctg}(\delta/r)$ . Такім чынам, цыліндр па нахіленай плоскасці не коціцца пры ўмове, што  $0 \leq \alpha \leq \alpha_{\text{max}}$ . Каб ён і не слізгаў, павінна выконвацца дадатковая ўмова:  $0 \leq \alpha \leq \alpha'_{\text{max}}$ , дзе  $\alpha'_{\text{max}} = \text{arctg} f$ ,  $f$  — каэфіцыент трэння слізгання.

Няхай на цыліндр  $D$ , акрамя сілы цяжару  $P$ , дзейнічае сіла  $Q$ , паралельная да нахіленай плоскасці (рыс. 6.3). Устаноўім, пры якіх значэннях сілы  $Q$  адсутнічае качэнне цыліндра па плоскасці. Лічым, што  $\alpha > \alpha_{\text{max}}$ , г. зн., што пры  $Q = 0$  цыліндр коціцца ўніз пад дзеяннем сілы  $P'$  (якая ўтварае пару з сілай  $S$ ), а шурпатаць паверхні выключае яго слізганне. Сілу  $Q$  будзем лічыць ураўнаважальнай у адносінах да сілы цяжару  $P$ , якая парушае раўнавагу цыліндра,



Рисунак 6.2

і абзначыць літарай  $Q_y$ . Яе мінімальнае значэнне  $Q_y^{\min}$  знойдзем з умовы, што сумы момантаў сіл адносна цэнтра  $A$ , накіраваных па руху стрэлкі гадзінніка і супраць, аднолькавыя:  $P'r = Q_y^{\min}r + M_T$ . Атрымліваем:  $Q_y^{\min} = (P'r - M_T)/r$  ці  $Q_y^{\min} = P(r \sin \alpha - \delta \cos \alpha)/r$ . Пры паступовым павелічэнні сілы  $Q_y > Q_y^{\min}$  цыліндр на плоскасці будзе заставацца ў раўнавазе, а момант супраціўлення качэнню  $M_C$  — памяншацца. Пры  $Q_y = P$  ён роўны нулю. Пры далейшым павелічэнні сілы  $Q_y$  да значэння  $Q_y^{\max}$  момант  $M_C$  мяняе напрамак і ўзрастае да велічыні  $M'_T$  (на рысунку 6.3 ён паказаны пункцірам). Умова раўнавагі цыліндра цяпер прымае выгляд:  $P'r + M'_T = Q_y^{\max}r$ . Адсюль:  $Q_y^{\max} = (P'r + M'_T)/r$  ці  $Q_y^{\max} = P(r \sin \alpha + \delta \cos \alpha)/r$ . Атрымліваем наступны абсяг значэнняў ураўнаважвальнай сілы:  $Q_y^{\min} \leq Q_y \leq Q_y^{\max}$ . Як відаць з формул для  $Q_y^{\min}$ ,  $Q_y^{\max}$ , пры павялічванні каэфіцыента  $\delta$  велічыня  $Q_y^{\min}$  памяншаецца, а  $Q_y^{\max}$  ўзрастае, што прыводзіць, як і пры слізганні, да расшырэння абсягу значэнняў ураўнаважвальнай сілы  $Q_y$ .



Рисунак 6.3

У заключэнне заўважым, што назва супраціўлення качэнню *трэннем* не адпавядае фізічнаму працэсу, які мае месца пры качэнні, бо паводле мадэлі качэння паверхні дотыку целаў *не труцца*, а толькі дэфармуюцца.

### ЗАДАНИЕ № 3

Варианты задания и схемы механизма приведены в додатку В. Змест задания и парадак их выполнения *гл.* у пунктах 2, 4 (где змешчаны задания № 1 и 2).

#### 7 ПРИКЛАДЫ ВЫКАНАНИЯ ЗАДАНИЯ № 3

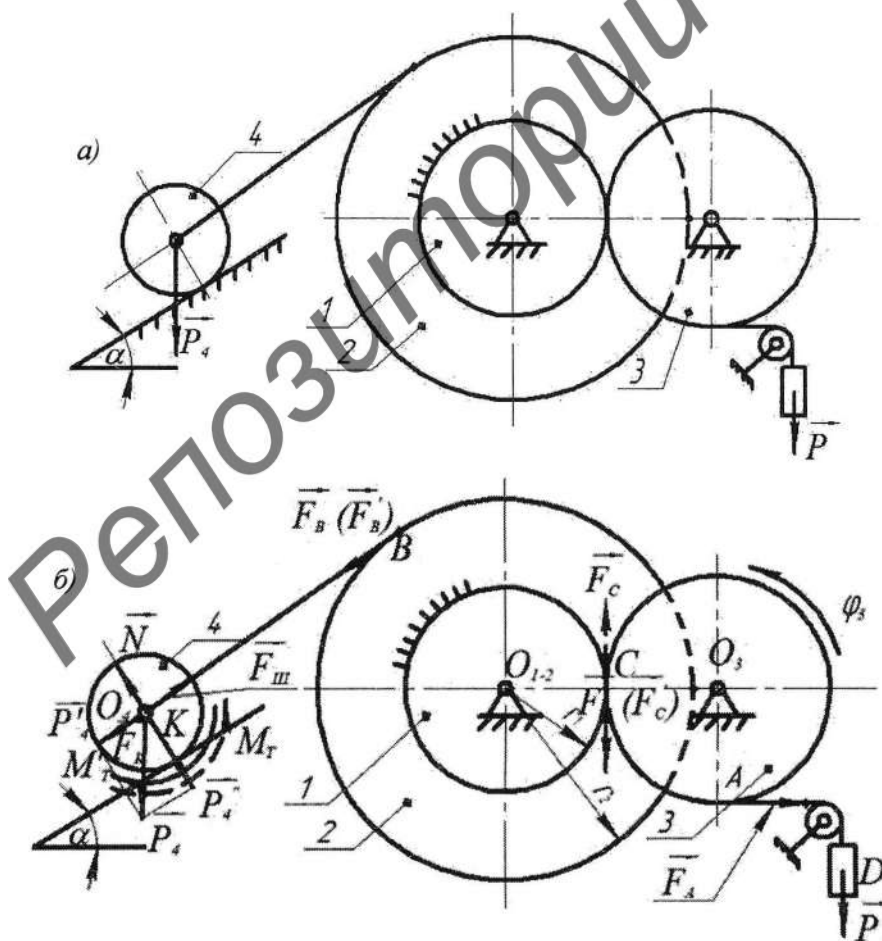
Доследаванне раўнавагі механічных сістэм з супраціўленнем качэнню прыняццова не адрозніваецца ад аналізу раўнавагі сістэм з трэннем слізгання. Усюды ніжэй  $\delta$  — каэфіцыент трэння качэння. Мяркуецца, што слізганне цыліндра адсутнічае; сіла шчাপлення на рысунках не паказваецца.

##### **Прыклад 1**

Механічная сістэма ўтворана з простага перадачнага механізма, цыліндра 1 і цела, падвешанага на ліне (рыс. 7.1, а). Дадзена:  $P = 160 \text{ Н}$ ;  $P_4 = 200 \text{ Н}$ ;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $\delta = 0,10$ ;  $r_1 = r_3 = 0,2 \text{ м}$ ;  $r_2 = 0,3 \text{ м}$ ;  $r_4 = 0,08 \text{ м}$ . Неабходна вызначыць напрамак павароту кола 3 і абсяг значэнняў ураўнаважвальнай сілы  $P$ .

##### **Рашэнне.**

1. Абазначаем цэнтры колаў, іх радыусы і цела на ліне літарамі  $O_{1-2}, O_3, O_4, r_1, r_2, r_3, r_4, D$  (*гл.* рыс. 7.1, б).



Рысунак 7.1

2. Вызначаем напрамак павароту кола 3. У якасці аб'екта прывядзення сіл прымаем гэтае ж кола. Сілу цяжару цела  $D$  пераносім да кола 3 у пункт  $A$ , дзе абазначаем яе літарамі  $F_A$ . Сілу  $P_4$  раскладваем на кампаненты  $P'_4, P''_4$  паводле формулы  $\vec{P}_4 = \vec{P}'_4 + \vec{P}''_4$ , дзе  $P'_4 = P_4 \sin \alpha, P''_4 = P_4 \cos \alpha$ . З іх вярчальнае ўздзеянне на кола 1—2 аказвае толькі сіла  $P'_4$  (а сіла  $P''_4$  ураўнаважваецца нармальнай рэакцыяй плоскасці  $N$ ). Пераносім яе спачатку ў пункт  $B$  на кола 1—2, дзе абазначаем літарамі  $F_B$  ( $F_B = P'_4$ ); затым у пункт  $C$  на кола 3. Велічыню сілы  $F_C$  (на рысунку паказана пункцірам) знаходзім з роўнасці момантаў сіл адносна восі  $O_{1-2}$ :  $F_B r_2 = F_C r_1$ . Атрымліваем:  $F_C = F_B r_2 / r_1 = r_2 P'_4 / r_1 = r_2 P_4 \sin \alpha / r_1$ . Знаходзім вярчальныя ўздзеянні сіл  $F_A$  і  $F_C$  на аб'ект прывядзення — кола 3:  $F_A r_3 = 160 \cdot 0,2 = 32 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;  $F_C r_3 = r_2 P_4 \sin \alpha r_3 / r_1 = 0,3 \cdot 200 \cdot 0,5 \cdot 0,2 / 0,2 = 30 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Як бачым,  $F_A r_3 > F_C r_3$ ; значыць, кола 3 пры адсутнасці трэння качэння паварочваецца супраць руху стрэлкі гадзінніка; кола 1—2 у напрамку яе ходу, а цыліндр 4 коціцца ўверх па плоскасці.

Улічым цяпер супраціўленне, што ўзнікае пры качэнні цыліндра па нахіленай плоскасці. Спачатку паспрабуем без дакладных разлікаў, а шляхам разважанняў, спрагназаваць уплыў трэння качэння на паварот колаў 1—2 і 3. Пры  $\delta = 0$  вярчальнае ўздзеянне на кола 1—2, як мы бачылі, аказвае толькі сіла  $P'_4$ . Цяпер да яе далучаецца і момант трэння  $M_T$ , прыкладзены да цыліндра супраць ходу стрэлкі гадзінніка (бо цыліндр паварочваецца па яе руху). Як бачым, сіла  $P'_4$  імкнецца каціць цыліндр уніз па плоскасці, а пара  $M_T$  (на рысунку паказана пункцірам) садзейнічае ёй. Таму вярчальнае ўздзеянне сілы  $P'_4$  і пары на колы 1—2 і 3 сумуюцца, і вызначаны раней напрамак павароту кола 3 можа змяніцца. А цяпер знойдзем колькасць значэнні сіл  $F_B$  і  $F_C$ . Момант трэння качэння  $M_T = \delta N = \delta P'_4 = \delta P_4 \cos \alpha = 0,001 \cdot 200 \cdot 0,866 = 0,1732 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Пару сіл  $M_T$  замяняем дзвюма паралельнымі да плоскасці сіламі, прыкладзенымі ў пунктах  $O_4, K$ , і роўнымі  $F_{O_4} = F_K = M_T / r_4 = 0,1732 / 0,08 = 2,165 \text{ Н}$ . Раўнадзейная  $R_4$  паралельных да плоскасці сіл, прыкладзеных да восі цыліндра, роўна:  $R_4 = P'_4 + F_{O_4} = 100 + 2,165 = 102,165 \text{ Н}$ . Знаходзім удакладненыя сілы, прыкладзеныя ў пунктах  $B, C$ , і ўдакладненае вярчальнае ўздзеянне сілы  $F_C$  на кола 3:  $F_B = R_4 = 102,165 \text{ Н}$ ;  $F_C = r_2 F_B / r_1 = 0,3 \cdot 102,165 / 0,2 = 153,2475 \text{ Н}$ ;  $F_C r_3 = 30,6495 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Канчатковая выснова: у зададзенай механічнай сістэме кола 3 паварочваецца супраць руху стрэлкі гадзінніка. На рысунку 7.1, б, напрамак павароту паказваем стрэлкай  $\varphi_3$ .

3. Вызначаем абсяг значэнняў ураўнаважвальнай сілы  $P$ . Сілу  $P_4$  лічым нязменнай. Знаходзім спачатку  $P_y$  без уліку трэння качэння, г. зн. пры  $\delta = 0$  і  $M_T = 0$ . Лагічна чакаць, што для атрымання  $P_y$  сілу  $P$  давядзецца зменшыць, бо пры  $P = 160 \text{ Н}$  кола 3 паварочвалася ў напрамку яе моманту адносна цэнтра  $O_3$ . А пры  $P = P_y$  яно павінна спыніцца. Праверым наш прагноз. У якасці аб'екта раўнавагі прымаем кола 1—2. Сілу  $P'_4$  пераносім у пункт  $B$ , дзе абазначаем яе праз  $F_B$ ; будзем улічваць, што  $F_B = P'_4$ . А сілу  $P$  перамяшчам спачатку ў пункт  $A$ , затым у пункт  $C$  на кола 1—2 (гл. рыс. 7.1, б);  $F_C = P$ . Паводле ўмовы раўнавагі кола 1—2  $F_B r_2 = F_C r_1$ , адкуль  $F_C = P_y = F_B r_2 / r_1$  ці  $P_y = P'_4 r_2 / r_1 = P_4 \sin \alpha r_2 / r_1 = 200 \cdot 0,5 \cdot 0,3 / 0,2 = 150 \text{ Н}$ . Прагноз спраўдзіўся.

Улічым трэнне качэння. Пры значэнні сілы  $P$ , роўным знойдзенай сіле  $P_y$ , супраціўленне качэнню адсутнічае —  $M_C = 0$ . Калі ж знойдзеную сілу  $P_y$  памяншаць ці павялічваць, то ўзнікае супраціўленне качэнню. Вызначым межавыя значэнні сілы  $P_y$ . Будзем абазначаць іх праз  $P_y^{\min}, P_y^{\max}$ . Паступова памяншаем сілу  $P_y$  да велічыні, пры якой цыліндр 4 пераходзіць са стану нерухомаści ў раўнамернае качэнне ўніз па плоскасці (паводле формулы  $\alpha_{\max} = \text{arctg}(\delta/r)$ , атрыманай у п. 6, цыліндр 4 не будзе каціцца ўніз пры  $\alpha \leq 0^\circ 43'$ , а ў нашым прыкладзе  $\alpha = 30^\circ$ ). Тады момант супраціўлення качэнню  $M_C$  дасягае значэння  $M'_T$ , а сіла  $P_y$  прымае значэнне  $P_y^{\min}$ . Момант  $M'_T = \delta N = \delta P_4 \cos \alpha$ , накіраваны па стрэлцы гадзінніка (на рысунку паказаны суцэльнай лініяй), замяняем дзвюма паралельнымі да нахіленай плоскасці сіламі, прыкладзенымі ў пунктах  $O_4, K$  і роўнымі  $F_{O_4} = F_K = M'_T / r_4 = \delta P_4 \cos \alpha / r_4$ . Раўнадзейная сіл, прыкладзеных у пункце  $O_4$  і паралельных да нахіленай плоскасці, роўна  $R_4 = P'_4 - F_{O_4} = P_4 \sin \alpha - \delta P_4 \cos \alpha / r_4 = P_4 (\sin \alpha - \delta \cos \alpha / r_4)$ . Аб'ектам раўнавагі пакідаем кола 1—2. Раўнадзейную  $R_4$  пераносім у пункт  $B$ , дзе абазначаем яе літарамі  $F'_B$ . Сілу  $P_y^{\min}$  пераносім у пункт  $C$

да кола 1—2 і абазначаем літарай  $F'_C$ . Паводле ўмовы раўнавагі кола 1—2 (або сіл, прыкладзенных да яго)  $F'_B r_2 = F'_C r_1$ , адкуль  $F'_C = F'_B r_2 / r_1 = R_4 r_2 / r_1$  ці  $P_y^{\min} = P_4 (\sin \alpha - \delta \cos \alpha / r_4) r_2 / r_1$ . Каб знайсці  $P_y^{\max}$ , павялічваем сілу  $P_y$  да значэння, пры якім цыліндр 4 пераходзіць са стану раўнавагі ў раўнамернае качэнне ўверх па плоскасці. Напрамак моманту  $M_T$  зменіцца на процілеглы. Паўтараючы апісанья вышэй дзеянні, атрымаем  $P_y^{\max} = P_4 (\sin \alpha + \delta \cos \alpha / r_4) r_2 / r_1$ . Атрымліваем наступны абсяг значэнняў ураўнаважвальнай сілы  $P$ :  $P_y^{\min} \leq P_y \leq P_y^{\max}$ .

### Прыклад 2

Механічная сістэма ўтворана са ступеньчатага зубчатага кола 1—2, зубчастай рэйкі 3 і цыліндра 4. Да рэйкі прыкладзена сіла  $F$  (гл. рыс. 7.2, а). Дадзена:  $P_4 = 120$  Н;  $F = 100$  Н;  $\alpha = 45^\circ$ ;  $\delta = 0,05$  см;  $r_1 = 0,3$  м;  $r_2 = 0,2$  м;  $r_4 = 0,1$  м. Вызначыць напрамак павароту цыліндра 4 і абсяг значэнняў ураўнаважвальнай сілы  $P_4$ .

#### Рашэнне.

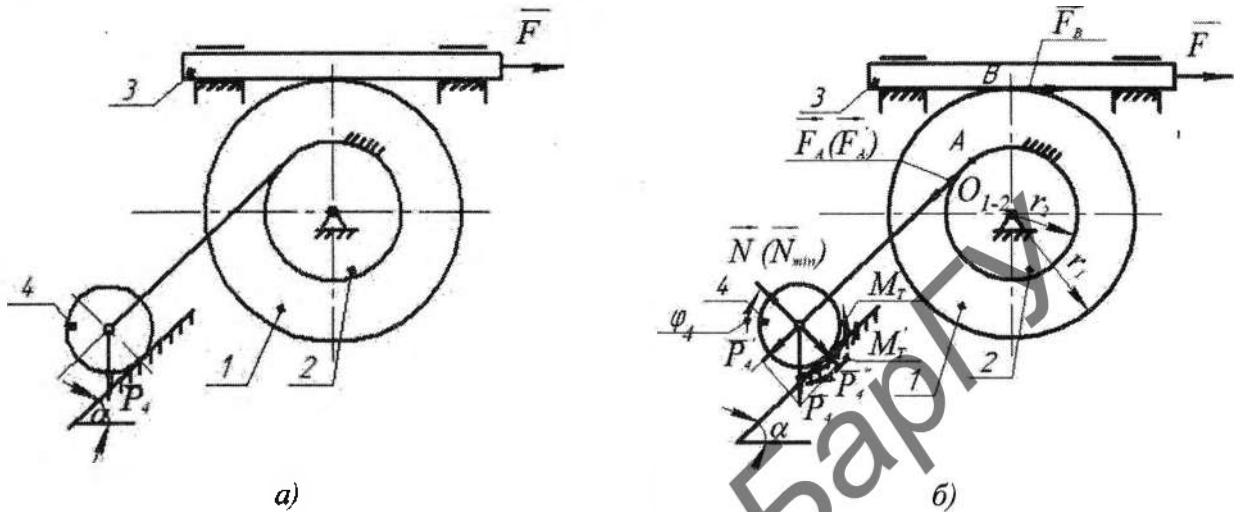
1. Абазначаем цэнтр кола, вось цыліндра і іх радыусы літарамі  $O_{1-2}, O_4, r_1, r_2, r_4$  (гл. рыс. 7.2, б).

2. Вызначаем напрамак павароту цыліндра 4. Сілу цяжару  $P_4$  прадстаўляем у выглядзе сумы:  $\vec{P}_4 = \vec{P}'_4 + \vec{P}''_4$ , дзе  $P'_4 = P_4 \sin \alpha$ ;  $P''_4 = P_4 \cos \alpha$ . У якасці аб'екта прывядзення сіл прымаем кола 1—2. Вярчальнае ўздзеянне на яго аказвае сіла  $P'_4$  (а сіла  $P''_4$  ураўнаважваецца нармальнай рэакцыяй плоскасці  $N$ ). Пераносім яе ў пункт  $A$  на кола 1—2 і абазначаем літарамі  $F_A$ ;  $F_A = P'_4$ . Сілу  $F$  перамяшчам у пункт  $B$  гэтага ж кола; улічваем, што  $F_B = F$ . Таўшчынёй рэйкі пры пераносе сілы  $F$  ігнаруем. Сілу супраціўлення качэнню пакуль не ўлічваем ( $\delta = 0$ ). Знаходзім вярчальныя ўздзеянні сіл  $F_A$  і  $F_B$  на кола 1—2 як моманты гэтых сіл адносна яго цэнтра  $O_{1-2}$ :  $F_A r_2 = P'_4 r_2 = P_4 \sin \alpha r_2 = 120 \cdot 0,707 \cdot 0,2 = 16,968$  Н·м;  $F_B r_1 = 100 \cdot 0,3 = 30$  Н·м. Паколькі  $F_B r_1 > F_A r_2$ , то кола 1—2 паварочваецца ў напрамку моманту сілы  $F_B$  — па ходу стрэлкі гадзінніка — і цягне пры дапамозе ліна цыліндр 4 ўверх па плоскасці. Пры гэтым ён паварочваецца ў тым жа напрамку, што і кола 1—2.

Улічым супраціўленне качэнню  $M_C = M_T$ . Паколькі цыліндр паварочваецца па стрэлцы гадзінніка, то момант  $M_T$  накіраваны ў адвароты бок — супраць павароту стрэлкі ў гадзінніку (гл. рыс. 7.2, б). Знаходзім яго велічыню:  $M_T = \delta N = \delta P_4 \cos \alpha = 0,0005 \cdot 120 \cdot 0,707 = 0,0424$  Н·м. Прадстаўляем момант  $M_T$  у выглядзе дзвюх сіл  $F_{O4}$  і  $F_K$ , паралельных да нахіленай плоскасці (на рысунку не паказаны). Знаходзім раўнадзейную:  $R_4 = P'_4 + F_{O4} = P_4 \sin \alpha + M_T / r_4 = 120 \cdot 0,707 + 0,0424 / 0,1 = 85,264$  Н. Пераносім яе ў пункт  $A$  на кола 1—2, дзе абазначаем літарамі  $F'_A$  ( $F'_A = R_4$ ). Знаходзім вярчальнае ўздзеянне сілы  $F'$  на кола 1—2:  $F'_A r_2 = 85,264 \cdot 0,2 = 17,051$  Н·м. Як бачым, няроўнасць вярчальных уздзеянняў не змянілася. Канчаткова заключаем: *цыліндр 4 паварочваецца па руху стрэлкі гадзінніка*. Напрамак яго павароту паказваем на рысунку стрэлкай  $\phi_4$ .

3. Вызначаем абсяг значэнняў ураўнаважвальнай сілы  $P_4$ . Сілу  $F$  лічым нязменнай. Паколькі яна дамінавала пры вызначэнні напрамку павароту кола 1—2 і цыліндра 4, то цяпер ураўнаважыць яе дзеянне, відавочна, можна толькі сілай  $P_{4y}$ , большай за  $P_4 = 120$  Н. Пераканаемся ў гэтым. Знайдзем спачатку сілу  $P_{4y}$  пры адсутнасці супраціўлення качэнню цыліндра 4. Аб'ектам раўнавагі прымаем кола 1—2. Выканаем той жа перанос сіл  $P'_4$  і  $F_y$  у пункты  $A$  і  $B$ . Прыраўноўваем вярчальныя ўздзеянні сіл  $F_{Ay}$  і  $F_B$ :  $F_{Ay} \cdot r_2 = F_B r_1$  ці  $P_{4y} \sin \alpha r_2 = F_B r_1$ . Адсюль  $P_{4y} = F_B r_1 / (r_2 \sin \alpha) = 100 \cdot 0,3 / (0,2 \cdot 0,707) = 212,164$  Н. Такім чынам, пры  $\delta = 0$  існуе толькі адно атрыманае значэнне ўраўнаважвальнай сілы  $P_{4y}$ . Пры  $\delta \neq 0$  сіла  $P_{4y}$  мае абсяг значэнняў, пры якіх механічная сістэма застаецца нерухомай. Знайдзем межавыя значэнні ўраўнаважвальнай сілы  $P_{4y}^{\min}$  і  $P_{4y}^{\max}$ . Сіла  $P_{4y}$  дасягае значэння  $P_{4y}^{\min}$  у той момант, калі цыліндр 4 знаходзіцца на мяжы качэння ўверх па нахіленай плоскасці (або ўжо раўнамерна коціцца па ёй). Момант супраціўлення качэнню  $M_C$  пры гэтым накіраваны супраць руху стрэлкі гадзінніка, і таксама дасягае найбольшага значэння  $M_T$  (гл. рыс. 7.2, б). Замяняем яго дзвюма паралельнымі да нахіленай плоскасці сіламі  $F_{O4}$  і  $F_K$  (на рысунку не паказаны). Знаходзім раўнадзейную

дзвюх прыкладзеных у цэнтры  $O_4$  сіл:  $R_4 = P'_{4y} + F_{O_4} = P_{4y}^{\min} \sin \alpha + M_T^{\min}/r_4 = P_{4y}^{\min} \sin \alpha + \delta N^{\min}/r_4 = P_{4y}^{\min} (\sin \alpha + \delta \cos \alpha / r_4)$ . Пераносім сілу  $R_4$  у пункт  $A$  і тут абазначаем яе літарамі  $F'_A$ . Запісваем умову раўнавагі кола 1—2:  $F'_A r_2 = F_B r_1$ . Адсюль  $F'_A = F_B r_1 / r_2 = R_4 = F r_1 / r_2$  ці  $P_{4y}^{\min} (\sin \alpha + \delta \cos \alpha / r_4) = F r_1 / r_2$ ,  $P_{4y}^{\min} = F r_1 / (\sin \alpha + \delta \cos \alpha / r_4) r_2$ .



Рысунак 7.2

Максімальнага значэння сіла  $P_{4y}$  дасягае на мяжы пераходу стана цыліндра ад раўнавагі да раўнамернага качэння ўніз па плоскасці. Цяпер момант  $M'_T$  накіраваны па стрэлцы гадзінніка (на рысунку 7.2, б, паказаны пункцірам). Новая раўнадзейная  $R'_4 = P'_{4y} - F'_{O_4} = P_{4y}^{\max} (\sin \alpha - \delta \cos \alpha / r_4)$ . Пасля яе пераносу ў пункт  $A$  і складання ўмовы раўнавагі кола 1—2 знаходзім:  $P_{4y}^{\max} = F r_1 / (\sin \alpha - \delta \cos \alpha / r_4) r_2$ . Атрымліваем адпаведны абсяг значэнняў ураўнаважвальнай сілы  $P_{4y}$ :  $P_{4y}^{\min} \leq P_{4y} \leq P_{4y}^{\max}$ .

### Прыклад 3

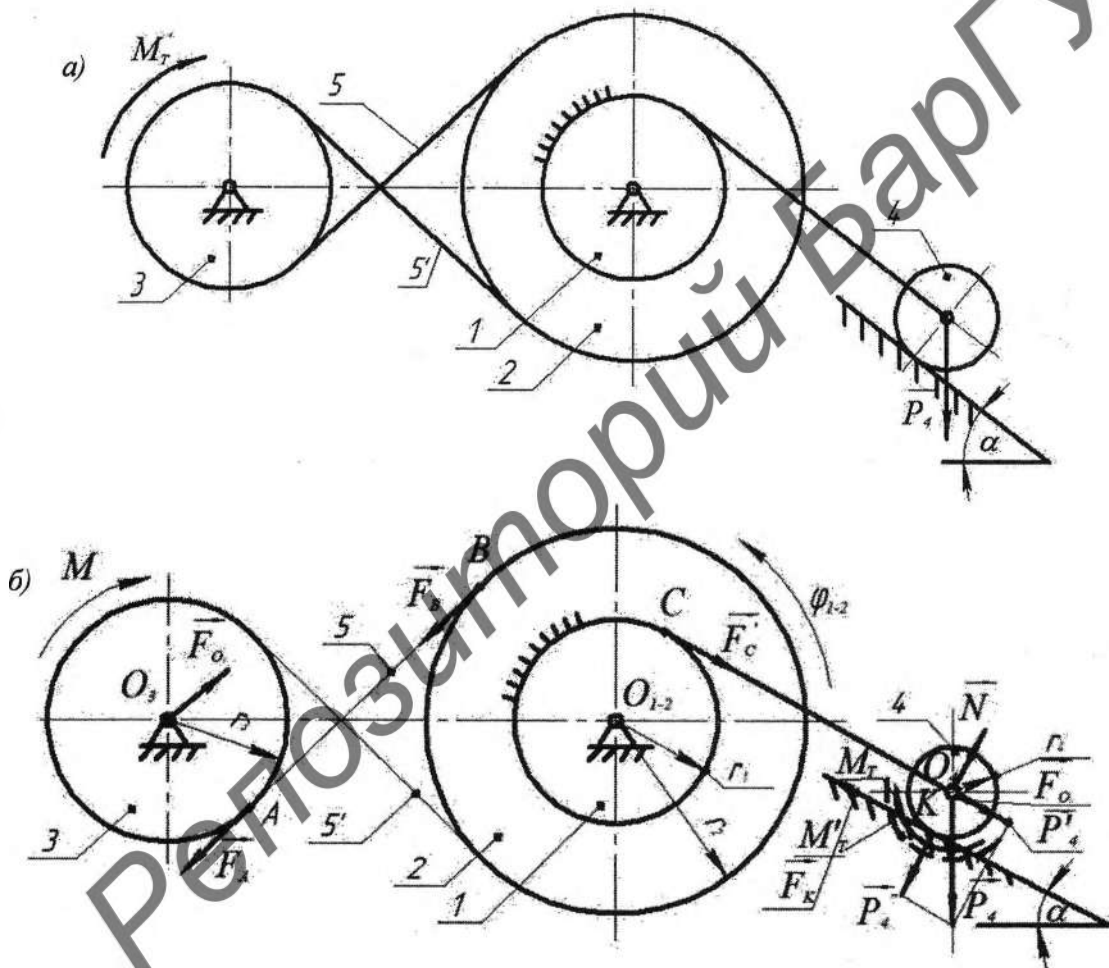
Механічная сістэма ўключае перадачны механізм, утвораны з колаў 1—2 і 3, злучаных пры дапамозе паса 5—5', і цыліндра 4 на нахіленай плоскасці (рыс. 7.3, а). Дадзена:  $P_4 = 130$  Н;  $M = 190$  Н·м;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $\delta = 0,08$  см;  $r_1 = 0,15$  м;  $r_2 = 0,30$  м;  $r_3 = 0,20$  м;  $r_4 = 0,08$  м. Вызначыць напрамак павароту кола 1—2 і абсяг значэнняў ураўнаважвальнага моманту  $M$ .

#### Рашэнне

1. Абазначаем восі колаў і цыліндра, іх радыусы літарамі  $O_{1-2}$ ,  $O_3$ ,  $O_4$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ ,  $r_4$  (гл. рыс. 7.3, б).

2. Знаходзім напрамак павароту кола 1—2. Спачатку супраціўленне качэнню цыліндра 4 па плоскасці не ўлічваем — прымаем каэфіцыент трэння качэння  $\delta = 0$ . У якасці аб'екта прывядзення сіл прымаем кола 1—2 (а можна прымаць і кола 3); да яго пераносім усе механічныя ўздзеянні, здольныя выклікаць паварот. Пару  $M$  замяняем дзвюма паралельнымі сіламі (гл. рыс. 7.3, б):  $F_A = F_{O_3} = M/r_3$ . Сіла  $F_{O_3}$  ураўнаважваецца рэакцыяй апоры  $O_3$ , а сілу  $F_A$  пераносім у пункт  $B$ , дзе абазначаем яе літарамі  $F_B$  ( $F_B = F_A$ ). Сілу цяжару  $P_4$  раскладваем на дзве:  $\vec{P}_4 = \vec{P}'_4 + \vec{P}''_4$ , дзе  $P'_4 = P_4 \sin \alpha$ ;  $P''_4 = P_4 \cos \alpha$ . Складаемая  $P''_4$  ураўнаважваецца нармальнай рэакцыяй  $N$  нахіленай плоскасці:  $N = P''_4 = P_4 \cos \alpha$ . А сілу  $P'_4$  пераносім у пункт  $C$  на кола 1—2 і абазначаем літарамі  $F_C$ ;  $F_C = P'_4 = P_4 \sin \alpha = 65$  Н. Вызначаем вярчальныя ўздзеянні сіл  $F_B$  і  $F_C$  на кола 1—2 як іх моманты адносна восі  $O_{1-2}$ :  $F_B r_2 = \frac{M r_2}{r_3} = \frac{190 \cdot 0,3}{0,2} = 285$  Н·м;  $F_C r_1 = P'_4 r_1 = P_4 \sin \alpha r_1 = 130 \cdot 0,5 \cdot 0,15 = 9,75$  Н·м. Паколькі  $F_B r_2 > F_C r_1$ , то кола 1—2 пры  $\delta = 0$

паварочваецца ў напрамку моманта сілы  $F_B$  — супраць руху стрэлкі гадзінніка. Улічым супраціўленне качэнню  $M_C$ . Розніца ў момантах сіл  $F_B$  і  $F_C$  адносна восі  $O_{1-2}$  вялікая; таму без праверкі дапускаем, што і пры  $\delta \neq 0$  цыліндр коціцца па плоскасці і, значыць, момант  $M_C = M_T$ . Паколькі пры качэнні ўверх па нахіленай плоскасці пад дзеяннем сілы  $F_B$  цыліндр 4 паварочваецца супраць руху стрэлкі гадзінніка, то момант  $M_T$  у выглядзе дзвюх сіл, паралельных да нахіленай плоскасці:  $F_{O4} = F_K = \frac{M_T}{r_4} = \delta N / r_4 = \delta P_4 \cos \alpha / r_4 = 0,0008 \cdot 130 \cdot \frac{0,866}{0,08} = 11,25 \text{ Н}$ . Сіла  $F_{O4}$ , прыкладзеная да восі  $O_4$ , накіравана, як і  $P_4'$ . Іх раўнадзейная роўна:  $R_4 = P_4' + F_{O4} = 65 + 11,25 = 76,25 \text{ Н}$ . Пераносім яе на кола 1—2 у пункт  $C$  і абазначаем праз  $F_C$ . Знаходзім удакладненае вярчальнае ўздзеянне:  $F_C r_1 = 76,25 \cdot 0,15 = 11,4375 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Застаецца папярэдняя няроўнасць  $F_B r_2 > F_C r_1$ . Прыходзім да канчатковай высновы: у зададзенай механічнай сістэме кола 1—2 паварочваецца супраць руху стрэлкі гадзінніка. На рысунку 7.3, б, гэты напрамак паказваем стрэлкай  $\phi_{1-2}$ .



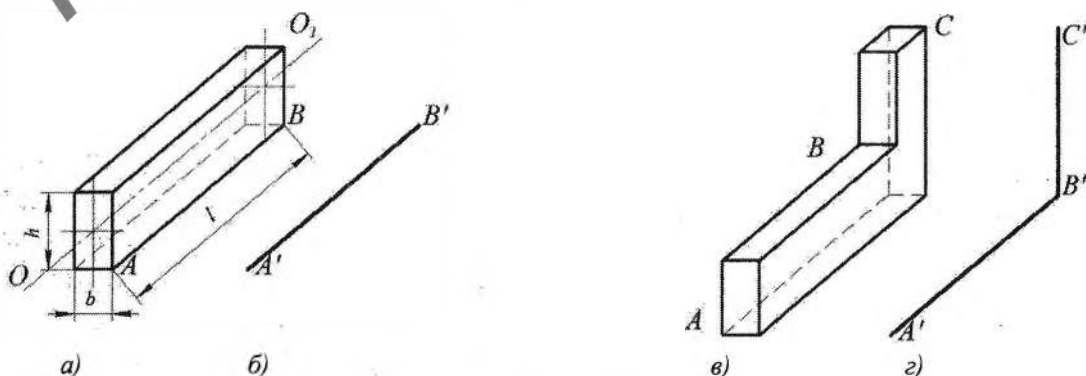
Рысунак 7.3

3. Знаходзім абсяг значэнняў ураўнаважвальнага моманту  $M$ . Сілу цяжару  $P_4$  лічым пастаяннай. Супраціўленнем качэнню спачатку ігнаруем — прымаем  $\delta = 0$ . Аб'ектам раўнавагі прымаем кола 1—2. З роўнасці  $F_B r_2 = F_C r_1$  знаходзім:  $F_B = F_A = F_C r_1 / r_2$ . Ураўнаважвальны момант  $M_y = F_A r_3 = F_C r_1 r_3 / r_2 = P_4 \sin \alpha r_1 r_3 / r_2 = 130 \cdot 0,5 \cdot 0,15 \cdot 0,20 / 0,3 = 6,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Пры такім значэнні  $M = M_y$  механічная сістэма не рухаецца. Улічым супраціўленне качэнню цыліндра  $M_C$ . Атрымаем абсяг значэнняў  $M = M_y$ , абмежаваны велічынямі  $M_y^{\max}, M_y^{\min}$ . Велічыні  $M_y = M_y^{\max}$  ураўнаважвальны момант дасягае пры пераходзе (ці на мяжы пераходу)

цыліндра са стану нерухомаści ў раўнамернае качэнне ўверх па нахіленай плоскасці; а значэнне  $M_y = M_y^{\min}$  ён прымае ў момант пераходу да раўнамернага качэння ўніз па плоскасці. Заўважым, што пры  $M = M_y = 6,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$  супраціўленне качэнню  $M_C = 0$  і пры  $\delta \neq 0$ . Знаходзім  $M_y^{\max}$ . Аб'ектам раўнавагі пакідаем кола 1—2. На кола 3 цяпер дзейнічае момант  $M_y^{\max}$ . Пасля яго замены дзвюма сіламі, у пунктах  $A$  і  $B$  прыкладзены:  $F_{By}^{\max} = F_{Ay}^{\max} = M_y^{\max}/r_3$ . Момант  $M_T$  таксама прадстаўляем дзвюма паралельнымі сіламі  $F_{O4}$ ,  $F_K$ ; пры гэтым, як і пры выкананні пункта 2,  $F_{O4} = F_K = M_T/r_4 = \delta N/r_4 = \delta P_4 \cos \alpha / r_4$ , а раўнадзейная прыкладзеных у пункце  $O_4$  сіл роўна:  $R_4 = P_4' + F_{O4} = P_4(\sin \alpha + \delta \cos \alpha / r_4)$ . Пераносім яе ў пункт  $C$  і абазначаем праз  $F_C'$  ( $F_C' = R_4$ ). Запісваем умову раўнавагі кола 1—2:  $F_{By}^{\max} r_2 = F_C' r_1$  ці  $M_y^{\max} r_2 / r_3 = R_4 r_1$ . Адсюль  $M_y^{\max} = R_4 r_3 r_1 / r_2$  ці  $M_y^{\max} = r_3 r_1 P_4 (\sin \alpha + \delta \cos \alpha / r_4) / r_2$ . Моманту  $M_y^{\min}$  адпавядае момант  $M_T'$ , накіраваны супраць руху стрэлкі гадзінніка (на рысунку 7.3, б, паказаны пункцірам). Паўтараючы апісаных пры вызначэнні  $M_y^{\max}$  дзеянні, атрымаем  $R_4' = P_4(\sin \alpha - \delta \cos \alpha / r_4)$ , а затым —  $M_y^{\min} = r_3 r_1 P_4 (\sin \alpha - \delta \cos \alpha / r_4) / r_2$ . Абсяг значэнняў ураўнаважвальнага моманту  $M_y$  прымае выгляд:  $M_y^{\min} \leq M_y \leq M_y^{\max}$ .

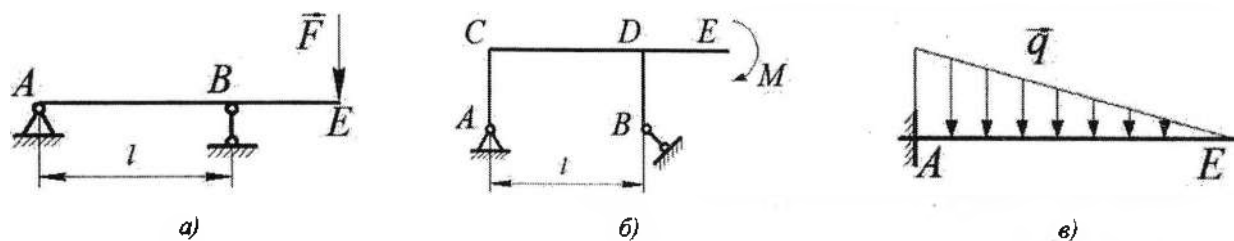
## 8 ПРОСТЫЯ СТРЫЖНЯВЫЯ СІСТЭМЫ. НАГРУЗКІ, СУВЯЗІ, РЕАКЦЫІ СУВЯЗЕЙ

Стрыжнем у тэхніцы называюць цела (аб'ект), у якога адзін з трох размераў значна большы за іншыя. У стрыжня на рысунку 8.1, а, даўжыня  $l \gg h(b)$ . Прамавугольнік са старонамі  $h$ ,  $b$  уяўляе *папярочнае* сячэнне стрыжня. Плошча сячэння  $F$  можа быць зменнай уздоўж даўжыні стрыжня. Канструкцыі, утвораныя са стрыжняў, называюць *стрыжнявымі сістэмамі*. Стрыжнявая сістэма, што складаецца з аднаго стрыжня — прамога, кривога ці разгалінаванага, — называецца *простай*, а калі з некалькіх стрыжняў, злучаных паміж сабою шарнірамі, то *складанай*. Тут мы абмяжуемся вывучэннем простых механічных сістэм. Стрыжнявыя сістэмы замацоўваюцца на жорсткіх нерухомах падмурках пры дапамозе *апораў*, называемых таксама *сувязямі*. На разліковых схемах стрыжні умоўна паказваюць у выглядзе ліній — *восей* стрыжняў. На рысунку 8.1, а, вось стрыжня  $OO_1$  праходзіць праз цэнтры цяжару ўсіх яго сячэнняў. На разліковай схеме стрыжань  $AB$  прадстаўляецца адрэзкам  $A'B'$  (гл. рыс. 8.1, б), а стрыжань  $ABC$  (гл. рыс. 8.1, в) — ломанай лініяй  $A'B'C'$ . Стрыжні ці стрыжнявыя сістэмы, замацаваныя на апорах, называюцца *бэлькамі* ці *рамамі*. Бэлькі звычайна маюць прамалінейную форму і замацоўваюцца ў гарызантальным становішчы. Выкарыстоўваюцца і камбінаваныя стрыжнявыя сістэмы. Рама ўтрымліваюць, акрамя гарызантальных, вертыкальных і нахіленых участкі. Апоры (сувязі) таксама адрозніваюцца паміж сабою. Найчасцей выкарыстоўваюцца *рухомыя* і *нерухомыя шарніры* і *жорсткія замацоўкі*. Для бэлькі  $ABE$  і рамы  $ACDBE$  на рысунках 8.2, а, б, апорамі служаць нерухомыя шарніры  $A$  і рухомыя  $B$ , а кансольная бэлька  $AE$  на рысунку 8.2, в, замацавана з дапамогай жорсткай апоры (замацоўкі)  $A$ . Адлегласць  $l$  паміж апорамі называецца *пралётамі* бэлькі (ці рамы), а выступаючыя за межы пралётаў участкі  $BE$  і  $DE$  — *кансолямі*.



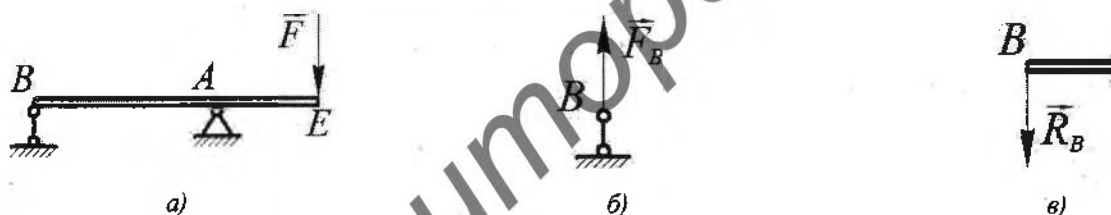
Рисунак 8.1

Зададзенымі (інакш: знешнімі ці актыўнымі) нагрузкамі на стрыжнявыя сістэмы могуць быць *засяроджаныя сілы  $F$ , пары сілаў з момантамі  $M$  і размеркаваныя нагрузкі* пастаяннай або пераменнай інтэнсіўнасці  $q$ . Пералічаныя віды нагрузкаў прыкладзены да бэлек і рамы на рысунках 8.2, а—в. Інтэнсіўнасць апошняй (гл. рыс. 8.2, в) змяняецца па лінейным законе.



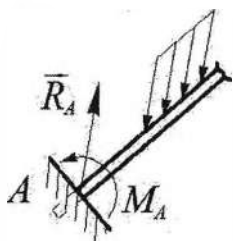
Рысунак 8.2

У той час, як засяроджаная сіла ці размеркаваная па даўжыні стрыжня нагрузка імкнуча рухаць свабодны аб'ект (напрыклад, стрыжань) паступальна, пара сілаў імкнецца *варуць* яго. Пад дзеяннем актыўных нагрузкаў у апорах бэлек і рам узнікаюць *рэактыўныя сілы*, называемыя таксама *рэакцыямі* апораў (сувязей). Іх заўжды будзем разглядаць як *сілы супрацьдзеяння* актыўным сілам. На рысунку 8.3, а, актыўная сіла  $F$  імкнецца павярнуць бэльку вакол шарніра  $A$  па стрэлцы гадзінніка; пры гэтым актыўнае ўздзеянне на шарнір  $B$  — сіла  $F_B$  — прыкладзена да шарніра і накіравана ўверх, а рэактыўная сіла  $R_B$ , якая прыкладзена да бэлькі і ўтрымлівае яе ад павароту, накіравана ўніз (гл. рыс. 8.3, б, в). Звяртаем увагу на тэрміналогію. На рысунках 8.3 сіла  $F$  уяўляе *дзеянне* на бэльку  $BE$ ; значыць, сіла  $F_B$  таксама ўяўляе *дзеянне*, але ўжо на шарнір  $B$ . А вось сіла  $R_B$  — гэта ўжо процідзеянне сіле  $F_B$  (а ўскосна — і сіле  $F$ ); пры гэтым  $R_B = F_B$ .

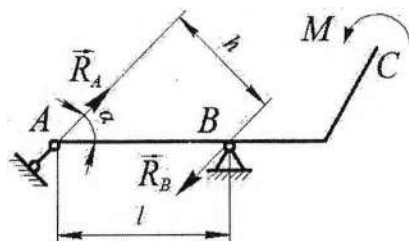


Рысунак 8.3

У далейшым пры вызначэнні рэакцый будзем мець на ўвазе, што лінія дзеяння рэакцыі рухомай шарнірнай апоры праходзіць праз *два яе шарніры*, г. зн. супадае з воссю прамога стрыжня, у той час як лінія дзеяння нерухомай шарнірнай апоры спачатку не вядома. Яе становішча залежыць ад напрамкаў знешняй нагрузкі і ліній дзеяння рухомах апораў. Рэакцыя жорсткай замацоўкі ў агульным выпадку прадстаўляецца *рэактыўнай сілай і рэактыўнай парай* (рыс. 8.4).



Рысунак 8.4



Рысунак 8.5

Рэактыўная сіла  $R_A$  утрымлівае стрыжань ад паступальнага перамяшчэння, а рэактыўная пара  $M_A$  — ад павароту. Тут таксама нахіл рэакцыі  $R_A$  залежыць ад напрамкаў актыўных сіл. Даследаванне стрыжнявых канструкцый на трываласць, за выключэннем кансольных элементаў, немагчыма без вызначэння рэакцый сувязей. Іх знаходзяць, як правіла, з умоў раўнавагі. У некаторых выпадках паскорыць вызначэнне рэакцый дазваляюць вядомыя са статыкі наступныя прыкметы:

1. Калі цела, у прыватнасці стрыжань, знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем трох непаралельных сіл, то іх лініі дзеяння перасякаюцца ў адным пункце.

2. Калі цела знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем трох сіл і пры гэтым дзве з іх паралельны паміж сабою, то і трэцяя сіла паралельна да іх.

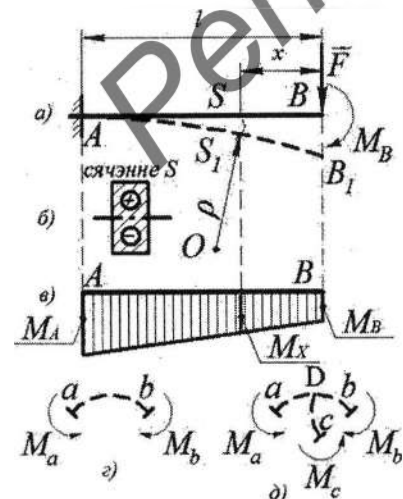
3. Пара сіл, якая дзейнічае на цела, можа быць ураўнаважана толькі іншай парай (у прыватнасці, рэактыўнай) або сістэмай сіл, што прыводзіцца да пары. Апошні пастулат праілюстраваны на рысунку 8.5, дзе на стрыжань  $ABC$  дзейнічае актыўная пара  $M$ . Паводле пастулата 3 рэакцыі сувязей  $R_A, R_B$  павінны ўтвараць такую ж пару процілеглага напрамку, г. зн.  $R_A h = M$ . Адсюль  $R_A = R_B = M / h$ , дзе плячо рэактыўнай пары  $h = l \sin \alpha$ .

4. Вектар сілы можна адвольна пераносіць уздоўж яе лініі дзеяння ў межах цела, да якога яна прыкладзена.

5. Вектар сілы можна пераносіць паралельна ў межах цела ў новы пункт прыкладання, дабаўляючы пару сіл з момантам, роўным моманту зададзенай сілы адносна новага пункта прыкладання.

## 9 ДЭФАРМАЦЫІ ПРСТЫХ ПРУГКІХ СТРЯЖНЯВЫХ СИСТЭМ

Пры вызначэнні рэакцый сувязей дэфармацыямі стрыжняў ігнаруюць. На самай справе абсалютна цвёрдых целаў і матэрыялаў у прыродзе не існуе. Жорсткасць стрыжня залежыць як ад фізічных уласцівасцей матэрыяла, так і ад памераў і формы яго сячэння. Будзем лічыць, што ў разглядаемых тут задачах выконваюцца ўмовы для *плоскага выгіну* стрыжнявых сістэм, паводле якога сагнутая вось застаецца ў плоскасці недэфармаванай восі (у плоскасці чарцяжа). Тады жорсткасць сячэння на выгін можна вызначаць здабыткам  $EI$ , дзе  $E$  — модуль пругкасці першага роду;  $I$  — момант інерцыі сячэння адносна галоўнай цэнтральнай восі, перпендыкулярнай да плоскасці выгіну. Узровень знешняга механічнага ўздзеяння на сячэнне стрыжня з каардынатай  $x$  у агульным выпадку характарызуецца трыма ўнутранымі сілавымі фактарамі: выгінальным момантам  $M_x$ , нармальнай  $N_x$  і папярочнай  $Q_x$  сіламі. Пры пабудове сагнутых восей стрыжнявых сістэм будзем ігнараваць уплывам сіл  $N_x$  і  $Q_x$  і радыус іх крывізны вызначаць па формуле  $\rho = EI/M_x$ . Для кансольнай бэлькі  $AB$  радыус крывізны сагнутай восі ў сячэнні  $S$  паказаны на рысунку 9.1, а. Далей будзем мець на ўвазе, што матэрыял (ці, як кажуць, «валокны») у сячэнні бэлькі пры згіне дэфармуецца не аднолькава: на рысунку 9.1, б, у верхняй частцы сячэння ён расцягваецца, а ў ніжняй — сціскаецца. Змяняецца і велічыня дэфармацыі. Расцяжэнню і сцісканню адпавядаюць знакі  $\pm$  (гл. рыс. 9.1, б). Тут і ў наступных прыкладах перамяшчэнні сячэнняў на рысунках значна павялічаны.



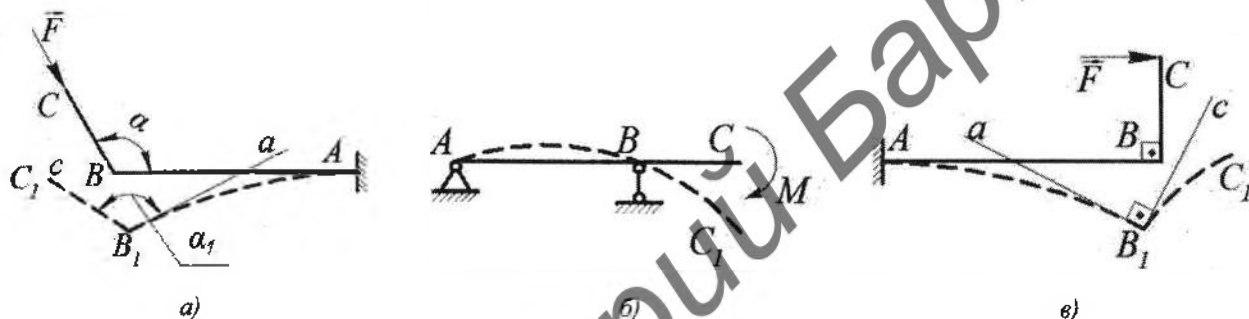
Рысунк 9.1

Велічыня моманту  $M_x$  у сячэнні  $S$  бэлькі ці рамы вылічваецца як сума момантаў усіх сіл, што дзейнічаюць на частку механічнай сістэмы, якая знаходзіцца з аднаго боку ад гэтага сячэння. На рысунку 9.1, а, на правую частку бэлькі дзейнічаюць сіла  $F$  і момант  $M_B$ . Таму  $M_x = F \cdot x + M_B$ . Сукупнасць ардынат згінальных момантаў для ўсіх сячэнняў бэлькі называюць *графікам* (ці *эпурай*) момантаў. У механіцы матэрыялаў эпора момантаў будзецца на *сціснутых* валокнах стрыжняў. Паводле гэтага правіла яна пабудавана і на рысунку 9.1, в, дзе ў бэльцы  $AB$  сціснуты ніжнія валокны;

ардыната  $M_A = F \cdot l + M_B$ . Як бачым, прычынай выгіну стрыжняў з'яўляюцца выгінальныя моманты. Паміж выгінамі і момантамі існуе не толькі аналітычная, але і візуальная адпаведнасць. Напрыклад, можна інтуітыўна (з досведу) устанавіць, што на фрагмент  $ab$  выпуклай уверх восі дзейнічаюць паказаныя на рысунку 9.1,  $z$ , моманты  $M_a, M_b$ . Калі змяніць напрамкі момантаў на процілеглыя, то зменіцца і напрамак выпукласці. Другі прыклад адпаведнасці выгіну і момантаў паказаны на рысунку 9.1,  $d$  для вузла  $D$  стрыжнявой сістэмы.

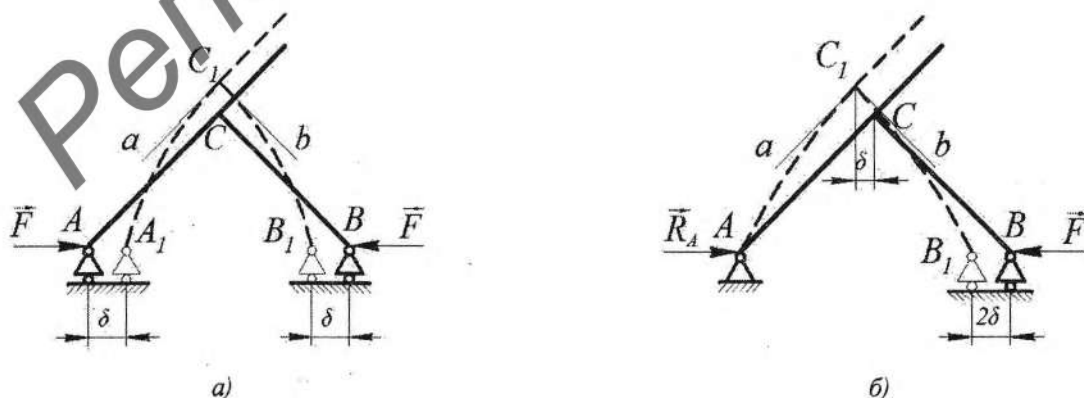
Пры пабудове сагнутых восей карысна ўлічваць наступныя іх уласцівасці і правілы:

- прамыя ўчасткі стрыжнявой сістэмы, на якіх выгінальны момант роўны нулю, застаюцца прамымі пасля нагружэння, але могуць змяніць сваё становішча ў плоскасці (участак  $BC$  на рысунку 9.2,  $a$ , перамясціўся ў становішча  $B_1C_1$ );
- прамыя ўчасткі стрыжнявой сістэмы, на якіх згінальны момант пастаянны ( $M_x = const$ ), згінаюцца па дузе акружнасці (участкі  $BC$  і  $AB$  на рысунках 9.2,  $b, в$ );
- жорсткія (без шарніраў) вуглы паміж участкамі стрыжнявой сістэмы пры згінанні не змяняюцца (на рысунках 9.2,  $a, в$ ,  $\angle aB_1c = \angle ABC$ );
- адпаведныя фрагменту сагнутага восі ці яе вузлу моманты не могуць мець аднолькавыя напрамкі, паколькі ўсе часткі стрыжнявой сістэмы ўраўнаважаны (гл. рыс. 9.1,  $z, d$ ).



Рысунк 9.2

Трэцяя ўласцівасць ілюструецца і рысункам 9.3, на якім механічныя сістэмы ўтвораны двума жорстка змацаванымі пад прамым вуглом стрыжнямі  $AC$  і  $BC$ . Сістэмы адрозніваюцца паміж сабою толькі відамі сувязей — на рысунку 9.3,  $a$ , абедзве апоры ўяўляюць рухомыя шарніры, а на рысунку 9.3,  $b$ , левая апора нерухомая. Паколькі  $R_A = F$ , то на грузкі на абедзве сістэмы аднолькавыя, таму і сагнутыя восі не адрозніваюцца. На кожнай з іх  $\angle aC_1b = \angle ACB$ .



Рысунк 9.3

## 10 ПРЫКЛАДЫ ВЫКАНАННЯ ЗАДАННЯ № 4

Зададзена стрыжнявая сістэма і адно з наступных механічных уздзеянняў на яе: засяроджаная сіла  $F$ , момант  $M$  ці размеркаваная нагрузка максімальнай інтэнсіўнасці  $q$ .

Неабходна:

1. Не складаючы ўмоў раўнавагі, вызначыць сапраўдныя напрамкі рэакцый сувязей, зыходзячы з іх механічнай сутнасці: рэакцыя сувязі — гэта сіла процідзеяння знешнім (актыўным) нагрузкам.

2. Шляхам аналізу сілавога ўздзеяння на механічную сістэму і правядзення ўяўнага эксперыменту пабудоваць яе сагнутую вось (пункцірнай ці каляровай лініяй).

3. Набліжана пабудоваць адпаведную сагнутай восі эпору выгінальных момантаў.

4. Набліжана (якасна) праверыць раўнавагу вузла стрыжнявой сістэмы.

5. У адным з сячэнняў ( $S_1$  ці  $S_2$ ) знайсці радыус крывізны сагнутай восі; лічыць, што жорсткасць усіх участкаў стрыжнявой сістэмы аднолькава і роўна  $EJ$ .

Варыянты заданняў прыведзены ў табліцы 1, якая разам са схемамі стрыжнявых сістэм змешчана ў дадатку А (с. 36). Нумар варыянта задаецца выкладчыкам. Кожнаму нумару адпавядае шыфр, які запісаны ў табліцы 1 дзвюма лічбамі праз кропку:  $j.k$ . Першай лічбай  $j$  абазначаны нумар схемы, другой  $k$  — нумар нагрузка на схеме стрыжнявой сістэмы. Напрыклад, у заданні № 5 шыфр задаецца лічбамі 5.6. Ім адпавядае схема 5 і размеркаваная нагрузка з максімальным значэннем інтэнсіўнасці  $q_6$ . А заданню № 28 адпавядае шыфр 12.2 са схемай 12 і нагрузкай  $F_2$ .

Атрымаўшы варыянт задання, студэнт пераносіць схему механічнай сістэмы ў спісытэк, захаваўшы на ёй толькі сваю зададзеную нагрузку. Затым абазначае на схеме вялікімі літарамі апоры і ўчасткі і выконвае пералічаныя вышэй дзеянні. Каб пвёрда авалодаць метадыкай якаснага аналізу дэфармацый пругкіх механічных сістэм, студэнту карысна выканаць некалькі заданняў.

Прыводзім прыклады выканання заданняў. Пры пабудове сагнутых восей (п. 2) перамяшчэнні для нагляднасці павялічваем у шмат разоў.

### Прыклад 1

Зададзена стрыжнявая сістэма нагружана засяроджанай сілай  $F$  (рыс. 10.1, а).

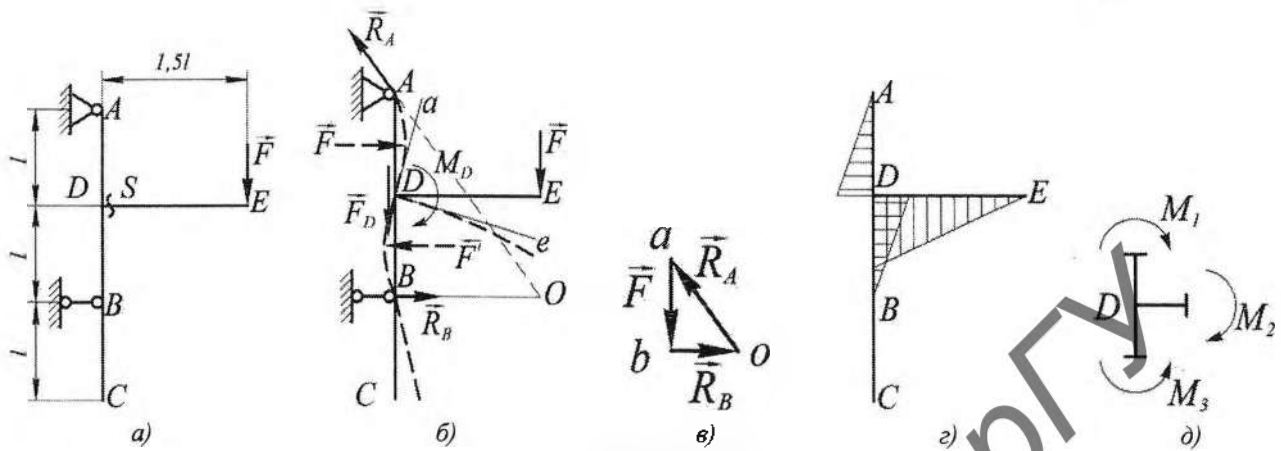
Неабходна: вызначыць напрамкі рэакцый сувязей, пабудоваць сагнутую вось, адпаведную ёй эпору момантаў, праверыць раўнавагу вузла і вызначыць радыус крывізны сагнутай восі ў сячэнні  $S$ .

Раішэнне.

Абазначаем сувязі і ўчасткі сістэмы літарамі  $A, B, C, D, E$ .

1. Вызначаем рэакцыі сувязей. Лінія дзеяння рэакцыі  $R_B$  праходзіць праз шарніры, г. зн. гарызантальна. Каб вызначыць яе напрамак, уяўна адкідаем сувязь  $B$ . Тады пад дзеяннем сілы  $F$  уся сістэма пачне паварочвацца вакол шарніра  $A$  па стрэлцы гадзінніка. Рэакцыя  $R_B$  павінна ўтрымліваць яе ад павароту — ствараць момант процілеглага напрамку. Прыходзім да высновы, што вектар  $R_B$  накіраваны ўправа. Шукаем лінію дзеяння рэакцыі  $R_A$ . Звяртаем увагу, што сістэма знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем трох сіл:  $F, R_A, R_B$ . У гэтым выпадку паводле першай прыкметы (гл. п. 8) лініі дзеяння ўсіх сіл перасякаюцца ў адным пункце. Гэты пункт абазначаем літарай  $O$ . Праз яго і праводзім лінію дзеяння  $AO$  рэакцыі  $R_A$ . Далей вызначаем напрамак вектара  $R_A$ . Шарнір  $B$  лічым нерухомым, а сувязь  $A$  ўяўна адкідаем. Тады сіла  $F$  пачне паварочваць сістэму вакол шарніра  $B$  па стрэлцы гадзінніка. Каб ураўнаважыць яе, рэакцыя  $R_A$  павінна ствараць момант адносна таго ж цэнтра, накіраваны супраць ходу стрэлкі гадзінніка. Для гэтага накіроўваем яе так, як паказана на рысунку 10.1, б. Напрамкі і велічыні рэакцый  $R_A, R_B$  можна вызначыць і графічным спосабам — шляхам пабудовы сілавога трохвугольніка на вектары  $F$ . Будуем яго на рысунку ў пэўным маштабе. Затым з пачатку  $a$  і канца  $b$  (гл. рыс. 10.1, в) праводзім лініі, паралельныя да  $AO$  і  $BO$ ; атрымліваем трохвугольнік  $abo$ . Яго стораны  $oa$  і  $bo$  ўяўляюць велічыні рэакцый  $R_A, R_B$  у тым жа маштабе, што і сіла  $F$ . Вызначаем іх напрамкі. Для

гэтага абыходзім трохвугольнік сіл у напрамку вектара  $F$ :  $a \rightarrow b \rightarrow o \rightarrow a$ . Атрымліваем на трохвугольніку  $abo$  напрамкі  $b \rightarrow o$ ,  $o \rightarrow a$  для вектараў  $R_A$ ,  $R_B$ . У правільна пабудаваным трохвугольніку сіл пlynь вектараў па контуру трохвугольніка сіл накіравана ў адным напрамку (у нашым прыкладзе — супраць руху стрэлкі гадзінніка).



Рысунк 10.1

2. Будзем сагнутую вось. Нам ужо знаёмы п. 9 і рысункі 9.1—9.3. Пачынаем пабудову для вертыкальнай часткі  $AB$ . Сілу  $F$  паралельна пераносім у вузел  $D$  з дабаўленнем пары  $M_D = F \cdot DE = 1,5Fl$ . Сіла  $F_D = F$  не выгінае стрыжань; яна толькі расцягвае частак  $AD$ . А пару  $M_D$  прадстаўляем у выглядзе дзвюх сіл  $F'$ , паказаных на рысунку 10.1, б, пункцірам. Верхняя сіла выгінае стрыжань выпукласцю ўправа, ніжняя — улева. Сагнутая вось для ўчастка  $DE$  будзеца, як для замацаванай на стрыжні  $AB$  і павернутай разам з ім кансольнай бэлькі (гл. напрыклад, рыс. 9.1, а). Паваротам апорнага стрыжня  $B$  ігнаруем.

3. Будзем эпору момантаў. Улічваем, што кансоль  $BC$  не выгінаецца, а моманты ў пунктах  $A$ ,  $B$ ,  $E$  роўны нулю і ўзрастаюць лінейна з набліжэннем да пункта  $D$  (гл. рыс. 9.1, в). Ардынаты момантаў адкладваем на спіснутых валокнах, якія вызначаем па сагнутай вوسی.

4. Правяраем раўнавагу вузла  $D$ . Пры гэтым якасна (а не колькасна) правяраецца і эпюра момантаў. Выразаем вузел  $D$  і прыкладваем адпаведныя эпюры моманты  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  у сячэннях стрыжняў (гл. рыс. 10.1, д). Як бачым, яны накіраваны ў розныя бакі:  $M_2$  — па ходу стрэлкі гадзінніка;  $M_1$ ,  $M_3$  — супраць. Таму магчыма роўнасць  $M_1 + M_3 - M_2 = 0$ . Вылік праверкі стануўчы.

5. Знаходзім радыус крывізны сагнутай вوسی ў сячэнні  $S$ :  $\rho = EJ/M_S$ , дзе  $M_S = 1,5Fl$  — выгінальны момант у сячэнні  $S$ .

### Прыклад 2

Зададзеная стрыжнявая сістэма замацавана пры дапамозе трох рухомах шарнірных апораў і нагнужана сілай  $F$  (гл. рыс. 10.2).

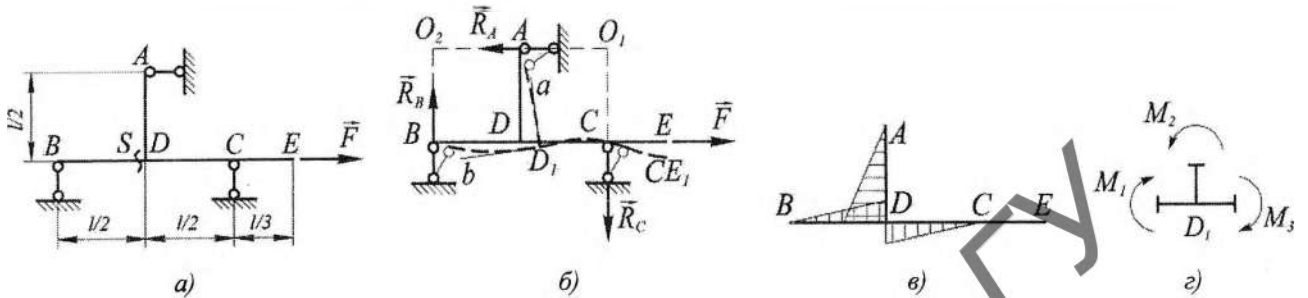
Неабходна: вызначыць напрамкі рэакцый сувязей (апораў), пабудаваць сагнутую вось і адпаведную ёй эпюру выгінальных момантаў, набліжана праверыць раўнавагу вузла  $D$  і вызначыць радыус крывізны сагнутай вوسی ў сячэнні  $S$ .

*Рашэнне.*

Абазначаем літарамі  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  сувязі і асобныя пункты сістэмы.

1. Вызначаем напрамкі рэакцый сувязей. Зададзеную механічную сістэму разглядаем як абсалютна цвёрдае цела. Лініі дзеяння ўсіх рэакцый тут вядомы. Яны арыентаваны так, як і апорныя стрыжні: лінія дзеяння рэакцыі  $R_A$  гарызантальная, а лініі дзеяння рэакцый  $R_B$ ,  $R_C$  вертыкальныя. Каб знайсці напрамак вектара  $R_A$  разважаем наступным чынам. Сіла  $F$  імкнецца зрушыць стрыжнявую сістэму ўправа. Рухомыя стрыжні  $B$  і  $C$  не могуць процідейнічаць такому зруху, бо перпендыкулярны да лініі дзеяння сілы  $F$ . Утрымлівае сістэму толькі рэакцыя  $R_A$ . Таму яна

накіравана ўлева (гл. рыс. 10.2, б) і роўна сіле  $F$ . Вызначаем напрамак рэакцыі  $R_B$ . У якасці цэнтра момантаў выбіраем пункт  $O_1$  (гл. рыс. 10.2, б). Адносна яго сістэму можа павярнуць толькі сіла  $F$ , а ўтрымліваць ад павароту — толькі рэакцыя  $R_B$ . Паколькі сіла імкнецца павярнуць сістэму супраць ходу стрэлкі гадзінніка, то сіла процідзеяння  $R_B$  накіравана па стрэлцы гадзінніка, г. зн. уверх. Аналагічна, разглядаючы раўнавагу сістэмы адносна цэнтра  $O_2$ , прыйдзем да высновы, што вектар  $R_C$  накіраваны ўніз.



Рысунак 10.2

**Заўвага.** Вышэй напрамкі рэакцый сувязей вызначаны агульнымі для сістэм на трох апорах разважаннямі. Але ў гэтым прыватным прыкладзе велічыні і напрамкі рэакцый  $R_B$ ,  $R_C$  можна знайсці хутчэй — без цэнтраў  $O_1$ ,  $O_2$ . Пасля таго, як устаноўлена, што вектар  $R_A$  утварае пару  $M_1 = F \cdot AD$  з сілай  $F$ , можна сцвярджаць, што і рэакцыі  $R_B$ ,  $R_C$  павінны ўтвараць пару процілеглага напрамку (як на рысунку 10.2, б) з момантам  $M_2 = R_B \cdot BC$ ; пры гэтым  $R_B \cdot BC = F \cdot AD$ . Адсюль, калі ўлічыць размеры, знойдзем:  $R_B = R_C = F/2$ . Тут у разважаннях выкарыстана прыкмета 3 з п. 8.

2. Набліжана будзем сагнутую вось стрыжнявой сістэмы. Разглядаючы схему на рысунку 10.2, а, заўважаем, што пад дзеяннем сілы  $F$  апорныя стрыжні павернуцца на малыя вуглы, як паказана на рысунку 10.2, б, пункцірам. Іх перамяшчэнне суправаджаецца паваротам вузла  $D$  і выгінам стрыжняў, што жорстка злучаны ў ім. Напрамкі выпукласцей можна вызначыць наступным чынам. Уяўна жорстка замацаваць вузел  $D$ , а рэакцыі  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$  лічыць актыўнымі сіламі. Тады пад дзеяннем гэтых сіл участкі  $AD$ ,  $BD$ ,  $CD$  будуць згінацца, як кансольныя бэлькі. У выніку атрымаем сагнутую вось, паказаную на рысунку 10.2, б, пункцірнай лініяй. Від сагнутага гарызантальнай часткі  $BC$  можна ўстанавіць інакш. Уяўна перанесці рэактыўную сілу  $R_A$  паралельна ў пункт  $D$  і далучыць пару  $M = R_A \cdot AD$ , накіраваную супраць стрэлкі гадзінніка. Пара  $M$  сагне стрыжань  $BC$ , як паказана на рысунку 10.2, б, дзе  $\angle bD_1a = \angle BDA$ .

3. Будзем адпаведную сагнутай вості эпюру момантаў на сціснутых валокнах. На кансоль  $CE$  дзейнічае восевая сіла  $F$ , якая толькі расцягвае яе; тут выгінальны момант роўны нулю. На астатніх трох участках згін выкліканы рэактыўнымі сіламі  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$ ; таму ардынаты эпюраў прапарцыянальны адлегласцям сячэнняў ад пунктаў  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , дзе прыкладзены гэтыя сілы (гл. рыс. 10.2, в).

4. Выконваем набліжаную праверку раўнавагі вузла  $D$ . Для гэтага выдзяляем вузел з сістэмы. Дзеянне адкінутых частак замяняем момантамі  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ , напрамкі якіх выбіраем у адпаведнасці з эпюрай момантаў і напрамкамі выгінаў (гл. рыс. 10.2, г). Выснова: вузел можа знаходзіцца ў раўнавазе, бо магчыма выкананне ўмовы:  $M_2 - M_1 - M_3 = 0$ .

5. Знаходзім радыус крывізны сагнутага вості ў сячэнні  $S$ :  $\rho = EJ/M_S$ , дзе  $M_S = R_B l/2$  — выгінальны момант у сячэнні  $S$ ;  $R_B = F/2$ . Канчаткова атрымліваем:  $\rho = 4EJ/Fl$ .

### Прыклад 3

Зададзеная рама нагружана на кансолі нагрузкай, размеркаванай па лінейным законе; яе максімальная інтэнсіўнасць роўна  $q$  (рыс. 10.3, а).

Неабходна: вызначыць напрамкі рэакцый сувязей, пабудаваць сагнутую вось і адпаведную ёй эпюру выгінальных момантаў, выканаць набліжаную праверку раўнавагі вузла  $D$  і вызначыць радыус крывізны сагнутага вості ў сячэнні  $S$ .

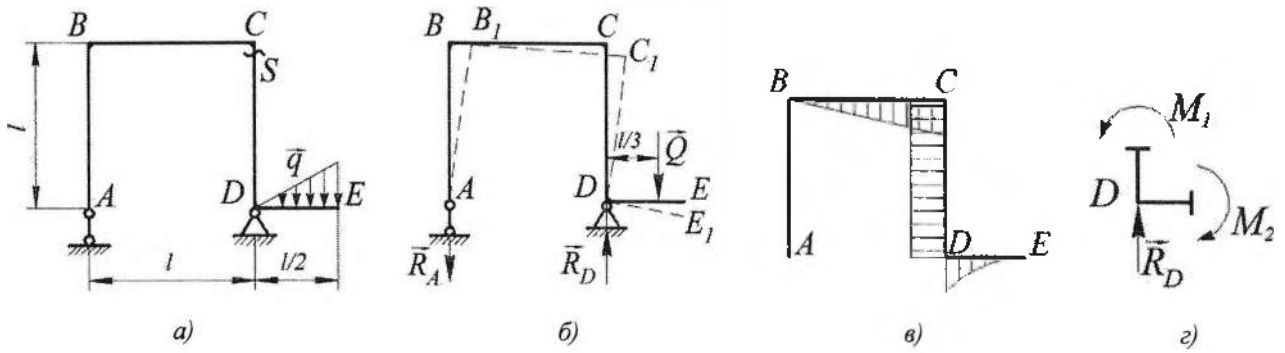


Рисунок 10.3

### Розв'язання.

Абазначаємо опори і пункти рами літарамі  $A, B, C, D, E$ . Розмерковану навантаження заміняємо рівнодійною силою  $Q = ql/4$ .

1. Визначаємо напрямки реакцій опор. Уявно відкидаємо опору  $A$ . Тоді рама під дією сили  $Q$  пачне паварочуватися навколо шарніра  $D$  у напрямку стрілки гвинтика, а яє пункт  $A$  — павдмаццатя *ўверх*. Каб утримати раму ў раўнавазі на опору, реакція  $A$  неабходна накіраваць *ўніз* (гл. рис. 10.3, б). Пераходзім да вызначэння напрямку реакцыі опоры  $D$ . Як бачым на рысунку 10.3, б, рама знаходзіцца ў раўнавазі пад дзеяннем трох сіл, прычым  $Q$  і  $R_A$  паралельны паміж сабою і накіраваны *ўніз*. Тоды паводле прыкметы 2, што змешчана ў пункце 8, реакцыя  $R_D$  павінна быць паралельна да вектараў  $Q, R_A$  і для раўнавагі сістэмы накіравана *ўверх*.

2. Будзем сагнутую вось рамы. Сіла  $Q$  імкнецца павялічыць прамы вугал  $CDE$ . Таму яго стораны  $DC$  і  $DE$  выгінаюцца выпукласцямі ўнутр гэтага вугла: кансоль — выпукласцю *ўверх*, старана  $DC$  — выпукласцю *ўправа*. Далей улічваем, што лінія дзеяння реакцыі  $R_A$  супадае са стараной  $AB$  рамы; таму не выгінае яе. А жорсткія прамыя вуглы з вяршынямі  $B, C$  застаюцца прамымі і пасля дэфармацыі. У выніку сінтэзу прыведзенай інфармацыі атрымліваем сагнутую вось, паказаную на рысунку 10.3, б, пункцірам; на ім выпукласць участка  $BC$  накіравана *ўверх*.

3. Будзем эпюру выгінальных момантаў. На кансолі  $ED$  размеркаваная навантаження; таму выгінальны момант узрастае ад нуля ў пункце  $E$  да максімальнага значэння ў пункце  $D$  па крывалінейным законе. Участак  $CD$  выгінаецца толькі сілай  $Q$ , лінія дзеяння якой паралельна да яго; таму момант ва ўсіх сячэннях участка аднолькавы. Выгінальны моманты ў сячэннях участка  $BC$  стварае реакцыя  $R_A$ ; таму яны ўзрастаюць у напрамку ад п.  $B$  да п.  $C$  па лінейным законе. Эпюру будзем на спіснутых валокнах (гл. рис. 10.3, в).

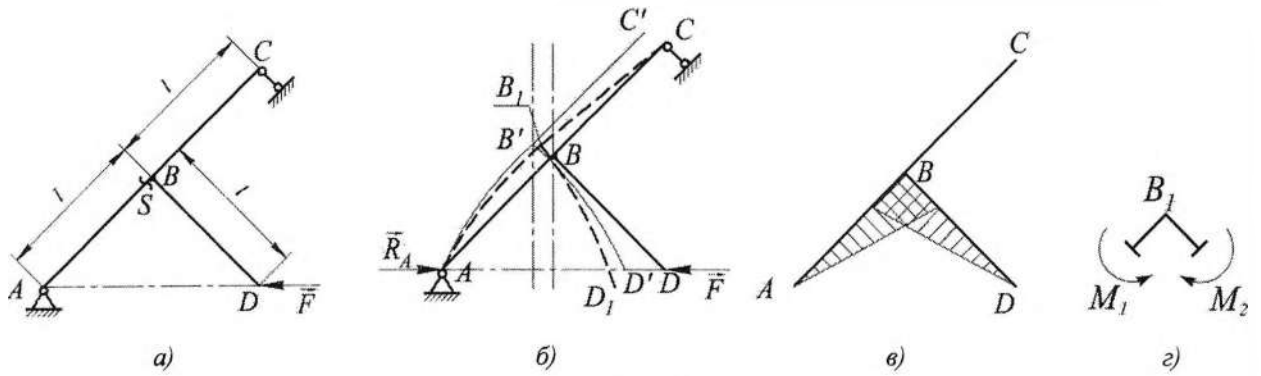
4. Правяраем раўнавагу вузла  $D$ . На яго дзейнічаюць выгінальны моманты  $M_1, M_2$  з боку адкінутых частак рамы і реакцыя  $R_D$ . Як бачым на рысунку 10.3, г, моманты накіраваны ў процілеглыя бакі (а сіла  $R_D$  на паварот вузла не ўплывае). Выснова: вузел  $D$  можа заставацца ў раўнавазі, паколькі магчыма роўнасць  $M_1 - M_2 = 0$ .

5. Визначаем радыус крывізны сагнутай восі для сячэння  $S$ :  $\rho = EJ/M_S$ , дзе  $M_S = Ql/3$  — выгінальны момант у гэтым сячэнні. Заўважаем, што на ўчастку  $CD$  для ўсіх сячэнняў моманты аднолькавы. Гэта азначае, што ўчастак выгінаецца па дузе акружнасці. Дарэчы студэнту варта задумацца, дзе ж знаходзіцца цэнтр крывізны ўчастка? Пошук адказу на гэтае пытанне дазволіць істотна паглыбіць свае веды.

### Прыклад 4

Зададзеная стрыжнявая сістэма навантажана засяроджанай сілай  $F$  (гл. рис. 10.4, а).

Неабходна: вызначыць напрямкі реакцый сувязей, пабудаваць сагнутую вось і адпаведную ёй эпюру выгінальных момантаў, набліжана правярыць раўнавагу вузла  $B$  і вызначыць радыус крывізны сагнутай восі ў сячэнні  $S$ .



Рысунк 10.4

**Рашэнне.**

Абазначаем апоры і ўчасткі сістэмы літарамі  $A, B, C, D$ .

1. Вызначаем рэакцыі сувязей. Як бачым на рысунку 10.4, *а*, лінія дзеяння сілы  $F$  праходзіць праз шарнір  $A$ . Гэта азначае, што яна ўраўнаважваецца толькі рэакцыяй апоры  $A$ . А рэакцыя сувязі  $C$  роўна нулю ( $R_C = 0$ ). Са статэкі вядома, што калі цэла знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем дзвюх сіл (у нашым прыкладзе гэта сілы  $F$  і  $R_A$ ), то яны роўны па велічыне ( $R_A = F$ ), накіраваны ў процілеглыя бакі па агульнай лініі дзеяння (гл. рыс. 10.4, *б*).

2. Будуем сагнутую вось. Паколькі  $R_C = 0$ , то ўчастак  $BC$  не выгінаецца. Каб пабудаваць сагнутыя вості для ўчасткаў  $AB$  і  $AD$ , карысна вярнуцца да рысунка 9.3, *б*. Будуем сагнутую вось у два дзеянні. Спачатку ігнаруем апорай  $C$ . Сіла імкнецца паменшыць вугал  $ABD$ . Таму яго стораны  $AB$  і  $AD$  выгінаюцца ўвагнутасцямі ўнутр вугла. Атрымліваем фігуру, паказаную на рысунку 10.4, *б*, тонкай лініяй. Затым гэтую фігуру (нібы зробленую з дроту) паварочваем вакол шарніра  $A$  па стрэлцы гадзінніка да сумяшчэння канца  $C'$  з апорай  $C$ . Канчатковая сагнутая вось паказана на рысунку пункцірнай лініяй  $AB_1CD_1$ .

3. Будуем эпюру выгінальных момантаў ад засяроджаных сіл  $F$  і  $R_A$  на сціснутых валокнах. Улічваем, што значэнні момантаў узрастаюць пры аддаленні ад пунктаў  $A$  і  $D$  у напрамку да вяршыні  $B$  па лінейным законе (гл. рыс. 10.4, *в*).

4. Набліжана правяраем раўнавагу вузла  $B_1$  (гл. рыс. 10.4, *г*). Выказаем уяўна гэты вузел з сістэмы, а дзеянне на яго адкінутых частак замяняем момантамі  $M_1, M_2$ . Іх напрамкі выбіраем у адпаведнасці з эпюрай момантаў. Выснова: паколькі моманты накіраваны ў процілеглыя бакі, то раўнавага вузла  $B_1$  магчыма (бо магчыма роўнасць  $M_1 - M_2 = 0$ ).

**Прыклад 5**

Зададзеная стрыжнявая сістэма нагружана засяроджанай сілай  $F$ , лінія дзеяння якой праходзіць праз цэнтр жорсткай замацоўкі (рыс. 10.5, *а*).

Неабходна: вызначыць напрамак рэакцыі сувязі, пабудаваць сагнутую вось і адпаведную ёй эпюру выгінальных момантаў, набліжана правярыць раўнавагу вузла  $B$  і вызначыць радыус крывізны сагнутай вості ў сячэнні.

**Рашэнне.**

Абазначаем жорсткую замацоўку літарай  $A$ , а ўчасткі — літарамі  $AB, BC$ .

1. Вызначаем рэакцыю апоры  $A$ . У агульным выпадку, як адзначалася вышэй, жорсткая замацоўка процідзейнічае паступальнаму перамяшчэнню аб'екта і яго павароту. Таму ў ёй узнікаюць рэактыўная сіла  $R_A$  і рэактыўная пара  $M_A$ . У нашым прыватным выпадку лінія дзеяння сілы  $F$  праходзіць праз цэнтр замацоўкі і таму не стварае актыўнага паваротнага ўздзеяння на сістэму вакол цэнтра  $A$ . Па гэтай прычыне не ўзнікае і рэактыўнае процідзеянне — пара  $M_A$ . Значыць, механічная сістэма знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем дзвюх сіл —  $F$  і  $R_A$ . У гэтым выпадку, як тлумачылася ў папярэднім прыкладзе, у сілаў агульная лінія дзеяння і процілеглыя накірункі; пры гэтым  $R_A = F$  (гл. рыс. 10.5, *б*).

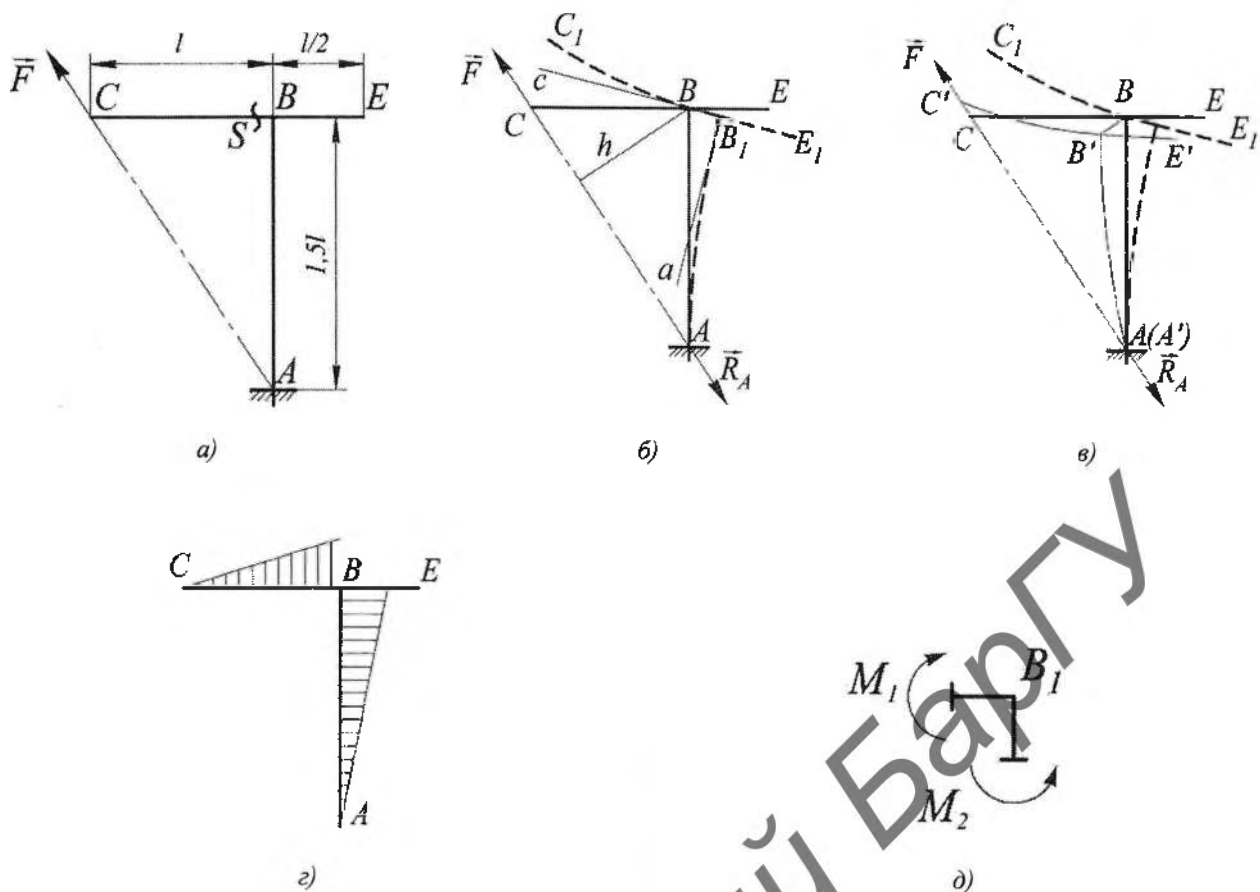


Рисунок 10.5

2. Будем сагнутою вась. Улічваем, што жорсткія (без шарніраў) вуглы з вяршынямі  $A$  і  $B$  павінны заставацца прамымі. Сілы  $F$  і  $R_A$  імкнуцца павялічыць вугал  $ABC$ . Таму выпукласці яго старон  $AB$  і  $BC$  накіраваны ўнутр яго, г. зн. участка  $AB$  — улева, участка  $BC$  — уніз (гл. рыс. 10.5, б). Напрамак выпукласці участка  $AB$  можна вызначыць і пры дапамозе паралельнага пераносу сілы  $F$  у пункт  $B$ . Атрыманая пара  $M_B = F \cdot h$ , накіраваная па стрэлцы гадзінніка, выгінае участка  $AB$  па дузе акружнасці выпукласцю ўлева, а перанесеная сіла  $F$  — управа. Але ўплыў сілы меншы, бо яе момант дасягае значэння  $F \cdot h$  толькі ў пункце  $A$ . Таму і атрымаем тую ж крывую, што на рысунку 10.5, б. Магчымы і трэці спосаб аналізу, выкарыстаны ў папярэднім прыкладзе. Уяўна адкідаем апору  $A$ , а сілу  $R_A$  разглядаем як актыўную. Тады пад дзеяннем сіл  $F$  і  $R_A$  сагнутая вась прыме выгляд, паказаны на рысунку 10.5, в, тонкай лініяй  $A'B'C'E'$ . Гэту фігуру ўстанаўліваем на апору  $A$ , як паказана пункцірам.

3. Будзем эпіору выгінальных момантаў, адпаведную сагнутай вась (гл. рыс. 10.5, з).

4. Набліжана правяраем раўнавагу вузла  $B_1$  (гл. рыс. 10.5, д). Дзеянне адкінутых частак сістэмы замяняем момантамі  $M_1$ ,  $M_2$ . Яны накіраваны ў процілеглыя бакі. Прыходзім да высновы, што вузел можа знаходзіцца ў раўнавазе, бо магчыма роўнасць  $M_2 - M_1 = 0$ .

5. Знаходзім радыус крывізны сагнутай васьі ў сячэнні  $S$ :  $\rho = EJ/M_S$ , дзе  $M_S = F \cdot h$  — выгінальны момант у гэтым сячэнні.

Таблица А.1

Нумар схемы	Варыянт	Дадзена							Знайсці				
		сілы, Н	Н	моманты, Н·м	М <sub>1</sub>	М <sub>2</sub>	радыусы колаў, м	г <sub>1</sub>	г <sub>2</sub>	г <sub>3</sub>	напрамак павароту кола	ураўнаважвальную сілу	ураўнаважвальны момант
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
	1.1	20	—	0,6	—	0,02	0,06	—	2	F <sub>1</sub>	—	—	
	1.2	30	—	1,4	—	0,04	0,18	—	2	—	—	r <sub>1</sub>	
1	1.3	—	30	—	4,0	0,03	0,14	—	1	—	M <sub>2</sub>	—	
	1.4	—	20	—	—	0,05	0,22	—	1	F <sub>2</sub>	—	—	
	1.5	40	—	2,0	—	0,06	0,26	—	2	—	M <sub>2</sub>	—	
2	2.1	40	—	15	—	0,3	0,6	—	1	—	M <sub>1</sub>	—	
	2.2	—	50	—	30	0,4	0,8	—	2	F <sub>2</sub>	—	—	
	2.3	50	—	20	—	0,5	0,8	—	2	F <sub>1</sub>	—	—	
2	2.4	—	60	—	70	0,6	1,0	—	1	—	M <sub>2</sub>	—	
	2.5	50	—	40	—	0,7	0,9	—	1	—	M <sub>1</sub>	—	
	3.1	50	—	4,0	—	0,1	0,2	—	1	F <sub>1</sub>	—	—	
3	3.2	—	60	—	16	0,2	0,3	—	2	F <sub>2</sub>	—	—	
	3.3	60	—	20	—	0,3	0,5	—	2	—	M <sub>1</sub>	—	
	3.4	—	40	—	30	0,4	0,6	—	1	—	M <sub>2</sub>	—	
4	3.5	80	—	36	—	0,5	0,8	—	2	F <sub>1</sub>	—	—	
	4.1	—	80	—	90	1,4	1,2	0,6	1	F <sub>2</sub>	—	—	
	4.2	50	—	60	—	1,0	0,8	0,6	2	—	M <sub>1</sub>	—	
4	4.3	—	60	—	65	1,2	0,8	0,6	2	—	M <sub>2</sub>	—	
	4.4	80	—	100	—	1,5	1,2	0,6	1	F <sub>1</sub>	—	—	
	4.5	—	70	—	80	1,3	1,0	0,6	3	—	—	r <sub>2</sub>	
5	5.1	100	—	30	—	0,2	0,6	—	2	—	M <sub>1</sub>	—	
	5.2	—	100	—	150	0,4	1,8	—	2	F <sub>2</sub>	—	—	
	5.3	80	—	40	—	0,3	1,4	—	1	F <sub>1</sub>	—	—	
5	5.4	—	60	—	30	0,6	1,4	—	2	—	M <sub>2</sub>	—	
	5.5	120	—	50	—	0,5	1,2	—	1	—	—	r <sub>1</sub>	
	6.1	—	100	—	15	0,30	0,10	—	1	F <sub>2</sub>	—	—	
6	6.2	60	—	20	—	0,50	0,20	—	2	—	M <sub>1</sub>	—	
	6.3	—	80	—	40	0,40	0,15	—	1	—	M <sub>2</sub>	—	
	6.4	80	—	50	—	0,70	0,30	—	2	—	—	r <sub>1</sub>	
7	6.5	—	120	—	80	0,60	0,25	—	1	F <sub>2</sub>	—	—	
	7.1	80	60	—	—	0,40	0,60	—	2	F <sub>1</sub>	—	—	
	7.2	—	70	—	30	0,30	0,50	—	2	—	M <sub>2</sub>	—	
7	7.3	60	80	—	—	0,25	0,50	—	2	F <sub>2</sub>	—	—	
	7.4	—	100	—	60	0,50	0,70	—	2	—	—	r <sub>2</sub>	
	7.5	50	60	—	—	0,35	0,45	—	2	F <sub>1</sub>	—	—	

Нумар схеми	Варыянт	Дадзена							Знайсці				
		сілы, Н	моманты, Н·м	радыусы колаў, м	напрамак павароту кола	ураўнаважвальную сілу	ураўнаважвальны момант	радыус кола					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
8	8.1	—	80	—	16	0,10	0,15	0,10	3	—	—	$r_3$	
	8.2	70	—	20	—	0,10	0,40	0,30	2	—	$M_1$	—	
	8.3	60	—	25	—	0,10	0,30	0,20	3	$F_1$	—	—	
9	8.4	—	100	—	20	0,10	0,35	0,25	2	$F_2$	—	—	
	8.5	100	—	40	—	0,10	0,30	0,15	2	—	$M_1$	—	
	9.1	80	—	30	—	0,40	0,60	—	1	—	$M_1$	—	
10	9.2	—	70	—	40	0,30	0,50	—	2	$F_2$	—	—	
	9.3	90	—	15	—	0,20	0,30	—	2	$F_1$	—	—	
	9.4	—	60	—	25	0,25	0,50	—	1	—	$M_2$	—	
11	9.5	100	—	40	—	0,35	0,40	—	2	—	—	$r_1$	
	10.1	—	40	—	30	0,50	1,00	0,15	1	$F_2$	—	—	
	10.2	—	60	—	25	0,30	0,50	0,15	2	—	$M_2$	—	
12	10.3	70	—	40	—	0,40	0,50	0,15	3	$F_1$	—	—	
	10.4	—	50	—	10	0,20	0,30	0,15	3	—	$M_2$	—	
	10.5	60	—	30	—	0,35	0,45	0,15	—	$F_1$	—	—	
11	11.1	90	—	40	—	0,35	0,50	—	1	—	—	$r_1$	
	11.2	—	80	—	30	0,20	0,30	—	2	$F_2$	—	—	
	11.3	50	—	30	—	0,40	0,55	—	2	—	$M_1$	—	
12	11.4	—	60	—	20	0,30	0,40	—	1	$F_2$	—	—	
	11.5	70	—	25	—	0,50	0,70	—	2	—	$M_1$	—	
	12.1	—	20	—	5	0,10	0,20	0,10	3	$F_2$	—	—	
12	12.2	40	—	15	—	0,25	0,35	0,10	2	$F_1$	—	—	
	12.3	60	—	20	—	0,20	0,40	0,10	1	—	$M_1$	—	
	12.4	—	40	—	30	0,35	0,45	0,10	2	—	—	$r_2$	
12	12.5	90	—	20	—	0,30	0,40	0,10	1	$F_1$	—	—	

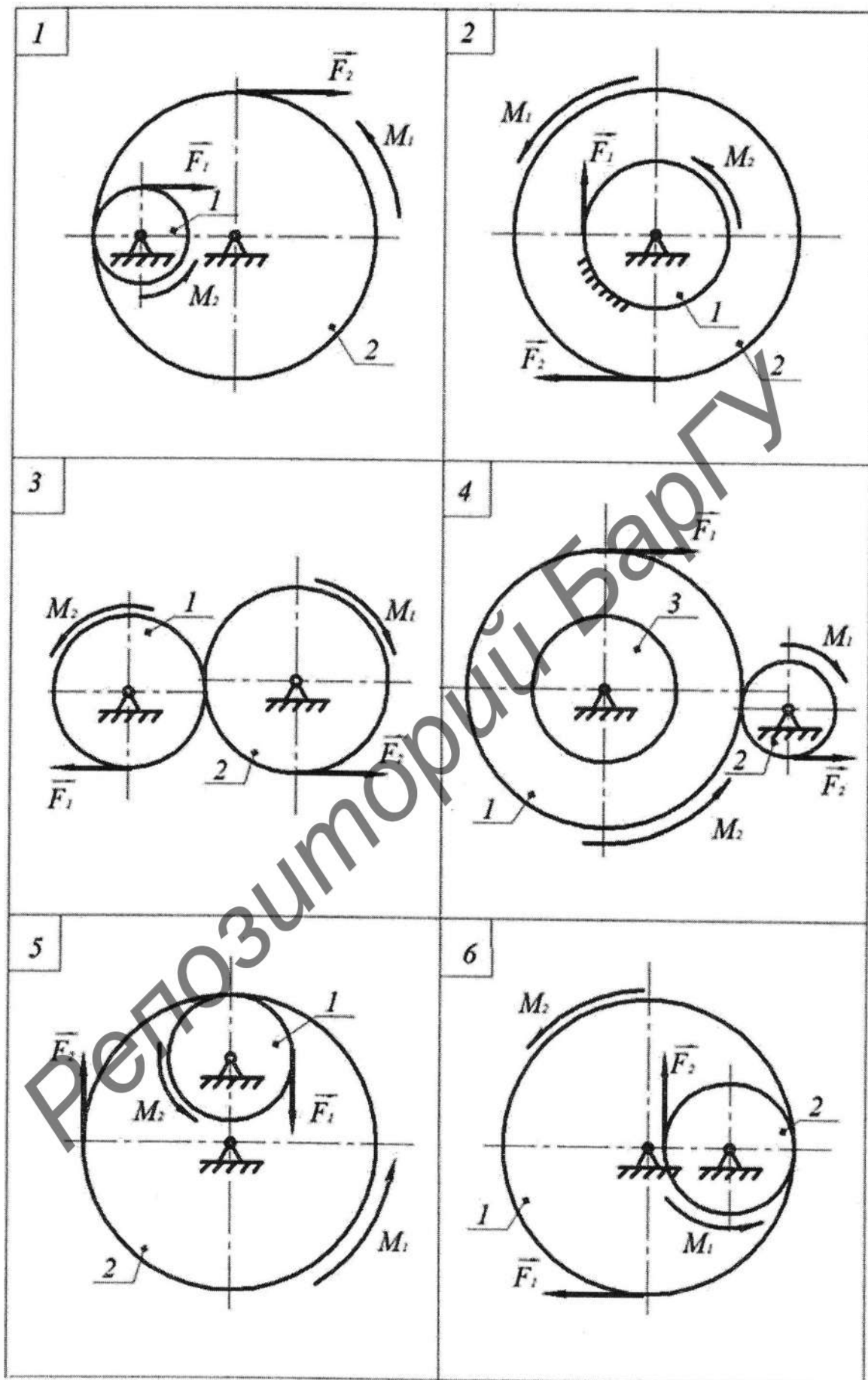


Рисунок А.1 — Схемы да задания № 1

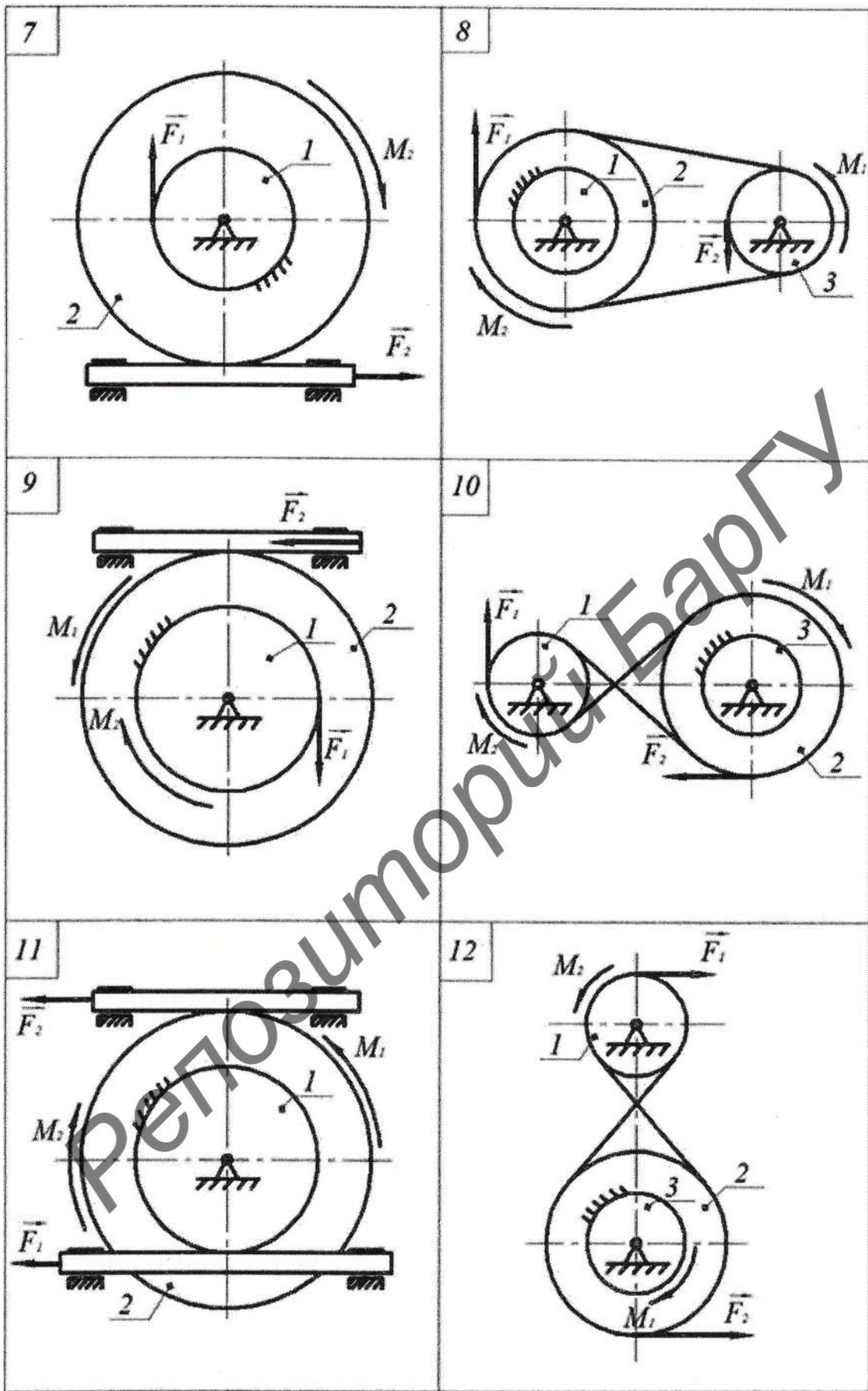


Рисунок А.1 — Законченне

Таблица Б.1

Нумар схемы	Вариант	силы, Н				момент, Н·м		α, град	f	радиусы колау, м			напрамак павароту кола	Значиці абсяг значэння ураўнаважвальнай сілы
		P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	F	M	r <sub>1</sub>	r <sub>2</sub>			r <sub>3</sub>				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		
	1.1	120	200	—	—	45	0,2	0,2	0,5	—	2	P <sub>1</sub>		
1	1.2	100	180	—	—	60	0,3	0,3	0,8	—	2	P <sub>2</sub>		
	1.3	130	190	—	—	30	0,1	0,4	0,9	—	1	P <sub>2</sub>		
1	1.4	150	220	—	—	45	0,4	0,3	0,7	—	2	P <sub>1</sub>		
	1.5	140	200	—	—	60	0,2	0,2	0,6	—	1	P <sub>1</sub>		
2	2.1	100	130	—	—	60	0,3	0,4	0,8	—	2	P <sub>2</sub>		
	2.2	150	170	—	—	45	0,2	0,3	0,6	—	2	P <sub>1</sub>		
2	2.3	130	160	—	—	45	0,4	0,1	0,3	—	2	P <sub>2</sub>		
	2.4	120	150	—	—	30	0,1	0,6	0,8	—	2	P <sub>2</sub>		
3	2.5	160	200	—	—	60	0,3	0,2	0,4	—	2	P <sub>1</sub>		
	3.1	150	130	—	—	30	0,2	0,3	0,4	0,3	3	P <sub>2</sub>		
3	3.2	180	200	—	—	30	0,5	0,2	0,3	0,2	2	P <sub>1</sub>		
	3.3	200	230	—	—	60	0,3	0,4	0,6	0,3	2	P <sub>1</sub>		
3	3.4	160	180	—	—	45	0,1	0,1	0,3	0,2	3	P <sub>2</sub>		
	3.5	140	100	—	—	45	0,4	0,5	0,7	0,4	1	P <sub>1</sub>		
4	4.1	160	180	—	—	60	0,3	0,4	0,5	—	1	P <sub>2</sub>		
	4.2	200	230	—	—	30	0,5	0,3	0,5	—	1	P <sub>2</sub>		
4	4.3	170	200	—	—	30	0,1	0,3	0,4	—	2	P <sub>1</sub>		
	4.4	210	240	—	—	45	0,4	0,2	0,3	—	1	P <sub>2</sub>		
4	4.5	190	150	—	—	60	0,2	0,5	0,6	—	2	P <sub>1</sub>		
	5.1	140	200	—	—	30	0,5	0,2	0,4	—	1	P <sub>2</sub>		
5	5.2	150	190	—	—	60	0,4	0,2	0,3	—	2	P <sub>2</sub>		
	5.3	130	150	—	—	30	0,1	0,3	0,5	—	1	P <sub>1</sub>		
5	5.4	100	140	—	—	45	0,2	0,1	0,3	—	2	P <sub>1</sub>		
	5.5	120	160	—	—	60	0,3	0,4	0,6	—	1	P <sub>2</sub>		
6	6.1	240	140	—	—	45	0,2	0,2	0,6	—	2	P <sub>2</sub>		
	6.2	200	140	—	—	30	0,4	0,1	0,3	—	2	P <sub>1</sub>		
6	6.3	220	160	—	—	60	0,3	0,3	0,8	—	1	P <sub>1</sub>		
	6.4	180	150	—	—	45	0,1	0,4	0,9	—	2	P <sub>2</sub>		
7	6.5	200	120	—	—	60	0,3	0,3	0,7	—	1	P <sub>2</sub>		
	7.1	220	250	—	—	30	0,3	0,5	0,6	1,4	2	P <sub>1</sub>		
7	7.2	230	260	—	—	45	0,1	0,6	0,8	1,6	3	P <sub>1</sub>		
	7.3	190	210	—	—	60	0,4	0,2	0,4	1,5	3	P <sub>2</sub>		
7	7.4	210	240	—	—	30	0,2	0,2	0,5	1,3	2	P <sub>2</sub>		
	7.5	150	200	—	—	45	0,5	0,3	0,5	1,2	1	P <sub>1</sub>		

Нумар схемы	Варыянт	сілы, Н			момант, Н·м		Далёзна			Знакшці		
		$P_1$	$P_2$	$F$	$M$	$\alpha$ , град	$f$	радыусы колаў, м			напрамак павароту кола	абсяг значэнняў ураўнаважвальнай сілы
8	8.1	200	230	—	—	45	0,2	0,3	0,4	0,3	1	$P_2$
	8.2	150	180	—	—	60	0,4	0,2	0,4	0,3	2	$P_1$
	8.3	220	250	—	—	60	0,5	0,4	0,6	0,4	3	$P_1$
9	8.4	140	180	—	—	30	0,1	0,3	0,6	0,5	3	$P_2$
	8.5	180	220	—	—	45	0,3	0,2	0,3	0,2	1	$P_2$
	9.1	100	—	—	200	30	0,6	0,2	0,4	0,3	3	$M$
10	9.2	150	—	—	280	30	0,2	0,2	0,3	0,1	1	$P_1$
	9.3	130	—	—	220	60	0,1	0,4	0,6	0,3	2	$M$
	9.4	140	—	—	260	45	0,3	0,3	0,5	0,2	2	$P_1$
11	9.5	120	—	—	240	45	0,2	0,3	0,4	0,3	3	$P_1$
	10.1	140	100	—	—	60	0,3	0,2	0,4	—	1	$P_2$
	10.2	120	80	—	—	30	0,2	0,2	0,3	—	2	$P_1$
12	10.3	130	90	—	—	60	0,4	0,3	0,5	—	2	$P_1$
	10.4	150	110	—	—	45	0,5	0,3	0,6	—	2	$P_2$
	10.5	140	80	—	—	45	0,1	0,1	0,3	—	1	$P_2$
11	11.1	140	—	100	—	45	0,1	0,3	0,5	—	2	$P_1$
	11.2	150	—	110	—	45	0,5	0,2	0,5	—	2	$F$
	11.3	130	—	90	—	60	0,4	0,4	0,6	—	1	$F$
12	11.4	120	—	100	—	30	0,2	0,1	0,2	—	1	$P_1$
	11.5	140	—	120	—	60	0,3	0,2	0,3	—	2	$P_1$
	12.1	100	—	—	240	30	0,5	0,3	0,6	0,2	3	$M$
12	12.2	120	—	—	260	30	0,6	0,3	0,5	0,3	2	$M$
	12.3	80	—	—	220	60	0,4	0,4	0,6	0,4	3	$P_1$
	12.4	90	—	—	280	45	0,3	0,4	0,4	0,3	2	$P_1$
	12.5	130	—	—	200	45	0,1	0,2	0,1	0,3	1	$M$

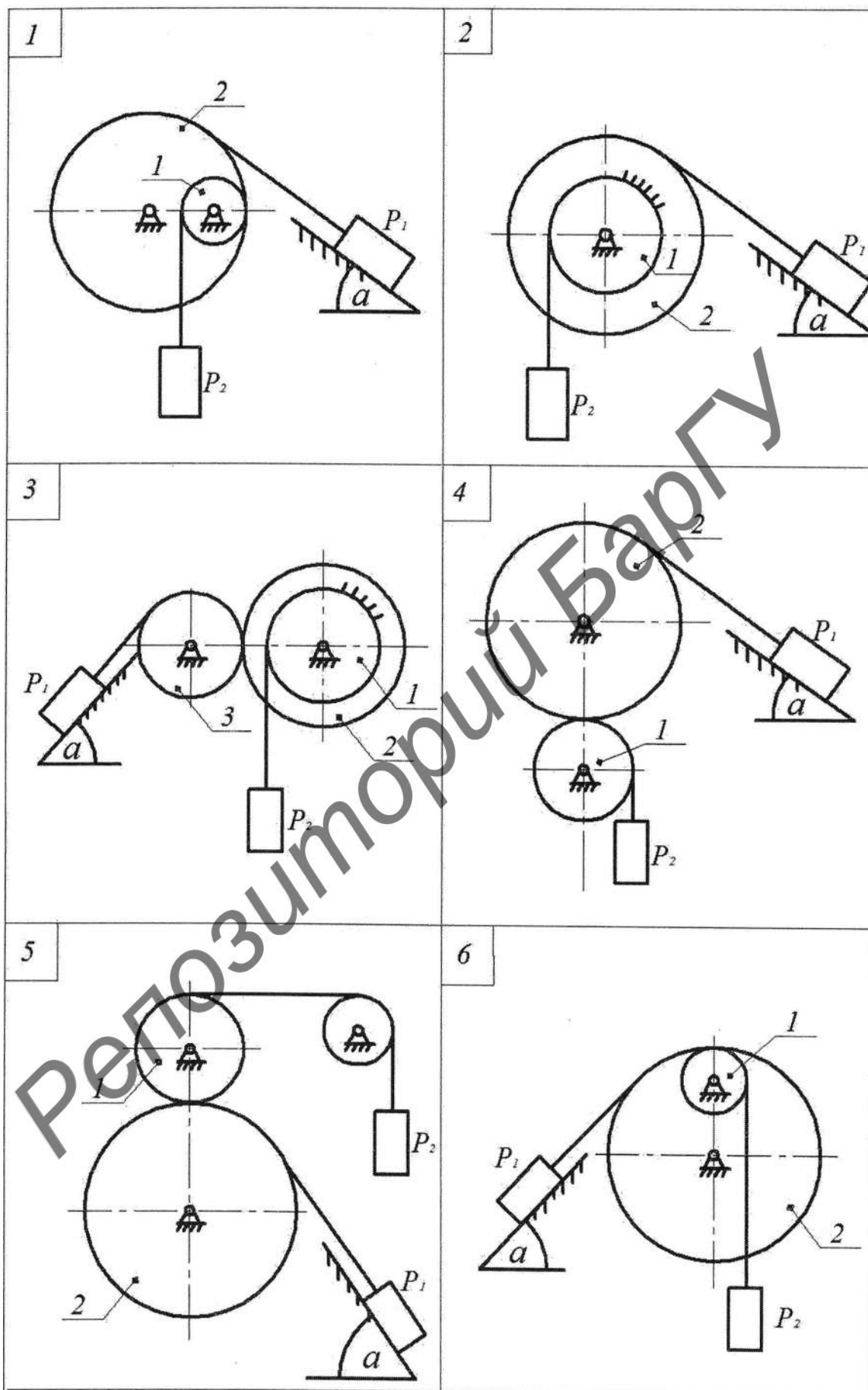


Рисунок Б.1 — Схемы да задания № 2

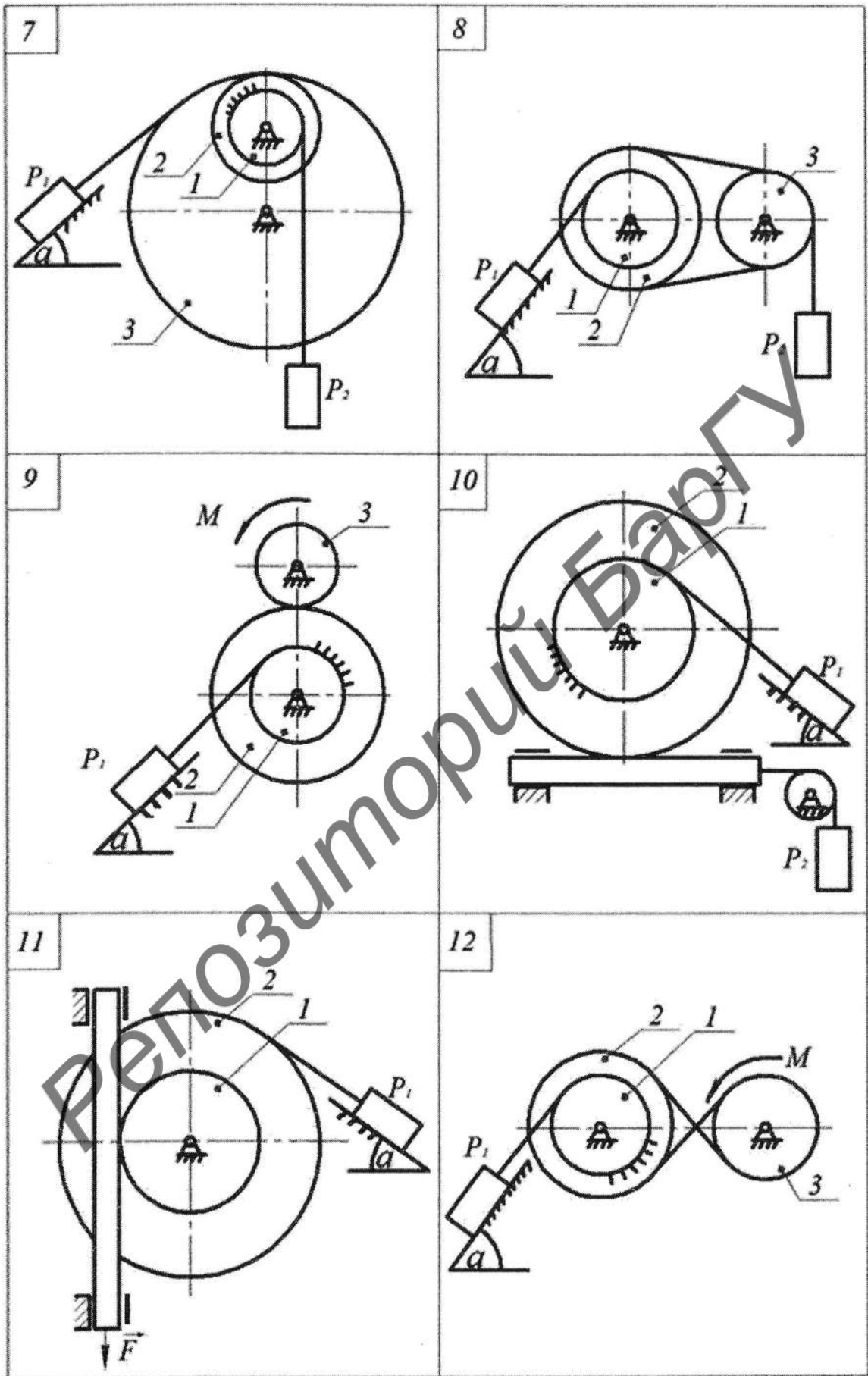


Рисунок Б.1 — Законченные

Таблица В.1

Нумар схемы	вариант	Далгена										Знакши			
		силы, Н			момент, Н·м			$\alpha$ , град	$\delta$ , см	радиусы колау, м				напрамак павароту кола	абсяг значенняў ураўнаважвальнай сілы
		$P$	$P_4$	$F$	$M$	$r_1$	$r_2$			$r_3$	$r_4$				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14		
	1.1	140	200	—	—	60	0,20	0,2	0,2	0,6	0,2	1	$P$		
	1.2	150	220	—	—	45	0,40	0,3	0,7	—	0,4	2	$P$		
	1.3	130	190	—	—	30	0,20	0,4	0,9	—	0,3	1	$P_4$		
	1.4	100	180	—	—	60	0,10	0,3	0,8	—	0,3	2	$P_4$		
2	1.5	120	200	—	—	45	0,30	0,2	0,5	—	0,4	2	$P$		
	2.1	160	200	—	—	60	0,10	0,2	0,4	—	0,2	1—2	$P$		
	2.2	120	150	—	—	30	0,20	0,6	0,8	—	0,3	1—2	$P_4$		
	2.3	130	160	—	—	45	0,10	0,1	0,3	—	0,1	1—2	$P_4$		
	2.4	150	170	—	—	45	0,30	0,3	0,6	—	0,3	1—2	$P$		
3	2.5	100	130	—	—	60	0,20	0,4	0,8	—	0,2	1—2	$P_4$		
	3.1	140	100	—	—	45	0,3	0,5	0,7	0,4	0,3	1—2	$P_4$		
	3.2	160	180	—	—	45	0,2	0,1	0,3	0,2	0,2	1—2	$P$		
	3.3	200	230	—	—	60	0,1	0,4	0,6	0,3	0,2	3	$P$		
	3.4	180	200	—	—	30	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1	1—2	$P_4$		
4	3.5	150	130	—	—	30	0,3	0,3	0,4	0,3	0,3	1—2	$P$		
	4.1	190	150	—	—	60	0,10	0,5	0,6	—	0,2	1	$P$		
	4.2	210	240	—	—	45	0,20	0,2	0,3	—	0,3	3	$P_4$		
	4.3	170	200	—	—	30	0,20	0,3	0,4	—	0,3	2	$P$		
	4.4	200	230	—	—	30	0,10	0,3	0,5	—	0,2	2	$P$		
5	4.5	160	180	—	—	60	0,30	0,4	0,5	—	0,3	3	$P_4$		
	5.1	120	160	—	—	60	0,15	0,4	0,6	—	0,2	1	$P_4$		
	5.2	100	140	—	—	45	0,1	0,1	0,3	—	0,2	2	$P$		
	5.3	130	150	—	—	30	0,25	0,3	0,5	—	0,3	1	$P$		
	5.4	150	190	—	—	60	0,2	0,2	0,3	—	0,2	2	$P_4$		
6	5.5	140	200	—	—	30	0,1	0,2	0,4	—	0,1	1	$P_4$		
	6.1	200	120	—	—	60	0,2	0,3	0,7	—	0,3	1	$P_4$		
	6.2	180	150	—	—	45	0,1	0,4	0,9	—	0,2	2	$P_4$		
	6.3	220	160	—	—	60	0,2	0,3	0,8	—	0,2	1	$P$		
	6.4	200	140	—	—	30	0,1	0,1	0,3	—	0,1	2	$P$		
7	6.5	240	140	—	—	45	0,2	0,2	0,6	—	0,3	2	$P_4$		
	7.1	150	200	—	—	45	0,3	0,3	0,5	1,2	0,3	1	$P$		
	7.2	210	240	—	—	30	0,2	0,2	0,5	1,3	0,3	1—2	$P_4$		
	7.3	190	210	—	—	60	0,10	0,2	0,4	1,5	0,2	3	$P_4$		
	7.4	230	260	—	—	45	0,15	0,6	0,8	1,6	0,3	3	$P$		
7.5	220	250	—	—	30	0,10	0,5	0,6	1,4	0,2	1—2	$P$			

Нумар схеми	варьянт	сілы, Н			МОМЕНТ, Н·м	$\alpha$ , град	$\delta$ , см	радіусы колаў, м				напрамак павароту кола	абсяг значэнняў ураўнаважальнай сілы
		$P$	$P_4$	$F$				$M$	$r_1$	$r_2$	$r_3$		
8	8.1	180	220	—	—	45	0,10	0,2	0,3	0,2	0,1	1—2	$P_4$
	8.2	140	180	—	—	30	0,05	0,3	0,6	0,5	0,1	3	$P_4$
	8.3	220	250	—	—	60	0,05	0,4	0,6	0,4	0,2	3	$P$
	8.4	150	180	—	—	60	0,10	0,2	0,4	0,3	0,1	1—2	$P$
	8.5	200	230	—	—	45	0,15	0,3	0,4	0,3	0,2	1—2	$P_4$
9	9.1	—	120	—	240	45	0,10	0,3	0,4	0,3	0,1	3	$P$
	9.2	—	140	—	260	45	0,15	0,3	0,5	0,2	0,2	1—2	$P$
	9.3	—	130	—	220	60	0,20	0,4	0,6	0,3	0,2	1—2	$M$
	9.4	—	150	—	280	30	0,05	0,2	0,3	0,1	0,1	1—2	$P$
	9.5	—	100	—	200	30	0,10	0,2	0,4	0,3	0,2	3	$M$
10	10.1	—	80	140	—	45	0,05	0,1	0,3	—	0,1	1—2	$P_4$
	10.2	—	110	150	—	45	0,1	0,3	0,6	—	0,2	1—2	$P_4$
	10.3	—	90	130	—	60	0,05	0,3	0,5	—	0,1	1—2	$P$
	10.4	—	80	120	—	30	0,10	0,2	0,3	—	0,1	1—2	$P$
	10.5	—	100	140	—	60	0,15	0,2	0,4	—	0,2	1—2	$P_4$
11	11.1	—	140	120	—	60	0,05	0,2	0,3	—	0,1	2	$P$
	11.2	—	120	100	—	30	0,05	0,1	0,2	—	0,06	1—2	$P$
	11.3	—	130	90	—	60	0,15	0,4	0,6	—	0,2	1—2	$F$
	11.4	—	150	110	—	45	0,10	0,2	0,5	—	0,2	1—2	$F$
	11.5	—	140	100	—	45	0,05	0,3	0,5	—	0,1	1—2	$P$
12	12.1	—	130	—	200	45	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	1—2	$M$
	12.2	—	90	—	280	45	0,15	0,4	0,4	0,3	0,2	1—2	$P$
	12.3	—	80	—	220	60	0,10	0,4	0,6	0,4	0,2	3	$P$
	12.4	—	120	—	260	30	0,20	0,3	0,5	0,3	0,2	1—2	$M$
	12.5	—	100	—	240	30	0,1	0,3	0,6	0,2	0,1	3	$M$

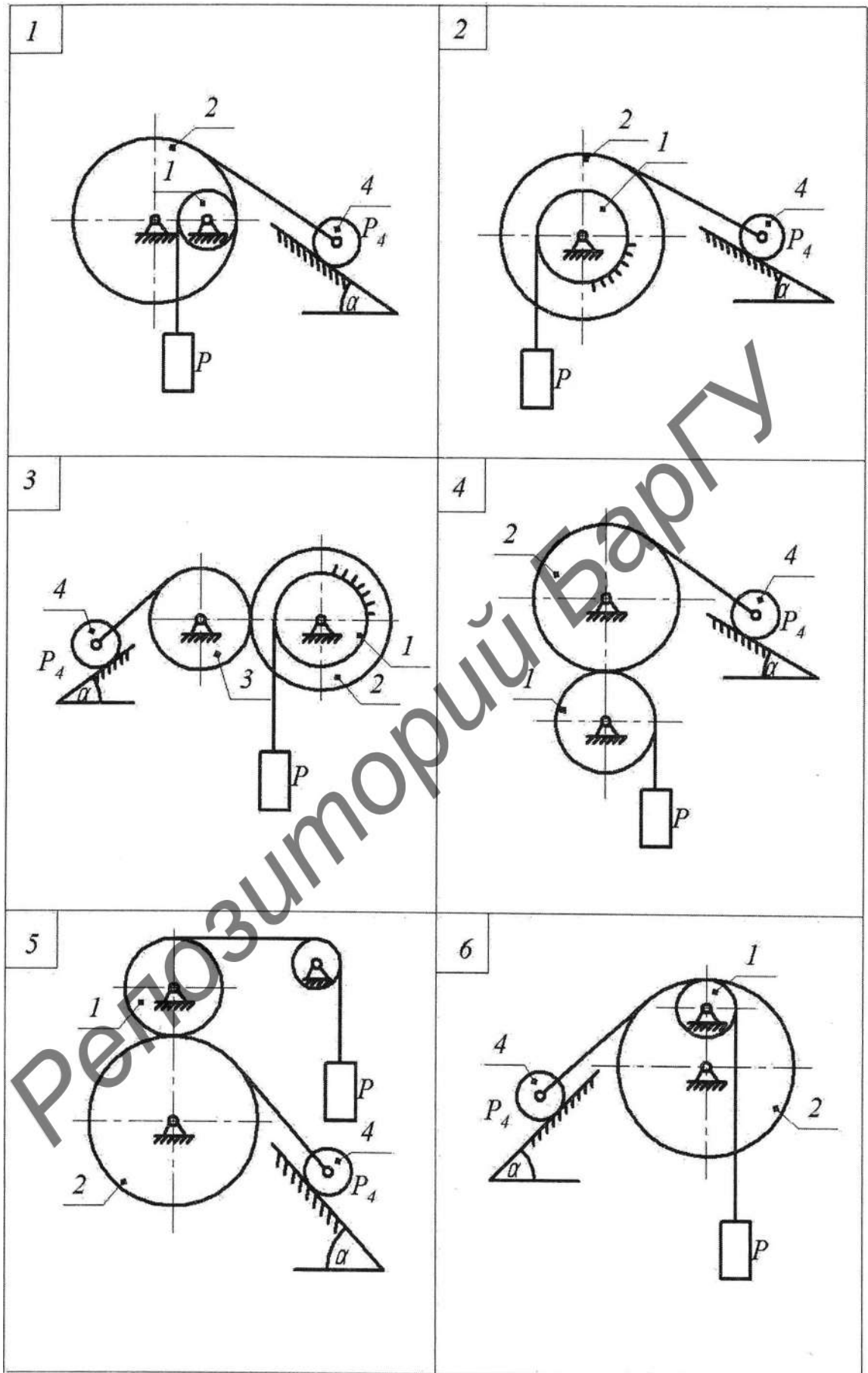


Рисунок В.1 — Схемы да задания № 3

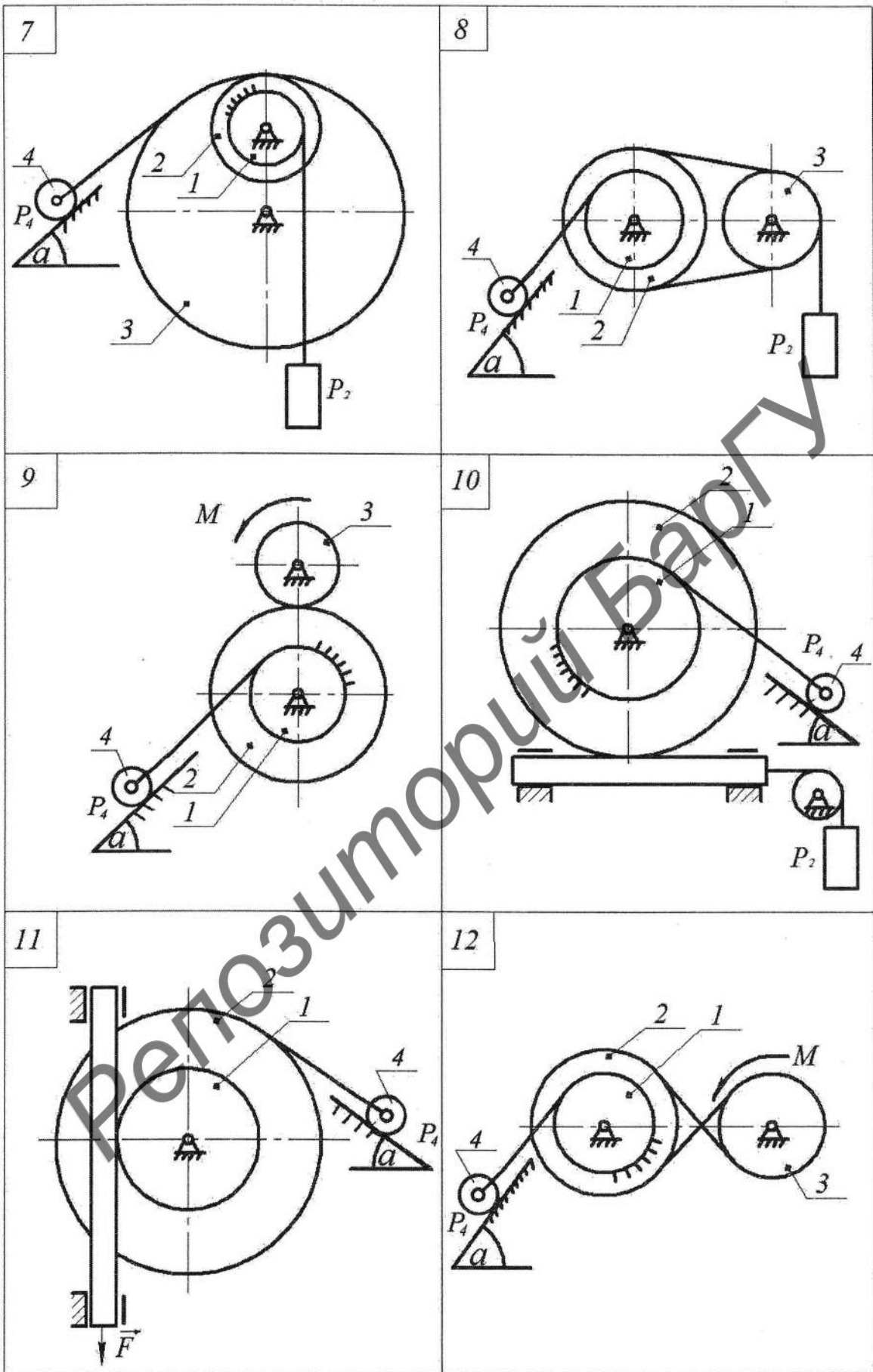
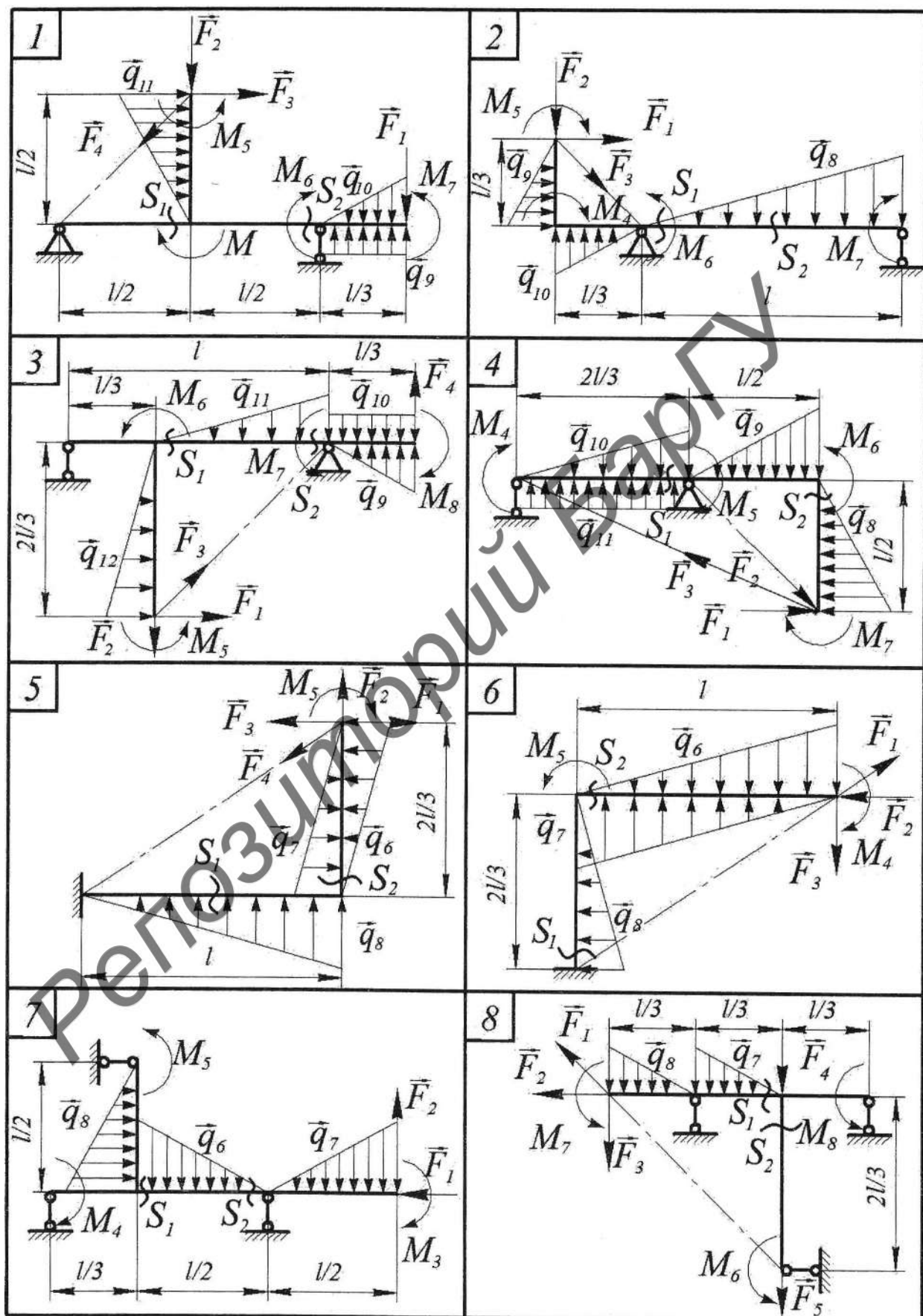


Рисунок В.1 — Законченне



Рисунак Г.1 — Схемы да задання № 4



## ЗАКЛЮЧЭННЕ

Вывучэнне метадычных рэкамендацый і выкананне змешчаных у іх індывідуальных заданняў мае на мэце фарміраванне ў студэнтаў шэрагу неабходных інжынеру-механіку паняццяў і ўстойлівых навыкаў аналізу раўнавагі простых перадачачных механізмаў (заданні 1—3) і якаснага аналізу выгіну статычна вызначальных стрыжнявых (пераважна рамных) канструкцый (заданне 4). На фінішы сумленнага вывучэння метадычнага дапаможніка студэнт зразумее, у прыватнасці, прыроду трэння слізгання і качэння, засвоіць законы трэння, метадыку аналізу раўнавагі механічных сістэм з трэннем і без трэння; пераканаецца, што абсяг значэнняў ураўнаважвальнай сілы (заклучаных паміж іх мінімальнымі і максімальнымі значэннямі) залежыць ад велічынь каэфіцыентаў трэння  $f$  і  $\delta$ . У працэсе азнаямлення з выгінам стрыжнявых сістэм студэнт засвоіць такія паняцці і тэрміны, як стрыжань, стрыжнявая сістэма, бэлька, пралёт бэлькі, рама, кансоль, сувязь (апора); даведаецца пра віды сувязей, іх рэакцыі і г. д. Калі ж высветліцца, што вызначаная мэта вывучэння метадычных рэкамендацый не дасягнута, неабходна працягнуць работу з імі — больш уважліва прачытаць тэарэтычныя звесткі, паўторна прааналізаваць прыведзеныя прыклады, асэнсаваць уласна выкананыя заданні ці нават выканаць дадаткова іншыя варыянты. Толькі пасля такой зацікаўленай працы студэнт будзе здольны ўспрымаць наступны тэарэтычны матэрыял, выконваць больш складаны тыпавыя заданні і, наогул, адчуваць асладу ад навучання.

Репозиторий БарГУ

## СПІС ВЫКАРЫСТАНЫХ КРЫНІЦ

1. *Русан, С. І.* Якасны аналіз раўнавагі механічных сістэм : практ. дапам. для студэнтаў інжынер. спецыяльнасцей / С. І. Русан. — Баранавічы : БарДУ, 2017. — 52 с.
2. *Артоболевский, И. И.* Теория механизмов и машин / И. И. Артоболевский. — 4-е изд. — М. : Наука, 1988. — 639 с.
3. *Хвясько, Г. М.* Курс тэарэтычнай механікі : вучэб. дапам. / Г. М. Хвясько. — Мінск : БДТУ, 2000. — 354 с.
4. *Чигарев, А. В.* Курс теоретической механики : учеб. пособие / А. В. Чигарев, Ю. В. Чигарев. — Минск : Новое знание ; М. : ЦУПЛ, 2010. — 398 с.

Репозиторий БарГУ

*Вучэбнае выданне*

**Русан Сяргей Іванавіч,  
Гаўрылена Андрэй Канстанцінавіч,  
Сотнік Леанід Леанідавіч**

## **ТЭХНІЧНАЯ МЕХАНІКА**

**Метадычныя рэкамендацыі  
для студэнтаў інжынерных спецыяльнасцей  
устаноў вышэйшай адукацыі**

**Адказы за выпуск С. А. Берзнюк  
Тэхнічны рэдактар А. І. Бярэзіч  
Камп'ютарная вёрстка С. А. Берзнюк  
Карэктар С. А. Берзнюк**

**Падпісана ў друк 08.10.2018. Фармат 60 × 84 <sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Папера афсетная. Гарнітура Таймс. Рызаграфія.  
Ум. друк. арк. 6,50. Ул.-выд. арк. 4,05. Тыраж 42 экз. Заказ 574.**

**Выдавец і паліграфічнае выкананне:  
установа адукацыі «Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт».  
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,  
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/424 ад 09.09.2016.  
Вул. Войкава, 21, 225404 г. Баранавічы. Тэл. 8 (0163) 45 46 28, e-mail: rio@barsu.by .**