

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**  
**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ**  
**«БАРАНОВИЧСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**НАУКА. ОБРАЗОВАНИЕ.**  
**ТЕХНОЛОГИИ-2010**

**МАТЕРИАЛЫ**  
**III МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ**  
**КОНФЕРЕНЦИИ**

**21—22 октября 2010 г.**  
**г. Барановичи**  
**Республика Беларусь**

**Барановичи**  
**РИО БарГУ**  
**2010**

УДК 37(063)  
ББК 74.58  
Н34

Рекомендовано к печати научно-методическим советом учреждения образования  
«Барановичский государственный университет»

Р е ц е н з е н т ы:

*Н. Я. Игнатенко*, доктор педагогических наук, профессор  
(Крымский гуманитарный университет, Украина);  
*В. К. Шелег*, доктор технических наук, профессор  
(Белорусский национальный технический университет, Республика Беларусь)

Р е д а к ц и о н н а я к о л л е г и я:

*А. В. Никишова* (гл. ред.), *И. А. Богданович* (отв. ред.), *В. Н. Зуев* (отв. ред.), *А. В. Литвинский*,  
*Е. И. Пономарева*, *В. В. Хитрюк*, *В. И. Козел*, *О. И. Наранович*, *Ю. К. Калугин*,  
*Д. А. Ционенко*, *Е. Г. Карапетова*

**Н34** **Наука. Образование. Технологии-2010** [Текст] : материалы III Междунар. науч.-практ. конф.,  
21—22 окт. 2010 г., Барановичи, Респ. Беларусь / редкол.: А. В. Никишова (гл. ред.) [и др.]. — Барановичи :  
РиО БарГУ, 2010. — 275, [3] с. : ил. — экз. — ISBN 978-985-498-370-7.

В сборнике приведены материалы, представленные на III Международную научно-практическую конференцию «Наука. Образование. Технологии-2010». Освящены результаты научно-исследовательской работы по педагогике, психологии, истории, языкознанию и методике преподавания различных дисциплин. Рассмотрены проблемы, касающиеся системы менеджмента в высшей школе, информационных технологий в науке, образовании и производстве. Широко освещаются актуальные научные проблемы фундаментальных наук, а также современные методы, технологии получения и обработки материалов в машиностроении и других отраслях.

Издание предназначено для широкого круга научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов.  
Табл. 20. Рис. 72.

УДК 37(063)  
ББК 74.58

ISBN 978-985-498-370-7

© Коллектив авторов, 2010  
© БарГУ, 2010

**О. И. Наранович**  
Барановичский государственный университет,  
г. Барановичи, Республика Беларусь

## СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В СРЕДЕ MATLAB

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, информационные технологии, среда MATLAB, дифференциальные уравнения.  
**Key words:** method of final elements, information technologies, MATLAB environment, the differential equations.

**Введение.** Важную роль в развитии теории дифференциальных уравнений играет применение современных электронных вычислительных машин. Целью исследовательской работы является разработка и сравнение способов решения эллиптического уравнения методом конечных элементов (МКЭ) в среде MATLAB.

Возникновение метода конечных элементов связано с решением задач космических исследований в 1950 году. Этот метод возник из строительной механики и теории упругости, а уже потом был осмыслен математиками, которые часто называют данный метод вариационно-разностным, подчеркивая тем самым, его математическую природу и проводят теоретический анализ его сходимости и точности результатов. Существенный толчок в своем развитии МКЭ получил после того, как в 1963 году было доказано, что этот метод можно рассматривать как один из вариантов известного в строительной механике метода Рэлея-Ритца, который путем минимизации потенциальной энергии позволяет свести задачу к системе линейных уравнений равновесия. Область применения МКЭ существенно расширилась, когда в 1968 году было показано, что уравнения, определяющие элементы в задачах строительной механики, распространения тепла, гидромеханики, могут быть легко получены с помощью таких вариантов метода взвешенных невязок, как метод Галёркина или способ наименьших квадратов. Установление этого факта сыграло важную роль в теоретическом обосновании МКЭ, так как позволило применять его при решении многих типов дифференциальных уравнений. Таким образом, метод конечных элементов из численной процедуры решения задач строительной механики превратился в общий метод численного решения дифференциальных уравнений или систем дифференциальных уравнений.

Математическая основа МКЭ — метод Галеркина и вариационный метод Ритца — развиваются, начиная со второго десятилетия XX века. Прогресс в МКЭ последних лет заключается именно в построении наборов базисных функций, обладающих достаточной гладкостью — так называемых согласованных базисов. Процесс построения базисных функций включает в себя: триангуляцию области — разбиение на треугольники, каждый из которых является носителем своей базисной функции и построение базисных функций.

Метод конечных элементов позволяет построить удобную схему формирования системы алгебраических уравнений относительно узловых значений искомой функции. Приближенная аппроксимация решения при помощи простых полиномиальных функций и все необходимые операции выполняются на отдельном типовом элементе. Затем производится объединение элементов, что приводит к требуемой системе алгебраических уравнений. Такой алгоритм перехода от отдельного элемента к их полному набору особенно удобен для геометрически и физически сложных систем.

Метод конечных элементов в настоящее время является стандартом при решении задач механики твердого тела посредством численных алгоритмов. Популярный в свое время метод конечных разностей, а также претендовавший на универсальность метод граничных элементов (граничных интегральных уравнений) сейчас занимают достаточно узкие ниши, ограниченные исследовательскими или специальными задачами. МКЭ занял лидирующее положение благодаря возможности моделировать широкий круг объектов и явлений. Абсолютное большинство конструктивных элементов, узлов и конструкций, изготовленных из самых разнообразных материалов, имеющих различную природу, могут быть рассчитаны посредством МКЭ. При этом нужно учитывать неизбежные при любой численной аппроксимации условности и погрешности. Поэтому вопрос соответствия между расчетной моделью и реальностью является основным при использовании программ анализа [2; 4].

В качестве тестовых испытаний разработанных алгоритмов решена краевая задача для волнового уравнения Гельмгольца в цилиндрической системе координат:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{b^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + W^2 \frac{u}{r} = 0.$$

Здесь искомая функция  $u(z, r)$  определена на области  $\Omega = \{0 \leq z \leq L, 0 \leq r = r/b \leq 1\}$ , соответствующей отрезку нормированного волновода кругового сечения. При условиях на стенке и оси волновода вида  $\frac{\partial u(z, 1)}{\partial r} = 0; u(z, 0) = 0$ , уравнение Гельмгольца имеет точное решение. На концах волновода зададим

следующие условия:  $u(0, r) = rJ_1(\alpha r)$ ;  $\left( a^L \frac{\partial u}{\partial z} + b^L u \right)_L = g^L$ . Пример решения краевой задачи для  $L = 30$ ,  $W = 1$ ,  $b = 3,5$ ,  $\alpha L = 0$ ,  $\beta L = 1$ ,  $\gamma L = 0$  в виде графиков  $u(z, r_j = 0.1j)$ ,  $j = 1..10$  представлен на рисунке 1.

Описание способов решения эллиптического уравнения. Решение эллиптического уравнения выполнено с помощью: расширения Partial Differential Equation (PDE) Toolbox и файловой m-функции в виде графического приложения.

Первый способ. Расширение PDE Toolbox предназначено для решения граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных в двумерных и трехмерных областях методом конечных элементов.

В состав PDE Toolbox входит приложение pdeplot с графическим интерфейсом пользователя. PDE Toolbox обладает набором функций, полезных при написании собственных приложений для решения граничных задач методом конечных элементов. Среда pdeplot позволяет задать геометрию области, тип и коэффициенты дифференциального уравнения, граничные и начальные условия, произвести разбиение области на конечные элементы (триангуляцию), решить получающуюся систему линейных уравнений и визуализировать результат [1; 3].

Стандартный набор функций PDE Toolbox позволяет решать достаточно широкий спектр задач в ограниченных областях: задачи теории упругости; стационарные и нестационарные задачи теплопроводности; задачи диффузии; электростатические задачи; распространение акустических и электромагнитных волн.

Среда pdeplot предоставляет пользователю возможность получения наглядных графиков полученного приближенного решения (см. рис. 1, а).

Вторым способом является решение эллиптического уравнения методом конечных элементов с помощью файловой m-функции с организацией графического интерфейса пользователя. Результат решения представлен на рисунке 1, б.

Решение эллиптического уравнения было организовано в виде файл-функции modelexam(gfile,bfile,a,c,f,elem\_size), входными аргументами которой являются: имена файлов с геометрией области (gfile) и граничными условиями (bfile); коэффициенты уравнения a, c; правая часть уравнения f; максимальная сторона элемента сетки elem\_size. Перед решением необходимо сгенерировать файлы с декомпозиционной геометрией (gfile) и граничными условиями (bfile) из PDE Toolbox. Этот процесс состоит из следующих этапов: задание области и граничных условий в pdeplot; экспорт информации в переменные рабочей среды; преобразование в формат, понятный другим функциям Toolbox; генерация файлов.

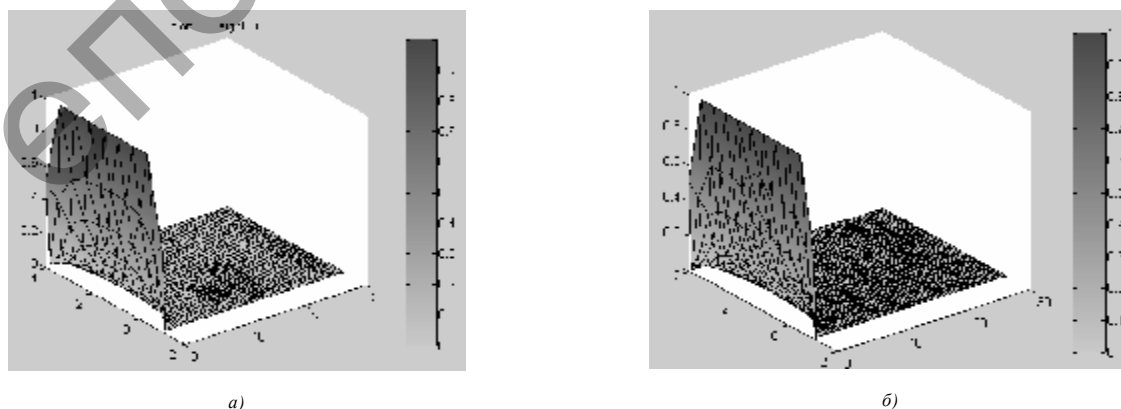


Рисунок 1 — Графическое представление решения эллиптического уравнения:

а — с помощью PDE Toolbox; б — в MATLAB с помощью m-функции методом конечных элементов

В результате проведенной исследовательской работы были разработаны m-функция `modelexam` и графическое приложение в среде MATLAB GUI Builder для решения эллиптического уравнения методом конечных элементов. Также было произведено решение уравнения с помощью PDE Toolbox.

#### Список источников

1. *Ануфриев, И. Е. Matlab 7 / И. Е. Ануфриев, А. Б. Смирнов, Е. Н. Смирнова.* — СПб. : БХВ-Петербург, 2005. — 1104 с.
2. *Зинкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зинкевич, К. Морган.* — М. : Мир, 1986 — 318 с.
3. *Кетков, Ю. Л. MATLAB 7: программирование, численные методы / Ю. Л. Кетков, А. Ю. Кетков, М. М. Шульц.* — СПб. : БХВ-Петербург, 2005. — 752 с.
4. *Сьярле, Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф. Сьярле.* — М. : Мир, 1980. — 511 с.

**Резюме.** В графическом приложении предусмотрен ввод коэффициентов уравнения, значения правой части уравнения, а также указание имен файлов ограничений и максимального размера элемента сетки.

**Resume.** In a graphic application input of factors of the equation, value of the right part of the equation, and also instructions of names of files of restrictions and the maximum size of an element of a grid is provided.

Репозиторий БарГУ