

Для построения траекторий движения частиц, предварительно указали необходимое количество точек, из которых будет состоять траектория, а также координаты определения местоположения каждой такой точки в определённый момент времени. На рисунке 3 представлен скриншот данных условий, введённых в Mathcad.

$$N := 100 \quad i := 0..N-1 \quad \Theta_i := \frac{10 \cdot \pi}{N} \cdot i$$

$$X_i := v \cdot i \cdot \frac{T}{N} \quad Y_i := R \cdot \sin(\Theta_i) \quad Z_i := R \cdot \cos(\Theta_i)$$

Рисунок 3 — Скриншот данных, введённых в Mathcad

Если скорость заряженной частицы составляет угол α с направлением вектора \vec{B} неоднородного магнитного поля, индукция которого возрастает в направлении движения частицы, то h и R уменьшаются с ростом B . На этом основана фокусировка заряженных частиц в магнитном поле, что применяется в ряде электронных приборов [2, с. 211].

Заключение. В данной статье представлена возможность изучения различных траекторий движения любой заряженной частицы в системе компьютерной алгебры Mathcad. Всесторонность применения действия силы Лоренца наблюдается как в природе, так и в различных технических устройствах, среди которых особое место занимает возможность применения ускорителей заряженных частиц в медицине для лечения злокачественных опухолей.

Список цитируемых источников

1. Аксёнович, Л. А. Физика : учеб. пособие для школ нового типа (лицей, колледж, специализированная школа) и абитуриентов вузов / Л. А. Аксёнович, Н. Н. Ракина ; под ред. Н. Н. Ракиной. — Минск : Дизайн ПРО, 2000. — 640 с.
2. Трофимова, Т. И. Курс физики : учеб. пособие для вузов / Т. И. Трофимова. — 11-е изд., стер. — М. : Академия, 2006. — 560 с.

УДК 517.538.5⁵

И. Н. Бруй

Учреждение образования «Барановичский государственный университет», Барановичи, Республика Беларусь

ТЕОРЕМЫ ТИПОВ С. Н. БЕРНШТЕЙНА И Д. ДЖЕКSONА В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

1. Введение. В ключевых обозначениях мы следуем монографии В. К. Дзядыка [1, гл. IX], а в остальных – монографии Р. Эдвардса [2;3].

С. Н. Бернштейн в 1912 г. предложил [4, с. 13] классифицировать функции по поведению при $N \rightarrow +\infty$ последовательности их наилучших приближений.

К теоремам типа С. Н. Бернштейна относят утверждения, в которых по известной скорости приближения функции заключают о её структурных свойствах, а к теоремам типа Д. Джексона относят утверждения, в которых по известным структурным свойствам функции заключают о скорости её приближения.

Настоящая работа посвящена теоремам типов С. Н. Бернштейна и Д. Джексона в комплексной области.

2. Основная часть. Спрямолинейная жорданова кривая Γ_R (rectifiable Jordan curve) называется гладкой (smooth Jordan curve), если 1) её натуральная параметризация $z = z(s)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, |\Gamma_R|]$, где $|\Gamma_R|$ есть длина кривой Γ_R , 2) всюду на этом отрезке производная $z'(s)$ отлична от нуля и 3) $z'(0+0) = z'(|\Gamma_R|-0)$. Как обычно, на концах отрезка $[0, |\Gamma_R|]$ производная и непрерывность понимаются в одностороннем смысле: в точке 0 – справа, а в точке $|\Gamma_R|$ – слева.

Требования 1) и 2) выражают непрерывность вращения касательной к кривой при движении точки касания по открытой дуге $z([0, |\Gamma_R|])$, а требования 1), 2) и 3) – непрерывность изменения направления касательной к кривой и при переходе точки касания через точку, соответствующую значениям $s = 0$ и $s = |\Gamma_R|$ натурального параметра.

Если через $\forall \delta \in (0, |\Gamma_R|)$ $\omega[z'(s), \delta] := \sup \{ |z'(s_1) - z'(s_2)| : \forall s_1 \in [0, |\Gamma_R|] \quad \forall s_2 \in [0, |\Gamma_R|] \quad |s_1 - s_2| \leq \delta \}$ обозначить модуль непрерывности производной функции $z'(s)$, то по определению $\Gamma_{Al'per}$ есть такая гладкая жорданова кривая, которая удовлетворяет условию С. Я. Альпера

$$\int_0^{\min\{1, |\Gamma_{Al'per}|\}} \frac{\omega[z'(s), \delta]}{\delta} \ln \frac{1}{\delta} d\delta < +\infty. \quad (1)$$

Условию (1) удовлетворяют единичная окружность $|z|=1$ и её обобщение – эллипс $\left(\frac{\text{Re}z}{a}\right)^2 + \left(\frac{\text{Im}z}{b}\right)^2 = 1$

с полуосями $a > 0$ и $b > 0$, аналитические жордановы кривые (analytical Jordan curve), кратно-гладкие жордановы кривые Келлога – Варшавского, т. е. такие гладкие жордановы кривые $\Gamma_{r,\beta}$, натуральная параметризация $z = z(s)$ которых, во-первых, абсолютно непрерывно дифференцируема $r-1$ раз и, во-вторых, её производная r -ого порядка $z^{(r)}(s)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $0 < \beta < 1$ и коэффициентом $0 < A_1 < +\infty : \forall s_1 \in [0, |\Gamma_{r,\beta}|] \forall s_2 \in [0, |\Gamma_{r,\beta}|] |z^{(r)}(s_1) - z^{(r)}(s_2)| \leq A_1 \cdot |s_1 - s_2|^\beta$.

Очевидно, что $\Gamma_{r,\beta} \subset \Gamma_{r-1,\beta} \subset \dots \subset \Gamma_{2,\beta} \subset \Gamma_{1,\beta} \subset \Gamma_{\text{Al'per}}$.

Пусть $w = \Phi(\text{Ext } \Gamma_{\text{Al'per}}, z)$ есть функция, которая конформно и однолистно отображает неограниченную внешность $\text{Ext } \Gamma_{\text{Al'per}}$ кривой $\Gamma_{\text{Al'per}}$ в комплексной z -плоскости на неограниченную внешность $|w| > 1$ единичной окружности $|w|=1$ в комплексной w -плоскости с условием нормировки $0 < \lim_{z \rightarrow \infty} [\Phi(\text{Ext } \Gamma_{\text{Al'per}}, z)/z] < +\infty$. Символы ∞ и $+\infty$ имеют у нас разный смысл. Вещественная прямая R пополняется двумя несобственными элементами: $-\infty$ (отрицательная бесконечность) и $+\infty$ (положительная бесконечность). Комплексная плоскость C пополняется единственным несобственным элементом ∞ (бесконечно удалённая точка). И пусть $z = \Psi(|w| > 1, w)$ есть обратная к $w = \Phi(\text{Ext } \Gamma_{\text{Al'per}}, z)$ функция.

Контурная функция $\Psi(|w| > 1, e^{ix})$ по теореме С. Я. Альпера [5, гл. VIII, § 1, теорема 2] имеет производную $\Psi'(|w| > 1, e^{ix})$, которая непрерывна и отлична от нуля на вещественной прямой R , т. е. $\exists 0 < A_2 < +\infty \exists 0 < A_3 < +\infty \forall x \in R A_2 \leq |\Psi'(|w| > 1, e^{ix})| \leq A_3$. Отсюда следует [6, с. 312, следствие 2] выполнение теоремы типа Д. Джексона на замкнутой жордановой области $\Gamma_{\text{Al'per}} \cup \text{Int } \Gamma_{\text{Al'per}}$. Так как $\Phi(\text{Ext } \Gamma_{\text{Al'per}}, z)$ есть функция, обратная к функции $\Psi(|w| > 1, w)$, то производная $\Phi'(\text{Ext } \Gamma_{\text{Al'per}}, z) = (\Psi^{-1})'(z) = \frac{1}{\Psi'[\Phi(\text{Ext } \Gamma_{\text{Al'per}}, z)]}$. Очевидно, что производная $\Phi'(\text{Ext } \Gamma_{\text{Al'per}}, z)$ непрерывна и отлична от

нуля на кривой $\Gamma_{\text{Al'per}}$, т. е. $\forall z \in \Gamma_{\text{Al'per}} 0 < 1/A_3 \leq |\Phi'(\text{Ext } \Gamma_{\text{Al'per}}, z)| \leq 1/A_2$. Отсюда вытекает [6, с. 310, следствие 1] выполнение теоремы типа С. Н. Бернштейна на замкнутой жордановой области $\Gamma_{\text{Al'per}} \cup \text{Int } \Gamma_{\text{Al'per}}$.

Таким образом, в свете современных знаний множества комплексной плоскости C , на которых могут иметь место теоремы типа С. Н. Бернштейна и теоремы типа Д. Джексона, исчерпываются замкнутыми жордановыми областями с гладкой границей, удовлетворяющей условию С. Я. Альпера (1).

Случай криволинейного двуугольника П. К. Суетина $\Gamma_{\text{Apple}} \cup \text{Int } \Gamma_{\text{Apple}}$ [7, с. 25], который заведомо не является $\Gamma_{\text{Al'per}} \cup \text{Int } \Gamma_{\text{Al'per}}$, иллюстрирует следующий результат, где $F_n(\Gamma_{\text{Apple}} \cup \text{Int } \Gamma_{\text{Apple}}, z)$ есть n -й многочлен Фабера.

Теорема. Для суммируемости со скоростью

$$\max_{z \in \Gamma_{\text{Apple}} \cup \text{Int } \Gamma_{\text{Apple}}} \left| f(z) - \sum_{n=0}^N \left(1 - \frac{n}{N+1}\right) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\Psi(e^{i\sigma})] e^{-in\sigma} d\sigma \right\} F_n(\Gamma_{\text{Apple}} \cup \text{Int } \Gamma_{\text{Apple}}, z) \right| = O\left(\frac{1}{N}\right), N \rightarrow +\infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы у функции $f \in (\mathbf{A} \setminus \{\text{const}\})(\Gamma_{\text{Apple}} \cup \text{Int } \Gamma_{\text{Apple}})$ сложная функция $f[\Psi(e^{ix})]$ и сопряжённая к ней функция $\{f[\Psi(e^{ix})]\}^{\sim}$, во-первых, были абсолютно непрерывными: $f[\Psi(e^{ix})] \in \mathbf{AC}(T)$ & $\{f[\Psi(e^{ix})]\}^{\sim} \in \mathbf{AC}(T)$, и, во-вторых, имели существенно-ограниченные производные: $\{f[\Psi(e^{ix})]\}' \in \mathbf{L}^\infty(T)$ & $\{\{f[\Psi(e^{ix})]\}^{\sim}\}' \in \mathbf{L}^\infty(T)$.

Сходимость вещественного ряда «обратных квадратов» $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ влечёт абсолютную непрерывность на вещественной прямой R сумм тригонометрического ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx$ и сопряжённого с ним тригономет-

рического ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin nx$. На интервале $0 < x < 2\pi$ из продифференцированных рядов $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) \sin nx$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos nx$ первый является тригонометрическим рядом Фурье ограниченной функции $\frac{1}{2}(x - \pi)$, а второй — неограниченной функции $-\ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|$ [8, гл. VII, § 2, (2.2)].

Таким образом, в нашей теореме предположения о паре функций $f[\Psi(e^{ix})]$ и $\{f[\Psi(e^{ix})]\}^{\sim}$ не могут быть сведены к предположениям об одной из них.

3. Заключение. Нами показано, что множества комплексной плоскости C , на которых могут иметь место теоремы типов С. Н. Бернштейна и Д. Джексона, исчерпываются замкнутыми жордановыми областями с гладкой границей, удовлетворяющей условию С. Я. Альпера (1).

Список цитируемых источников

1. Дзядык, В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В. К. Дзядык. — М.: Наука, 1977. — 512 с.
2. Эдвардс, Р. Ряды Фурье в современном изложении: в 2 т. / Р. Эдвардс. — М.: Мир, 1985. — Т. 1. — 264 с.
3. Эдвардс, Р. Ряды Фурье в современном изложении: в 2 т. / Р. Эдвардс. — М.: Мир, 1985. — Т. 2. — 400 с.
4. Бернштейн, С. Н. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени / С. Н. Бернштейн // Собр. соч.: в 4 т. — М.: Изд-во АН СССР, 1952. — Т. I: Конструктивная теория функций (1905—1930). — С. 11—104.
5. Суетин, П. К. Ряды по многочленам Фабера / П. К. Суетин. — М.: Наука, 1984. — 336 с.
6. Anderson, J. M. On Theorems of Jackson and Bernstein Type in the Complex Plane / J. M. Anderson, A. Hinkkanen, F. D. Lesley // Constructive Approximation. — 1988. — Vol. 4, № 3. — P. 307—319.
7. Бруй, И. Н. Гиперсходимостъ рядов по многочленам Фабера для замкнутых жордановых областей со спрямляемой границей ограниченного вращения / И. Н. Бруй // Весн. Гродз. дзярж. ўн-та імя Янкі Купалы. Сер. 2: Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. — 2021. — Т. 11, № 1. — С. 23—33.
8. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды: в 2 т. / А. Зигмунд. — М.: Мир, 1965. — Т. I. — 616 с.

УДК 517.542

И. Н. Бруй

Учреждение образования «Барановичский государственный университет», Барановичи, Республика Беларусь

ФУНКЦИЯ Н. Е. ЖУКОВСКОГО И ОБВОДЫ ОПОР МОСТОВ

1. Введение. В обозначениях и терминологии мы следуем монографии В. К. Дзядыка [1, гл. IX] и двухтомнику Р. Эдвардса [2; 3]. Операторы присваивания «:=» и «≐» означают, что выражению, которое стоит со стороны знака равенства «=», присвоено обозначение, которое стоит со стороны знака двоеточия «:». Соглашение $+ \pi = \pi$ не распространяется на символы $+\infty$ и ∞ ; последние имеют у нас разный смысл. Вещественная прямая R пополняется двумя несобственными элементами: $-\infty$ (отрицательная бесконечность) и $+\infty$ (положительная бесконечность). Комплексная плоскость C пополняется единственным несобственным элементом ∞ (бесконечно удалённая точка).

В настоящей работе предлагается функцию, обратную к функции Н. Е. Жуковского, применять для расчёта обводов опор мостов.

2. Функция Н. Е. Жуковского $w = \Phi(|z| > 1, z) := \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ конформно и однолистно отображает неограниченную внешность $|z| > 1$ единичной окружности $|z| = 1$ в комплексной z -плоскости на неограниченную внешность отрезка $[-1, 1]$ вещественной оси в комплексной w -плоскости; $\Phi(|z| > 1, \infty) = \infty$.

Разрежем комплексную w -плоскость по вещественной оси от точки $w=1$ через начало координат $w=0$ до точки $w=-1$ и будем рассматривать получившийся разрез как вырожденный эллипс $\left(\frac{\operatorname{Re} w}{a}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im} w}{b}\right)^2 = 1$ с большой полуосью $a=1$ и малой полуосью $b=0$. При движении по этому вырожден-