

## ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ГРУППЫ ЛИ $SL(2, R)$ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА МАТРИЦ

**Введение.** Группа Ли — это один из наиболее известных и важных объектов в области дифференциальной геометрии и топологии. Теория топологических групп возникла в результате изучения некоторых свойств дифференциальных уравнений и группы Ли были названы в честь норвежского математика Софуса Ли, который заложил основы исследования об этих группах в своих трудах в 1876–1893 г.г.

На примере исследования линейной специальной группы  $SL(2, R)$ , состоящей из вещественных матриц с определителем равным +1. В данной работе будет рассмотрена группа Ли  $SL(2, R)$  и её алгебра Ли  $\mathfrak{sl}(2, R)$  со специальной матрицей  $A$ . Далее с помощью применения операции умножения матриц и свойств степенных рядов приведено доказательство упражнения, показывающего вид экспоненциального отображения, соединяющего группу Ли  $SL(2, R)$  и её алгебру Ли  $\mathfrak{sl}(2, R)$ .

**Основная часть.** Введем необходимые понятия теории групп Ли.

*Определение 1.* [1] Набор всех касательных векторов ко всем возможным кривым, проходящим через данную точку  $x$  многообразия  $M$ , называется касательным пространством к  $M$  в точке  $x$  обозначается  $TM|_x$ .

*Определение 2.* [1] Пусть  $v$  — векторное поле. Обозначим параметризованную максимальную интегральную кривую, проходящую через точку  $x$  многообразия  $M$ , через  $\Psi(\varepsilon, x)$  и назовём  $\Psi$  потоком, порождённым полем  $v$ . Таким образом, для каждого  $x \in M$  и  $\varepsilon$  из некоторого интервала  $I_x$ , содержащего 0,  $\Psi(\varepsilon, x)$  — это точка на интегральной кривой, проходящей через точку  $x$  на  $M$ . Для потока справедливы следующие свойства:

1)  $\Psi(\delta, \Psi(\varepsilon, x)) = \Psi(\delta + \varepsilon, x)$ ,  $x \in M$ , для всех  $\delta, \varepsilon \in R$ , таких, что обе части равенства имеют смысл,

2)  $\Psi(0, x) = x$  и 3)  $\frac{d}{d\varepsilon} \Psi(\varepsilon, x) = v|_{\Psi(\varepsilon, x)}$  для всех  $\varepsilon$  области определения.

Вычисление потока, порождённого данным векторным полем  $v$ , часто называют экспоненцированием этого поля и обозначают:  $\exp(\varepsilon v)x = \Psi(\varepsilon, x)$ . Переформулируем 3 предыдущих свойства для экспоненциального обозначения:  $\exp[(\delta + \varepsilon)v]x = \exp(\delta v)\exp(\varepsilon v)x$ ;  $\exp(0v)x = x$  и  $\frac{d}{d\varepsilon}[\exp(\varepsilon v)x] = v|_{\exp(\varepsilon v)x}$  для всех  $x \in M$ .

*Определение 3.* [1]  $r$ -параметрическая группа Ли — это группа  $G$ , обладающая так же структурой  $r$ -мерного гладкого многообразия, причём и групповые операции  $m: G \times G \rightarrow G$ ,  $m(g, h) = g \cdot h$ ,  $g, h \in G$  и взятие обратного  $i: G \rightarrow G$ ,  $i(g) = g^{-1}$ ,  $g \in G$  являются гладкими отображениями многообразий.

*Определение 4.* [1],[2] Пусть  $G$  — группа Ли. Для  $\forall$  элемента группы  $g \in G$  правое умножение  $Rg: G \rightarrow G$  определено формулой  $Rg(h) = hg$ , является диффеоморфизмом, обратный к которому есть  $R_{g^{-1}} = (Rg)^{-1}$ .

*Определение 4.* [1],[2] Векторное поле  $v$  на  $G$  называется правоинвариантным, если  $dRg(V|_h) = V|_{Rg(h)} = V|_{hg}$  для всех  $g$  и  $h$  группы  $G$ .

*Определение 5* [1],[2] Алгебра Ли группы  $G$  — это векторное пространство всех правоинвариантных векторных полей на  $G$ .

*Замечание.* Всякое правоинвариантное поле однозначно определяется своим значением в единице, поскольку  $V|_g = dRg(V|_e)$  т.к.  $Rg(e) = g$ . Обратно, всякий касательный вектор к  $G$  в единице  $e$  единственным образом определяет правоинвариантное поле на  $G$  по формуле  $V|_g = dRg(V|_e)$ .

Пусть  $\mathfrak{g}$  алгебра Ли группы Ли  $G$ . Следующий результат показывает, что имеется взаимно однозначное соответствие между одномерными и подпространствами алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  и (связными) однопараметрическими подгруппами группы Ли  $G$ .

*Предложение.* [2] Пусть  $v \neq 0$  — правоинвариантное векторное поле на группе Ли  $G$ . Тогда поток, порождённый полем  $V$ , проходящий через единицу, а именно  $g_\varepsilon = \exp(\varepsilon v)e$ , определён для всех  $\varepsilon \in R$  и обра-

зует однопараметрическую подгруппу группы  $G$ , так что  $g_{\varepsilon+\delta} = g_\varepsilon \cdot g_\delta, g_0 = e, g_\varepsilon^{-1} = g_{-\varepsilon}$ , причём эта подгруппа изоморфна либо самой группе  $R$ , либо окружности  $SO(2)$ . Обратно, всякая связная одномерная подгруппа группы  $G$  порождается указанными способом таким правоинвариантным векторным полем.

**Определение 6.** [2] Пусть  $G$  — группа Ли,  $\mathfrak{g}$  — её алгебра Ли. Экспоненциальное отображение  $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$  получается подстановкой значения  $\varepsilon = 1$  в однопараметрическую подгруппу, порождённую полем  $v: \exp(v) = \exp(v)e$ .

Это означает что каждый элемент группы  $G$ , достаточно близкий к единичному можно записать как экспоненту:  $g = \exp(v)$  для некоторого  $v \in \mathfrak{g}$ . Вообще говоря, глобально отображение  $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$  не является ни взаимно однозначным, ни отображением на. Это покажем с помощью доказательства следующего упражнения.

**Упражнение.** Пусть  $SL(2, R)$  обозначает группу Ли матриц размерности  $2 \times 2$  с определителем, равным  $+1$ , и  $\mathfrak{sl}(2, R)$  её алгебра Ли.

Пусть  $A \in \mathfrak{sl}(2, R)$  и имеет вид  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ , со следом матрицы равным нулю.

Доказать, что

$$\exp A = \begin{cases} (ch\delta)E + (\delta^{-1}sh\delta)A, \delta = \sqrt{-\det A}, \det A < 0, \\ (ch\delta)E + (\delta^{-1}\sin\delta)A, \delta = \sqrt{\det A}, \det A > 0. \end{cases}$$

Что будет в случае, когда  $\det A = 0$ ?

**Доказательство.** Возьмём произвольную матрицу  $A \in \mathfrak{sl}(2, R)$ , где  $\mathfrak{sl}(2, R) = \{A \in \mathfrak{gl}(2, R) \mid \text{tr}A = 0\}$ .

След матрицы равен сумме диагональных элементов, в нашем случае  $\text{tr}A = -a^2 - cb$ . Используем формулу разложения экспоненциальной функции в степенной ряд  $\exp A = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ .

Возведем матрицу  $A$  в степень и выполним необходимые преобразования:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix} = (a^2 + bc)E;$$

$$A^3 = (a^2 + bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = (a^2 + bc)A;$$

$$A^4 = (a^2 + bc) \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = (a^2 + bc)^2 E;$$

$$A^5 = (a^2 + bc)^2 EA = (a^2 + bc)^2 A;$$

$$A^6 = (a^2 + bc)^2 AA = (a^2 + bc)^3 E;$$

$$A^7 = (a^2 + bc)^3 EA = (a^2 + bc)^3 A.$$

Составляем степенной ряд:

$$\begin{aligned} \exp A = e^A &= E + \frac{A}{1!} + \frac{(a^2 + bc)E}{2!} + \frac{(a^2 + bc)A}{3!} + \frac{(a^2 + bc)^2 E}{4!} + \frac{(a^2 + bc)^2 A}{5!} + \frac{(a^2 + bc)^3 E}{6!} + \\ &+ \frac{(a^2 + bc)^3 A}{7!} + \dots = E + A + \frac{(\sqrt{a^2 + bc})^2}{2!} E + \frac{1}{\sqrt{a^2 + bc}} \cdot \frac{(\sqrt{a^2 + bc})^3}{3!} A + \frac{(\sqrt{a^2 + bc})^4}{4!} E + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{a^2 + bc}} \cdot \frac{(\sqrt{a^2 + bc})^5}{5!} A + \frac{(\sqrt{a^2 + bc})^6}{6!} E + \frac{1}{\sqrt{a^2 + bc}} \cdot \frac{(\sqrt{a^2 + bc})^7}{7!} A + \dots \end{aligned}$$

Рассмотрим соответствующие случаи.

1. Пусть в первом случае

$$\det A < 0, \delta = \sqrt{-\det A} = \sqrt{a^2 + bc}.$$

Если  $-\det A > 0 \Rightarrow \det A < 0, (a^2 + bc) > 0 \Rightarrow -(a^2 + bc) < 0$ .

Тогда получим следующее разложение в степенной ряд

$$\begin{aligned} \exp A &= E + A + \frac{(\sqrt{a^2 + bc})^2}{2!} E + \frac{1}{\sqrt{a^2 + bc}} \cdot \frac{(\sqrt{a^2 + bc})^3}{3!} A + \frac{(\sqrt{a^2 + bc})^4}{4!} E + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{a^2 + bc}} \cdot \frac{(\sqrt{a^2 + bc})^5}{5!} A + \dots = E + A + \frac{\delta^2}{2!} E + \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\delta^3}{3!} A + \frac{\delta^4}{4!} E + \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\delta^5}{5!} A + \dots = \\ &= \begin{cases} chx = 1 + x^2/2! + x^4/4! + \dots \\ shx = x + x^3/3! + x^5/5! + \dots \end{cases} = (ch\delta)E + (\delta^{-1}sh\delta)A. \end{aligned}$$

2. Рассмотрим второй случай, когда  $\det A > 0, \delta = \sqrt{\det A} = \sqrt{-a^2 - bc}$

$$\begin{aligned} \det A > 0 &\Rightarrow -\det A < 0, \\ (-a^2 - bc) > 0 &\Rightarrow a^2 + bc < 0. \end{aligned}$$

В этом случае разложение в степенной ряд примет вид:

$$\begin{aligned} \exp A = e^A &= E + A - \frac{(\sqrt{a^2 - bc})^2}{2!} E - \frac{1}{\sqrt{-a^2 - bc}} \cdot \frac{(\sqrt{a^2 - bc})^3}{3!} A + \frac{(\sqrt{a^2 - bc})^4}{4!} E + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{-a^2 - bc}} \cdot \frac{(\sqrt{a^2 - bc})^5}{5!} A - \frac{(\sqrt{a^2 - bc})^6}{6!} E - \frac{1}{\sqrt{-a^2 - bc}} \cdot \frac{(\sqrt{a^2 - bc})^7}{7!} A + \dots = \begin{cases} \cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - \dots \\ \sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \dots \end{cases} = \\ &= E + A - \frac{\delta^2}{2!} E - \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\delta^3}{3!} A + \frac{\delta^4}{4!} E + \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\delta^5}{5!} A - \dots = (\cos\delta)E + (\delta^{-1}\sin\delta)A. \end{aligned}$$

3. Пусть теперь  $\det A = 0$ . Тогда  $-a^2 - cb = 0$  и степенной ряд сводится к сумме  $\exp A = E + A$ . Таким образом, объединяя все рассмотренные случаи, получим следующую систему

$$\exp A = \begin{cases} (ch\delta)E + (\delta^{-1}sh\delta)A, \delta = \sqrt{-\det A}, \det A < 0, \\ (\cos\delta)E + (\delta^{-1}\sin\delta)A, \delta = \sqrt{\det A}, \det A > 0, \\ E + A, \det A = 0. \end{cases}$$

**Заключение.** Доказательство данного упражнения в дальнейшем будет применяться для исследования связи между экспоненциальным отображением и однопараметрическими подгруппами групп Ли  $SL(2, R)$ .

#### Список цитируемых источников

1. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли/ Ф. Уорнер — М. Мир, 1987. — 302 с.
2. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр V/ М. М. Постников — М.: Наука, 1982 — 447 с.

УДК 372.853+539

А. И. Серый

учреждение образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина», Брест, Республика Беларусь

### К МЕТОДИКЕ ИЗУЧЕНИЯ ОСНОВ ЯДЕРНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ

**Введение.** После трагедии на Чернобыльской АЭС возросло внимание к таким учебным дисциплинам, как «Физика атомного ядра и элементарных частиц», «Основы энергосбережения», «Радиационная безопасность» и т. д. В связи с вводом эксплуатацию Белорусской АЭС (относящейся к более надежным АЭС следующего поколения) становится актуальным вопрос о дальнейшем повышении качества преподавания перечисленных выше дисциплин, в которых может присутствовать, в частности, тема «Основы ядерной энергетики». С этой темой связан предмет исследования данной публикации.