

34. Бруй, И. Н. Функции исчезающей средней осцилляции и абелевы средние тригонометрических рядов / И. Н. Бруй // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2. — 2013. — № 1 (148). — С. 54—57.
35. Weisz, F. Martingale Hardy Spaces and their Applications in Fourier Analysis / F. Weisz // Lecture Notes in Mathematics. — 1994. — Vol. 1568. — VIII+217 pp.

Материал поступил в редакцию 07.09.2014 г.

УДК 517.5

И. Н. Бруй, кандидат физико-математических наук, доцент
Учреждение образования «Барановичский государственный университет», Барановичи

ПАМЯТИ МОЕГО НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ А. К. ПОКАЛО: ЕГО ИДЕИ

Дан обзор развития идей А. К. Покало в теории приближений.

Ключевые слова: ряды и интегралы Фурье, ряды Фабера, суммируемость.

A survey of development of the ideas of A. K. Pokalo in the approximation theory.

Key words: Fourier series and integrals, Faber series, summability.

Введение. Настоящая работа посвящена развитию идей научного руководителя автора настоящей статьи (немцы говорят *Doktorvater*) Покало Анатолия Константиновича (11.12.1922—14.12.2006). Его научным руководителем был Турецкий Абрам Хаимович (13.09.1905—01.03.1975), который являлся учеником Бернштейна Сергея Натановича (05.03.1880—26.10.1968). А. Х. Турецкий говорил автору, что его аспирант А. К. Покало самостоятельно проработал монографию [1] Харди Годфри Харольда (07.02.1877—01.12.1947). Сам А. К. Покало в присутствии свидетелей признавал, что его путь в науку определила статья [2] Стечкина Сергея Борисовича (06.09.1920—22.11.1995). Труды четырёх вышеназванных математиков позволяют реконструировать ход мыслей А. К. Покало.

В обозначениях мы стремимся следовать двухтомной монографии Р. Эдвардса [3; 4]. Символ « $\stackrel{\text{def}}{=}$ » означает, что правой части присвоено обозначение слева; аналогичный смысл имеет символ « $\stackrel{\text{def}}{=}$ ».

Метод А. К. Покало суммирования числовых рядов. Возник под влиянием теории простых тригонометрических рядов Фурье.

Функция $f \in L^1(T)$ порождает, во-первых, двустороннюю числовую последовательность
$$\left(\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right)_{n=-\infty}^{\infty}$$
 тригонометрических коэффициентов Фурье функции f и, во-вторых, двусторонний функциональный

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx} \quad (1)$$

тригонометрический ряд Фурье функции f .

Если периодическая с периодом 2π функция f удовлетворяет условию Липшица первого порядка, т. е. если (см. [5, с. 155, теорема 1] или [6, с. 38])

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \|f'\|_{\infty} \cdot |x_1 - x_2|,$$

то, как показал С. Н. Бернштейн, отклонение функции f от средних Фейера её тригонометрического ряда Фурье [7, с. 205, (200)]

$$\max_{-\pi \leq x \leq \pi} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N \left(1 - \left| \frac{n}{N+1} \right| \right) \hat{f}(n) e^{inx} \right| = O\left(\frac{\ln N}{N} \right), \quad N \rightarrow \infty, \quad (2)$$

хотя наилучшее приближение функции $f \in C(T) \setminus \{\text{const}\}$ посредством тригонометрических полиномов степени не выше N согласно теореме Д. Джексона — Н. П. Корнейчука [6, с. 261]

$$\forall N \in \mathbb{Z}_+ \quad E_N f := \inf_{\gamma_n \in C} \max_{-\pi \leq x \leq \pi} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N \gamma_n e^{inx} \right| < \frac{\pi \|f'\|_{\infty}}{N+1}. \quad (3)$$

С. Н. Бернштейн также установил неулучшаемость порядка оценки (2): если функция $f \in C(T)$ имеет в точке x_0 конечные левостороннюю $f'(x_0 - 0)$ и правостороннюю $f'(x_0 + 0)$ производные, то справедлива асимптотическая формула [7, с. 206, (201)]

$$f(x_0) - \sum_{n=-N}^N \left(1 - \left|\frac{n}{N+1}\right|\right) \hat{f}(n) e^{inx_0} = \frac{f'(x_0 - 0) - f'(x_0 + 0)}{\pi} \cdot \frac{\ln N}{N} + o\left(\frac{\ln N}{N}\right), \quad N \rightarrow \infty.$$

Типичный пример: функция $f(x)$ на промежутке $-\pi < x \leq \pi$ совпадает с функцией $|x|$, а вне $-\pi < x \leq \pi$ является 2π -периодическим продолжением последней; $x_0 \in \mathbb{R}$.

Аналог асимптотической формулы С. Н. Бернштейна для 2π -периодических кратно дифференцируемых функций получил автор [8, с. 29].

Обобщением средних Фейера являются средние Зигмунда натурального порядка $r = 1, 2, 3, \dots$ тригонометрического ряда Фурье функции f :

$$\forall N \in \mathbb{Z}_+ \quad Z_N^r f(x) := \sum_{n=-N}^N \left(1 - \left|\frac{n}{N+1}\right|^r\right) \hat{f}(n) e^{inx}.$$

Если периодическая с периодом 2π функция f удовлетворяет условию Липшица первого порядка (пишем: $f \in \text{Lip}1(T)$), то в случае $r \geq 1$ имеет место скорость (2), а в случае $r \geq 2$ согласно теореме А. Зигмунда (см. [9, с. 697, теорема 1, (i), $h=1$, $k=2$, (1.4)] или [10, с. 591, $r=1$, $p=2$, 8.7(15)]) наличествует скорость

$$\max_{-\pi \leq x \leq \pi} |f(x) - Z_N^r f(x)| \leq \frac{c_1 \|f'\|_\infty}{N+1}, \quad (4)$$

т. е. средние Зигмунда порядка $r \geq 2$ осуществляют приближение порядка наилучшего; сравните неравенство А. Зигмунда (4) с неравенством Д. Джексона — Н. П. Корнейчука (3). Тем самым А. Зигмунд установил зависимость в определённых случаях скорости приближения функции $f(x)$ средними $Z_N^r f(x)$ от чётности или нечётности порядка r этих средних.

Для двустороннего числового ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \quad (5)$$

А. К. Покало в работе [11, с. 24, (3)] ввёл средние

$$\forall N \in \mathbb{Z}_+ \quad M_N := \sum_{n=-N}^N \left(1 - \sum_{v=1}^{\infty} d_v(N) \left|\frac{n}{N+1}\right|^v\right) a_n. \quad (6)$$

Частные случаи средних А. К. Покало (6). 1) Если все $(v \in \mathbb{Z}_1 := \{1, 2, 3, \dots\})$ коэффициенты $d_v(N) \geq 0$, то имеем симметричные частичные суммы

$$\forall N \in \mathbb{Z}_+ \quad s_N := \sum_{n=-N}^N a_n \quad (7)$$

двустороннего ряда (5); 2) если коэффициент $d_1(N) \geq 1$, а остальные $(v \geq 2)$ коэффициенты $d_v(N) \geq 0$, то получаем средние Фейера (средние арифметические первых симметричных частичных сумм, средние Чезаро первого порядка, средние Гельдера первого порядка); 3) если для натурального r коэффициент $d_r(N) \geq 1$, а остальные $(v \in \mathbb{Z}_1 \setminus \{r\})$ коэффициенты $d_v(N) \geq 0$, то имеем средние Зигмунда (нормальные средние, типические средние, эталонные средние, средние М. Рисса).

Метод суммирования (6) двусторонних числовых рядов (5) называется *регулярным*, если из существования конечного предела $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N =: s$ всегда следует существование $\lim_{N \rightarrow \infty} M_N = s$ [1, с. 24, § 1.4].

Теорема 1. Пусть двойная комплексная последовательность $(d_v(N))$, где номер строки N принимает значения $0, 1, 2, \dots$, а номер столбца v принимает значения $1, 2, 3, \dots$, такова, что ограничены в совокупности все суммы рядов из модулей членов каждой строки:

$$c_2 := \sup_{N \in \mathbb{Z}_+} \sum_{v=1}^{\infty} |d_v(N)| < \infty. \quad (8)$$

Тогда средние А. К. Покало (6) двустороннего числового ряда (5) регулярны.

Доказана теорема 1 в работе автора [12, с. 42—45].

Говорят, что метод суммирования (6) двусторонних числовых рядов (5) включает метод Зигмунда суммирования этих рядов, если из существования конечного предела $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \left[1 - |n/(N+1)|^r \right] a_n =: \tau$ всегда следует существование $\lim_{N \rightarrow \infty} M_N = \tau$ [1, с. 91, § 4.3].

Теорема 2. Пусть двойная комплексная последовательность $(d_v(N))$, где номер строки N принимает значения $0, 1, 2, \dots$, а номер столбца v принимает значения $1, 2, 3, \dots$, такова, что конечна верхняя грань

$$c_3 := \sup_{N \in \mathbb{Z}_+} \sum_{v=1}^{\infty} v |d_v(N)| < \infty. \quad (9)$$

И пусть элементы $\mu_{N+1}^{(N)}$, определяемые соглашениями

$$\forall N \in \mathbb{Z}_+ \quad \mu_{N+1}^{(N)} := 1 - \sum_{v=1}^{\infty} d_v(N), \quad (10)$$

удовлетворяют условию

$$\mu_{N+1}^{(N)} = O\left(\frac{1}{N}\right), \quad N \rightarrow \infty.$$

Тогда средние А. К. Покало (6) двустороннего числового ряда (5) включают средние Зигмунда.

Очевидно, что предположение (9) влечёт (символ « $\Rightarrow$ ») предположение (8): $\tilde{n}_2 \leq \tilde{n}_3$. Иными словами, все рассматриваемые в теореме 2 методы суммирования (6) двусторонних числовых рядов (5) заведомо являются регулярными.

Доказательство теоремы 2 не приводится. Укажем, что в частном случае $r \rightarrow 1$, т. е. в случае средних Фейера теорема 2 выводится из работы автора [12, с. 45, теорема 2].

Напомним, что Д. А. Райков, переводивший с английского языка на русский монографию G. H. Hardy, ряды (5) называет рядами, бесконечными в обоих направлениях [1, с. 298, § 10.12], и в случае существования конечного предела симметричных частичных сумм (7) называет ряды (5) ограниченно сходящимися [1, с. 298]. Аналогия: несобственный интеграл Римана первого рода в смысле главного значения Коши

$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, dx := \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \sin x \, dx$ существует и равен нулю, хотя двойной предел

$\lim_{\min(N_1, N_2) \rightarrow \infty} \int_{-N_1}^{N_2} \sin x \, dx$ не существует. Смотрите также [13, с. 738—739, замечание]. Обозначение

“P.V.” от английских слов “principal value”, которые переводятся как «главное значение».

Средние (6) А. К. Покало ввёл в 1962 году. Эстонский математик А. Кивинукк в 1972 году и русский математик В. А. Баскаков в 1995 году пришли в своих исследованиях тоже к средним (6). Поскольку в статьях А. Кивинукка [14, с. 239, (2.0)], [15, с. 32, условие А] и В. А. Баскакова [16, с. 516] отсутствуют ссылки на А. К. Покало, то можно сделать вывод, что они пришли к средним (6) независимо друг от друга и независимо от А. К. Покало.

Асимптотические формулы для отклонения функции от средних А. К. Покало её простого тригонометрического ряда Фурье. Если функция $f \in L^1(T)$, то в почти каждой точке x действительной прямой R определена функция

$$\tilde{f}(x) := \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(\int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi} \right) f(x-t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt \in \bigcap_{0 < p < 1} L^p(T),$$

которую называют *тригонометрически сопряжённой* к функции f . Если функция $f \in L^1(T)$, то

$$f(x) \stackrel{\text{i.ä.}}{=} \lim_{r \rightarrow 1-0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \hat{f}(n) e^{inx}, \quad (11)$$

$$\tilde{f}(x) \stackrel{\text{i.ä.}}{=} \lim_{r \rightarrow 1-0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} (-i \operatorname{sgn} n) \hat{f}(n) e^{inx}, \quad (12)$$

где символ « $\stackrel{\text{i.ä.}}{=}$ » означает равенство почти всюду на R . Иными словами, тригонометрический ряд Фурье (1) функции $f \in L^1(T)$ и сопряжённый с ним тригонометрический ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i \operatorname{sgn} n) \hat{f}(n) e^{inx} \quad (13)$$

суммируем методом Абеля ($\Leftrightarrow$ методом Абеля—Пуассона) почти всюду на R соответственно к $f(x)$ и $\tilde{f}(x)$. В правых частях (11) и (12) стоят функции, гармонически сопряжённые в единичном круге $z = r e^{ix}$, где модуль $r := |z| \in [0, 1)$ и главное значение аргумента $x := \arg z \in (-\pi, \pi]$. Если при показателе $p \in (1, \infty)$ функция $f \in L^p(T)$, то тригонометрически сопряжённая функция $\tilde{f} \in L^p(T)$. В случае же $f \in L^\infty(T)$ тригонометрически сопряжённая функция $\tilde{f} \in \mathbf{BMO}(T)$. Напоминаем, что имеют место строгие включения $L^\infty(T) \subsetneq \mathbf{BMO}(T) \subsetneq \bigcap_{1 < p < \infty} L^p(T)$. Функциям ограниченной средней осцилляции посвящены работы автора [17], [18, теорема 4] и [19], а функциям исчезающей средней осцилляции — работы автора [20, с. 232, теорема 2] и [21].

Если при натуральном $r \geq 2$ периодическая с периодом 2π функция f абсолютно непрерывно дифференцируема $r-1$ раз и её $(r-1)$ -я производная удовлетворяет условию Липшица первого порядка:

$$|f^{(r-1)}(x_1) - f^{(r-1)}(x_2)| \leq \|f^{(r)}\|_\infty \cdot |x_1 - x_2|, \quad (14)$$

то, как показал М. Заманский [22, с. 169, теорема 1], на действительной прямой R справедлива асимптотическая формула

$$f(x) - \sum_{n=-N}^N \left(1 - \left| \frac{n}{N+1} \right| \right) \hat{f}(n) e^{inx} = \frac{\tilde{f}'(x)}{N+1} + O\left(\frac{1}{N^r} \right), \quad N \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Пусть

$$\forall N \in Z_+ \quad M_N f(x) := \sum_{n=-N}^N \left(1 - \sum_{v=1}^{\infty} d_v(N) \left| \frac{n}{N+1} \right|^v \right) \hat{f}(n) e^{inx} \quad (16)$$

суть средние А. К. Покало тригонометрического ряда Фурье (1) функции $f \in L^1(T)$. В частности,

$$\forall N \in Z_+ \quad s_N f(x) := \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{inx} \quad (17)$$

суть симметричные частичные суммы тригонометрического ряда Фурье (1) функции $f \in L^1(T)$. Если тригонометрический ряд Фурье функции $f \in L^1(T)$ записать в действительной форме

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt \cdot \cos nx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt \cdot \sin nx \right],$$

то ясно, что в этом случае речь идёт на самом деле о суммируемости ряда по блокам.

Теорема 3. Предположение о методе суммирования: двойная комплексная последовательность $(d_v(N))$, где номер строки N принимает значения $0, 1, 2, \dots$, а номер столбца v принимает значения $1, 2, 3, \dots$, такова, что конечна верхняя грань (9).

Предположение о приближаемой функции: при натуральном $r \geq 2$ периодическая с периодом 2π функция f имеет следующие структурные свойства:

1) в случае нечётности r функция $\tilde{f}$, тригонометрически сопряжённая к функции f , абсолютно непрерывно дифференцируема $r-1$ раз и её $(r-1)$ -я производная удовлетворяет условию Липшица первого порядка:

$$|\tilde{f}^{(r-1)}(x_1) - \tilde{f}^{(r-1)}(x_2)| \leq \|\tilde{f}^{(r)}\|_{\infty} \cdot |x_1 - x_2|;$$

2) в случае чётности r функция f абсолютно непрерывно дифференцируема $r-1$ раз и её $(r-1)$ -я производная удовлетворяет условию Липшица первого порядка (14).

Утверждение: при двух указанных выше предположениях справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} f(x) - M_N f(x) = & d_1(N) \frac{\tilde{f}'(x)}{N+1} - d_2(N) \frac{f''(x)}{(N+1)^2} - d_3(N) \frac{\tilde{f}'''(x)}{(N+1)^3} + d_4(N) \frac{f^{(4)}(x)}{(N+1)^4} + d_5(N) \frac{\tilde{f}^{(5)}(x)}{(N+1)^5} - \\ & - d_6(N) \frac{f^{(6)}(x)}{(N+1)^6} - d_7(N) \frac{\tilde{f}^{(7)}(x)}{(N+1)^7} + d_8(N) \frac{f^{(8)}(x)}{(N+1)^8} + \dots + (-1)^{\left[\frac{r}{2}\right]} d_{r-1}(N) \frac{f^{(r-1)}(x)}{(N+1)^{r-1}} - \\ & - (-1)^{\left[\frac{r+1}{2}\right]} \frac{s_N f^{(r)}(x)}{(N+1)^r} \mu_{N+1}^{(N)} + O\left(\frac{1}{N^r}\right), \quad N \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (18)$$

где $[r/2]$ есть целая часть действительного числа $r/2$, функция

$$f^{(r)} := \begin{cases} -\tilde{f}^{(r)}, & \text{если } r \text{ — нечётное,} \\ f^{(r)}, & \text{если } r \text{ — чётное,} \end{cases}$$

и элементы $\mu_{N+1}^{(N)}$ определены соглашениями (10).

Название «асимптотическая формула» объясняется тем, что каждая последующая дробь $\frac{1}{(N+1)^{v+1}}$ в главной части [23, с. 496] правой части (18) есть o -малое по сравнению с предыдущей дробью $\frac{1}{(N+1)^v}$ при $N \rightarrow \infty$.

Частным случаем (18) является асимптотическая формула М. Заманского (15). Идея доказательства теоремы 3 как в [24, с. 44, теорема 1].

А. К. Покало в [25, с. 38, теорема 2] оценил остаток правой части (18) через модуль непрерывности первого порядка функции $f^{(r-1)} \in C(T)$:

$$\forall \delta > 0 \quad \omega_1(f^{(r-1)}, \delta) := \sup \left\{ |f^{(r-1)}(x_1) - f^{(r-1)}(x_2)| : |x_1 - x_2| \leq \delta \right\}.$$

Если $\omega_1(f^{(r-1)}, \delta) = c_4(f)\delta$, то функция f имеет почти всюду на R производную r -го порядка, которая существенно-ограничена. Аналогично в случае $\omega_1(\tilde{f}^{(r-1)}, \delta) = c_4(f)\delta$ существенно-ограничена $\tilde{f}^{(r)}$. Эта дополнительная информация учтена при доказательстве теоремы 3. Сразу же укажем, что А. К. Покало аналог своего результата для $f^{(r-1)} \in \text{Lip } \alpha(T)$, $0 < \alpha \leq 1$, [25, с. 38—39, теоремы 2 и 3] доказал со своим аспирантом И. Н. Бруем в [26, с. 6—7, теорема 1] для рядов Фабера, когда порождающий компакт есть замкнутая жорданова область $\bar{G}$ с кратно-гладкой границей Γ .

Также А. К. Покало в [25, с. 36, теорема 1] оценил остаток правой части (18) через модуль непрерывности второго порядка функции $f^{(r-1)} \in \mathbf{C}(T)$:

$$\forall \delta > 0 \quad \omega_2(f^{(r-1)}, \delta) := \sup \left\{ \left| f^{(r-1)}(x_1) - 2f^{(r-1)}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f^{(r-1)}(x_2) \right| : |x_1 - x_2| \leq 2\delta \right\}.$$

Очевидно, что $\omega_2(f^{(r-1)}, \delta) \leq 2\omega_1(f^{(r-1)}, \delta)$ и

$$\mathbf{Lip}1(T) \subsetneq \mathbf{Zyg}1(T) := \left\{ f \in \tilde{\mathbf{N}}(T) : \left| f(x_1) - 2f\left[\frac{x_1 + x_2}{2}\right] + f(x_2) \right| \leq c_5(f) \cdot |x_1 - x_2| \right\}.$$

Выше знак « $\subsetneq$ » объясняется тем, что непрерывная на действительной прямой R функция К. Вейерштрасса $W(x) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos 2^n x \in \mathbf{Zyg}1(T)$ ни в одной точке R не имеет производной; следовательно, $W \notin \mathbf{Lip}1(T)$. В определении класса функций $\mathbf{Zyg}1(T)$ требование $f \in \tilde{\mathbf{N}}(T)$ существенно, как показывает пример функции

$$\forall x \in R \quad \operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

в точке x , для которой $x \neq 0$, разрывной и удовлетворяющей условию: $\forall \delta > 0 \quad |\operatorname{sgn}(-\delta) - 2\operatorname{sgn} 0 + \operatorname{sgn} \delta| = 0 < c_5 \cdot 2\delta$.

Из асимптотической формулы (18) можно: 1) найти условия, при которых средние А. К. Покало (16) осуществляют приближение порядка наилучшего [24, с. 49—50, следствие 3], т. е. получить прямую теорему Д. Джексона; 2) вывести теорему о насыщении [27, с. 119—120, теорема 2], т. е. дать её наиболее прозрачное доказательство; 3) получить двусторонние оценки приближения.

Кратные тригонометрические ряды Фурье. Функция $f \in \mathbf{L}^1(T^2)$ порождает, во-первых, двойную числовую последовательность
$$\left(\hat{f}(n_1, n_2) := \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t_1, t_2) e^{-i(n_1 t_1 + n_2 t_2)} dt_1 dt_2 \right)_{\substack{n_1 = -\infty, n_2 = \infty \\ n_1 = -\infty, n_2 = -\infty}}$$
 тригонометрических коэффициентов Фурье функции f и, во-вторых, функциональный
$$\sum_{n_1 = -\infty}^{\infty} \sum_{n_2 = -\infty}^{\infty} \hat{f}(n_1, n_2) e^{i(n_1 x_1 + n_2 x_2)}$$
 двойной тригонометрический ряд Фурье функции f .

По способу составления симметричных частичных сумм двойного тригонометрического ряда Фурье функции $f \in \mathbf{L}^1(T^2)$ различают:

- 1) круговые частичные суммы $s_R^0 f(x_1, x_2) := \sum \sum_{n_1^2 + n_2^2 \leq R^2} \hat{f}(n_1, n_2) e^{i(n_1 x_1 + n_2 x_2)}$,
- 2) треугольные частичные суммы $s_N f(x_1, x_2) := \sum \sum_{|n_1| + |n_2| \leq N} \hat{f}(n_1, n_2) e^{i(n_1 x_1 + n_2 x_2)}$,
- 3) квадратные частичные суммы $s_{N,N} f(x_1, x_2) := \sum \sum_{\max(|n_1|, |n_2|) \leq N} \hat{f}(n_1, n_2) e^{i(n_1 x_1 + n_2 x_2)}$,
- 4) прямоугольные частичные суммы $s_{N_1, N_2} f(x_1, x_2) := \sum_{n_1 = -N_1}^{N_1} \sum_{n_2 = -N_2}^{N_2} \hat{f}(n_1, n_2) e^{i(n_1 x_1 + n_2 x_2)}$.

Все эти четыре вида симметричных частичных сумм в случае простого тригонометрического ряда Фурье (1) функции $f \in \mathbf{L}^1(T)$ дают симметричные частичные суммы (17).

Известно [28, с. 13—15]: 1) из сходимости по кругам ($R \rightarrow \infty$) не вытекают сходимости по треугольникам, квадратам и прямоугольникам; 2) из треугольной сходимости ($N \rightarrow \infty$) не следуют ни круговая сходимость, ни сходимости по квадратам и прямоугольникам; 3) из сходимостей по квадратам ($N \rightarrow \infty$) и по прямоугольникам ($(\min(N_1, N_2) \rightarrow \infty)$) не вытекают сходимости по кругам и по треугольникам. Очевидно: из сходимости по квадратам не следует сходимость по прямоугольникам, а из сходимости по прямоугольникам всегда следует сходимость по квадратам. Укажем, что суммируемость по прямоугольникам рассматривалась в работе автора [29].

А. К. Покало поручил своему первому аспиранту П. И. Кибалко обобщить его результаты с простых тригонометрических рядов Фурье на кратные. П. И. Кибалко опубликовал один результат (см. [30], или [31], или [32, с. 32—34]) и оставил чистую математику (reine Mathematik, pure mathematics). Автор писал отзыв на автореферат [33] его диссертации, выполненной под руководством Ю. К. Ландо и И. А. Новик.

Ряды Тейлора. Среди тригонометрических рядов Фурье функций $f \in L^1(T)$ выделяют тригонометрические ряды Фурье степенного типа, которые имеют вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}, \quad (19)$$

т. е. функций $f \in L^1_+(T) := \{f \in L^1(T) : \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_+ \hat{f}(n) = 0\}$. Нюансы при переходе от двусторонних тригонометрических рядов Фурье (1) к односторонним тригонометрическим рядам Фурье степенного типа (19) иллюстрирует следующий пример [34, с. 17, (2.8)]: «аналитическая проекция» ограниченной функции

$$\frac{\pi - x}{2} = P.V. \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \right) \frac{1}{2in} e^{inx} \quad (0 < x < 2\pi)$$

является неограниченной функцией

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\pi - x}{2} + i \ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2in} e^{inx} \quad (0 < x < 2\pi).$$

Если периодическая с периодом 2π функция f удовлетворяет условию Липшица первого порядка и, кроме того, имеет тригонометрический ряд Фурье степенного типа, то, как показал Д. Алексич, отклонение функции f от средних Фейера её ряда Фурье (см. [35, с. 50, VIII] или [34, с. 203, теорема (13.35)])

$$\max_{-\pi \leq x \leq \pi} \left| f(x) - \sum_{n=0}^N \left(1 - \frac{n}{N+1} \right) \cdot \hat{f}(n) \cdot e^{inx} \right| = O\left(\frac{1}{N}\right), \quad N \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Предыдущая функция $f(x)$ является граничным значением аналитической в единичном круге $|z| < 1$ функции $g(z) : f(x) = g(e^{ix})$, которая удовлетворяет на замкнутом единичном круге $|z| \leq 1$ условию Липшица первого порядка

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leq \sup_{|z| < 1} |g'(z)| \cdot |z_1 - z_2|. \quad (21)$$

Поэтому результат Д. Алексича (20) может быть записан в следующем виде:

$$\max_{|z| \leq 1} \left| g(z) - \sum_{n=0}^N \left(1 - \frac{n}{N+1} \right) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{g(\tau)}{\tau^{n+1}} d\tau \cdot z^n \right| = O\left(\frac{1}{N}\right), \quad N \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Очевидно, что в (22) стоит N -я сумма Фейера ряда Тейлора функции $g(z)$.

Если при натуральном $r \geq 2$ аналитическая в единичном круге $|z| < 1$ функции $g(z)$ имеет производную $(r-1)$ -го порядка, которая удовлетворяет на замкнутом единичном круге $|z| \leq 1$ условию Липшица первого порядка

$$|g^{(r-1)}(z_1) - g^{(r-1)}(z_2)| \leq \sup_{|z| < 1} |g^{(r)}(z)| \cdot |z_1 - z_2|,$$

то, как показал С. Б. Стечкин [2, с. 466, (2.3)], на $|z| \leq 1$ справедлива асимптотическая формула

$$g(z) - \sum_{n=0}^N \left(1 - \frac{n}{N+1} \right) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{g(\tau)}{\tau^{n+1}} d\tau \cdot z^n = \frac{z g'(z)}{N+1} + O\left(\frac{1}{N^r}\right), \quad N \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Асимптотические формулы для отклонения аналитической в единичном круге $|z| < 1$ функции $g(z)$ от средних её ряда Тейлора получены в представленной А. Н. Колмогоровым работе А. К. Покало [36]. Позже результат для рядов Тейлора [36, с. 751, теорема], как уже указывалось, был обобщён в [26, с. 6—7, теорема 1] на ряды Фабера, когда порождающий компакт есть замкнутая жорданова область $\bar{G}$ с кратно-гладкой границей Γ .

В посмертное издание избранных трудов С. Б. Стечкина его статья [2] не вошла, хотя официальные комментаторы С. А. Теляковский и В. М. Тихомиров о ней высказываются [37, с. 365]. Исследования А. К. Покало ими не упоминаются.

Обобщению рядов Б. Тейлора посвящена проблема К. Рунге [38] — Д. Гильберта [39] — П. Пенлеве [40]: с областью комплексной плоскости связать такую систему алгебраических многочленов, чтобы каждая функция, аналитическая в области и удовлетворяющая, быть может, некоторым дополнительным условиям на границе области, разлагалась в ряд по этой системе многочленов, который равномерно сходится внутри области.

В процессе решения этой проблемы последовательно появились: система многочленов Г. Фабера [41]; система Г. Сегё функций, ортонормированных по спрямляемому контуру ∂G жордановой области $G \subset \mathbb{C}$ [42]; система С. Бохнера — Т. Карлемана функций, ортонормированных по площади открытого ограниченного множества $O \subset \mathbb{C}$ [43; 44].

А. К. Покало поручил своему второму аспиранту И. Н. Брую, т. е. автору настоящей работы, обобщить его результаты на ряды Фабера. Укажем, что ряды, ортогональные по контуру и по площади, рассматривались в работах автора [45—47].

Ряды Фабера. Порождающим компактом K будем называть всякий содержащий ≥ 2 точек компакт комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с односвязным дополнением до пополненной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. По теореме Б. Римана о конформной эквивалентности односвязных областей существует единственная функция $z = \psi(w)$, которая конформно и однолистно отображает внешность $|w| > 1$ единичной окружности $|w| = 1$ на односвязную область $\bar{\mathbb{N}} \setminus K$ с условием нормировки $0 < \lim_{w \rightarrow \infty} \psi(w)/w < +\infty$. В настоящем пункте символы ∞ и $+\infty$ имеют разный смысл: символ ∞ означает бесконечно удалённую точку пополненной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$, а символ $+\infty$ — положительную бесконечность пополненной действительной прямой $\bar{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Очевидно, что $\psi(\infty) = \infty$, т. е. мероморфная функция $z = \psi(w)$, имеет только простой полюс в бесконечно удалённой точке ∞ .

Систему $(F_n(z))_{n=0}^{+\infty}$ многочленов Фабера для K производит функция

$$\frac{w\psi'(w)}{\psi(w)-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n(z)}{w^n} \quad (z \in K, |w| > 1), \quad (24)$$

где ряд справа сходится в вырожденном кольце $1 < |w| < +\infty$ абсолютно и равномерно внутри. При формальной подстановке $w = e^{it}$ в лорановское разложение (24) получается ряд Фурье граничной функции

$$L^1(T) \ni \frac{e^{it}\psi'(e^{it})}{\psi(e^{it})-z} \sim \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(z)e^{-int}. \quad (25)$$

Если функция $f(z)$ аналитична в жордановой области G со спрямляемой границей Γ и непрерывна на замкнутой жордановой области $\bar{G} := G \cup \Gamma$, то в силу интегральной формулы Коши

$$\forall z \in G \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f[\psi(e^{it})] \cdot \frac{e^{it}\psi'(e^{it})}{\psi(e^{it})-z} dt. \quad (26)$$

Из правой части последней формулы (26), рядов Фурье (25) и

$$\tilde{N}(T) \ni f\left[\psi\left(e^{ix}\right)\right] \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f\left[\psi\left(e^{it}\right)\right] e^{-int} dt \cdot e^{inx}$$

на основании равенства Парсеваля для произведения двух функций получаем функциональный ряд

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f\left[\psi\left(e^{it}\right)\right] e^{-int} dt \cdot F_n(z),$$

который называют рядом Фабера функции $f(z)$ по системе $(F_n(z))_{n=0}^{+\infty}$ многочленов Фабера для $\bar{G}$. Его коэффициенты

$$\forall n \in Z_+ \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f\left[\psi\left(e^{it}\right)\right] e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\tau|=1} \frac{f[\psi(\tau)]}{\tau^{n+1}} d\tau =: a_n(f) \quad (27)$$

называют коэффициентами Фабера функции $f(z)$ по системе $(F_n(z))_{n=0}^{+\infty}$ многочленов Фабера для $\bar{G}$.

Если порождающий компакт K есть замкнутый единичный круг $|z| \leq 1$, то отображающая функция Римана $z = \psi(w) := w$ и производящая функция

$$\frac{w\psi'(w)}{\psi(w)-z} := \frac{w \cdot 1}{w-z} = \frac{1}{1-\frac{z}{w}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{w^n} \quad (|z| \leq 1, |w| > 1).$$

Таким образом, система многочленов Фабера для замкнутого единичного круга $|z| \leq 1$ есть система тейлоровских степеней $z : \forall n \in Z_+ \quad F_n(z) = z^n$.

Если функция $f(z)$ аналитична в единичном круге $|z| < 1$ и непрерывна на замкнутом единичном круге $|z| \leq 1$, то из правой части (27) с учётом $\psi(\tau) := \tau$ видно, что коэффициенты Фабера функции $f(z)$ по системе $(z^n)_{n=0}^{+\infty}$ многочленов Фабера для $|z| \leq 1$ суть коэффициенты Тейлора функции $f(z)$.

Итак, ряды Тейлора являются частным случаем рядов Фабера: [41, с. 58—59], [48, с. 11], [5, с. 350, пример 1], [49, с. 55, пример 1].

Как показал Д. Алексич (см. [35, с. 48, IV] или [34, с. 202, теорема (13.34), необходимость]), из скорости

$$\max_{-\pi \leq x \leq \pi} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N \left(1 - \left| \frac{n}{N+1} \right| \right) \hat{f}(n) e^{inx} \right| = O\left(\frac{1}{N}\right), \quad N \rightarrow \infty, \quad (28)$$

следует, что тригонометрически сопряжённая функция $\tilde{f}$ удовлетворяет условию Липшица первого порядка: $\tilde{f} \in \mathbf{Lip1}(T)$. В случае рядов Фурье степенного типа тригонометрически сопряжённая функция $\tilde{f}(x) = -i[f(x) - \hat{f}(0)]$. Поэтому для рядов Тейлора, согласно Д. Алексичу [35, с. 49, VI], из скорости (28) следует, что аналитическая в единичном круге $|z| < 1$ функция $g(z)$ удовлетворяет на замкнутом единичном круге $|z| \leq 1$ условию Липшица первого порядка (21): $g \in \mathbf{Lip1}(|z| \leq 1)$.

Если при натуральном r периодическая с периодом 2π функция f абсолютно непрерывно дифференцируема $r-1$ раз и её $(r-1)$ -я производная удовлетворяет условию Липшица первого порядка (14), то её r -я производная имеет тригонометрический ряд Фурье следующего вида:

$$f^{(r)} \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (in)^r \hat{f}(n) e^{inx}. \quad (29)$$

Символ « $\sim$ » означает, что функции слева соответствует функциональный ряд справа. Соответствие (29) служит наводкой для определения производной любого положительного действительного порядка $r > 0$ периодической функции. По поводу определения производной дробного порядка $0 < r < 1$ периодической функции Г. Вейлем (Hermann Weyl) и С. М. Никольским и соотношения между их определениями смотрите [50, с. 9].

По аналогии с (29) П. Л. Бутцер и Х. Й. Вагнер ввели [51] понятие производной Уолша

$$D^{[r]} f \sim \sum_{n=0}^{+\infty} n^r \cdot \int_0^{+1} f(t) w_n(t) dt \cdot w_n(x),$$

где $(w_n(x))_{n=0}^{+\infty}$ есть система функций Дж. Л. Уолша в нумерации Пэли, а Х. Зелин ввёл [52] более общее понятие производной Виленкина

$$T^{<r>} f \sim \sum_{n=0}^{+\infty} n^r \cdot \int_0^{+1} f(t) \bar{\chi}_n(t) dt \cdot \chi_n(x),$$

где $(\chi_n(x))_{n=0}^{+\infty}$ есть система функций Н. Я. Виленкина, соответствующая последовательности $(p_j)_{j=1}^{+\infty}$ натуральных чисел ≥ 2 . В случае последовательности $(2)_{j=1}^{+\infty}$ имеем систему $(w_n(x))_{n=0}^{+\infty}$.

Аналогично предыдущему вводится следующее понятие производной Фабера [53, с. 230, определение 2.3].

Определение. Пусть в жордановой области G со спрямляемой границей Γ задана аналитическая и ограниченная в G функция $f(z) : f(z) \in \mathbf{H}^\infty(G)$. При $r \in \mathbf{Z}_+$ функция $g(z) \in \mathbf{H}^\infty(G)$ называется производной Фабера r -го порядка функции $f(z)$ и обозначается $F^r f(z)$, если

$$\forall n \in \mathbf{Z}_+ \quad a_n(g) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\tau|=1} \frac{g[\psi(\tau)]}{\tau^{n+1}} d\tau = (in)^r \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\tau|=1} \frac{f[\psi(\tau)]}{\tau^{n+1}} d\tau =: (in)^r a_n(f).$$

Таким образом,

$$F^r f(z) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} (in)^r a_n(f) F_n(z).$$

Теорема 4. Предположение о порождающем компакте: замкнутая жорданова область $\bar{G}$ имеет спрямляемую границу Γ , которая является гладкой, по С. Я. Альперу, кривой или кривой ограниченного вращения.

Предположение о методе суммирования: двойная комплексная последовательность $(d_v(N))$, где номер строки N принимает значения $0, 1, 2, \dots$, а номер столбца v принимает значения $1, 2, 3, \dots$, такова, что конечна верхняя грань (9).

Предположение о приближаемой функции: при натуральном $r \geq 2$ аналитическая в области G функция $f(z)$ имеет ограниченную в G производную Фабера r -го порядка: $F^r f(z) \in \mathbf{H}^\infty(G)$.

Утверждение: при трёх указанных выше предположениях справедлива асимптотическая формула

$$f(z) - \sum_{n=0}^N \left[1 - \sum_{v=1}^{+\infty} d_v(N) \left(\frac{n}{N+1} \right)^v \right] a_n(f) F_n(z) = \sum_{v=1}^{r-1} d_v(N) \frac{F^v f(z)}{[i(N+1)]^v} - \frac{s_N F^r f(z)}{[i(N+1)]^r} \mu_{N+1}^{(N)} + O\left(\frac{1}{N^r}\right), \quad N \rightarrow \infty. \quad (30)$$

Вышеприведенная теорема 4 частично доказана: случай, когда порождающий компакт есть замкнутая жорданова область $\bar{G}$ с гладкой, по С. Я. Альперу, границей Γ (stark glatt), автором анонсирован в [54, с. 5, (7)] и с доказательством опубликован в [55, с. 46, (8)]. Случай, когда порождающий компакт есть замкнутая жорданова область $\bar{G}$ с границей Γ ограниченного вращения (bounded rotation), рассматривался автором и Г. Шмидэром [56, с. 168, теорема 7] в предположении, что при натуральном $r \geq 2$ аналитическая в области G функция $f(z)$ имеет производную Фабера $(r-1)$ -го порядка, которая на $\bar{G}$ удовлетворяет условию Липшица порядка $0 < \alpha \leq 1$: $F^{r-1} f(z) \in \mathbf{Lip} \alpha(\bar{G})$. В предположении $\alpha \rightarrow 1$ на самом деле имеет место (30); доказательство

этого случая теоремы 4 аналогично доказательству [55]. *Nota bene*, пересекающиеся классы замкнутых жордановых областей с гладкой, по С. Я. Альперу, границей и с границей ограниченного вращения различны в том смысле, что каждый из классов содержит область, не входящую в другой класс.

Если порождающий компакт является замкнутым единичным кругом $|z| \leq 1$, то между обычной производной и производной Фабера существует следующая связь [56, с. 164]: $F^1 f(z) = izf'(z)$, $F^2 f(z) = i^2 \left(zf'(z) + z^2 f''(z) \right)$ и т. д. В этом частном случае из асимптотической формулы (30) теоремы 4 получаем асимптотическую формулу С. Б. Стечкина (23) с $g(z) = f(z)$. *Nota bene*, хотя ряды Тейлора являются частным случаем рядов Фабера, для обобщения на последние асимптотической формулы С. Б. Стечкина (23) пришлось ввести понятие производной Фабера.

Прежде чем оставить случаи круга и областей, в определённом смысле близких к кругу, и перейти к случаю отрезка $-1 \leq z \leq +1$, напомним [57, с. 84] определение многочленов Фабера натурального r -го

рода: $F_{n+r}^{(r)}(z) = (n+r)(n+r-1)\dots(n+1)^r F_n(z)$; ${}^0 F_n(z) := F_n(z)$. Укажем, что система $\left({}^r F_n(z) \right)_{n=0}^{+\infty}$

применялась в работе автора [58], а система $\left({}^1 F_n(z) \right)_{n=0}^{+\infty}$ — в более ранней работе автора [59].

Говорят, что порождающий компакт K имеет спрямляемую границу Γ , если функция $\psi(e^{it})$ абсолютно непрерывна на отрезке $-\pi \leq t \leq +\pi$: $\psi(e^{it}) \in \mathbf{AC}(T)$, или, что то же самое, если функции $x(t) := \operatorname{Re} \psi(e^{it})$ и $y(t) := \operatorname{Im} \psi(e^{it})$ на отрезке $-\pi \leq t \leq +\pi$ непрерывны и имеют ограниченное изменение.

Если порождающий компакт K есть отрезок $-1 \leq z \leq +1$, то отображающая функция Римана $z = \psi(w) := \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right)$ есть функция Н. Е. Жуковского. Граница Γ состоит из верхнего и нижнего берегов разреза комплексной плоскости вдоль отрезка $-1 \leq z \leq +1$. Иными словами, порождающий компакт K является вырожденным эллипсом $\left(\frac{\operatorname{Re} z}{a} \right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im} z}{b} \right)^2 \leq 1$, когда большая полуось $a \rightarrow +1$ и малая полуось $b \rightarrow 0$. Производящая функция

$$\frac{w\psi'(w)}{\psi(w)-z} = \frac{w^2-1}{w^2-2zw+1} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cos(n\arccos z)}{w^n} \quad (-1 \leq z \leq +1, |w| > 1);$$

деление «углом» приведено в пособии автора [60, с. 49, таблица 1].

Таким образом, 0-й многочлен Фабера $F_0(z) \equiv 1$, а для всех натуральных n многочлены Фабера $F_n(z) = 2\cos(n\arccos z)$, т. е. $\forall n \in \mathbb{Z}_1$ многочлены Фабера суть умноженные на 2 многочлены Чебышёва первого рода.

Если функция $f(z)$ непрерывна на отрезке $-1 \leq z \leq +1$, то для всех натуральных n из правой части (27) с учётом $\psi(\tau) := \frac{1}{2} \left(\tau + \frac{1}{\tau} \right)$ имеем

$$a_n(f) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\tau|=1} \frac{f\left[\frac{1}{2}\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right)\right]}{\tau^{n+1}} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\cos t) e^{-int} dt.$$

В последнем интеграле разобьём отрезок интегрирования $-\pi \leq t \leq +\pi$ на два: $-\pi \leq t \leq 0$ и $0 \leq t \leq +\pi$; им соответствуют в комплексной z -плоскости нижний берег разреза, проходимый слева направо, и верхний берег разреза, проходимый справа налево, т. е. вырожденный эллипс проходится в направлении против хода часовой стрелки. Тогда при любом натуральном n коэффициент Фабера

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 f(\cos t) e^{-int} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\pi} f(\cos t) e^{-int} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\pi} f(\cos t) \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\pi} f(\cos t) \cos nt dt.$$

Замена переменной интегрирования по формуле $t = \arccos \zeta$ приводит к следующим равенствам:

$$\forall n \in \mathbb{Z}_1 \quad a_n(f) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos(n\arccos \zeta) d\zeta.$$

Таким образом, $\forall n \in \mathbb{Z}_1$ коэффициенты Фабера $a_n(f)$ суть умноженные на $1/2$ коэффициенты Фурье функции $f(z)$ по системе $(\cos(n \arccos z))_{n=0}^{+\infty}$ многочленов Чебышёва первого рода. Аналогично [61, с. 14—15] убеждаемся, что 0-й коэффициент Фабера равен 0-му коэффициенту Фурье—Чебышёва.

Итак, ряды Фурье по системе многочленов Чебышёва первого рода являются частным случаем рядов Фабера: [41, с. 59—60], [62, с. 6], [5, с. 352—353, пример 3], [49, с. 56—57, пример 2].

По аналогии с тригонометрическим рядом (13), сопряжённым с тригонометрическим рядом Фурье (1) функции $f \in L^1(T)$, и по аналогии с функцией (12), тригонометрически сопряжённой к функции f , вводились понятия сопряжённого ряда и сопряжённой функции для других ортогональных рядов. Например, Макенхоупт и Стейн для ультрасферических рядов [63, с. 24, (2.4)], Макенхоупт для рядов Эрмита [64, с. 256, теорема 2, (с)], [65, с. 170, (3)], [66, с. 112, (51)], Макенхоупт для рядов Лагерра [67, с. 416, теорема 2, (с)], Хант для рядов Уолша [68, с. 29, (3.5)], [69, с. 248, (22)], мой венгерский соавтор Иштван Йо для рядов Дирихле [70] и разложений Штурма—Лиувилля [71].

Если функция $f(z)$ непрерывна на отрезке $-1 \leq z \leq +1$, то сложная функция $f(\cos \theta)$ на действительной прямой R чётна и 2π -периодична. Тригонометрический ряд Фурье в действительной форме функции $f(\cos \theta)$ имеет вид

$$f(\cos \theta) \stackrel{\text{в.д.}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{+\pi} f(\cos t) dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\pi} f(\cos t) \cos nt dt \cdot \cos n\theta. \quad (31)$$

Тогда для тригонометрически сопряжённой функции $[f(\cos \theta)]^\sim$ к сложной функции $f(\cos \theta)$ получаем

$$[f(\cos \theta)]^\sim \stackrel{\text{в.д.}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\pi} f(\cos t) \cos nt dt \cdot \sin n\theta.$$

После замен $\theta = \arccos z$ и $t = \arccos \zeta$ в (31) имеем ряд Фурье по системе многочленов Чебышёва первого рода

$$f(z) \stackrel{\text{в.д.}}{=} \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{f(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\zeta + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos(n \arccos \zeta) d\zeta \cdot \cos(n \arccos z).$$

П. Л. Бутцер и Р. Л. Штэнс ввели [72, с. 56, (4.9)] понятие чебышёвски сопряжённой функции

$$\overset{<\sim>}{f}(z) \stackrel{\text{в.д.}}{=} \lim_{-1 \leq z \leq +1, r \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cdot \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos(n \arccos \zeta) d\zeta \cdot \sin(n \arccos z). \quad (32)$$

Сопоставьте (32) с (12). Очевидно, что $\overset{<\sim>}{f}(\cos \theta) = [f(\cos \theta)]^\sim$. Поэтому из асимптотической формулы М. Заманского (15) имеем

$$\begin{aligned} f(z) - \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\zeta + \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{n}{N+1} \right) \cdot \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos(n \arccos \zeta) d\zeta \cdot \cos(n \arccos z) \right] = \\ = -\sqrt{1-z^2} \frac{\left(\overset{<\sim>}{f} \right)'(z)}{N+1} + O\left(\frac{1}{N^r} \right), \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда видна особая роль точек $z = -1$ и $z = +1$ в аппроксимации на отрезке $-1 \leq z \leq +1$. Подробнее об этом смотрите в [5, с. 334] или [73, с. 158].

Напоминаем, что в этом пункте мы различали символы ∞ и $+\infty$.

Теория интерполирования. Как уже говорилось во введении, учеником С. Н. Бернштейна был А. Х. Турецкий, две книги которого посвящены этой теории. Первая книга [74] является прижизненным изданием, а вторая [75] — посмертным изданием А. Х. Турецкого. Готовил [75] к печати его ученик М. Б. Аксень; жизненный путь А. Х. Турецкого описал в ней Ф. Д. Гахов.

Автор после окончания аспирантуры в Минске был распределён на работу в Витебск, где на кафедре познакомился со значительно старшим коллегой А. Я. Ротфарбом, который окончил аспирантуру у А. Х. Турецкого без представления диссертации к защите. По словам А. Я. Ротфарба, ему А. Х. Турецкий поручил получить в теории интерполирования аналоги результатов М. Заманского [22].

Поколения автора аспирант А. Х. Турецкого после смерти своего научного руководителя перешёл под руководство А. К. Покало, который поручил ему в теории интерполирования получить аналоги своих результатов о простых тригонометрических рядах Фурье. Автор не знает дальнейшей судьбы этого аспиранта после последовавшего массового отъезда евреев из СССР.

Интегралы Фурье. Функции $f \in L^1(T)$ соответствует ряд Фурье $P.V. \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right] e^{inx}$,

за сумму которого принимается предел последовательности его симметричных частичных сумм (17),

а функции $f \in L^1(-\infty, \infty)$ соответствует интеграл Фурье $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \right] e^{i\lambda x} d\lambda$,

в котором внешний интеграл по λ понимается в смысле главного значения Коши. Дроби $1/\sqrt{2\pi}$ стоят из соображений симметрии: тогда внутренний интеграл по t при фиксированном λ является нормированным преобразованием Фурье функции f , а внешний интеграл по λ является нормированным обратным преобразованием Фурье функции в квадратных скобках от λ .

А. К. Покало поручил своему аспиранту Н. П. Семенчуку получить для интегралов Фурье аналоги его результатов о рядах Фурье (см. [76] или [32, с. 35, теорема 3.2]). Б. И. Голубов и автор были официальными оппонентами по диссертации Н. П. Семенчука [77] (см. также [78], [79] или [80, с. 21—22, теорема 2.1, с. 22—23, теорема 2.2]).

Точные константы в теории приближения. А. К. Покало и Л. И. Шлома константы Лебега тригонометрической системы

$$\forall N \in \mathbb{Z}_+ \quad L_N := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=-N}^N e^{int} \right| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(2N+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt$$

представили в виде асимптотического ряда [81]. В последующем Л. И. Шлома (Майсеня) оставила эту тематику и под руководством К. И. Осолкова выполнила диссертационное исследование [82].

Банаховы пространства с чезаровской структурой были введены В. Требельсом [83, с. 19, определение 3.0], который является представителем школы П. Л. Бутцера (Аахен, ФРГ). Сам А. К. Покало на свои результаты о простых тригонометрических рядах Фурье, на результаты П. И. Кибалко о кратных тригонометрических рядах Фурье и на результаты Н. П. Семенчука об интегралах Фурье начал смотреть с точки зрения абстрактного сепарабельного банахова пространства, наделённого (C, α) -структурой (см. [84—[90 или [80]) А. К. Покало цитирует работы немецких математиков; в работах аахенской школы ссылки на исследования А. К. Покало отсутствуют.

Теория суммируемости числовых рядов в теории приближения функций. В [91, с. 40] и [92, с. 151] Л. Фейер доказал свою знаменитую аппроксимационную теорему: если функция $f \in C(T)$, то суммы Фейера её тригонометрического ряда Фурье (1) равномерно сходятся на R к ней:

$$\forall f \in C(T) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{-\pi \leq x \leq \pi} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N \left(1 - \left| \frac{n}{N+1} \right| \right) \hat{f}(n) e^{inx} \right| = 0.$$

Результат Л. Фейера произвёл большое впечатление на его современников. Им были известны: 1) теорема О. Коши, полученная в 1821 г., о регулярности вполне средних Фейера:

$$\exists \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N a_n =: s \in \bar{R} \Rightarrow \exists \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \left(1 - \left| \frac{n}{N+1} \right| \right) a_n = s;$$

2) пример Дюбуа-Реймона, приведённый в 1873 г., функции $f \in C(T)$ с расходящимся в точке x , $\delta \alpha \alpha \hat{f} \in 0$, её тригонометрическим рядом Фурье: $\sup_{N \in \mathbb{Z}_+} \left| \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{in0} \right| = \infty$.

Таким образом, аппроксимационная теорема Л. Фейера открыла существенно новое в поведении тригонометрических рядов Фурье. Средние арифметические первых симметричных частичных сумм, средние Чезаро первого порядка, средние Гёльдера первого порядка стали называть средними Фейера.

В работах Д. Алексича [34, с. 44—46], Б. Сёкефальви-Надя [93, с. 84] и С. Б. Стечкина [2, с. 462—466] по теории приближения функций чётко выделялись утверждения, относящиеся к теории суммируемости числовых рядов. Укажем, что А. Кивинукк и автор были официальными оппонентами по диссертации (PhD) Натальи Саеалле [94]. В направлении «суммируемость со скоростью» (summability with speed) автором получен следующий результат.

Теорема 5. Пусть двойная комплексная последовательность $(d_v(N))$, где номер строки N принимает значения $0, 1, 2, \dots$, а номер столбца v принимает значения $1, 2, 3, \dots$, такова, что конечна верхняя грань (9). И пусть двусторонний числовой ряд (5) суммируем методом Зигмунда

$$\forall N \in \mathbb{Z}_+ \quad Z_N^r := \sum_{n=-N}^N \left(1 - \left| \frac{n}{N+1} \right|^r \right) a_n \quad (33)$$

натурального порядка $r = 1, 2, 3, \dots$, т. е. $\exists \lim_{N \rightarrow \infty} Z_N^r =: \tau \in \mathbb{C}$. Тогда для средних А. К. Покало (6) двустороннего числового ряда (5) имеем ($N \geq 3$) следующую оценку скорости суммируемости к τ через скорость сходимости к τ его симметричных частичных сумм (7) и средних Зигмунда (33):

$$|\tau - M_N| \leq \left(\left| \mu_{N+1}^{(N)} \right| + \frac{c_3}{N+1} \right) |\tau - s_N| + \frac{2^{r-1}}{r} c_3 |\tau - Z_{N-1}^r| + \left(\sum_{v=1}^{r-1} + \sum_{v=r+1}^{\infty} \right) \frac{|d_v(N)|}{(N+1)^v} \left[\left| \frac{2^v - 1}{2^r - 1} - 1 \right| |\tau - Z_0^r| + \frac{2^{2r-2}}{r} v(v+r-2) \sum_{n=1}^{N-2} (n+2)^{v-1} |\tau - Z_n^r| \right],$$

в которой элементы $\mu_{N+1}^{(N)}$ определены соглашениями (10).

Для облегчения понимания теоремы 5 проведём такую аналогию: неравенство А. Н. Колмогорова оценивает норму промежуточной производной через нормы крайних производных.

Заключение. Аппроксимационные процессы делятся на насыщенные и ненасыщенные. Классические примеры: соответственно средние Фейера [95, с. 168—169] и симметричные частичные суммы (17) тригонометрического ряда Фурье (1) функции f .

А. К. Покало для отклонения функции от средних её простого тригонометрического ряда Фурье выделил главную часть, т. е. заполнил информацией участок между скоростью насыщения рассматриваемого аппроксимационного процесса и скоростью наилучшего приближения этой функции. Н. П. Семенчук получил аналоги результатов А. К. Покало для интегралов Фурье.

Функция $f \in \mathbf{Lip1}(T)$, средними Фейера её тригонометрического ряда Фурье приближается со скоростью $O\left(\frac{\ln N}{N}\right)$. Если же о функции $f \in \mathbf{Lip1}(T)$ дополнительно известно, что она имеет тригонометрический ряд Фурье степенного типа, то средние Фейера приближают её уже со скоростью $O\left(\frac{1}{N}\right)$. В последнем случае функция $f(x) = g(e^{ix})$, где функция $g(z)$ аналитична в единичном круге $|z| < 1$ и $g \in \mathbf{Lip1}(|z| \leq 1)$. Иными словами, ряд Фурье степенного типа функции $f(x)$ совпадает с рядом Тейлора функции $g(z)$ при $z = e^{ix}$. Одним из обобщений рядов Тейлора являются ряды Фабера, для которых автор настоящего обзора получал аналоги результатов А. К. Покало для простых тригонометрических рядов Фурье. Частным случаем рядов Фабера являются также ряды Фурье по системе многочленов Чебышёва первого рода.

Приведены без доказательства теоремы 2, 4 и 5 автора для средних А. К. Покало.

Из обзора видны поля приложения сил молодых исследователей. Для них в хронологическом порядке перечисляем рефераты статей А. К. Покало в реферативном журнале Американского математического общества “Mathematical Reviews”: 19,1171c [36]; 20#4003 [96]; 20#4144 [97]; 25#3324 [11]; 37#691 [98]; 41#5881 [24]; 44#706 [25]; 44#707 [99]; 46#9616 [84]; 81k:46011a [85]; 81k:46011b [86]; 82j:41016 [100]; 82i:41036 [81]; 86m:42021 [89]; 90b:34009 [101]; 92a:45028 [102].

Список цитируемых источников

1. Харди, Г. Расходящиеся ряды / Г. Харди ; пер. с англ. Д. А. Райкова ; с предисл. и обзор. ст. С. Б. Стечкина. — М. : ИИЛ, 1951. — 504 с. — Перевод изд.: *Divergent Series* / G. H. Hardy. — Oxford, 1949. — (М. : Комкнига : Факториал Пресс, 2006).
2. Стечкин, С. Б. Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций / С. Б. Стечкин // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1953. — Т. 17, № 5. — С. 461—472.
3. Эдвардс, Р. Ряды Фурье в современном изложении : в 2 т. / Р. Эдвардс. — М. : Мир, 1985. — Т. 1. — 264 с.
4. Эдвардс, Р. Ряды Фурье в современном изложении : в 2 т. / Р. Эдвардс. — М. : Мир, 1985. — Т. 2. — 400 с.
5. Дзядык, В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В. К. Дзядык. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. — 512 с.
6. Корнейчук, Н. П. Точные константы в теории приближения / Н. П. Корнейчук. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 424 с.
7. Натансон, И. П. Конструктивная теория функций / И. П. Натансон. — М. ; Л. : ГИТТЛ, 1949. — 688 с.
8. Бруй, И. Н. Асимптотические формулы типа С. Н. Бернштейна / И. Н. Бруй // Наука. Образование. Технологии-2009 : материалы II Междунар. науч.-практ. конф., Барановичи, 10—11 сент. 2009 г. : в 2 ч. — Барановичи : РИО БарГУ, 2009. — Ч. 2. — С. 28—30.
9. Zygmund, A. The approximation of functions by typical means of their Fourier series / A. Zygmund // *Duke Math. J.* — 1945. — Vol. 12. — P. 695—704.
10. Тиман, А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного / А. Ф. Тиман. — М. : ГИФМЛ, 1960. — 624 с.
11. Покало, А. К. Об одном классе линейных методов суммирования / А. К. Покало // Вес. Акад. наук Беларус. ССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1962. — № 1. — С. 24—27.
12. Бруй, И. Н. О включении метода Фейера в одну совокупность методов суммирования числовых рядов / И. Н. Бруй // Техника и технологии: инновации и качество : материалы II Междунар. науч.-практ. конф., Барановичи, 24—25 окт. 2013 г. — Барановичи : РИО БарГУ, 2013. — С. 41—56.
13. Шварц, Л. Анализ : в 2 т. / Лоран Шварц. — М. : Мир, 1972. — Т. 1. — 824 с.
14. Кивинукк, А. О порядке приближения периодических функций / А. Кивинукк // Уч. зап. Тартус. гос. ун-та. — 1972. — Вып. 305. — С. 238—246.
15. Кивинукк, А. Теоремы сравнения методов суммирования разложений Фурье в пространстве Банаха / А. Кивинукк // Уч. зап. Тартус. гос. ун-та. — 1978. — Вып. 448. — С. 31—39.
16. Baskakov, V. A. On the degree of approximation of smooth functions by linear saturated operators / V. A. Baskakov // *East J. on Approximations*. — 1995. — Vol. 1, № 4. — P. 513—520.
17. Bruij, I. Real trigonometric series of class BMO and $(C,1)$ -means / I. Bruij, G. Schmieder // *Acta scientiarum mathematicarum* (Szeged). — 1998. — Vol. 64. — P. 483—488.
18. Бруй, И. Н. Методы суммирования тригонометрических рядов и пространства функций / И. Н. Бруй // Матем. сб. — 2002. — Т. 193, № 4. — С. 17—36. — Translation from Russian into English : *Methods for the summation of trigonometric series, and function spaces* / I. N. Bruij // *Sb. : Mathematics*. — 2002. — Vol. 193, no. 4. — P. 487—506.
19. Бруй, И. Н. Функции ограниченной средней осцилляции и абелевы средние рядов Фурье / И. Н. Бруй // Материалы юбилей. науч.-практ. конф., посвящ. 40-летию Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины, Гомель, 11 июня 2009 г. : в 4 ч. — Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины. — Ч. 4. — С. 101—104.
20. Bruij, I. Classes of functions and matrix means of orthogonal series (Part 2) / I. Bruij, J. Müller // Наука. Образование. Технологии-2010 : материалы III Междунар. науч.-практ. конф., Барановичи, 21—22 окт. 2010 г. — Барановичи : РИО БарГУ, 2010. — С. 232—234.
21. Бруй, И. Н. Функции исчезающей средней осцилляции и абелевы средние тригонометрических рядов / И. Н. Бруй // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2. — 2013. — № 1 (148). — С. 54—57.
22. Zamansky, M. Classes de saturation des procédés de sommation des séries de Fourier et applications aux séries trigonométriques / M. Zamansky // *Annales sci. de l'École normale supérieure*. 3 sér. — 1950. — Т. 67. — P. 161—198.
23. Пизо, Ш. Курс математики : Алгебра и анализ / Ш. Пизо, М. Заманский. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. — 656 с.
24. Покало, А. К. Об одном классе линейных методов суммирования рядов Фурье дифференцируемых функций / А. К. Покало // Весці Акад. наук Беларус. ССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1969. — № 2. — С. 43—50.
25. Покало, А. К. Линейные методы приближения производных и интегралов в смысле Вейля периодических функций / А. К. Покало // Вес. Акад. наук Беларус. ССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1970. — № 2. — С. 32—39.
26. Бруй, И. Н. Асимптотический вид некоторых обобщённых средних ряда Фабера для областей с гладкой границей / И. Н. Бруй, А. К. Покало ; ред. журн. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук». — Минск, 1974. — 11 с. — Деп. в ВИНТИ АН СССР 26.11.1974. № 3030-74 Деп. — Аннотация в : Вес. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1975. — № 2 — С. 133—134.
27. Бруй, И. Н. Эффективные условия на метод суммирования тригонометрических рядов Фурье в задаче о насыщении / И. Н. Бруй // Наука и технологии: инновации и качество : материалы Междунар. науч.-практ. конф., Барановичи, 24—25 нояб. 2011 г. — Барановичи : РИО БарГУ, 2011. — С. 117—123.
28. Алимов, Ш. А. Кратные ряды и интегралы Фурье / Ш. А. Алимов, Р. Р. Ашуров, А. К. Пулатов // Соврем. проблемы математики. Фундам. направления. — М. : ВИНТИ АН СССР, 1989. — Т. 42. — С. 7—104. — (Итоги науки и техники).
29. Бруй, И. Н. Методы суммирования кратных тригонометрических рядов и пространства Рисса $L^p(\mathbb{T}^N)$, $p \in (1, \infty)$ / И. Н. Бруй // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2. — 2007. — № 1 (48). — С. 3—9.
30. Кибалко, П. И. О формулах Е. В. Вороновской для линейных методов суммирования двойных рядов Фурье дифференцируемых функций / П. И. Кибалко // Математика. Физика : материалы науч. конф., 5—11 апр. 1972 г. — Минск : МГПИ, 1972. — С. 18—20.
31. Кибалко, П. И. О приближении периодических функций двух переменных одним классом линейных методов суммирования двойных рядов Фурье / П. И. Кибалко // Вес. Акад. наук Беларус. ССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1977. — № 1. — С. 34—43.
32. Линейные методы суммирования рядов и интегралов Фурье : отчёт о НИР (заключ.) / Мин. гос. пед. ин-т им. А. М. Горького ; рук. А. К. Покало ; исполн.: И. Н. Бруй [и др.]. — Минск : [б. и.], 1980. — 47 с. — Библиогр.: с. 43—47. — Инв. № 0282.7045881.
33. Кибалко, П. И. Профессиональная направленность преподавания курса математического анализа в педвузе : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / П. И. Кибалко. — Мин. гос. пед. ин-т им. А. М. Горького. — Минск : [б. и.], 1985. — 22 с.
34. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды : в 2 т. / А. Зигмунд. — М. : Мир, 1965. — Т. 1. — 615 с.
35. Alexits, G. On the order of approximation by the Cesàro means of Fourier series / G. Alexits // *Approximation theory : (Selected papers)* / G. Alexits. — Budapest : Akadémiai kiadó, 1983. — P. 41—50.
36. Покало, А. К. К вопросу о суммировании функций классов $B^{(r)}$ / А. К. Покало // Докл. АН СССР. — 1957. — Т. 116, № 5. — С. 750—753.

37. Теляковский, С. А. Комментарии. К разделу I / С. А. Теляковский, В. М. Тихомиров // Избр. тр. : Математика / С. Б. Стечкин. — М. : Наука : Физматлит, 1998. — С. 364—366.
38. Runge, C. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen / C. Runge // Acta mathematica. — 1885. — Bd. 6. — S. 228—244.
39. Hilbert, D. Ueber die Entwicklung einer beliebigen analytischen Function einer Variablen in eine unendliche nach ganzen rationalen Functionen fortschreitende Reihe / D. Hilbert // Nachr. von der Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen. Math.-phys. Kl. — 1897. — Heft 1. — S. 63—70.
40. Painlevé, P. Sur le développement des fonctions uniformes ou holomorphes dans un domaine quelconque / P. Painlevé // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Acad. des sci. — 1898. — T. 126, № 4. — P. 318—321.
41. Faber, G. Über Reihenentwickelungen analytischer Funktionen : Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde : защищена 20.04.1902 / G. Faber. — Leipzig : Druck von B. G. Teubner, 1903. — 68 S.
42. Szegő, G. Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören / G. Szegő // Math. Zeitschr. — 1921. — Bd. 9. — S. 218—270.
43. Bochner, S. Über orthogonale Systeme analytischer Funktionen / S. Bochner // Math. Zeitschr. — 1922. — Bd. 14, № 3. — S. 180—207.
44. Carleman, T. Über die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate von vorgegebenen Potenzen / T. Carleman // Arkiv för mat., astron. och fys. — 1922—1923. — Bd. 17, № 9. — S. 1—30.
45. Bruij, I. Matrix Mean Series in Terms of Boundary Orthogonal Systems and Functions in the Classes H^∞ and E^p / I. Bruij, G. Schmieder // J. of Approximation Theory. — 2002. — Vol. 118, № 2. — P. 246—256.
46. Бруй, И. Н. Методы суммирования ортогональных по контуру рядов и классы В. И. Смирнова $E^p(G)$, $p \in (1, \infty)$, и $H^\infty(G)$ / И. Н. Бруй // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2. — 2004. — № 1 (25). — С. 16—29.
47. Бруй, И. М. Методы суммирования артаганальных по площади рядов и классы галаморфных функций / И. М. Бруй // Вес. Беларус. дзярж. пед. ун-та. Сер. 3. — 2004. — № 1 (39). — С. 14—17.
48. Krafft, M. Zur Theorie der Faberschen Polynome und ihrer zugeordneten Funktionen : Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde : защищена 16.07.1914 / Krafft Maximilian. — Offenbach am Main : Druck der seiboldschen Buchdruckerei Werner Dohany, 1915. — 71 S.
49. Суетин, П. К. Ряды по многочленам Фабера / П. К. Суетин. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. — 336 с.
50. Никольский, С. М. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами / С. М. Никольский // Тр. мат. ин-та АН СССР. — 1945. — Т. 15. — С. 1—76.
51. Butzer, P. L. Walsh-Fourier Series and the Concept of a Derivative / P. L. Butzer, H. J. Wagner // Applicable Analysis. — 1973. — Vol. 3. — P. 29—46.
52. Zelin, H. The Derivatives and Integrals of Fractional Order in Walsh-Fourier Analysis, with Applications to Approximation Theory / H. Zelin // J. of Approximation Theory. — 1983. — Vol. 39, № 4. — P. 361—373.
53. Bruij, I. The concept of Faber derivative in saturation theory / I. Bruij, J. Müller // Jean J. on Approximation. — 2011. — Vol. 3, № 2. — P. 227—239.
54. Бруй, И. Н. Аппроксимация одного класса регулярных функций обобщенными средними их рядов по полиномам Фабера / И. Н. Бруй // Естеств. науки : сб. ст. аспирантов. — Минск : МГПИ, 1974. — С. 3—5.
55. Бруй, И. Н. Приближение одного класса регулярных функций обобщенными средними их рядов по полиномам Фабера / И. Н. Бруй // Вес. Акад. навук Беларус. ССР. Сер. физ.-мат. навук. — 1974. — № 5. — С. 45—49.
56. Bruij, I. Best Approximation and Saturation on Domains Bounded by Curves of Bounded Rotation / I. Bruij, G. Schmieder // J. of Approximation Theory. — 1999. — Vol. 100, № 1. — P. 157—182.
57. Суетин, П. К. Ряды по многочленам Фабера и некоторые их обобщения / П. К. Суетин // Соврем. проблемы математики. — М. : ВИНТИ АН СССР, 1975. — Т. 5. — С. 73—140. — (Итоги науки и техники).
58. Бруй, И. Н. Дифференцирование аппроксимационного процесса для одного класса регулярных функций / И. Н. Бруй ; ред. журн. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук». — Минск : [б. и.], 1975. — 17 с. — Деп. в ВИНТИ АН СССР 09.06.1975. — № 1625-75 Деп.
59. Бруй, И. Н. К совместному приближению регулярной в ограниченной области функции и её первой производной / И. Н. Бруй // Естеств. науки : сб. ст. аспирантов. — Минск : МГПИ, 1974. — С. 6—9.
60. Бруй, И. Н. Ряды Фабера / И. Н. Бруй. — Гомель : ГГУ, 1983. — 66 с.
61. Бруй, И. Н. Ряды Фабера. Суммирование / И. Н. Бруй. — Гомель : ГГУ, 1988. — 100 с.
62. Bauer, A. Neue Behandlungsweise der reellen Tschebyscheffschen und der Faberschen Polynome : Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde : защищена 25.06.1926 / Bauer Arnold. — Borna-Leipzig : Universitätsverlag von Robert Noske, 1927. — 36 S.
63. Muckenhoupt, B. Classical expansions and their relation to conjugate harmonic functions / B. Muckenhoupt, E. M. Stein // Trans. Amer. Math. Soc. — 1965. — Vol. 118, № 6. — P. 17—92.
64. Muckenhoupt, B. Hermite conjugate expansions / B. Muckenhoupt // Trans. Amer. Math. Soc. — 1969. — Vol. 139. — P. 243—260.
65. Joó, I. Saturation theorems for Hermite—Fourier series / I. Joó // Acta Math. Hungar. — 1991. — Vol. 57, № 1—2. — P. 169—179.
66. Joó, I. On Hermite—Fourier series / I. Joó // Period. Math. Hungar. — 1992. — Vol. 24, № 2. — P. 87—118.
67. Muckenhoupt, B. Conjugate functions for Laguerre expansions / B. Muckenhoupt // Trans. Amer. Math. Soc. — 1970. — Vol. 147. — P. 403—418.
68. Hunt, R. A. Developments related to the almost everywhere convergence of Fourier series / Richard A. Hunt // Studies in harmonic analysis : Proc. of the Conf. in Chicago on June 29 — July 02 1974. — Washington, DC : Math. Assoc. of America, 1976. — P. 20—37. — (Studies in mathematics, 13).
69. Joó, I. On some problems of M. Horváth (saturation theorems for Walsh — Fourier expansions) / I. Joó // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. — 1988. — Т. 31. — P. 243—260 (1989).
70. Joó, I. On the conjugate function of Dirichlet series / I. Joó // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. — 1992. — Т. 35. — P. 59—67.
71. Joó, I. On some notions of harmonic analysis for Sturm—Liouville expansions / I. Joó // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. — 1992. — Т. 35. — P. 77—98.
72. Butzer, P. L. The Operational Properties of the Chebyshev Transform. II. Fractional Derivatives / P. L. Butzer, R. L. Stens // Теория приближения функций : тр. Междунар. конф. по теории приближения функций, Калуга, 24—28 июля 1975 г. — М. : Наука, 1977. — С. 49—61.
73. Дзядык, В. К. О конструктивной теории функций на замкнутых множествах комплексной плоскости / В. К. Дзядык // Теория приближения функций : Тр. Междунар. конф. по теории приближения функций, Калуга, 24—28 июля 1975 г. — М. : Наука, 1977. — С. 157—172.
74. Турецкий, А. Х. Теория интерполирования в задачах : в 2 ч. / А. Х. Турецкий. — Минск : Выш. шк., 1968. — Ч. 1. — 320 с.
75. Турецкий, А. Х. Теория интерполирования в задачах : в 2 ч. / А. Х. Турецкий. — Минск : Выш. шк., 1977. — Ч. 2. — 256 с.

76. Семенчук, Н. П. Обобщённый метод суммирования интегралов Фурье дифференцируемых функций / Н. П. Семенчук // Вес. Акад. наук Беларус. ССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1977. — № 1. — С. 19—24.
77. Семенчук, Н. П. Линейные методы суммирования интегралов Фурье : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.01 / Н. П. Семенчук. — Белорус. гос. ун-т им. В. И. Ленина. — Минск : [б. и.], 1983. — 18 с.
78. Покало, А. К. Приближение на всей оси интегралов Рисса сингулярными интегралами специального вида / А. К. Покало ; ред. журн. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук». — Минск, 1982. — 14 с. — Деп. в ВИНТИ АН СССР 30.12.1982, № 6543-82. — Аннотация в : Весці АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1983. — № 3. — С. 121.
79. Покало, А. К. Приближение на всей числовой оси сопряжённых интегралов Рисса интегральными операторами специального вида / А. К. Покало ; ред. журн. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук». — Минск, 1983. — 12 с. — Деп. в ВИНТИ АН СССР 30.08.1983, № 4838-83. — Аннотация в : Весці АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1984. — № 1. — С. 115—116.
80. Линейные методы суммирования рядов и интегралов Фурье : отчёт о НИР (заключ.) / Минск. гос. пед. ин-т им. А. М. Горького ; рук. А. К. Покало. — Минск, 1986. — 32 с. — Библиогр.: с. 30—32. — Инв. № 0286.0034734.
81. Покало, А. К. О представлении констант Лебега асимптотическим рядом / А. К. Покало, Л. И. Шлома // Докл. Акад. наук БССР. — 1981. — Т. 25, № 3. — С. 204—205.
82. Шлома, Л. И. О дискретизации разложения по тригонометрической системе : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.01 / Белорус. гос. ун-т им. В. И. Ленина. — Минск : [б. и.], 1987. — 18 с.
83. Trebels, W. Multipliers for (C, α) -Bounded Fourier Expansions in Banach Spaces and Approximation Theory / Walter Trebels // Lecture Notes in Math.. — 1973. — Vol. 329. — P. 1—103.
84. Покало, А. К. О приближении элементов нормированного пространства обобщёнными средними рядами, суммируемых методом Чезаро / А. К. Покало // Вес. Акад. наук Беларус. ССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1972. — № 4. — С. 121—124.
85. Покало, А. К. Суммирование интегралов в банаховом пространстве с чезаровской аппроксимативной единицей. Мультипликативные операторы. Теорема Бернштейна. I / А. К. Покало // Вес. Акад. наук Беларус. ССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1979. — № 1. — С. 50—55.
86. Покало, А. К. Суммирование интегралов в банаховом пространстве с чезаровской аппроксимативной единицей. Асимптотические формулы. Теорема типа Джексона. II / А. К. Покало // Вес. Акад. наук Беларус. ССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1979. — № 2. — С. 16—21.
87. Покало, А. К. Мультипликативные операторы в банаховом пространстве с чезаровской структурой и теория приближения / А. К. Покало // Теория функций и приближений : тр. Саратов. зимней шк., 24 янв. — 05 февр. 1982 г. : в 2 ч. : междуз. науч. сб. — Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1983. — Ч. 2. — С. 119—122.
88. Покало, А. К. Основные теоремы теории приближения в банаховом пространстве с чезаровской структурой / А. К. Покало // Междунар. конф. по теории приближения функций, Киев, 30 мая — 06 июня 1983 г. : тез. докл. — Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983. — С. 130.
89. Покало, А. К. Мультипликаторы в банаховом пространстве с чезаровской структурой и порождённые ими компактные классы элементов / А. К. Покало // Линейные функционально-дифференциальные соответствия : сб. науч. тр. — Минск : МГПИ, 1984. — С. 25—34.
90. Покало, А. К. Основные теоремы теории приближения в банаховом пространстве с чезаровской структурой / А. К. Покало // Теория приближения функций : тр. Междунар. конф. по теории приближения функций, Киев, 1983. — М. : Наука, 1987. — С. 350—353.
91. Fejér, L. Sur les fonctions bornées et intégrables / L. Fejér // Gesamm. Arb. / L. Fejér. — Budapest : Akadémiai kiadó, 1970. — Band I. — S. 37—41.
92. Fejér, L. Untersuchungen über Fouriersche Reihen / L. Fejér // Gesamm. Arb. / L. Fejér. — Budapest : Akadémiai kiadó, 1970. — Band I. — S. 142—160.
93. Sz. Nagy, B. v. Approximation der Funktionen durch die arithmetischen Mittel ihrer Fourierschen Reihen / Béla v. Sz. Nagy // Acta scientiarum mathematicarum (Szeged). — 1946—1948. — Vol. 11. — P. 71—84.
94. Saealle, N. Convergence and summability with speed of functional series : Diss.... of the degree of Dr. of Philos. (PhD) in mathematics : защищена 28.10.2005 / Saealle Natalia. — Tartu : Tartu University Press, 2005. — 91 p. — (Diss. math. univ. Tartuensis, 40).
95. Бабенко, К. И. Основы численного анализа / К. И. Бабенко. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 744 с.
96. Покало, А. К. Суммирование рядов функций классов $B^{(r)}$ / А. К. Покало // Уч. зап. / Мин. гос. пед. ин-т им. А. М. Горького. — Юбилейн. вып. 7. Сер. физ.-мат. наук — 1957. — С. 35—49.
97. Покало, А. К. Теорема о суммировании рядов функций классов $W^{(r)}$ / А. К. Покало // Уч. зап. / Мин. гос. пед. ин-т им. А. М. Горького. — Юбилейн. вып. 7. Сер. физ.-мат. наук — 1957. — С. 51—65.
98. Покало, А. К. О предельных значениях обобщённых средних рядов Фурье в точке разрыва / А. К. Покало // Тр. I Респ. конф. математиков Белоруссии, 1964. — Минск : Высш. шк., 1965. — С. 97—101.
99. Покало, А. К. Аппроксимативные свойства производных и интегралов в смысле Вейля линейных средних / А. К. Покало // Вес. Акад. наук Беларус. ССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1970. — № 3. — С. 45—49.
100. Покало, А. К. Асимптотическая формула для уклонения двойных мультипликативных операторов в банаховом пространстве с чезаровской аппроксимативной единицей. Неравенство Бернштейна и теорема Джексона / А. К. Покало // Вес. Акад. наук Беларус. ССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1980. — № 6. — С. 32—37.
101. Покало, А. К. О представлении решений линейного дифференциального уравнения рядами Чебышёва—Эрмита / А. К. Покало // Вес. Акад. наук Беларус. ССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1988. — № 2. — С. 34—38.
102. Покало, А. К. О представлении решений сингулярного интегродифференциального уравнения рядами Эрмита / А. К. Покало // Вес. Акад. наук Беларус. ССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1990. — № 4. — С. 32—37.

Материал поступил в редакцию 11.08.2014 г.