ФИЗИКА. МАТЕМАТИКА

УДК 517.518.366

И. Н. Бруй
Учреждение образования «Барановичский государственный университет», Барановичи

СРЕДНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ И ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ
Стендовый доклад

Введение. Оператор присваивания «$:=$» означает, что правой части присвоено обозначение, стоящее слева от него. В самом начале рассмотрим следующие пространства функций одного вещественного переменного. 1) $\mathbf{C}[0,1]$ — сепарабельное полное комплексное пространство всех на отрезке $[0,1]$ вещественной прямой непрерывных функций; норма $\|f\|_{\mathbf{C}[0,1]} := \max_{0\le x\le 1}|f(x)|$; 2) $\mathbf{C}^*[0,1]$ — сепарабельное полное комплексное пространство всех на отрезке $[0,1]$ вещественной прямой непрерывных функций, которые на концах отрезка $[0,1]$ принимают равные значения: $f(0)=f(1)$; $\mathbf{C}^*[0,1]\subset\mathbf{C}[0,1]$; 3) $\mathbf{L}^\infty[0,1]$ — несепарабельное полное комплексное пространство всех измеримых и существенно ограниченных на отрезке $[0,1]$ функций; полунорма $\|f\|_{\mathbf{L}^\infty[0,1]} := ess\,\sup_{0\le x\le 1}|f(x)|$; 4) $\mathbf{L}^1[0,1]$ — сепарабельное полное комплексное пространство Г. Штейнгауза всех измеримых и интегрируемых по Лебегу на отрезке $[0,1]$ функций; полунорма $\|f\|_{\mathbf{L}^1[0,1]} := \int_0^1 |f(x)|\,dx$; 5) при показателе $1<p<+\infty$ сепарабельное полное комплексное пространство Ф. Рисса $\mathbf{L}^p[0,1]$ всех функций, на отрезке $[0,1]$ измеримых и с интегрируемой по Лебегу на нём p-й степенью их модуля; полунорма $\|f\|_{\mathbf{L}^p[0,1]} := \left(\int_0^1 |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$. Очевидны строгие включения: $\mathbf{C}^*[0,1]\subsetneq\mathbf{C}[0,1]\subsetneq\mathbf{L}^\infty[0,1]\subsetneq\mathbf{L}^p[0,1]\subsetneq\mathbf{L}^1[0,1]$.

Автор свои работы [1, с. 25; 2, с. 48; 3, с. 678; 4, с. 483; 5, с. 23; 6, с. 17; 7, с. 3] начинал с тригонометрического ряда

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\ln n}\sin n2\pi x\,, \tag{1}$$

который сходится в каждой точке x вещественной прямой и который не является тригонометрическим рядом Фурье—Лебега ни своей поточечной суммы $s(x) := \lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{n=2}^{N}\frac{1}{\ln n}\sin n2\pi x$, ни другой функции $f\in\mathbf{L}^1[0,1]$ [8, с. 11, с. 148, 7.3.4, с. 154, 7.7, с. 189, 10.1.6(2); 9, с. 95, теорема 1, с. 123, с. 199, с. 671, пример; 10, с. 298, (1.17), с. 403, (2.1); 11, с. 275, (1), с. 276]. Сумма этого ряда $s\notin\mathbf{L}^1[0,1]$, ибо в противном случае ряд (1) по теореме Дюбуа—Реймона и Валле Пуссена [11, с. 293, теорема 5] являлся бы рядом Фурье—Лебега своей суммы s.

Тригонометрический ряд (1) мотивирует постановку следующих трёх важных и трудных проблем: 1) при каких условиях всюду сходящийся тригонометрический ряд является тригонометрическим рядом Фурье своей суммы; 2) какое надо ввести понятие интеграла, чтобы каждый сходящийся в конкретном смысле тригонометрический ряд являлся бы тригонометрическим рядом Фурье в смысле введённого интеграла; 3) когда тригонометрический ряд является тригонометрическим рядом Фурье функции из заранее заданного функционального пространства.

Классические результаты по третьей проблеме аккумулирует следующая теорема [12, с. 42; 13, с. 7, теорема 1, с. 8, теорема 3, с. 9, теоремы 4 и 5].

Теорема 1. *Для того чтобы тригонометрический ряд*

$$\alpha_0+2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\alpha_n\cos n2\pi x+\beta_n\sin n2\pi x\right) \tag{2}$$

являлся тригонометрическим рядом Фурье (I) *непрерывной и периодической с периодом* 1 *функции* $f \in \mathbf{C}^*[0,1]$, (II) *некоторой существенно ограниченной функции* $f \in \mathbf{L}^\infty[0,1]$, (III) *при показателе* $1 < p < +\infty$ *некоторой функции* $f \in \mathbf{L}^p[0,1]$, (IV) *некоторой интегрируемой функции* $f \in \mathbf{L}^1[0,1]$, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность средних Фейера*

$$\forall N \in \mathbf{Z}_0 := \{0, 1, 2, ...\} \;\; \sigma_N[(2), x] := \alpha_0 + 2\sum_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{n}{N+1}\right)(\alpha_n \cos n2\pi x + \beta_n \sin n2\pi x) \tag{3}$$

этого тригонометрического ряда на отрезке $[0,1]$ $(I)'$ *сходилась по* $\mathbf{C}$*-норме, т. е. сходилась равномерно,* $(II)'$ *была ограничена по* $\mathbf{L}^\infty$*-полунорме,* $(III)'$ *была ограничена по* $\mathbf{L}^p$*-полунорме или, что в данном случае равносильно, сходилась по* $\mathbf{L}^p$*-полунорме, т. е. сходилась в среднем с показателем* p, $(IV)'$ *сходилась по* $\mathbf{L}^1$*-полунорме, т. е. сходилась в среднем.*

В настоящем стендовом докладе рассматривается обобщение третьей проблемы на ортогональные на отрезке $[0,1]$ ряды. При этом тригонометрический случай будет считаться азбучным.

Базисные понятия. Последовательность $(\varphi_n(x))_{n=0}^{+\infty}$ комплекснозначных функций на отрезке $[0,1]$ вещественной прямой определённых почти всюду и измеримых относительно линейной меры Лебега, называется ортонормированной на отрезке $[0,1]$ системой, если

$$\forall m \in \mathbf{Z}_0 \;\; \forall n \in \mathbf{Z}_0 \;\; \int_0^1 \varphi_m(x)\overline{\varphi_n}(x)\,dx = \begin{cases} 1, \text{ когда } m = n, \\ 0, \text{ когда } m \neq n, \end{cases} \tag{4}$$

где $\overline{\varphi_n}$ означает функцию, комплексно сопряжённую к функции φ_n.

Условие ортонормированности (4) влечёт: 1) принадлежность всех функций φ_n и их комплексных сопряжений $\overline{\varphi_n}$ функциональному пространству Гильберта $\mathbf{L}^2[0,1]$; 2) отличие всех функций $\varphi_n(x)$ от нуля на множестве положительной меры: $\forall n \in \mathbf{Z}_0 \;\; \mathrm{mes}\{x \in [0,1] : \varphi_n(x) \neq 0\} > 0$.

Если на отрезке $[0,1]$ функция f и ортонормированная система $(\varphi_n(x))_{n=0}^{+\infty}$ таковы, что интегрируемы все произведения $f \cdot \overline{\varphi_n}$, то числовая последовательность $\left(\int_0^1 f(t)\,\overline{\varphi_n}(t)\,dt\right)_{n=0}^{+\infty}$ называется последовательностью коэффициентов Фурье функции f относительно ортонормированной на отрезке $[0,1]$ системы $(\varphi_n(x))_{n=0}^{+\infty}$, а функциональный ряд вида

$$\sum\nolimits_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f(t)\,\overline{\varphi_n}(t)\,dt \cdot \varphi_n(x) \tag{5}$$

называется рядом Фурье функции f по ортонормированной на отрезке $[0,1]$ системе $(\varphi_n(x))_{n=0}^{+\infty}$.

Нечётная и периодическая с периодом 2 функция $f_1(x) := \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi x}{2}$ хотя и неинтегрируема по Лебегу на отрезке $[0,1]$, но имеет все равные единице коэффициенты Фурье относительно ортонормированной синус-системы $(\sqrt{2}\sin n\pi x)_{n=1}^{+\infty}$: $\forall n \in \mathbf{Z}_1 := \{1, 2, 3, ...\} \;\; \int_0^1 f_1(t)\sqrt{2}\sin n\pi t\,dt = 1$ [10, с. 84].

На отрезке $[0,1]$ для ортонормированной косинус-системы $(\sqrt{2}\cos n\pi x)_{n=0}^{+\infty}$ и ортонормированной тригонометрической системы $(1, \sqrt{2}\cos 2\pi x, \sqrt{2}\sin 2\pi x, \sqrt{2}\cos 4\pi x, \sqrt{2}\sin 4\pi x, ..., \sqrt{2}\cos n2\pi x, \sqrt{2}\sin n2\pi x, ...)$ условие $f \in \mathbf{L}^1[0,1]$ влечёт существование всех коэффициентов Фурье функции f относительно соответствующих систем. Более общо, если на отрезке $[0,1]$ все функции ортонормированной системы $(\varphi_n(x))_{n=0}^{+\infty}$ существенно ограничены: $\forall n \in \mathbf{Z}_0 \;\; ess\sup_{0 \le x \le 1}|\varphi_n(x)| < +\infty$, то условие $f \in \mathbf{L}^1[0,1]$ влечёт существование всех коэффициентов Фурье функции f относительно этой системы.

Тригонометрический ряд (1) является нетривиальным примером ортогонального ряда, который не является ортогональным рядом Фурье. В. А. Скворцов построил пример ряда по системе функций Уолша, который сходится почти всюду на полуинтервале $[0,1)$ к нулю, не все коэффициенты которого равны нулю и, следовательно, не являющегося рядом Фурье своей суммы [14, с. 75, с. 94, теорема 3.4.2; 15, с. 345, теорема 7].

Ряды (1) и В. А. Скворцова мотивируют постановку следующей трудной и важной проблемы: «Когда ортогональный ряд является ортогональным рядом Фурье функции из заранее заданного функционального пространства».

Матричные средние ортогональных рядов и пространства непрерывных функций $\mathbf{C}^*[0,1]\subset\mathbf{C}[0,1]$. Согласно аппроксимационной теореме Л. Фейера, т. е. теореме 1: $(I)\Rightarrow(I)'$, на вещественной прямой любая непрерывная и периодическая с периодом 1 функция f с любой наперёд заданной степенью точности равномерно приближается средними Фейера её тригонометрического ряда Фурье: $\forall f\in\mathbf{C}^*[0,1]$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbf{Z}_0$

$$\max_{0\le x\le 1}\left|f(x)-\left\{\int_0^1 f(t)dt+2\sum_{n=1}^{N}\left(1-\frac{n}{N+1}\right)\left[\int_0^1 f(t)\cos n2\pi t dt\cdot\cos n2\pi x+\int_0^1 f(t)\sin n2\pi t dt\cdot\sin n2\pi x\right]\right\}\right|\le\varepsilon .$$

Последнее свойство при рассмотрении ортогональных рядов приходится постулировать.

Определение 1. *Предположим, что на отрезке* $[0,1]$ *всюду определены все функции* $\varphi_n(x)$*:* $\forall n\in\mathbf{Z}_0$ $\varphi_n\in\mathbf{C}^{[0,1]}$. *Ортонормированная на отрезке* $[0,1]$ *система* $(\varphi_n(x))_{n=0}^{+\infty}$ *называется замкнутой (abgeschlossen) относительно пространства* $\mathbf{C}[0,1]$*, если для любой функции* $f\in\mathbf{C}[0,1]$ *и для любого* $\varepsilon>0$ *можно так подобрать числа* $c_0^{(\varepsilon)},c_1^{(\varepsilon)},c_2^{(\varepsilon)},...,c_N^{(\varepsilon)}$*, что* $\sup_{0\le x\le 1}\left|f(x)-\sum_{n=0}^{N}c_n^{(\varepsilon)}\varphi_n(x)\right|\le\varepsilon$.

В силу аппроксимационной теоремы Л. Фейера тригонометрическая система замкнута относительно пространства $\mathbf{C}^*[0,1]$.

Комплексная последовательность $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ и ортонормированная на отрезке $[0,1]$ система $(\varphi_n(x))_{n=0}^{+\infty}$ порождают ортогональный на отрезке $[0,1]$ ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\varphi_n(x). \tag{6}$$

С помощью бесконечной нижней комплексной матрицы Хессенберга

$$M:=\begin{bmatrix}1 & \mu_1^{(0)} & 0 & 0 & \dots 0 & 0 & 0\dots\\ 1 & \mu_1^{(1)} & \mu_2^{(1)} & 0 & \dots 0 & 0 & 0\dots\\ 1 & \mu_1^{(2)} & \mu_2^{(2)} & \mu_3^{(2)} & \dots 0 & 0 & 0\dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & \mu_1^{(N)} & \mu_2^{(N)} & \mu_3^{(N)} & \dots \mu_N^{(N)} & \mu_{N+1}^{(N)} & 0\dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\end{bmatrix} \tag{7}$$

образуем следующую последовательность M-средних ортогонального на отрезке $[0,1]$ ряда (6):

$$\forall N\in\mathbf{Z}_0\quad M_N[(6),x]:=\sum_{n=0}^{N}\mu_n^{(N)}a_n\varphi_n(x). \tag{8}$$

Неотрицательная вещественная последовательность $\forall N\in\mathbf{Z}_0$ $\int_0^1\left|1+2\sum_{n=1}^{N}\cos n2\pi t\right|dt$ называется последовательностью констант Лебега, ортонормированной на отрезке $[0,1]$ тригонометрической системы $\left(1,\sqrt{2}\cos 2\pi x,\sqrt{2}\sin 2\pi x,\sqrt{2}\cos 4\pi x,\sqrt{2}\sin 4\pi x,...,\sqrt{2}\cos n2\pi x,\sqrt{2}\sin n2\pi x,...\right)$, а неотрицательная функциональная последовательность $\forall N\in\mathbf{Z}_0$ $\int_0^1\left|\sum_{n=0}^{N}\mu_n^{(N)}\varphi_n(x)\overline{\varphi_n}(t)\right|dt$ называется последовательностью M-функций Лебега, ортонормированной на отрезке $[0,1]$ системы $(\varphi_n(x))_{n=0}^{+\infty}$.

Теорема 2. *П р е д п о л о ж е н и я: 1) ортонормированная на отрезке* $[0,1]$ *система* $\left(\phi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$ *непрерывных функций (*$\forall n \in \mathbf{Z}_0 \ \ \varphi_n \in \left(\mathbf{C}^{[0,1]}\right)_c$*) из комплексного пространства* $\mathbf{C}^*[0,1]$ *или* $\mathbf{C}[0,1]$ *замкнута относительно того же пространства; 2) элементы бесконечной нижней комплексной матрицы Хессенберга (7) имеют по всем столбцам единичный предел:*

$$\forall n \in \mathbf{Z}_0 \ \ \exists \lim_{N\to+\infty} \mu_n^{(N)} = 1\,; \tag{9}$$

3) описанные выше ортонормированная система $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$ *и матрица (7) связаны между собой условием*

$$A_1 := \sup_{N\in\mathbf{Z}_0} \max_{0\le x\le 1} \int_0^1 \left| \sum_{n=0}^{N} \mu_n^{(N)} \varphi_n(x)\overline{\varphi_n}(t) \right| dt < +\infty\,, \tag{10}$$

означающим равномерную ограниченность всюду на отрезке ортонормированности $[0,1]$ *всех* M *-функций Лебега ортонормированной системы* $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$.

У т в е р ж д е н и е: для того чтобы ортогональный на отрезке $[0,1]$ *ряд (6) являлся ортогональным рядом Фурье функции* f *из соответственного комплексного пространства* $\mathbf{C}^*[0,1]$ *или* $\mathbf{C}[0,1]$, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность его* M *-средних (8) сходилась в этом пространстве:*

$$\lim_{\substack{M\to+\infty\\ N\to+\infty}} \max_{0\le x\le 1} \left| \sum_{n=0}^{M} \mu_n^{(M)} a_n \varphi_n(x) - \sum_{n=0}^{N} \mu_n^{(N)} a_n \varphi_n(x) \right| = 0\,. \tag{11}$$

Разбор предположения 1) теоремы 2. Система непрерывных функций Франклина замкнута [16, с. 144, теорема 4.4.3] относительно пространства $\mathbf{C}[0,1]$.

Ортонормированная на отрезке $[0,1]$ тригонометрическая система $\left(1, \left(\sqrt{2}\cos n2\pi x, \sqrt{2}\sin n2\pi x\right)_{n=1}^{+\infty}\right)$ на вещественной прямой непрерывных и периодических с периодом 1 функций замкнута относительно комплексного пространства $\mathbf{C}^*[0,1]$, но не замкнута относительно объемлющего комплексного пространства $\mathbf{C}[0,1]$.

Система $\left(w_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$ разрывных (исключая $w_0(x)\equiv 1$) функций Уолша в нумерации Пэли замкнута [14, с. 62, теорема 2.6.4] относительно комплексного пространства $\mathbf{UC}[0,1)$ всех равномерно непрерывных на полуинтервале $[0,1)$ функций. Очевидно, что средние Фейера ряда Фурье функции $w_k(x)$, $k\in\mathbf{Z}_1$ по ортонормированной системе $\left(w_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$ равномерно сходятся на полуинтервале $[0,1)$ к разрывной функции $w_k(x)$.

Таким образом, предположение о непрерывности на отрезке ортонормированности $[0,1]$ всех функций ортонормированной системы $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$ существенно.

Рассмотрение предположения 2) теоремы 2. Комплексный ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \tag{12}$$

называется сходящимся, если существует конечный предел s последовательности его частичных сумм $\forall N\in\mathbf{Z}_0 \ \ s_N := \sum_{n=0}^{N} a_n$: $\exists \lim_{N\to+\infty} s_N =: s \in \mathbf{C}$. С помощью бесконечной нижней комплексной матрицы Хессенберга (7) образуем следующую последовательность M -средних ряда (12):

$$\forall N\in\mathbf{Z}_0 \ \ M_N := \sum_{n=0}^{N} \mu_n^{(N)} a_n \tag{13}$$

M -средние (13) комплексного ряда (12) называются 1) регулярными, если для каждого сходящегося ряда они сходятся к его сумме: $\exists \lim_{N\to+\infty} s_N =: s\in\mathbf{C} \ \Rightarrow\ \exists \lim_{N\to+\infty} M_N = s$; 2) консервативными, если для каждого сходящегося ряда они сходятся к конечному пределу: $\exists \lim_{N\to+\infty} s_N =: s\in\mathbf{C} \ \Rightarrow\ \exists \lim_{N\to+\infty} M_N =: t\in\mathbf{C}$; 3) порождающими сходимость, если для каждого ряда с ограниченной последовательностью его частичных сумм они сходятся к конечному пределу: $\exists \sup_{N\in\mathbf{Z}_0} \left|s_N\right| < +\infty \ \Rightarrow\ \exists \lim_{N\to+\infty} M_N =: t\in\mathbf{C}$.

Условия на элементы матрицы (7), при выполнении которых M-средние (13) имеют вышеперечисленный тип (рисунок 1).

Консервативные M-средние: $\sup_{N\in\mathbf{Z}_0}\sum_{n=0}^{N}\left|\mu_n^{(N)}-\mu_{n+1}^{(N)}\right|<+\infty$ и $\forall n\in\mathbf{Z}_0\ \exists\lim_{N\to+\infty}\mu_n^{(N)}=:\rho_n\in\mathbf{C}$.

Регулярные M-средние:	Порождающие сходимость M-средние:
$\forall n\in\mathbf{Z}_0\ \rho_n=1$.	$\exists\lim_{n\to+\infty}\rho_n=0$.

Рисунок 1 — Консервативные M-средние

Так как условие (9) и условие $\exists\lim_{n\to+\infty}\rho_n=0$ таблицы 1 несовместимы, то предположению 2) теоремы 2 заведомо не удовлетворяют все порождающие сходимость M-средние (13).

Характеристика предположения 3) теоремы 2. Оно необходимо [16, с. 253] для справедливости утверждения теоремы 2.

Бесконечная нижняя треугольная вещественная матрица

$$S:=\begin{bmatrix}1\ 0\ 0\ \ldots 0\ \ldots\\ 1\ 1\ \ 0\ \ldots 0\ \ldots\\ 1\ 1\ \ 1\ \ldots\ 0\ \ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ 1\ 1\ \ 1\ \ldots 1\ \ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{bmatrix}=\left[\max\{0,N-n+1\}\right]_{(N,n)\in\mathbf{Z}_0\times\mathbf{Z}_0}$$

определяет регулярные S-средние ортогонального ряда (6), т. е. частичные суммы этого ряда. Условию (10) удовлетворяют S-функции Лебега системы Франклина [16, с. 184, замечание]. Однако не удовлетворяют константы Лебега тригонометрической системы, поскольку их рост подобен логарифмической функции [8, с. 134, (7.1.8); 9, с. 115, (35.15); 10, с. 115, (12.1)]. Также условию (10) не удовлетворяют S-константы Лебега системы $\left(w_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$ функций Уолша в нумерации Пэли, поскольку их рост мажорируется логарифмической функцией [14, с. 46, теорема 2.2.1; 15, с. 34].

Проверка условия (10) для тригонометрической системы и матрицы (H,α), определяющей средние Гёльдера вещественного порядка $\alpha>1$, занимает в работе А. Х. Турецкого [17, с. 423—432] почти девять полных страниц. Трудной задаче — поиску эффективных условий на элементы матрицы (7), достаточных для ограниченности последовательности M-констант Лебега тригонометрической системы, — посвящали свои глубокие исследования С. М. Никольский [9, с. 476], Б. Сёкефальви-Надь [9, с. 476], А. В. Ефимов [18, с. 752], А. К. Покало [19, с. 24—25], С. А. Теляковский [20, с. 1227—1228], Р. М. Тригуб [21, с. 210—211, теорема 5.2; 22, с. 65, предложение].

Доказательство теоремы 2 об ортогональных на отрезке $[0,1]$ ***C^*- и С-рядах.*** Справедливость теоремы 2 вытекает из доказываемых ниже лемм 2 и 3.

M-средние ряда Фурье (5) функции f по ортонормированной на отрезке $[0,1]$ системе $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$ обозначим через

$$\forall N\in\mathbf{Z}_0\quad M_N(f,x):=\sum_{n=0}^{N}\mu_n^{(N)}\cdot\int_0^1 f(t)\,\overline{\varphi_n}(t)\,dt\cdot\varphi_n(x).\tag{14}$$

Нам понадобится следующая известная лемма [16, с. 252, теорема 6.4.2, необходимость].

Лемма 1. *П р е д п о л о ж е н и я: 1) все функции ортонормированной на отрезке* $[0,1]$ *системы* $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$ *принадлежат комплексному пространству* $\mathbf{L}^\infty[0,1]$*; 2) описанная выше ортонормированная система* $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$ *и матрица (7) связаны между собой условием*

$$A_1:=\sup_{N\in\mathbf{Z}_0}\ ess\sup_{0\le x\le 1}\int_0^1\left|\sum_{n=0}^{N}\mu_n^{(N)}\ \varphi_n(x)\overline{\varphi_n}(t)\right|dt<+\infty,\tag{15}$$

означающим равномерную ограниченность почти всюду на отрезке ортонормированности $[0,1]$ *всех* M *-функций Лебега ортонормированной системы* $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$.

Утверждение: если функция f *принадлежит комплексному пространству* $\mathbf{L}^{\infty}[0,1]$, *то*

$$\sup_{N\in\mathbf{Z}_0}\left\|M_N(f,x)\right\|_{\mathbf{L}^{\infty}[0,1]} \le A_1\left\|f\right\|_{\mathbf{L}^{\infty}[0,1]}. \tag{16}$$

Необходимость утверждения теоремы 2 вытекает из следующей леммы.

Лемма 2. *Предположения: 1) ортонормированная на отрезке* $[0,1]$ *система* $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$ *ограниченных всюду на отрезке ортонормированности* $[0,1]$ *функций (*$\forall n\in\mathbf{Z}_0\ \ \varphi_n\in\left(\mathbf{C}^{[0,1]}\right)_b$*) замкнута относительно комплексного пространства* $\mathbf{C}^*[0,1]$ *или* $\mathbf{C}[0,1]$*; 2) элементы бесконечной нижней комплексной матрицы Хессенберга (7) имеют по всем столбцам конечные пределы:*

$$\forall n\in\mathbf{Z}_0\ \ \exists\lim_{N\to+\infty}\mu_n^{(N)} =: \rho_n\in\mathbf{C}; \tag{17}$$

3) описанные выше ортонормированная система $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$ *и матрица (7) связаны между собой условием*

$$A_1 := \sup_{N\in\mathbf{Z}_0}\sup_{0\le x\le 1}\int_0^1\left|\sum_{n=0}^{N}\mu_n^{(N)}\,\varphi_n(x)\overline{\varphi_n}(t)\right|dt<+\infty, \tag{18}$$

означающим равномерную ограниченность всюду на отрезке ортонормированности $[0,1]$ *всех* M *-функций Лебега ортонормированной системы* $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$.

Утверждение: если функция f *принадлежит соответственному комплексному пространству* $\mathbf{C}^*[0,1]$ *или* $\mathbf{C}[0,1]$, *то последовательность* M *-средних (14) её ряда Фурье (5) по ортонормированной на отрезке* $[0,1]$ *системе* $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$ *будет в этом пространстве фундаментальной:*

$$\lim_{\substack{M\to+\infty\\ N\to+\infty}}\sup_{0\le x\le 1}\left|M_M(f,x)-M_N(f,x)\right|=0. \tag{19}$$

Система $\left(w_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$ разрывных (исключая $w_0(x)\equiv 1$) и на вещественной прямой периодических с периодом 1 функций Уолша в нумерации Пэли замкнута [14, с. 62, теорема 2.6.4] относительно комплексного пространства $\mathbf{C}^*[0,1]$. Поэтому она предположению 1) леммы 2 удовлетворяет, а предположению 1) теоремы 2 — нет. Далее, в условиях (10) и (11) $\max_{0\le x\le 1}$ всегда заменим на $\sup_{0\le x\le 1}$, а в условиях (18) и (19) обратная замена не всегда возможна.

Доказательство леммы 2. Очевидно отправное неравенство доказательства:

$$\begin{aligned}\sup_{0\le x\le 1}\left|M_M(f,x)-M_N(f,x)\right| &\le \sup_{0\le x\le 1}\left|M_M(f-g,x)\right|+\\ +\sup_{0\le x\le 1}\left|M_M(g,x)-M_N(g,x)\right| &+\sup_{0\le x\le 1}\left|M_N(g-f,x)\right|,\end{aligned} \tag{20}$$

справедливое для любой функции $g\in\mathbf{L}^1[0,1]$.

Какое бы малое положительное вещественное число ε мы ни задали, всегда согласно предположению 1) о замкнутости системы $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$ относительно комплексного пространства $\mathbf{C}^*[0,1]$ или $\mathbf{C}[0,1]$ найдётся ортогональный на отрезке $[0,1]$ полином $g_{P(\varepsilon)}(x) := \sum_{n=0}^{P(\varepsilon)}c_n^{(\varepsilon)}\,\varphi_n(x)$, такой, что

$$\sup_{0\le x\le 1}\left|f(x)-g_{P(\varepsilon)}(x)\right|\le\frac{\varepsilon}{4A_1+1}. \tag{21}$$

Из (20) и (21) согласно неравенству (16) леммы 1 получаем промежуточное неравенство доказательства:

$$\sup_{0\le x\le 1}\left|M_M(f,x)-M_N(f,x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\sup_{0\le x\le 1}\left|M_M\left(g_{P(\varepsilon)},x\right)-M_N\left(g_{P(\varepsilon)},x\right)\right|. \tag{22}$$

Для всех номеров $M > N \geq P(\varepsilon)$ разность $M_M\left(g_{P(\varepsilon)}, x\right) - M_N\left(g_{P(\varepsilon)}, x\right) = \sum_{n=0}^{P(\varepsilon)} c_n^{(\varepsilon)} \left(\mu_n^{(M)} - \mu_n^{(N)}\right) \phi_n(x)$. Последовательное применение неравенства Коши—Буняковского [9, с. 33, (9.6); 16, с. 10, теорема 1.1.4] и равенства Парсеваля для замкнутой ортонормированной системы [9, с. 73, (15.3); 16, с. 111, теорема 3.7.1] даёт

$$\left| M_M\left(g_{P(\varepsilon)}, x\right) - M_N\left(g_{P(\varepsilon)}, x\right) \right| \leq \left(\sum_{n=0}^{P(\varepsilon)} \left| c_n^{(\varepsilon)} \varphi_n(x) \right|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{P(\varepsilon)} \left| \mu_n^{(M)} - \mu_n^{(N)} \right|^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left\| g_{P(\varepsilon)} \right\|_{\mathbf{L}^2[0,1]} \ \max_{0 \leq n \leq P(\varepsilon)} \ \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \varphi_n(x) \right| \left(\sum_{n=0}^{P(\varepsilon)} \left| \mu_n^{(M)} - \mu_n^{(N)} \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Для любого целого $n \in \mathbf{Z}_0$ и выбранного выше вещественного числа $\varepsilon > 0$ всегда согласно условию (17) найдётся номер $R(n, \varepsilon)$, такой, что для всех номеров $M > N \geq R(n, \varepsilon)$ будет выполняться неравенство

$$\left| \mu_n^{(M)} - \mu_n^{(N)} \right| \leq \left| \mu_n^{(M)} - \rho_n \right| + \left| \rho_n - \mu_n^{(N)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{1 + P(\varepsilon)} \left\| g_{P(\varepsilon)} \right\|_{\mathbf{L}^2[0,1]} \ \max_{0 \leq n \leq P(\varepsilon)} \ \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \varphi_n(x) \right| + 1}.$$

Тогда для всех номеров $M > N \geq S(\varepsilon) := \max\{R(n, \varepsilon) : 0 \leq n \leq P(\varepsilon)\}$ истинно

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} \left| M_M\left(g_{P(\varepsilon)}, x\right) - M_N\left(g_{P(\varepsilon)}, x\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{23}$$

Из неравенств (22) и (23) вытекает, что для всех номеров $M > N \geq \max\{P(\varepsilon), S(\varepsilon)\}$ справедливо заключительное неравенство доказательства: $\sup_{0 \leq x \leq 1} \left| M_M(f, x) - M_N(f, x) \right| < \varepsilon$. Оно ввиду произвола в выборе вещественного $\varepsilon > 0$ означает, что имеет место предельное равенство (19), которое в силу полноты пространств $\mathbf{C}^*[0,1] \subset \mathbf{C}[0,1]$ влечёт сходимость последовательности M-средних (14) в соответствующем пространстве.

Лемма 2 доказана.

Достаточность утверждения теоремы 2 вытекает из приводимой ниже леммы.

Лемма 3. *Предположения: 1) ортонормированная на отрезке* $[0,1]$ *система* $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$ *непрерывных функций (*$\forall n \in \mathbf{Z}_0 \ \ \varphi_n \in \left(\mathbf{C}^{[0,1]}\right)_c$*) из комплексного пространства* $\mathbf{C}^*[0,1]$ *или* $\mathbf{C}[0,1]$*; 2) элементы бесконечной нижней комплексной матрицы Хессенберга (7) имеют по всем столбцам единичный предел (9).*

Утверждение: если последовательность M *-средних (8) ортогонального на отрезке* $[0,1]$ *ряда (6) удовлетворяет условию* $\mathbf{C}$ *-фундаментальности (11), то он является ортогональным рядом Фурье (5) функции* f *из соответственного пространства* $\mathbf{C}^*[0,1]$ *или* $\mathbf{C}[0,1]$.

Доказательство. Предположение 1) леммы 3 и условие $\mathbf{C}$-фундаментальности (11) в силу полноты [16, с. 26] комплексных пространств $\mathbf{C}^*[0,1] \subset \mathbf{C}[0,1]$ влекут равномерную сходимость (сильную сходимость) последовательности M-средних (8) ортогонального на отрезке $[0,1]$ ряда (6) к функции f из соответственного пространства $\mathbf{C}^*[0,1]$ или $\mathbf{C}[0,1]$: $\lim_{N \to +\infty} \max_{0 \leq x \leq 1} \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \mu_n^{(N)} a_n \varphi_n(x) \right| = 0$. Отсюда с учётом снова предположения 1) леммы 3 получаем предельные равенства $\forall m \in \mathbf{Z}_0$ $\lim_{N \to +\infty} \int_0^1 \overline{\varphi_m}(t) \sum_{n=0}^{N} \mu_n^{(N)} a_n \varphi_n(t) \, dt = \int_0^1 \overline{\varphi_m}(t) f(t) \, dt$, из которых в силу свойства ортонормированности (4) имеем $\forall m \in \mathbf{Z}_0$ $\lim_{N \to +\infty} \mu_m^{(N)} a_m = \int_0^1 f(t) \overline{\varphi_m}(t) \, dt$. Учёт предельных равенств (9) даёт $\forall m \in \mathbf{Z}_0$ $a_m = \int_0^1 f(t) \overline{\varphi_m}(t) \, dt$.

Лемма 3 доказана.

Теорема 2 полностью доказана.

Автором теорема 2 была анонсирована в то время в чисто белорусскоязычном издании [23].

В случае регулярных M-средних (8) из теоремы 2 имеем лучший предшествовавший результат — теорему Г. Штейнгауза об ортогональных на отрезке $\mathbf{C}$-рядах [16, с. 213—214, теорема 5.7.3].

Для тригонометрических рядов и матрицы

$$F := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 1 & 1-\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \ldots \\ 1 & 1-\frac{1}{3} & 1-\frac{2}{3} & \ldots & 0 & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1-\frac{1}{N+1} & 1-\frac{2}{N+1} & \ldots & 1-\frac{N}{N+1} & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} = \left[\max\left\{0, 1-\frac{n}{N+1}\right\}\right]_{(N,n)\in \mathbf{Z}_0\times\mathbf{Z}_0},$$

определяющей регулярные средние Фейера (3) тригонометрического ряда (2), из теоремы 2 имеем стартовую теорему Л. Фейера, т. е. теорему 1: $(I) \Leftrightarrow (I)'$.

Средние Фейера тригонометрических рядов и пространства функций ограниченной и исчезающей средней осцилляции. В 1961 году в своих исследованиях по теории дифференциальных уравнений с частными производными Ф. Джон и Л. Ниренберг [24] для вещественных функций $f \in \mathbf{L}^1[0,1]$ ввели $*$-полунорму

$$\|f\|_* := \sup_I \frac{1}{|I|}\int_I \left| f(x) - \frac{1}{|I|}\int_I f(t)\,dt \right| dx, \tag{24}$$

где верхняя грань берётся по всем отрезкам $I \subset [0,1]$ и где $|I|$ есть длина отрезка I. Очевидно, что $\|\mathrm{const}\|_* = 0$. Когда функция $f \in \mathbf{L}^\infty[0,1]$, то $\|f\|_* \le 2\|f\|_{\mathbf{L}^\infty[0,1]}$.

В самом начале стендового доклада были перечислены пять рассматриваемых нами функциональных пространств. Дополним их список следующими двумя пространствами: 6) $\mathbf{BMO}[0,1]$ — вещественное пространство Джона—Ниренберга всех вещественных функций $f \in \mathbf{L}^1[0,1]$ с ограниченной средней осцилляцией: $\|f\|_* < +\infty$; 7) $\mathbf{VMO}[0,1]$ — вещественное пространство Сарасона всех вещественных функций $f \in \mathbf{BMO}[0,1]$ с исчезающей средней осцилляцией: $\lim\limits_{\delta\to 0+0} \sup\limits_{|I|\le\delta} \frac{1}{|I|}\int_I \left| f(x) - \frac{1}{|I|}\int_I f(t)\,dt \right| dx = 0$.

Очевидны включения: $\mathbf{C}^*[0,1] \subset \mathbf{VMO}[0,1] \subset \mathbf{BMO}[0,1]$. Хотя $\forall f \in \mathbf{L}^\infty[0,1]$ $\lim_{p\to+\infty}\|f\|_{\mathbf{L}^p[0,1]} = \|f\|_{\mathbf{L}^\infty[0,1]}$, между вещественным пространством $\mathbf{L}^\infty[0,1]$ и пересечением вещественных пространств Ф. Рисса $\bigcap_{1<p<+\infty} \mathbf{L}^p[0,1]$ имеется зазор, в котором находится пространство $\mathbf{BMO}[0,1]$: $\mathbf{L}^\infty[0,1] \underset{\ne}{\subset} \mathbf{BMO}[0,1] \underset{\ne}{\subset} \bigcap_{1<p<+\infty} \mathbf{L}^p[0,1]$. Неограниченная вещественная функция

$$f_2(x) := \begin{cases} \ln\left|x-\frac{1}{2}\right|, \text{ когда } x \in \left[0,\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2},1\right], \\ 0, \text{ когда } x = \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{25}$$

принадлежит разности $\mathbf{BMO}[0,1] \setminus \mathbf{L}^\infty[0,1]$, а неограниченная вещественная функция

$$f_3(x) := \begin{cases} \ln\left(x-\frac{1}{2}\right), \text{ когда } x \in \left(\frac{1}{2},1\right], \\ 0, \text{ когда } x \in \left[0,\frac{1}{2}\right], \end{cases}$$

принадлежит разности $\bigcap_{1<p<+\infty} \mathbf{L}^p[0,1] \setminus \mathbf{BMO}[0,1]$.

Теорема 3. *Для того чтобы вещественный тригонометрический ряд (2) являлся тригонометрическим рядом Фурье* (V) *некоторой ограниченной средней осцилляции вещественной функции* $f \in \mathbf{BMO}[0,1]$,

(VI) *некоторой исчезающей средней осцилляции вещественной функции* $f \in \mathbf{VMO}[0,1]$, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность средних Фейера (3) этого тригонометрического ряда на отрезке* $[0,1]$ $(V)'$ *была ограничена по* $*$*-полунорме (24),* $(VI)'$ *сходилась по* $*$*-полунорме (24). Далее, для типичной ограниченной средней осцилляции вещественной функции (25) справедлива оценка снизу*

$$\inf_{N\in\mathbf{Z}_0} \| f_2 - \sigma_N f_2 \|_* \geq \frac{1}{2e}, \qquad (26)$$

где e — основание натурального логарифма.

В силу теорем 1 и 3 аналогичны, во-первых, сепарабельное полное пространство $\mathbf{C}^*[0,1]$ и пространство Сарасона $\mathbf{VMO}[0,1]$: средние Фейера (3) сходятся соответственно по $\mathbf{C}$-норме и по $*$-полунорме (24), во-вторых, несепарабельное полное пространство $\mathbf{L}^\infty[0,1]$ и пространство Джона—Ниренберга $\mathbf{BMO}[0,1]$: средние Фейера (3) ограничены соответственно по $\mathbf{L}^\infty$-полунорме и по $*$-полунорме (24).

Первая часть теоремы 3: $(V) \Leftrightarrow (V)'$ доказана автором двумя способами в [4] и [25] соответственно. Вторая часть теоремы 3: $(VI) \Leftrightarrow (VI)'$ доказана в [25]. Оценки снизу (26) также доказана в [25, с. 139—140].

Естественно попытаться перенести теорему 3 с тригонометрических на ортогональные ряды.

Консервативные средние тригонометрических рядов и пространства Ф. Рисса $\mathbf{L}^p[0,1]$, $1 < p < +\infty$. Справедливое для функционального пространства Гильберта $\mathbf{L}^2[0,1]$ равенство Парсеваля

$$\left[\left|\int_0^1 f(t)dt\right|^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left|\int_0^1 f(t)\cos n2\pi t dt\right|^2 + \left|\int_0^1 f(t)\sin n2\pi t dt\right|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{\mathbf{L}^2[0,1]}$$

при обобщении на пространства Ф. Рисса $\mathbf{L}^p[0,1]$ с показателем $1<p\leq 2$ заменяется неравенством Хаусдорфа—Юнга

$$\left[\left|\int_0^1 f(t)dt\right|^q + 2^q\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left|\int_0^1 f(t)\cos n2\pi t dt\right|^q + \left|\int_0^1 f(t)\sin n2\pi t dt\right|^q\right)\right]^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|_{\mathbf{L}^p[0,1]},$$

где сопряжённый показатель $q := \dfrac{p}{p-1} \in [2,\infty)$.

Канадский математик Руни установил дополнительное свойство, которым обладает функция $f \in \mathbf{L}^p[-\pi,\pi]$, $1<p\leq 2$, и доказал следующую теорему [8, с. 53, 2.3.10(3); 26, с. 765].

Теорема 4. *Для того чтобы ортогональный на отрезке* $[-\pi,\pi]$ *тригонометрический ряд в комплексной форме*

$$\sum\nolimits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, e^{nix} \qquad (27)$$

являлся тригонометрическим рядом Фурье при показателе $1<p\leq 2$ *некоторой функции* $f \in \mathbf{L}^p[-\pi,\pi]$, *необходимо и достаточно, чтобы, во-первых, сходился вещественный двусторонний ряд* $\sum\nolimits_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^{\frac{p}{p-1}}$ *и, во-вторых, была конечной верхняя грань*

$$\sup_{N\in\mathbf{Z}_0} (N+1)^{p-1}\sum_{n=0}^{N}\left|\frac{N!}{n!\,(N-n)!}\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \cdot \int_0^1 t^n (1-t)^{N-n} e^{mi2\pi t}\, dt\right|^p.$$

Отметим, что Р. Эдвардс в своей монографии по поводу результатов теоремы 4 и подобных ей пишет [8, с. 52]: «Если читатель внимательно посмотрит на эти условия, то убедится, как трудно применять их в конкретных случаях».

Автор учёл, что интегралы в теореме 4 являются тригонометрическими коэффициентами Фурье в комплексной форме с номерами $-m$ фундаментальных многочленов С. Н. Бернштейна $t^n\,(1-t)^{N-n}$, и получил следующий результат [3, с. 679].

Теорема 5. *П р е д п о л о ж е н и е: элементы бесконечной нижней комплексной матрицы Хессенберга (7), во-первых, таковы, что ограничены в совокупности их построчные вариации:*

$$\sup_{N\in\mathbf{Z}_0} \sum_{n=0}^{N} \left|\mu_n^{(N)} - \mu_{n+1}^{(N)}\right| < +\infty\,, \tag{28}$$

во-вторых, имеют по всем столбцам конечные пределы (17), которые, в-третьих, отграничены от нуля:

$$\inf_{n\in\mathbf{Z}_0} |\rho_n| > 0\,. \tag{29}$$

У т в е р ж д е н и е: для того чтобы тригонометрический ряд (2) являлся тригонометрическим рядом Фурье при показателе $1 < p < +\infty$ некоторой функции $f \in \mathbf{L}^p[0,1]$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность консервативных M -средних

$$\forall N \in \mathbf{Z}_0 \quad M_N[(2), x] := \alpha_0 + 2\sum_{n=1}^{N} \mu_n^{(N)} \left(\alpha_n \cos n2\pi x + \beta_n \sin n2\pi x\right) \tag{30}$$

этого тригонометрического ряда на отрезке $[0,1]$ была ограничена по $\mathbf{L}^p$ -полунорме или, что в данном случае равносильно, сходилась по $\mathbf{L}^p$ -полунорме, т. е. сходилась в среднем с показателем p.

Неравенство Хаусдорфа—Юнга обобщил с тригонометрических рядов на ортогональные Ф. Рисс [16, с. 237, теорема 6.3.1; 27, с. 118]. Естественно попытаться и теоремы 4 и 5 перенести с тригонометрических на ортогональные ряды.

Матричные средние тригонометрических рядов и пространства Ф. Рисса $\mathbf{L}^p[0,1]$, $1 < p < +\infty$. Для матричных средних (30), которые могут быть и неконсервативными, автором был получен следующий результат [28, с. 26, теорема 4; 29, с. 47, теорема 4; 6, с. 19—20, теорема 3, с. 29, замечание].

Теорема 6. *П р е д п о л о ж е н и е: элементы бесконечной нижней комплексной матрицы Хессенберга (7), во-первых, ограничены в совокупности:*

$$\sup_{(N,n)\in\mathbf{Z}_0\times\mathbf{Z}_0} \left|\mu_n^{(N)}\right| < +\infty\,, \tag{31}$$

во-вторых, таковы, что ограничены в совокупности их построчные вариации на диадических отрезках:

$$\sup_{(N,\nu)\in\mathbf{Z}_0\times\mathbf{Z}_0} \sum_{n=2^\nu-1}^{2(2^\nu-1)} \left|\mu_n^{(N)} - \mu_{n+1}^{(N)}\right| < +\infty\,, \tag{32}$$

в-третьих, имеют по всем столбцам конечные пределы (17), которые, в-четвёртых, отграничены от нуля (29).

У т в е р ж д е н и е: для того чтобы тригонометрический ряд (2) являлся тригонометрическим рядом Фурье при показателе $1 < p < +\infty$ некоторой функции $f \in \mathbf{L}^p[0,1]$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность M -средних (30) этого тригонометрического ряда на отрезке $[0,1]$ была ограничена по $\mathbf{L}^p$ -полунорме.

Очевидны импликации (28) $\Rightarrow$ (31) и (28) $\Rightarrow$ (32).

Аналог теоремы 6 для кратных тригонометрических рядов доказан автором в [7, с. 4—5, теорема]. Аналоги теоремы 6 доказаны автором также для рядов по системе функций Уолша в нумерации Пэли [30, с. 58, теорема; 31, с. 11, теорема] и обобщения последних — для рядов по мультипликативным системам [32, с. 10; 33, с. 8, теорема].

Для гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$ площадь криволинейной трапеции с основанием $[1, +\infty)$ бесконечна: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} = +\infty$, а площади диадических криволинейных трапеций с основаниями $\left[\,2^\nu - 1,\, 2\left(2^\nu - 1\right)\right]$, где ν пробегает все натуральные значения $1, 2, 3, \ldots$, равны: $\displaystyle\int_{2^\nu-1}^{2(2^\nu-1)} \frac{dt}{t} = \ln 2$.

Поэтому очевидно: если у матрицы (7) элементы столбцов с чётными номерами суть

$$\forall n \in \mathbf{Z}_0 \ \ \mu_{2n}^{(N)} := \begin{cases} 0, \text{ когда } 2n > N, \\ 1, \text{ когда } 2n \le N, \end{cases}$$

а элементы «нечётных» столбцов суть

$$\forall n \in \mathbf{Z}_0 \ \ \mu_{2n+1}^{(N)} := \begin{cases} 0, \text{ когда } 2n+1 > N, \\ 1 + \dfrac{1}{n+2}, \text{ когда } 2n+1 \le N, \end{cases}$$

то она удовлетворяет условиям (17), (29) и (31), (32) теоремы 6 и не удовлетворяет условию (28) теоремы 5.

Итак, в теореме 6 помимо регулярных и консервативных матричных средних допускаются также некоторые неконсервативные матричные средние, которые, однако, как и в теореме 5, не порождают сходимость.

В теореме У. и Дж. Юнгов, т. е. в теореме 1: $(III) \Leftrightarrow (III)'$, и в теоремах автора 5, 6, [30—33] предположения об элементах бесконечной нижней комплексной матрицы Хессенберга (7) не зависят от конкретного значения показателя p между 1 и $+\infty$. Напомним один результат Ф. Рисса [34, с. 86—87, лемма]: для того чтобы функция $F \in \mathbf{AC}[0,1]$ являлась первообра́зной для функции $f \in \mathbf{L}^{p\in(1,+\infty)}[0,1]$, необходимо и достаточно, чтобы для любого упорядоченного множества точек x_n на отрезке $[0,1]$ была конечна верхняя грань

$$\sup_{0 \le x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N \le 1} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\left|F(x_{n+1}) - F(x_n)\right|^p}{(x_{n+1} - x_n)^{p-1}}.$$

Поэтому естественно искать эффективные условия на элементы матрицы (7), которые явно зависят от показателя $1 < p < +\infty$.

Также естественно искать такие эффективные условия на элементы матрицы (7), из которых при $p \to 2$ получается следующий фундаментальный результат Ф. Рисса — Э. Фишера [9, с. 74; 10, с. 207, теорема (1.1); 11, с. 168, теорема 3].

Теорема 7. *Для того чтобы тригонометрический ряд (2) являлся тригонометрическим рядом Фурье некоторой функции f из сепарабельного полного комплексного пространства Гильберта $\mathbf{L}^2[0,1]$, необходимо и достаточно, чтобы вещественный ряд из квадратов модулей его коэффициентов*

$$|\alpha_0|^2 + 4\sum\nolimits_{n=1}^{+\infty} \left(|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2\right)$$

сходился.

Матричные средние ортогональных рядов и пространства Орлича. Подобно тому как естественным обобщением пространства Гильберта $\mathbf{L}^2[0,1]$ явились пространства Ф. Рисса $\mathbf{L}^p[0,1]$, $1 < p < +\infty$, так и естественным обобщением последних являются пространства В. Орлича $\mathbf{L}^\phi[0,1]$.

Пусть на вещественной прямой $\mathbf{R}$ задана неотрицательная вещественная функция ϕ. Функция $\phi : \mathbf{R} \to [0,+\infty)$ называется выпуклой на $\mathbf{R}$, если для любых двух точек x_1 и x_2 вещественной прямой $\mathbf{R}$ выполняется условие $\phi\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) \le \dfrac{\phi(x_1)+\phi(x_2)}{2}$. Геометрически это означает, что середина любой хорды графика функции ϕ лежит либо над графиком функции, либо на нём. В нашем случае «выпуклость» влечёт «непрерывность».

Выпуклая функция $\phi : \mathbf{R} \to [0,+\infty)$ называется функцией Юнга, если она 1) чётная: $\forall x \in \mathbf{R} \ \ \phi(-x) = \phi(x)$, 2) обращается в нуль в начале координат: $\phi(0) = 0$, 3) бесконечно большая при $x \to +\infty$: $\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = +\infty$. Например, выпуклая функция $|x|^p$, где показатель степени $1 \le p < +\infty$, является функцией Юнга. Функция $\forall y \in \mathbf{R} \ \ \psi(y) := \sup\left\{x|y| - \phi(x) : x \ge 0\right\}$ называется дополнительной в смысле Юнга к функции $\phi(x)$. Примеры: 1) если $\phi_1(x) := |x|^p / p$, где показатель $1 < p < +\infty$, то $\psi_1(y) = |y|^q / q$, где сопряжённый показатель q связан с p условием $1/p + 1/q = 1$; 2) если $\phi_2(x) := e^{|x|} - |x| - 1$, то $\psi_2(y) = (1+|y|)\ln(1+|y|) - |y|$.

Пусть $\phi:\mathbf{R}\to[0,+\infty)$ есть функция Юнга. Пространством Орлича $\mathbf{L}^{\phi}[0,1]$ называется комплексное линейное пространство всех на отрезке $[0,1]$ вещественной прямой измеримых функций f, для которых существует такое вещественное число $\alpha(f)>0$, что конечен интеграл $\int_0^1 \phi\big[\alpha(f)\cdot|f(t)|\big]dt$, с обычными операциями сложения функций и умножения их на комплексные числа. Краткая запись определения пространства Орлича:

$$\mathbf{L}^{\phi}[0,1]:=\left\{f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}, \text{изм.}: \exists\alpha(f)>0 \int_0^1 \phi\big[\alpha(f)\cdot|f(t)|\big]dt<+\infty\right\}.$$

Укажем, что имеются и другие пространства измеримых функций. Например, в теории интерполяции линейных операторов рассматриваются пространство Лоренца, пространство Марцинкевича.

Функция Юнга $\phi:\mathbf{R}\to[0,+\infty)$ называется N-функцией (nice Young function), если она 1) обращается в нуль только в точке нуль: $\phi(x)=0 \Rightarrow x=0$, 2) бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с x при $x\to 0$: $\lim_{x\to 0}\phi(x)/x=0$, 3) бесконечно большая более высокого порядка по сравнению с x при $x\to+\infty$: $\lim_{x\to+\infty}\phi(x)/x=+\infty$. Дополнительная в смысле Юнга к N-функции $\phi(x)$ функция $\psi(y)$ является N-функцией. В абзаце перед определением пространства Орлича $\mathbf{L}^{\phi}[0,1]$ все компоненты пар (ϕ_1,ψ_1) и (ϕ_2,ψ_2) примеров 1) и 2) суть N-функции. Функция Юнга $|x|$ не является N-функцией.

При N-функции $\phi:\mathbf{R}\to[0,+\infty)$ пространство $\mathbf{L}^{\phi}[0,1]$ полно относительно полунормы Орлича

$$\|f\|_{\mathbf{L}^{\phi}[0,1]}:=\sup\left\{\int_0^1 |f(t)\cdot g(t)|\,dt: \int_0^1 \psi\big(|g(t)|\big)dt\le 1\right\},$$

где $\psi(y)$ есть дополнительная в смысле Юнга к $\phi(x)$ N-функция. Если N-функция $\phi_1(x):=|x|^p/p$, где $1<p<+\infty$, то полунорма Орлича $\|f\|_{\mathbf{L}^{\phi_1}[0,1]}=q^{1/q}\|f\|_{\mathbf{L}^{p}[0,1]}$, где сопряжённый показатель q определяется равенством $1/p+1/q=1$.

Говорят, что функция Юнга $\phi:\mathbf{R}\to[0,+\infty)$ удовлетворяет Δ_2-условию, если она бесконечно большая медленного роста при $x\to\infty$, т. е. если существуют две вещественные постоянные $k_1>0$ и $x_1\ge 0$, такие, что $\forall x\in[x_1,+\infty)$ выполняется неравенство $\phi(2x)\le k_1\,\phi(x)$. Функция Юнга $|x|$ не является N-функцией, но удовлетворяет Δ_2-условию. Функция Юнга $\phi_2(x):=e^{|x|}-|x|-1$ является N-функцией, но не удовлетворяет Δ_2-условию. Дополнительная в смысле Юнга к $\phi_2(x)$ функция $\psi_2(y)=(1+|y|)\ln(1+|y|)-|y|$ является N-функцией и удовлетворяет Δ_2-условию.

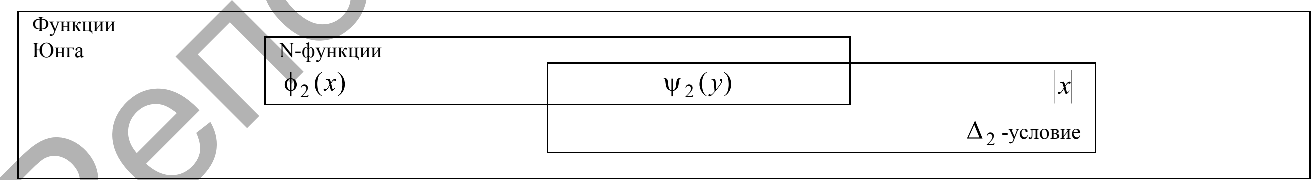

Рисунок 2 — Функции Юнга

Из рисунка 2 видно, что такие характеристики функций Юнга $\phi:\mathbf{R}\to[0,+\infty)$ как N-функция и Δ_2-условие суть логически разные характеристики.

Для несепарабельного полного комплексного пространства $\mathbf{L}^{\infty}[0,1]$ и сепарабельного полного комплексного пространства Г. Штейнгауза $\mathbf{L}^{1}[0,1]$ имеем:

$$\mathbf{L}^{\infty}[0,1]=\bigcap_{\varphi\in\mathrm{N}}\left\{f:\int_0^1\varphi\left(\left|f(t)\right|\right)dt<+\infty\right\}\subset\mathbf{L}^1(T)=\bigcup_{\varphi\in\mathrm{N}}\left\{f:\int_0^1\varphi\left(\left|f(t)\right|\right)dt<+\infty\right\}\subset\bigcup_{\varphi\in\mathrm{N}}\mathbf{L}^{\varphi}[0,1],$$

где пересечение и объединения берутся по всем N -функциям $\phi(x)$.

Теорема 8. *П р е д п о л о ж е н и я: 1) все функции ортонормированной на отрезке* $[0,1]$ *системы* $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$ *принадлежат комплексному пространству* $\mathbf{L}^{\infty}[0,1]$*; 2) элементы бесконечной нижней вещественной матрицы Хессенберга (7) имеют по всем столбцам единичный предел (9); 3) описанные выше ортонормированная система* $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$ *и матрица (7) связаны между собой условием (15), означающим равномерную ограниченность почти всюду на отрезке ортонормированности* $[0,1]$ *всех* M *-функций Лебега ортонормированной системы* $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$.

У т в е р ж д е н и е: для того чтобы ортогональный на отрезке $[0,1]$ *ряд (6) являлся ортогональным рядом Фурье некоторой функции* f *из комплексного пространства Орлича* $\mathbf{L}^{\phi}[0,1]$, *необходимо и достаточно, чтобы*

а) при N *-функции* $\phi(x)$ *последовательность его* M *-средних (8) была ограничена по* $\mathbf{L}^{\phi}$ *-полунорме:*

$$\sup_{N\in\mathbf{Z}_0}\left\|\sum\nolimits_{n=0}^{N}\mu_n^{(N)}\,a_n\,\phi_n\left(x\right)\right\|_{\mathbf{L}^{\varphi}[0,1]}<+\infty\,;$$

б) при N *-функции* $\phi(x)$, *удовлетворяющей* Δ_2 *-условию, последовательность его* M *-средних (8) сходилась по* $\mathbf{L}^{\phi}$ *-полунорме:*

$$\lim_{\substack{M\to+\infty\\ N\to+\infty}}\left\|\sum\nolimits_{n=0}^{M}\mu_n^{(M)}\,a_n\,\varphi_n(x)-\sum\nolimits_{n=0}^{N}\mu_n^{(N)}\,a_n\,\varphi_n(x)\right\|_{\mathbf{L}^{\phi}[0,1]}=0\,;$$

в) при N *-функции* $\phi(x)$ *и дополнительной к ней* N *-функции* $\psi(y)$, *удовлетворяющей* Δ_2 *-условию, для любой функции* h *из комплексного пространства Орлича* $\mathbf{L}^{\psi}[0,1]$ *комплексный ряд*

$$\sum\nolimits_{n=0}^{+\infty}a_n\cdot\overline{\int_0^1 h(t)\,\overline{\varphi_n}(t)\,dt} \tag{33}$$

суммировался матричным методом (7):

$$\forall h\in\mathbf{L}^{\psi}[0,1]\ \ \exists\lim\nolimits_{N\to+\infty}\sum\nolimits_{n=0}^{N}a_n\cdot\overline{\int_0^1 h(t)\,\overline{\varphi_n}(t)\,dt}\in\mathbf{C}\,;$$

г) при N *-функции* $\phi(x)$, *удовлетворяющей* Δ_2 *-условию, для любой функции* h *из комплексного пространства Орлича* $\mathbf{L}^{\psi}[0,1]$, *где* $\psi(y)$ *есть дополнительная к* $\phi(x)$ N *-функция, комплексный ряд (33) суммировался матричным методом (7).*

Заключение. Настоящий стендовый доклад представляет собой авторское добавление (как бы приложение) к настольной монографии [16]. В нём классическая проблематика о том, когда ортогональный на отрезке $[0,1]$ ряд (6) является ортогональным рядом Фурье (5) функции из определённого пространства, дополнена более поздними результатами. Указаны также некоторые направления дальнейших исследований.

Молодым исследователям подскажем, что автор рассматривал аналогичные проблемы также в комплексной плоскости для рядов по системе 1) $\left(\varphi_n(O,z)\right)_{n=0}^{\infty}$ функций, ортогональных по площади открытого ограниченного множества $O\subset C$, состоящего из конечного числа конечносвязных областей [35]; 2) $\left(\varphi_n(G,z)\right)_{n=0}^{\infty}$ функций, ортогональных по спрямляемой границе ∂G жордановой области G комплексной плоскости C [36; 37]; 3) $\left(F_n(G,z)\right)_{n=0}^{\infty}$ многочленов Фабера для жордановой области $G\subset C$ с гладкой границей ∂G, удовлетворяющей дополнительному ограничению на её гладкость [условию Дини, ($\Leftarrow$) условию С. Я. Альпера] [38].

Список цитируемых источников

1. *Бруй, И. Н.* Тригонометрические ряды классов $L^p(\mathbf{T})$ и их регулярные средние / И. Н. Бруй // Весці Акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 1996. — № 1. — С. 24—30.

2. *Бруй, И. Н.* Тригонометрические ряды класса $L^\infty(T)$ и их консервативные средние / И. Н. Бруй // Весці Акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 1996. —№ 2. — С. 48—52.

3. *Бруй, И. Н.* Тригонометрические ряды классов $L^p(\mathbf{T})$, $p \in]1;\infty[$, и их консервативные средние / И. Н. Бруй // Мат. заметки. — 1997. — Т. 62. — № 5. — С. 677—686.

4. *Bruj, I.* Real trigonometric series of class BMO and $(C,1)$-means / I. Bruj, G. Schmieder // Acta scientiarum mathematicarum (Szeged). — 1998. — Vol. 64. — № 3—4. — P. 483—488.

5. *Бруй, И. Н.* Матричные средние тригонометрических рядов и пространства Орлича / И. Н. Бруй // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. — 2001. — № 2 (6). — С. 23—28.

6. *Бруй, И. Н.* Методы суммирования тригонометрических рядов и пространства функций / И. Н. Бруй // Мат. сб. — 2002. — Т. 193. — № 4. — С. 17—36.

7. *Бруй, И. Н.* Методы суммирования кратных тригонометрических рядов и пространства Рисса $L^p(\mathbf{T}^N)$, $p \in (1,\infty)$ / И. Н. Бруй // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. — 2007. — № 1 (48). — С. 3—9.

8. *Эдвардс, Р.* Ряды Фурье в современном изложении : в 2 т. / Р. Эдвардс. — М. : Мир, 1985. — Т. 1. — 264 с.

9. *Бари, Н. К.* Тригонометрические ряды / Н. К. Бари. — М. : ГИФМЛ, 1961. — 936 с.

10. *Зигмунд, А.* Тригонометрические ряды : в 2 т. / А. Зигмунд. — М. : Мир, 1965. — Т. I. — 615 с.

11. *Натансон, И. П.* Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. — 480 с.

12. *Гофман, К.* Банаховы пространства аналитических функций / К. Гофман. — М. : ИИЛ, 1963. — 312 с.

13. *Бруй, И. Н.* Средние тригонометрических рядов и пространства периодических функций. Стендовый доклад / И. Н. Бруй // Содружество наук. Барановичи-2016 : материалы XII Междунар. науч.-практ. конф. молодых исследователей (Барановичи, 19—20 мая 2016 года) : в 3 ч. / редкол.: А. В. Никишова (гл. ред.), Ю. Е. Горбач (отв. секр.) [и др.]. — Барановичи : БарГУ, 2016. — Ч. 2. — С. 6—20.

14. *Голубов, Б. И.* Ряды и преобразования Уолша : Теория и применения / Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов. — М. : Наука, 1987. — 344 с.

15. *Schipp, F.* Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis. With the collaboration of J. Pál / F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon. — Bristol ; New York : Adam Hilger, 1990. — X+560 pp.

16. *Качмаж, С.* Теория ортогональных рядов / С. Качмаж, Г. Штейнгауз. — М. : ГИФМЛ, 1958. — 507 с.

17. *Турецкий, А. Х.* О классах насыщения в пространстве C / А. Х. Турецкий // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1961. — Т. 25. — № 3. — С. 411—442.

18. *Ефимов, А. В.* О линейных методах суммирования рядов Фурье / А. В. Ефимов // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1960. — Т. 24. — № 5. — С. 743—757.

19. *Покало, А. К.* Об одном классе линейных методов суммирования / А. К. Покало // Весці Акад. навук Беларус. ССР. Сер. фіз.-тэхн. навук. — 1962. — № 1. — С. 24—27.

20. *Теляковский, С. А.* Условия интегрируемости тригонометрических рядов и их приложение к изучению линейных методов суммирования рядов Фурье / С. А. Теляковский // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1964. — Т. 28. — № 6. — С. 1209—1236.

21. *Тригуб, Р. М.* Суммируемость и абсолютная сходимость рядов Фурье в целом / Р.М. Тригуб // Метрические вопросы теории функций и отображений. — Киев : Наук. думка, 1971. — Вып. 2. — С. 165—266.

22. *Тригуб, Р. М.* Суммируемость рядов Фурье и некоторые вопросы теории приближений / Р. М. Тригуб. — Донецк : Донецкий гос. ун-т, 1980. — 235 с. — Деп. в ВИНИТИ АН СССР 08.12.1980. — № 5145-80 Деп.

23. *Бруй, І. М.* Матрычныя сярэднія артаганальных шэрагаў і прастора $C[0;1]$ / І. М. Бруй // Весці Беларус. дзярж. пед. ун-та. — 2001. — № 2. — С. 156—158.

24. *John, F.* On functions of bounded mean oscillation / F. John, L. Nirenberg // Comm. Pure Appl. Math. — 1961. — Vol. 14. — P. 415—426.

25. *Бруй, И. Н.* Средние Фейера в теории представления функций / И. Н. Бруй // Техника и технологии: инновации и качество : материалы III Междунар. науч.-практ. конф. (Барановичи, 18 дек. 2015 года) / редкол.: А. В. Никишова (гл. ред.), Ю. Е. Горбач (отв. ред.) [и др.]. — Барановичи : БарГУ, 2015. — С. 133—143.

26. *Rooney, P. G.* On the representation of sequences as Fourier coefficients / P. G. Rooney // Proc. Amer. Math. Soc. — 1960. — Vol. 11. — P. 762—768.

27. *Butzer, P. L.* The Hausdorff —Young theorems of Fourier analysis and their impact / P. L. Butzer // The Journal of Fourier Analysis and Applications. — 1994. — Vol. 1, no. 2. — P. 113—130.

28. *Бруй, И. Н.* Тригонометрические ряды классов $L^p(\mathbf{T})$ и их матричные средние / И. Н. Бруй // II школа "Ряди Фур'є: теорія і застосування" (Кам'янець-Подільський, 30 червня — 6 липня 1997 р.) : Тези доповідей. — Київ : Ін-т математики НАН України, 1997. — С. 25—26.

29. *Бруй, И. Н.* Тригонометрические ряды классов $L^p(\mathbf{T})$ и их матричные средние / И. Н. Бруй // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2000. — № 1. — С. 46—49.

30. *Бруй, И. Н.* Матричные средние ортогональных рядов и классы функций / И. Н. Бруй // Теория приближений и гармонический анализ : тезисы докладов : Междунар. конф. (Россия, Тула, 26—29 мая 1998 г.). — Тула, 1998. — С. 58—59.

31. *Бруй, И. Н.* Ряды Уолша—Пэли и пространства Рисса / И. Н. Бруй // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. — 2014. — № 2 (173). — С. 11—19.

32. *Бруй, И. Н.* Методы суммирования рядов и классы функций : автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук : 01.01.01 / И. Н. Бруй. — Минск : Изд. центр БГУ, 2005. — 34 с.

33. *Бруй, И. Н.* Мультипликативные ряды и пространства Рисса / И. Н. Бруй // Технологии, экономика и право: актуальные проблемы и инновации : материалы Междунар. науч.-практ. конф., 20 нояб. 2014 г., Барановичи / редкол.: А. В. Никишова (гл. ред.), А. К. Гавриленя (отв. ред.) [и др.]. — Барановичи : РИО БарГУ, 2014. — С. 7—16.

34. *Рисс, Ф.* Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь. — М. : Мир, 1979. — 587 с.

35. *Бруй, І. М.* Метады сумавання артаганальных па плошчы шэрагаў і класы галаморфных функцый / І. М. Бруй // Весці Беларус. дзярж. пед. ун-та. Сер. 3. — 2004. — № 1 (39). — С. 14—17.

36. *Bruj, I.* Matrix Mean Series in Terms of Boundary Orthogonal Systems and Functions in the Classes H^∞ and E^p / I. Bruj, G. Schmieder // Journal of Approximation Theory. — 2002. — Vol. 118. — № 2. — P. 246—256.

37. *Бруй, И. Н.* Методы суммирования ортогональных по контуру рядов и классы В. И. Смирнова $E^p(G)$, $p \in (1,\infty)$, и $H^\infty(G)$ / И. Н. Бруй // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. — 2004. — № 1 (25). — С. 16—29.

38. *Бруй, И. Н.* Матричные средние рядов Фабера и классы В. И. Смирнова $E^p(G)$, $p \in (1,\infty)$ / И. Н. Бруй // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. — 2002. — № 1 (9). — С. 38—48.