– 8-й класс — основы алгоритмизации и программирования; технология обработки текстовых документов; работа с векторной графикой; работа с электронной почтой;

– 9-й класс — представление информации в компьютере; основы алгоритмизации и программирования; основы анимации; компьютерные ресурсы сети Интернет;

– 10-й класс — аппаратное и программное обеспечение компьютера; основы алгоритмизации и программирования; обработка информации в электронных таблицах; информационные модели; компьютерные коммуникации и Интернет;

– 11-й класс — информационные системы и технологии; основы алгоритмизации и программирования; обработка информации в базах данных; основы веб-конструирования.

Программа предусматривает обучение информатике со второй ступени общего образования — это 6—11 классы. Учащиеся обучаются не только компьютерной грамотности при работе с основными офисными приложениями, но и медиаграмотности через сеть Интернет. Современный человек должен владеть компьютерными компетенциями и медиакомпетенциями для дальнейшего профессионального карьерного роста. Только образованный человек с медиакомпетентностями сможет построить карьеру и быть востребованным специалистом.

Заключение. Формирование медиакомпетентности при преподавании учебного предмета «Информатика» — залог успешного специалиста во всех областях науки и техники. Отметим, что XXI век — век информатизации, а учебный предмет «Информатика» — главная ступень учащегося в современный образованный мир.

Список цитируемых источников

1. *Артёмова, Е. В.* Формирование медиакомпетентности на учебных занятиях по информатике в средней общеобразовательной школе / Е. В. Артёмова // Научные стремления-2017 : сб. материалов Междунар. молодёж. конф., Минск, 6—7 окт. 2017 г. / Минск : Четыре четверти, 2017. —— 256 с.

2. *Федоров, А. В.* Медиаобразование: история и теория : учеб. пособие / А. В. Федоров. — М. : Информация для всех, 2015. — 450 с.

3. *Артёмова, К. В.* Формирование медиакомпетентности на учебных занятиях по информатике в общеобразовательной школе / К. В. Артёмова // Научно-методическое сопровождение повышения квалификации педагогов: опыт, проблемы, перспективы : сб. материалов III Респ. науч.-практ. конф., Могилёв, 26 мая 2017 г. / редкол.: М. М. Жудро [и др.] ; под общ. ред. В. Н. Гириной. — Могилёв : МГОИРО, 2017. — 538 с.

4. *Артёмова, К. В.* Современная реализация компетентностного подхода в преподавании учебного предмета «Информатика» / К. В. Артёмова // Современное образование: мировые тенденции и региональные аспекты : сб. ст. II Междунар. науч.-практ. конф., Могилёв, 2 дек. 2016 г. / редкол.: М. М. Жудро [и др.] ; под общ. ред. Т. И. Когачевской. — Могилёв : МГОИРО, 2017. — 399 с.

УДК 517.538.3

И. Н. Бруй, кандидат физико-математических наук, доцент

Учреждение образования «Барановичский государственный университет», Барановичи

СТРУКТУРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КЛАССА НАСЫЩЕНИЯ СРЕДНИХ ЗИГМУНДА РЯДОВ ПО МНОГОЧЛЕНАМ ФАБЕРА

1. Введение. В теории рядов по многочленам Фабера мы стремимся следовать обозначениям и терминологии монографии В. К. Дзядыка [1, глава IX]; в теории насыщения аппроксимационных процессов мы стремимся следовать терминологии и обозначениям монографии П. Л. Бутцера и Р. Й. Несселя [2, глава 12]; в обозначениях прямого и обратного оператора Фабера мы следуем монографии П. К. Суетина [3, глава VII, § 1—3]; в остальных обозначениях мы стремимся следовать двухтомнику Р. Эдвардса [4; 5]. Оператор присваивания «$:=$» означает, что выражению справа от него присвоено обозначение, стоящее слева. Аналогичный смысл имеет символ «$=:$». Символ «$\equiv$» обозначает тождественное равенство. Соглашение $+\pi = \pi$ не распространяется на символы $+\infty$ и ∞; последние имеют у нас разный смысл. Вещественная прямая R пополняется двумя несобственными элементами $-\infty$ (отрицательная бесконечность) и $+\infty$ (положительная бесконечность). Комплексная плоскость C пополняется единственным несобственным элементом ∞ (бесконечно удалённая точка).

Аппроксимационные процессы делятся на ненасыщаемые и насыщаемые.

Например, частичные суммы тригонометрических рядов Фурье являются ненасыщаемым процессом приближения на вещественной прямой R, а средние Фейера — насыщаемым.

Данная работа посвящена аппроксимации в комплексной плоскости C посредством средних Зигмунда $Z_N^r f(z)$ натурального порядка $r = 1, 2, 3, ...$ рядов по многочленам Фабера. В случае порядка $r = 1$ средние Зигмунда $Z_N^1 f(z)$ суть средние Фейера $\sigma_N f(z)$.

В следующем пункте 2 напоминаются известные результаты о насыщаемых средних Зигмунда тригонометрических рядов Фурье и из них выводятся в последующих пунктах 3 и 4 результаты о классах насыщения средних Зигмунда рядов Тейлора (пункт 3) и рядов Фурье по многочленам Чебышёва первого рода (пункт 4).

2. Напоминание: тригонометрические ряды Фурье. Если функция $f \in \mathbf{L}^1(T)$, то двусторонняя числовая последовательность $\left(f^{\wedge}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \right)_{n=-\infty}^{+\infty}$ называется последовательностью комплексных коэффициентов Фурье функции $f(x)$, а двусторонний функциональный ряд

$$\sum\nolimits_{n=-\infty}^{+\infty} f^{\wedge}(n) \cdot e^{inx} \tag{1}$$

называется комплексным тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)$.

Тригонометрический ряд

$$\sum\nolimits_{n=-\infty}^{+\infty} \left(-i \cdot \operatorname{sgn} n\right) f^{\wedge}(n) \cdot e^{inx} \tag{2}$$

называется сопряжённым с рядом (1). Если существует функция $f^{\sim} \in \mathbf{L}^1(T)$, для которой ряд (2) является её тригонометрическим рядом Фурье $\left[\forall n \in Z \ \left(f^{\sim}\right)^{\wedge}(n) = \left(-i \cdot \operatorname{sgn} n\right) f^{\wedge}(n) \right]$, то она называется тригонометрически сопряжённой к функции $f(x)$. Тригонометрический ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sgn} n}{\ln(|n|+2)} \cdot e^{inx}$, во-первых, сходится в каждой точке x вещественной прямой R, и, во-вторых, не является рядом Фурье ни своей суммы, ни другой функции [4, с. 11, п. 1.1.2, с. 148, п. 7.3.4, с. 154, упр. 7.7, с. 189, п. 10.1.6, (2); 5, с. 108, п. 12.8.3]. Условиям, при выполнении которых тригонометрический ряд является рядом Фурье функции из определённого пространства, посвящён обзор автора [6].

Следуя монографии Бутцера и Несселя [2, с. 434], введём следующие два определения.

Определение 1. *Средние Зигмунда*

$$\forall N \in Z_+ \ \ Z_N^r f(x) := \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \left| \frac{n}{N+1} \right|^r \right) f^{\wedge}(n) \cdot e^{inx} \tag{3}$$

натурального порядка $r = 1, 2, 3, \ldots$ *тригонометрических рядов Фурье (1) функций* $f \in \mathbf{C}(T)$ *назовём сильным процессом приближения в банаховом пространстве* $\mathbf{C}(T)$, *если для любой функции* $f \in \mathbf{C}(T)$, *во-первых, выполняются неравенства*

$$\forall N \in Z_+ \ \ \left\| Z_N^r f(x) \right\|_{\mathbf{C}(T)} \le A_1 \cdot \left\| f(x) \right\|_{\mathbf{C}(T)}, \tag{4}$$

где постоянная A_1 *не зависит от номера* N *и функции* $f(x)$, *и, во-вторых, имеет место равномерная сходимость этих средних к* $f(x)$ *на вещественной прямой* R:

$$\lim\nolimits_{N \to +\infty} \left\| f(x) - Z_N^r f(x) \right\|_{\mathbf{C}(T)} = 0. \tag{5}$$

Средние Зигмунда (3) в литературе называют ещё средними (Марцеля) Рисса, нормальными средними, типическими средними, эталонными средними.

Предельное равенство (5) с помощью логических символов может быть записано следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall N_\varepsilon \in Z_+ \ \ \forall N \in Z_+ \ \left[N \ge N_\varepsilon \Rightarrow \left\| f(x) - Z_N^r f(x) \right\|_{\mathbf{C}(T)} \le \varepsilon \right].$$

Тогда в силу неравенства $\left| \|f\| - \|g\| \right| \le \|f - g\|$, геометрический смысл которого — длина любой стороны треугольника больше модуля разности длин двух других сторон этого треугольника, для всех достаточно больших номеров N справедливо двойное неравенство $\|f(x)\|_{\mathbf{C}(T)} - \varepsilon \le \left\| Z_N^r f(x) \right\|_{\mathbf{C}(T)} \le \|f(x)\|_{\mathbf{C}(T)} + \varepsilon$. Поэтому из

(5) в силу принципа равномерной ограниченности [2, с. 18, утверждение 0.7.2; 7, с. 265, теорема (9.5)] следует выполнение неравенства (4) лишь для всех достаточно больших номеров N.

В случае порядка $r = 1$, т. е. в случае средних Фейера $\sigma_N f(x) := Z_N^1 f(x)$, неравенство (4) выполняется с постоянной $A_1 = 1$ [4, с. 120, (6.4.9); 7, с. 149, (3.5); 8, с. 141, (48.2)], а предельное равенство (5) выражает стартовую в рассматриваемой теории аппроксимационную теорему Липота Фейера [4, с. 108, теорема 6.1.1, $k = 0$; 7, с. 149, теорема (3.4); 8, с. 139, теорема].

Для общего случая натурального порядка $r = 1, 2, 3, ...$ неравенство (4) с постоянной $A_1 = 2r - 1$ имеется в [9, с. 236; 10, с. 19—24; 11, с. 233, лемма 4.3]. Очевидны предельные равенства

$$\forall n \in Z_+ \quad \lim_{N \to +\infty} \left[1 - \left(\frac{n}{N+1} \right)^r \right] = 1 . \tag{6}$$

Последовательность констант Лебега ядер Зигмунда натурального порядка $r = 1, 2, 3, ...$ ограничена [10, с. 24, (5.19); 11, с. 234]:

$$\forall N \in Z_+ \;\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \left| \frac{n}{N+1} \right|^r \right) e^{int} \right| dt \le 2r - 1 . \tag{7}$$

Поэтому из (6) и (7) по известной теореме [1, с. 281, (5)&(5'); 8, с. 475, (A)&(B); 12, с. 49, теорема 2.1], которая выводится из критерия слабой сходимости линейных функционалов, заключаем о выполнении (5). Без обращения к функциональному анализу автором получена теорема [13, с. 53, теорема 5], из которой также следует (5).

Таким образом, средние Зигмунда (3) натурального порядка $r = 1, 2, 3, ...$ тригонометрических рядов Фурье (1) являются strong approximation process on $\mathbf{C}(T)$.

В случае чётного натурального порядка $r = 2, 4, 6, ...$ скорость стремления к нулю в (5) допускает уточнение. Для функции $f \in \mathbf{C}(T)$ её модуль непрерывности r-го порядка

$$\forall \delta \in (0, \pi] \;\; \omega_r(f, \delta) := \max_{-\delta \le h \le \delta} \max_{-\pi \le x \le \pi} \left| \sum_{n=0}^{r} (-1)^{r-n} \frac{r!}{n!(r-n)!} f(x + nh) \right| .$$

Если порядок $r = 2k$, где $k = 1, 2, 3, ...$, то отклонение функции $f \in \mathbf{C}(T)$ от средних Зигмунда (3) её тригонометрического ряда Фурье [9, с. 261, теорема 1; 14, с. 29, (3); 15, с. 4, теорема 2, а)]

$$\forall N \in Z_+ \;\; \left\| f(x) - Z_N^{2k} f(x) \right\|_{\mathbf{C}(T)} \le A_2 \cdot \omega_{2k}\left(f, \frac{1}{N+1} \right), \tag{8}$$

где постоянная A_2 не зависит от номера N и функции $f(x)$.

Определение 2. *Сильный процесс приближения средними Зигмунда (3) натурального порядка* $r = 1, 2, 3, ...$ *тригонометрических рядов Фурье (1) в банаховом пространстве* $\mathbf{C}(T)$ *назовём обладающим свойством насыщения, если существует положительная вещественная последовательность* $(\rho(N))_{N=0}^{+\infty}$, *стремящаяся к нулю при* $N \to +\infty$, *для которой любая функция* $f \in \mathbf{C}(T)$ *со свойством*

$$\left\| f(x) - Z_N^r f(x) \right\|_{\mathbf{C}(T)} = o[\rho(N)], \;\; N \to +\infty ,$$

необходимо есть тождественная постоянная на вещественной прямой R *и множество*

$$\mathbf{F}\left[\mathbf{C}(T), Z_N^r f(x) \right] := \left\{ f \in \mathbf{C}(T) : \left\| f(x) - Z_N^r f(x) \right\|_{\mathbf{C}(T)} = O[\rho(N)], \; N \to +\infty \right\}$$

содержит в себе по крайней мере одну непостоянную функцию. В этом случае про аппроксимационный процесс (3) говорим, что он имеет наилучший порядок приближения $O[\rho(N)]$ *или что он насыщаем в банаховом* *пространстве* $\mathbf{C}(T)$ *с порядком* $O[\rho(N)]$, *а множество функций* $\mathrm{F}\Big[\,\mathrm{C}(T), Z_N^r f(x)\Big]$ *назовём его классом насыщения или классом Фавара.*

Термин «насыщение» заимствован из физики. Если в стакан с водой постепенно добавлять поваренную соль, то наступит момент (насыщение раствора), когда соль перестанет растворяться в воде и будет находиться в осадке, сколько бы мы ни перемешивали содержимое стакана.

Постановка задачи об отыскании классов насыщения процессов приближения восходит к французскому арийскому математику Ж. Фавару [16, с. 215].

Бум публикаций в открытой печати по проблеме насыщения после второй мировой войны был вызван развитием вычислительной техники и той угрозой, которую представляют насыщаемые процессы приближения в вычислительной практике.

Наилучший порядок приближения средними Зигмунда (3) натурального порядка $r = 1, 2, 3, \ldots$ тригонометрических рядов Фурье (1) в банаховом пространстве $\mathbf{C}(T)$ указывает функция

$$\rho(N) := \begin{cases} 1, \text{ когда } N = 0, \\ \dfrac{1}{N^r}, \text{ когда } N = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}.$$

Структурная характеристика класса насыщения $\mathrm{F}\Big[\,\mathrm{C}(T), Z_N^r f(x)\Big]$ зависит от чётности или нечётности натурального порядка $r = 1, 2, 3, \ldots$ средних Зигмунда (3).

В случае чётного натурального порядка $r = 2k$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$, класс насыщения

$$\mathrm{F}\Big[\,\mathrm{C}(T), Z_N^{2k} f(x)\Big] = \Big\{ f \in \mathrm{AC}(T) : f', f'', \ldots, f^{(2k-1)} \in \mathrm{AC}(T) \text{ и } f^{(2k)} \in \mathrm{L}^\infty(T) \Big\},$$

а в случае нечётного натурального порядка $r = 2k+1$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, класс насыщения

$$\mathrm{F}\Big[\,\mathrm{C}(T), Z_N^{2k+1} f(x)\Big] = \left\{ f \in \mathrm{C}(T) : f^{\sim}, \left(f^{\sim}\right)', \ldots, \left(f^{\sim}\right)^{(2k)} \in \mathrm{AC}(T) \text{ и } \left(f^{\sim}\right)^{(2k+1)} \in \mathrm{L}^\infty(T) \right\}.$$

Таким образом, класс насыщения $\mathrm{F}\Big[\mathrm{C}(T), Z_N^r f(x)\Big]$ описывается в случае чётного натурального порядка $r = 2k$ через структурные свойства функции $f(x)$, а в случае нечётного натурального порядка $r = 2k+1$ через структурные свойства уже функции $f^{\sim}(x)$, тригонометрически сопряжённой к функции $f(x)$.

Для средних Фейера класс насыщения $\mathbf{F}\big[\mathbf{C}(T), \sigma_N f(x)\big]$ описали через структурные свойства тригонометрически сопряжённой функции $f^{\sim}(x)$ независимо друг от друга Д. Алексич [17, с. 50, VII], С. М. Никольский [18, с. 38, теорема 1', (4.4')], А. Зигмунд [19, с. 274, (1.5)], М. Заманский [20, с. 35, следствие].

Общий случай средних Зигмунда (3) натурального порядка $r = 1, 2, 3, \ldots$ рассмотрел М. Заманский [21, с. 170, теорема 2].

3. Ряды Тейлора. Пусть $\mathbf{A}(|z| \le 1)$ есть множество всех непрерывных на замкнутом единичном круге $|z| \le 1$ и аналитических в единичном круге $|z| < 1$ функций с нормой $\|f(z)\|_{\mathbf{A}(|z|\le 1)} := \max_{|z|\le 1} |f(z)| = \max_{|z|=1} |f(z)|$. Последнее равенство записано на основании принципа максимума модуля.

Если функция $f \in \mathbf{A}(|z| \le 1)$, то согласно интегральной теореме Коши при любом натуральном $n = 1, 2, 3, \ldots$ интеграл $\oint_{|z|=1} f(z)\, z^{n-1}\, dz = 0$. Тогда

$$0 = \frac{-i}{2\pi} \oint_{|z|=1} f(z)\, z^{n-1}\, dz = \frac{-i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{it}\right) e^{i(n-1)t}\, e^{it}\, i\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{it}\right) e^{-i(-n)t}\, dt,$$

т. е. комплексные коэффициенты Фурье сложной функции $f\left(e^{ix}\right)$ с отрицательными номерами равны нулю.

Раз сложная функция $f\left(e^{ix}\right)$ имеет комплексный тригонометрический ряд Фурье степенного типа: $f\left(e^{ix}\right) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{it}\right) e^{-int}\, dt \cdot e^{inx}$, то и сопряжённая к ней функция $\left[f\left(e^{ix}\right)\right]^{\sim}$ имеет комплексный тригонометрический ряд Фурье тоже степенного типа: $\left[f\left(e^{ix}\right)\right]^{\sim} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \left[-i \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{it}\right) e^{-int}\, dt\right] \cdot e^{inx}$.

Таким образом, в рассматриваемом случае тригонометрически сопряжённая функция $\left[f\left(e^{ix}\right)\right]^{\sim}$ выражается через исходную функцию $f\left(e^{ix}\right)$ следующим образом: $\left[f\left(e^{ix}\right)\right]^{\sim} = -i\left[f\left(e^{ix}\right) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{it}\right) dt\right]$.

Методом математической индукции при надлежащих предположениях доказывается, что N-ая $(N = 1, 2, 3, ...)$ производная сложной функции $f\left(e^{ix}\right)$ выражается формулой

$$\left[f\left(e^{ix}\right)\right]^{(N)} = i^N \sum\nolimits_{n=1}^{N} h_{N,n}\, e^{inx} \cdot f^{(n)}\left(e^{ix}\right), \tag{9}$$

в которой натуральные коэффициенты $h_{N,n}$ при $N = 2, 3, 4, ...$ и $n = 1, 2, ..., N$ вычисляются по рекуррентному соотношению

$$h_{N,n} = h_{N-1,\, n-1} + n\, h_{N-1,\, n}, \tag{10}$$

где по определению коэффициент $h_{1,1} := 1$ и для $N = 1, 2, 3, ...$ коэффициенты $h_{N,0} := 0 =: h_{N,N+1}$. Из рекуррентной формулы (10) вытекает, что для $N = 1, 2, 3, ...$ коэффициенты $h_{N,1} = h_{N,N} = 1$ и для $N = 2, 3, 4, ...$ коэффициент $h_{N,N-1} = 1 + 2 + ... + (N-1) = \frac{(N-1)\,N}{2}$. Формула (9) является следствием более общей формулы (43) пункта 7.

Если функция $f \in \mathbf{A}\left(|z| \le 1\right)$, то её коэффициенты Тейлора равны комплексным коэффициентам Фурье сложной функции $f\left(e^{ix}\right)$ с теми же номерами:

$$\forall n \in Z_+ \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|t|=1} \frac{f(t)}{(t-0)^{n+1}}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{ix}\right) e^{-inx} dx .$$

Помним, что переменная интегрирования немая.

Из предыдущего имеем следующий результат.

Теорема 1. *Пусть r есть фиксированное натуральное число $1, 2, 3, ...$ Тогда в банаховом пространстве $\mathbf{A}\left(|z| \le 1\right)$ приближение функций средними Зигмунда порядка r*

$$\forall N \in Z_+ \quad Z_N^r f(z) := \sum_{n=0}^{N} \left[1 - \left(\frac{n}{N+1}\right)^r\right] \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=1} \frac{f(t)}{t^{n+1}}\, dt \cdot z^n \tag{11}$$

их рядов Тейлора насыщаемо с порядком $O\left(\frac{1}{N^r}\right)$ при $N \to +\infty$ и с классом насыщения, состоящим из всех тех функций $f \in \mathbf{A}\left(|z| \le 1\right)$, производные r-го порядка $f^{(r)}(z)$ которых ограничены в единичном круге $|z| < 1$:

$$\mathrm{F}\left[\,\mathrm{A}\left(|z| \le 1\right), Z_N^r f(z)\right] = \left\{f \in \mathrm{A}\left(|z| \le 1\right) :\, f^{(r)} \in \mathrm{H}^{\infty}\left(|z| < 1\right)\right\}.$$

Выше очевидно, что в случае $f^{(r)} \in \mathbf{H}^{\infty}\left(|z| < 1\right)$ телесная функция $f(z)$ и её телесные производные $f'(z), f''(z), ..., f^{(r-1)}(z)$ непрерывно продолжимы на единичную окружность $|z| = 1$ и сложная функция $f\left(e^{ix}\right)$ и её производные $\left[f\left(e^{ix}\right)\right]', \left[f\left(e^{ix}\right)\right]'', ..., \left[f\left(e^{ix}\right)\right]^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны на вещественной прямой R.

Для средних Фейера $\sigma_N f(z) := Z_N^1 f(z)$ рядов Тейлора функций $f \in \mathbf{A}(|z| \le 1)$ теорему 1 получили Д. Алексич [17, с. 50, VIII; 22, с. 24] и А. Зигмунд [7, с. 203, теорема (13.35); 19, с. 274, (1.3)].

Когда-то Dieter Gaier обратил внимание автора на то, что отклонение функции $f \in \mathbf{A}(|z| \le 1)$ от средних Зигмунда (11) натурального порядка $r = 1, 2, 3, \ldots$ её ряда Тейлора [15, с. 4; 23, с. 65]

$$\forall N \in Z_+ \quad \left\| f(z) - Z_N^r f(z) \right\|_{\mathbf{A}(|z| \le 1)} \le A_3 \cdot \omega_r \left[f\left(e^{ix}\right), \frac{1}{N+1} \right], \tag{12}$$

где постоянная A_3 не зависит от номера N и функции $f(z)$.

Таким образом, для тригонометрических рядов Фурье оценка (8) имеет место лишь для чётных натуральных порядков $r = 2, 4, 6, \ldots$, а для тригонометрических рядов Фурье степенного типа (рядов Тейлора) оценка (12) имеет место для любых натуральных порядков $r = 1, 2, 3, \ldots$.

4. Ряды Фурье по многочленам Чебышёва первого рода. В данном пункте нам удобно пользоваться тригонометрическими рядами Фурье в вещественной форме.

Если функция $f \in \mathbf{L}^1(T)$, то числовая последовательность $\left(a_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt \right)_{n=0}^{+\infty}$ называется последовательностью косинус-коэффициентов Фурье функции $f(x)$, числовая последовательность $\left(b_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\, dt \right)_{n=1}^{+\infty}$ называется последовательностью синус-коэффициентов Фурье функции $f(x)$, а функциональный ряд

$$\frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n(f) \cdot \cos nx + b_n(f) \cdot \sin nx \right] \tag{13}$$

называется тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)$.

Тригонометрический ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[-b_n(f) \cdot \cos nx + a_n(f) \cdot \sin nx \right]$ называется сопряжённым с рядом (13). Сопряжённый с тригонометрическим рядом Фурье $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n+2)} \cdot \cos nx$ тригонометрический ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n+2)} \cdot \sin nx$ не является рядом Фурье [4, с. 154, упр. 7.7; 5, с. 108, п. 12.8.3].

Когда мы говорим о частичных суммах тригонометрических рядов Фурье, то в случае комплексной формы их записи имеем в виду симметричное суммирование: $\forall N \in Z_+ \quad s_N f(x) := \sum_{n=-N}^{N} f^\wedge(n) \cdot e^{inx}$, а в случае вещественной формы — суммирование по блокам:

$$\forall N \in Z_+ \quad s_N f(x) := \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{n=1}^{N} \left[a_n(f) \cdot \cos nx + b_n(f) \cdot \sin nx \right].$$

Аналогично, когда мы говорим о средних Зигмунда и, более общо, о матричных средних тригонометрических рядов Фурье.

Пусть $\mathbf{C}[-1,1]$ есть множество всех непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций с нормой $\| f(z) \|_{\mathbf{C}[-1,1]} := \max_{-1 \le z \le 1} |f(z)|$.

Если функция $f \in \mathbf{C}[-1,1]$, то сложная функция $f(\cos x)$ на вещественной прямой R непрерывная, периодическая с периодом 2π и чётная: $f[\cos(-x)] = f(\cos x)$. Тригонометрический ряд Фурье чётной функции $f(\cos x)$ имеет вид

$$f(\cos x) \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos t)\, dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos t) \cos nt\, dt \cdot \cos nx. \tag{14}$$

Тогда сопряжённой с (14) ряд имеет вид

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos t) \cos nt \, dt \cdot \sin nx \,. \tag{15}$$

Согласно определению $\forall z \in [-1,1]$ многочлены П. Л. Чебышёва первого рода для $n = 0,1,2,...$ суть $T_n(z) := \cos(n \arccos z)$, а многочлены П. Л. Чебышёва второго рода для $n = 1,2,3,...$ суть $U_{n-1}(z) := \frac{\sin(n \arccos z)}{\sqrt{1-z^2}}$.

Так как при замене переменной интегрирования $t = \arccos \zeta$ дифференциал $dt = \frac{-d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$, то из (14) имеем ряд Фурье по многочленам Чебышёва первого рода

$$f(z) \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\zeta + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} T_n(\zeta) d\zeta \cdot T_n(z),$$

а из (15) получаем ряд по многочленам Чебышёва второго рода

$$\sqrt{1-z^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} T_n(\zeta) d\zeta \cdot U_{n-1}(z) \,. \tag{16}$$

Как справедливо отметили П. Л. Бутцер и Р. Л. Штэнс [24, с. 56, (4.9)], последний ряд (16) суммируем методом Абеля почти всюду на отрезке $[-1,1]$ к функции, которую нам естественно назвать чебышёвски сопряжённой к функции $f(z)$ и обозначить $\left[f(\cos x) \right]^{\sim} \Big|_{x=\arccos z}$:

$$\left[f(\cos x) \right]^{\sim} \Big|_{x=\arccos z} \underset{-1 \le z \le 1}{\overset{\text{п. в.}}{=}} \sqrt{1-z^2} \lim_{r \to 1-0} \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} T_n(\zeta) d\zeta \cdot U_{n-1}(z) \,.$$

Символ «$\underset{-1 \le z \le 1}{\overset{\text{п. в.}}{=}}$» означает равенство почти всюду на отрезке $[-1,1]$.

В силу вышеизложенного из результата М. Заманского пункта 2 в качестве частного случая имеем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть r есть фиксированное натуральное число $1,2,3,...$ Тогда в банаховом пространстве $\mathbf{C}[-1,1]$ приближение функций средними Зигмунда порядка r*

$$\forall N \in Z_+ \quad Z_N^r f(z) := \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\zeta + \sum_{n=1}^{N} \left[1 - \left(\frac{n}{N+1} \right)^r \right] \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} T_n(\zeta) d\zeta \cdot T_n(z)$$

их рядов Фурье по многочленам Чебышёва первого рода насыщаемо с порядком $O\left(\frac{1}{N^r}\right)$ при $N \to +\infty$ и с классом насыщения, состоящим из всех тех функций $f \in \mathbf{C}[-1,1]$, для которых в случае чётного натурального порядка $r = 2k$, где $k = 1,2,3,...$, функция $f(z)$ на отрезке $[-1,1]$ абсолютно непрерывно дифференцируема $2k-1$ раз и имеет на нём существенно-ограниченную производную $2k$-го порядка $f^{(2k)}(z)$:

$$\mathrm{F}\left[\mathrm{C}[-1,1], Z_N^{2k} f(z) \right] = \left\{ f \in \mathrm{AC}[-1,1] : f', f'', ..., f^{(2k-1)} \in \mathrm{AC}[-1,1] \text{ и } f^{(2k)} \in \mathrm{L}^{\infty}[-1,1] \right\},$$

а в случае нечётного натурального порядка $r = 2k+1$, где $k = 0,1,2,...$, функция $\left[f(\cos x) \right]^{\sim} \Big|_{x=\arccos z}$, чебышёвски сопряжённая к функции $f(z)$, на отрезке $[-1,1]$ абсолютно непрерывно дифференцируема $2k$ раз и имеет на нём существенно-ограниченную производную $(2k+1)$-го порядка $\left\{ \left[f(\cos x) \right]^{\sim} \Big|_{x=\arccos z} \right\}^{(2k+1)}$:

$$\mathbf{F}\left[\mathbf{C}[-1,1],\, Z_N^{2k+1} f(z)\right] = \Big\{ f \in \mathbf{C}[-1,1] : \left[f(\cos x)\right]^{\sim}\Big|_{x=\arccos z},$$

$$\left\{\left[f(\cos x)\right]^{\sim}\Big|_{x=\arccos z}\right\}', \ldots, \left\{\left[f(\cos x)\right]^{\sim}\Big|_{x=\arccos z}\right\}^{(2k)} \in \mathbf{AC}[-1,1] \text{ и } \left\{\left[f(\cos x)\right]^{\sim}\Big|_{x=\arccos z}\right\}^{(2k+1)} \in \mathbf{L}^{\infty}[-1,1]\Big\}.$$

Из (16) уже видна особая роль точек $z=1$ и $z=-1$ при приближении на отрезке $[-1,1]$ функций многочленами [1, с. 334; 25, с. 259, (3.1); 26, с. 158]. В случае нечётного натурального порядка $r=2k+1$, где $k=0,1,2,\ldots$, к необходимости введения понятия сопряжённого ряда и сопряжённой функции приходил в своих исследованиях Р. М. Тригуб [27, с. 205, замечание 1].

Ряды Тейлора предыдущего пункта 3 являются рядами по многочленам Фабера для замкнутого единичного круга $|z| \le 1$. Ряды Фурье по многочленам Чебышёва первого рода настоящего пункта 4 являются рядами по многочленам Фабера для отрезка $[-1,1]$; технические подробности в [22, с. 25—26; 28, с. 14—15; 29, с. 117]. Это объясняет, почему мы аргумент функции $f \in \mathbf{C}[-1,1]$ обозначали через z.

Для случая порядка $r=1$, т. е. для случая средних Фейера $\sigma_N f(z) := Z_N^1 f(z)$, теорема 2 приведена в работе автора [29, с. 117, теорема 6].

5. Сильный процесс приближения средними Зигмунда рядов по многочленам Фабера для замкнутых жордановых областей с гладкой границей С. Я. Альпера. Пусть Γ_C есть спрямляемая жорданова кривая. И пусть $\mathbf{A}(\Gamma_C \cup \mathrm{Int}\Gamma_C)$ есть множество всех непрерывных на замкнутой жордановой области $\Gamma_C \cup \mathrm{Int}\Gamma_C$ и аналитических в жордановой области $\mathrm{Int}\Gamma_C$ функций с нормой $\|f(z)\|_{\mathbf{A}(\Gamma_C \cup \mathrm{Int}\Gamma_C)} := \max_{z\in\Gamma_C \cup \mathrm{Int}\Gamma_C} |f(z)| = \max_{z\in\Gamma_C} |f(z)|$. Ясно, что последнее равенство записано на основании принципа максимума модуля.

Хотя функция $z \mapsto \dfrac{2}{z(z-2)}$ и непрерывна на единичной окружности $|z|=1$, но она не является аналитически продолжимой в единичный круг $|z|<1$. Её интеграл типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1} \frac{\frac{2}{\zeta(\zeta-2)}}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} \dfrac{1}{z-2}, & \text{когда } |z|<1, \\ \dfrac{1}{z}, & \text{когда } |z|>1, \end{cases}$$

и плотность интеграла типа Коши равна разности предельных значений по всем некасательным путям, лежащим соответственно внутри и вне единичной окружности: $\dfrac{2}{\zeta(\zeta-2)} = \dfrac{1}{\zeta-2} - \dfrac{1}{\zeta}$.

Для того чтобы непрерывная на спрямляемой жордановой кривой Γ_C функция $f(\zeta)$ была аналитически продолжима с Γ_C в жорданову область $\mathrm{Int}\Gamma_C$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $\forall n \in Z_+$ $\oint_{\Gamma_C} \zeta^n f(\zeta)\, d\zeta = 0$.

Следуя монографии П. Л. Бутцера и Р. Й. Несселя [2, с. 434, определение 12.0.1], введём следующее понятие.

Определение 3. *Пусть Γ_C есть спрямляемая жорданова кривая. Средние Зигмунда*

$$\forall N \in Z_+ \;\; Z_N^r f(z) := \sum_{n=0}^{N} \left[1 - \left(\frac{n}{N+1}\right)^r\right] \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=1} \frac{f[\Psi(t)]}{t^{n+1}}\, dt \cdot F_n(z) \tag{17}$$

натурального порядка $r = 1,2,3,\ldots$ рядов по многочленам Фабера функций $f \in \mathbf{A}(\Gamma_C \cup \mathrm{Int}\Gamma_C)$ назовём сильным процессом приближения в банаховом пространстве $\mathbf{A}(\Gamma_C \cup \mathrm{Int}\Gamma_C)$, если для любой функции $f \in \mathbf{A}(\Gamma_C \cup \mathrm{Int}\Gamma_C)$, во-первых, выполняются неравенства

$$\forall N \in Z_+ \;\; \max_{z\in\Gamma_C} \left|Z_N^r f(z)\right| \le A_4 \cdot \max_{z\in\Gamma_C} |f(z)|, \tag{18}$$

где постоянная A_4 не зависит от номера N и функции $f(z)$, и, во-вторых, имеет место равномерная сходимость этих средних к $f(z)$ на замкнутой жордановой области $\Gamma_C \cup \mathrm{Int}\Gamma_C$:

$$\lim_{N\to+\infty} \max_{z\in\Gamma_C} \left| f(z) - Z_N^r f(z) \right| = 0\,. \tag{19}$$

Спрямляемая жорданова кривая Γ_C называется гладкой, если 1) её натуральная параметризация $z = z(s)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $\left[0, |\Gamma_C|\right]$, где $|\Gamma_C|$ — длина кривой Γ_C, 2) всюду на этом отрезке производная $z'(s)$ отлична от нуля и 3) $z'(0+0) = z'\left(|\Gamma_C| - 0\right)$. Как обычно, на концах отрезка $\left[0, |\Gamma_C|\right]$ производная и непрерывность понимаются в одностороннем смысле: в точке 0 — справа, а в точке $|\Gamma_C|$ — слева.

Требования 1) и 2) выражают непрерывность вращения касательной к кривой при движении точки касания по открытой дуге $z\left[\left(0, |\Gamma_C|\right)\right]$, а требования 1), 2) и 3) — непрерывность изменения направления касательной к кривой и при переходе точки касания через точку, соответствующую значениям $s = 0$ и $s = |\Gamma_C|$ натурального параметра.

Обозначим через $\forall\delta \in \left(0, |\Gamma_C|\right]$ $\omega[z'(s), \delta] := \sup\left\{ |z'(s_1) - z'(s_2)| : \forall s_1 \in \left[0, |\Gamma_C|\right] \forall s_2 \in \left[0, |\Gamma_C|\right] |s_1 - s_2| \le \delta \right\}$ модуль непрерывности производной функции $z'(s)$.

Теорема 3. *Пусть Γ_A есть гладкая жорданова кривая, которая удовлетворяет условию С. Я. Альпера*

$$\int_0^{\min\{1, |\Gamma_A|\}} \frac{\omega[z'(s), \delta]}{\delta} \ln\frac{1}{\delta}\, d\delta < +\infty\,. \tag{20}$$

Тогда средние Зигмунда (17) натурального порядка $r = 1, 2, 3, \ldots$ рядов по многочленам Фабера являются сильным процессом приближения в банаховом пространстве $\mathbf{A}\left(\Gamma_A \cup \mathrm{Int}\Gamma_A\right)$.

Справедливость теоремы 3 вытекает из доказываемых ниже лемм 1 и 2.

Лемма 1. *Пусть Γ_A есть гладкая жорданова кривая, которая удовлетворяет условию С. Я. Альпера (20). И пусть функция $f \in \mathbf{A}\left(\Gamma_A \cup \mathrm{Int}\Gamma_A\right)$. Тогда для средних Зигмунда (17) натурального порядка $r = 1, 2, 3, \ldots$ ряда по многочленам Фабера этой функции $f(z)$ выполняются неравенства*

$$\forall N \in Z_+ \ \max_{z\in\Gamma_A} \left| Z_N^r f(z) \right| \le A_5 \cdot \max_{z\in\Gamma_A} |f(z)|\,, \tag{21}$$

где постоянная A_5 не зависит от номера N и функции $f(z)$.

Доказательство. Шаг 1. Интеграл типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\tau|=1} \frac{f[\Psi(\tau)]}{\tau - w}\, d\tau \tag{22}$$

порождает две функции: аналитическую в ограниченной внутренности $|w| < 1$ единичной окружности $|w| = 1$ функцию $f_{\mathrm{Int}}(w)$ и аналитическую в неограниченной внешности $|w| > 1$ единичной окружности $|w| = 1$ функцию $f_{\mathrm{Ext}}(w)$; последняя в бесконечно удалённой точке ∞ обращается в нуль: $f_{\mathrm{Ext}}(\infty) = 0$ [30, с. 55, теорема]. Во всех точках единичной окружности $|w| = 1$ телесные функции $f_{\mathrm{Int}}(w)$ и $f_{\mathrm{Ext}}(w)$ имеют предельные значения $f_{\mathrm{Int}}^{+}(w)$ и $f_{\mathrm{Ext}}^{-}(w)$ по всем некасательным путям, лежащим по одну сторону от единичной окружности $|w| = 1$. По формуле Ю. В. Сохоцкого во всех точках единичной окружности $|w| = 1$ плотность $f[\Psi(\tau)]$ интеграла типа Коши (22) равна разности

$$f[\Psi(w)] = f_{\mathrm{Int}}^{+}(w) - f_{\mathrm{Ext}}^{-}(w)\,. \tag{23}$$

Как показал С. Я. Альпер [3, с. 190, (6); 31, с. 431, (23)&(21)], контурная функция

$$f_{\mathrm{Ext}}^{-}(w) = -\frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{P.V.} \oint_{|\tau|=1} \left[\frac{\Psi'(\tau)}{\Psi(\tau) - \Psi(w)} - \frac{1}{\tau - w} \right] \cdot f[\Psi(\tau)]\, d\tau\,, \tag{24}$$

где сокращение “ P.V. ” от английских слов “principal value” означает, что несобственный интеграл справа понимается в смысле главного значения. Из равенств (23) и (24) следует, что во всех точках единичной окружности $|w|=1$ контурная функция

$$f^{+}_{\mathrm{Int}}(w)=f\big[\Psi(w)\big]-\frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{P.V.}\oint\limits_{|\tau|=1}\left[\frac{\Psi'(\tau)}{\Psi(\tau)-\Psi(w)}-\frac{1}{\tau-w}\right]\cdot f\big[\Psi(\tau)\big]d\tau\,. \tag{25}$$

Для гладкой жордановой кривой Γ_{A}, которая удовлетворяет условию С. Я. Альпера (20), конечна верхняя грань [3, с. 181, (24); 31, с. 428, (14)]

$$\frac{1}{2\pi}\sup_{|w|=1}\oint\limits_{|\tau|=1}\left|\frac{\Psi'(\tau)}{\Psi(\tau)-\Psi(w)}-\frac{1}{\tau-w}\right||d\tau|=:A_6<+\infty\,, \tag{26}$$

т. е. несобственные интегралы в предшествовавших интегральных представлениях (24), (25) и в последующих (28) — (30), (33) существуют на самом деле в обычном смысле.

Из интегрального представления (25) в силу (26) имеем оценку

$$\max_{|w|=1}\left|f^{+}_{\mathrm{Int}}(w)\right|\le\big(1+A_6\big)\cdot\max_{z\in\Gamma_{\mathrm{A}}}\left|f(z)\right|, \tag{27}$$

которая означает ограниченность нормы обратного $\left(F_O\right)^{-1}$ оператора Фабера для области $\mathrm{Int}\Gamma_{\mathrm{A}}$: $\left\|\left(F_O\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{H}^{\infty}(\mathrm{Int}\Gamma_{\mathrm{A}})\to\mathbf{H}^{\infty}(|w|<1)}\le 1+A_6<+\infty$ [3, с. 160, (7), с. 166–167, (17)].

Шаг 2. С помощью интегрального представления С. Я. Альпера для многочленов Фабера на контурной кривой $\Gamma_{\mathrm{A}}=\left\{\Psi(w):|w|=1\right\}$ [3, с. 191, (10)]

$$\forall n\in Z_{+}\quad F_n\big[\Psi(w)\big]=w^n+\frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{P.V.}\oint\limits_{|\tau|=1}\left[\frac{\Psi'(\tau)}{\Psi(\tau)-\Psi(w)}-\frac{1}{\tau-w}\right]\cdot\tau^n\,d\tau\,, \tag{28}$$

получаем следующее интегральное представление для средних Зигмунда (17) натурального порядка $r=1,2,3,\ldots$ на контурной кривой Γ_{A}:

$$\forall N\in Z_{+}\quad Z^{r}_{N}f\big[\Psi(w)\big]=\sum_{n=0}^{N}\left[1-\left(\frac{n}{N+1}\right)^{r}\right]\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=1}\frac{f\big[\Psi(t)\big]}{t^{n+1}}dt\cdot w^n+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{P.V.}\oint\limits_{|\tau|=1}\left[\frac{\Psi'(\tau)}{\Psi(\tau)-\Psi(w)}-\frac{1}{\tau-w}\right]\sum_{n=0}^{N}\left[1-\left(\frac{n}{N+1}\right)^{r}\right]\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=1}\frac{f\big[\Psi(t)\big]}{t^{n+1}}dt\cdot\tau^n\,d\tau\,. \tag{29}$$

Так как в случае гладкой жордановой кривой Γ_{A}, которая удовлетворяет условию С. Я. Альпера (20), все коэффициенты Фабера функции $f(z)$ равны соответствующим коэффициентам Тейлора функции $f_{\mathrm{Int}}(w)$ [3, с. 191, (12)]

$$\forall n\in Z_{+}\quad\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=1}\frac{f\big[\Psi(t)\big]}{t^{n+1}}dt=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=\rho<1}\frac{f_{\mathrm{Int}}(t)}{t^{n+1}}dt=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=1}\frac{f^{+}_{\mathrm{Int}}(t)}{t^{n+1}}dt\,,$$

то предыдущие равенства (29) на единичной окружности $|w|=1$ принимают вид

$$\forall N\in Z_{+}\quad Z^{r}_{N}f\big[\Psi(w)\big]=Z^{r}_{N}f^{+}_{\mathrm{Int}}(w)+\frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{P.V.}\oint\limits_{|\tau|=1}\left[\frac{\Psi'(\tau)}{\Psi(\tau)-\Psi(w)}-\frac{1}{\tau-w}\right]\cdot Z^{r}_{N}f^{+}_{\mathrm{Int}}(\tau)\,d\tau\,. \tag{30}$$

Шаг 3. Сложная функция $f_{\text{Int}}^{+}\left(e^{ix}\right)$ имеет тригонометрический ряд Фурье степенного типа [31, с. 434, лемма 4]:

$$\forall n \in Z \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{\text{Int}}^{+}\left(e^{i\theta}\right)e^{-in\theta}\,d\theta = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{|t|=1}\frac{f_{\text{Int}}^{+}(t)}{t^{n+1}}\,dt,\ n \in Z_{+}, \\ 0,\ n \in Z \setminus Z_{+}. \end{cases}$$

На основании известной [9, с. 236; 10, с. 19, лемма 3] оценки для средних Зигмунда натурального порядка $r = 1, 2, 3, \ldots$ тригонометрического ряда Фурье сложной функции $f_{\text{Int}}^{+}\left(e^{ix}\right)$ имеем

$$\max_{|w|=1}\left|Z_N^r f_{\text{Int}}^{+}(w)\right| = \max_{-\pi\le x\le\pi}\left|Z_N^r f_{\text{Int}}^{+}\left(e^{ix}\right)\right| \le (2r-1)\cdot\max_{-\pi\le x\le\pi}\left|f_{\text{Int}}^{+}\left(e^{ix}\right)\right| = (2r-1)\cdot\max_{|w|=1}\left|f_{\text{Int}}^{+}(w)\right|. \tag{31}$$

Из интегральных представлений (30) в силу последовательно неравенств (26), (31) и (27) получаем оценку (21) с постоянной $A_5 := (1 + A_6)^2(2r-1)$, которая не зависит от номера N и функции $f(z)$.

Лемма 1 доказана.

Для случая порядка $r = 1$, т. е. для случая средних Фейера $\sigma_N f(z) := Z_N^1 f(z)$ ряда по многочленам Фабера функции $f \in \mathbf{A}(\Gamma_{\text{A}} \cup \text{Int}\Gamma_{\text{A}})$, неравенство (21) доказал С. Я. Альпер в своей докторской диссертации.

Лемма 2. *Пусть Γ_{A} есть гладкая жорданова кривая, которая удовлетворяет условию С. Я. Альпера (20). И пусть функция $f \in \mathbf{A}(\Gamma_{\text{A}} \cup \text{Int}\Gamma_{\text{A}})$. Тогда средние Зигмунда (17) натурального порядка $r = 1, 2, 3, \ldots$ ряда по многочленам Фабера этой функции $f(z)$ равномерно сходятся к ней на замкнутой жордановой области $\Gamma_{\text{A}} \cup \text{Int}\Gamma_{\text{A}}$:*

$$\forall N \in Z_{+} \ \max_{z\in\Gamma_{\text{A}}}\left|f(z) - Z_N^r f(z)\right| \le A_7\cdot\omega_r\left[f_{\text{Int}}^{+}\left(e^{ix}\right), \frac{1}{N+1}\right], \tag{32}$$

где постоянная A_7 не зависит от номера N и функции $f(z)$.

Доказательство. На контурной кривой $\Gamma_{\text{A}} = \{\Psi(w) : |w| = 1\}$ [3, с. 193, (18)]

$$\forall N \in Z_{+} \ f[\Psi(w)] - Z_N^r f[\Psi(w)] = \left[f_{\text{Int}}^{+}(w) - Z_N^r f_{\text{Int}}^{+}(w)\right] +$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\text{P.V.}\oint_{|\tau|=1}\left[\frac{\Psi'(\tau)}{\Psi(\tau)-\Psi(w)} - \frac{1}{\tau - w}\right]\cdot\left[f_{\text{Int}}^{+}(\tau) - Z_N^r f_{\text{Int}}^{+}(\tau)\right]d\tau. \tag{33}$$

Из интегральных представлений (33) в силу последовательно неравенств (26) и (12) получаем оценки (32) с постоянной $A_7 := (1 + A_6)A_3$, которая не зависит от номера N и функции $f(z)$.

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 3 закончено.

Равномерную сходимость средних Фейера $\sigma_N f(z) := Z_N^1 f(z)$ ряда по многочленам Фабера функции $f \in \mathbf{A}(\Gamma_{\text{A}} \cup \text{Int}\Gamma_{\text{A}})$ к ней на замкнутой жордановой области $\Gamma_{\text{A}} \cup \text{Int}\Gamma_{\text{A}}$ установил С. Я. Альпер [31, с. 442, следствие].

6. Насыщаемый сильный процесс приближения средними Зигмунда рядов по многочленам Фабера для замкнутых жордановых областей со спрямляемой границей. Следуя монографии П. Л. Бутцера и Р. Й. Несселя [2, с. 434, определение 12.0.2], введём следующие понятия.

Определение 4. *Пусть Γ_{C} есть спрямляемая жорданова кривая. Сильный процесс приближения средними Зигмунда (17) натурального порядка $r = 1, 2, 3, \ldots$ рядов по многочленам Фабера в банаховом пространстве $\mathbf{A}(\Gamma_{\text{C}} \cup \text{Int}\Gamma_{\text{C}})$ назовём обладающим свойством насыщения, если существует бесконечно малая положительная вещественная последовательность $(\rho(N))_{N=0}^{+\infty}$, для которой любая функция $f \in \mathbf{A}(\Gamma_{\text{C}} \cup \text{Int}\Gamma_{\text{C}})$ со свойством*

$$\max_{z\in\Gamma_{\text{C}}}\left|f(z) - Z_N^r f(z)\right| = o[\rho(N)],\ N \to +\infty,$$

необходимо есть тождественная постоянная на замкнутой жордановой области $\Gamma_{\text{C}} \cup \text{Int}\Gamma_{\text{C}}$ и множество

$$\mathrm{F}\left[\mathrm{A}\left(\Gamma_{\mathrm{C}} \bigcup \mathrm{Int}\Gamma_{\mathrm{C}}\right), Z_N^r f(z)\right] := \left\{ f \in \mathrm{A}\left(\Gamma_{\mathrm{C}} \bigcup \mathrm{Int}\Gamma_{\mathrm{C}}\right) : \max_{z \in \Gamma_{\mathrm{C}}} \left| f(z) - Z_N^r f(z) \right| = O\left[\rho(N)\right],\ N \to +\infty \right\}$$

содержит в себе по крайней мере одну непостоянную функцию. В этом случае про аппроксимационный процесс (17) говорим, что в банаховом пространстве $\mathbf{A}\left(\Gamma_{\mathrm{C}} \bigcup \mathrm{Int}\Gamma_{\mathrm{C}}\right)$ *он имеет наилучший порядок приближения* $O\left[\rho(N)\right]$ *или он насыщаем с порядком* $O\left[\rho(N)\right]$, *а множество функций* $\mathrm{F}\left[\mathrm{A}\left(\Gamma_{\mathrm{C}} \bigcup \mathrm{Int}\Gamma_{\mathrm{C}}\right), Z_N^r f(z)\right]$ *назовём его классом насыщения или классом Фавара.*

Если функция $w = \Phi(z)$ конформно и однолистно отображает неограниченную внешность $\mathrm{Ext}\Gamma_{\mathrm{C}}$ спрямляемой жордановой кривой Γ_{C} в комплексной z-плоскости на неограниченную внешность $|w| > 1$ единичной окружности $|w| = 1$ в комплексной w-плоскости с условием нормировки $0 < \lim_{z \to \infty} \frac{\Phi(z)}{z} < +\infty$, то $\Phi(\infty) = \infty$ и ряд Лорана функции $w = \Phi(z)$ в окрестности бесконечно удалённой точки $z = \infty$ имеет вид $w = \Phi(z) = \frac{z}{d} + \alpha_0 + \frac{\alpha_{-1}}{z} + \frac{\alpha_{-2}}{z^2} + \ldots$, где положительное вещественное число d равно следующим метрическим характеристикам компактов на комплексной плоскости C: 1) трансфинитному диаметру компакта $\Gamma_{\mathrm{C}} \bigcup \mathrm{Int}\Gamma_{\mathrm{C}}$; 2) ёмкости компакта $\Gamma_{\mathrm{C}} \bigcup \mathrm{Int}\Gamma_{\mathrm{C}}$; 3) конформному радиусу области $\mathrm{Ext}\Gamma_{\mathrm{C}}$ относительно точки $z = \infty$; 4) постоянной Чебышёва для компакта $\Gamma_{\mathrm{C}} \bigcup \mathrm{Int}\Gamma_{\mathrm{C}}$.

Для рассматривавшегося в пункте 3 замкнутого единичного круга $|z| \le 1$ трансфинитный диаметр $d = 1$ [32, с. 289], для рассматривавшегося в пункте 4 отрезка $[-1, 1]$ трансфинитный диаметр $d = \frac{1}{2}$ [32, с. 290], для замкнутого эллипса $\left(\frac{\mathrm{Re} z}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{Im} z}{b}\right)^2 \le 1$, где $a > 0$ — вещественная полуось и $b > 0$ — мнимая полуось, трансфинитный диаметр $d = \frac{a+b}{2}$.

По определению многочлен Фабера степени точно n есть многочленная часть лорановского разложения функции $\left[\Phi(z)\right]^n$ в окрестности бесконечно удалённой точки $z = \infty$:

$$\forall n \in Z_+ \quad F_n(z) := \mathrm{Polynomial}\left[\left(\frac{z}{d} + \alpha_0 + \frac{\alpha_{-1}}{z} + \frac{\alpha_{-2}}{z^2} + \ldots\right)^n\right].$$

Очевидно, что $F_0(z) \equiv 1$. Из теории ортогональных рядов известно, что без тождественной единицы невозможно было бы равномерно приблизить функции, которые отличны от нуля при $z = 0$ [33, с. 110].

Теорема 4. *Пусть* Γ_{C} *есть спрямляемая жорданова кривая. И пусть функция* $f \in \mathbf{A}\left(\Gamma_{\mathrm{C}} \bigcup \mathrm{Int}\Gamma_{\mathrm{C}}\right)$ *отлична от тождественной постоянной на замкнутой жордановой области* $\Gamma_{\mathrm{C}} \bigcup \mathrm{Int}\Gamma_{\mathrm{C}}$. *Тогда для отклонения такой функции от средних Зигмунда (17) натурального порядка* $r = 1, 2, 3, \ldots$ *её ряда по многочленам Фабера имеет место*

$$\max_{z \in \Gamma_{\mathrm{C}}} \left| f(z) - Z_N^r f(z) \right| \ne o\left(\frac{1}{N^r}\right),\ N \to +\infty, \tag{34}$$

а для многочлена Фабера первой степени $F_1(z) \equiv \frac{z}{d} + \alpha_0$ *отклонение*

$$\max_{z \in \Gamma_{\mathrm{C}}} \left| F_1(z) - Z_N^r F_1(z) \right| = O\left(\frac{1}{N^r}\right),\ N \to +\infty. \tag{35}$$

Доказательство. Шаг 1. В силу свойства конформной биортонормированности [3, с. 146, (10); 28, с. 19, (П.4.1); 30, с. 46, (1.12.5)]

$$\forall m \in Z_+ \quad \forall n \in Z_+ \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\tau|=1} \frac{F_n\left[\Psi(\tau)\right]}{\tau^{m+1}} d\tau = \begin{cases} 1, \text{ когда } m = n, \\ 0, \text{ когда } m \ne n, \end{cases} \tag{36}$$

последовательно имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\tau|=1}\frac{f[\Psi(\tau)]-Z_N^r[\Psi(\tau)]}{\tau^{m+1}}d\tau \overset{(17)}{=} \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\tau|=1}\left\{\frac{f[\Psi(\tau)]}{\tau^{m+1}}-\sum_{n=0}^{N}\left[1-\left(\frac{n}{N+1}\right)^r\right]\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=1}\frac{f[\Psi(t)]}{t^{n+1}}dt\cdot\frac{F_n[\Psi(\tau)]}{\tau^{m+1}}\right\}d\tau=$$

$$\overset{(36)}{=}\left\{1-\left[1-\left(\frac{m}{N+1}\right)^r\right]\right\}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=1}\frac{f[\Psi(t)]}{t^{m+1}}dt=\left(\frac{m}{N+1}\right)^r\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=1}\frac{f[\Psi(t)]}{t^{m+1}}dt\,. \tag{37}$$

Выше во втором члене равенства (37) мы учли, что переменная интегрирования немая.

Из (37) следует, что при любом фиксированном натуральном числе $m=1,2,3,\ldots$ и всех неотрицательных целых числах $N\geq m-1$ справедливо неравенство

$$\left(\frac{m}{N+1}\right)^r\left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=1}\frac{f[\Psi(t)]}{t^{m+1}}dt\right|\leq\max_{z\in\Gamma_C}\left|f(z)-Z_N^r f(z)\right|\,. \tag{38}$$

Далее воспользуемся методом от противного (reductio ad absurdum).

Шаг 2. Заменим заключение (34) теоремы 4 её отрицанием:

$$\max_{z\in\Gamma_C}\left|f(z)-Z_N^r f(z)\right|=o\left(\frac{1}{N^r}\right),\ N\to+\infty\,. \tag{39}$$

Тогда из неравенства (38) следовало бы, что все коэффициенты Фабера функции $f\in\mathbf{A}(\Gamma_C\bigcup\mathrm{Int}\Gamma_C)$ с натуральными номерами $m=1,2,3,\ldots$ равны нулю: $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=1}\frac{f[\Psi(t)]}{t^{m+1}}dt=0$. Последнее согласно теореме единственности [10, с. 7; 23, с. 55–56] влекло бы, что функция $f\in\mathbf{A}(\Gamma_C\bigcup\mathrm{Int}\Gamma_C)$ есть тождественная постоянная на замкнутой жордановой области $\Gamma_C\bigcup\mathrm{Int}\Gamma_C$: $f(z)\equiv\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=1}\frac{f[\Psi(t)]}{t}dt$. Что противоречит посылке теоремы 4 «функция $f\in\mathbf{A}(\Gamma_C\bigcup\mathrm{Int}\Gamma_C)$ отлична от тождественной постоянной на замкнутой жордановой области $\Gamma_C\bigcup\mathrm{Int}\Gamma_C$».

Значит, наше допущение (39) ложно и на самом деле имеет место (34).

Шаг 3. Для многочлена Фабера первой степени $F_1(z)\equiv\frac{z}{d}+\alpha_0$ разность

$$F_1(z)-Z_N^r F_1(z)=\left(\frac{z}{d}+\alpha_0\right)-\left\{\left[1-\left(\frac{0}{N+1}\right)^r\right]\cdot 0\cdot 1+\left[1-\left(\frac{1}{N+1}\right)^r\right]\cdot 1\cdot\left(\frac{z}{d}+\alpha_0\right)\right\}=\frac{1}{(N+1)^r}\cdot\left(\frac{z}{d}+\alpha_0\right).$$

Тогда отклонение

$$\max_{z\in\Gamma_C}\left|F_1(z)-Z_N^r F_1(z)\right|=\frac{1}{(N+1)^r}\cdot\max_{z\in\Gamma_C}\left|\frac{z}{d}+\alpha_0\right|\,.$$

Отсюда имеем (35).

Теорема 4 доказана.

Обобщение теоремы 4 на матричные средние рядов по многочленам Фабера было анонсировано автором в [34, с. 4—6].

Теорема 5. *Пусть* Γ_A *есть гладкая жорданова кривая, которая удовлетворяет условию С. Я. Альпера (20). Тогда в банаховом пространстве* $\mathbf{A}(\Gamma_A\bigcup\mathrm{Int}\Gamma_A)$ *приближение функций средними Фейера*

$$\forall N \in Z_+ \ \ \sigma_N f(z) := \sum_{n=0}^{N} \left(1 - \frac{n}{N+1}\right) \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=1} \frac{f[\Psi(t)]}{t^{n+1}} dt \cdot F_n(z)$$

их рядов по многочленам Фабера насыщаемо с порядком $O\left(\frac{1}{N}\right)$ *при* $N \to +\infty$ *и с классом насыщения, состоящим из всех тех функций* $f \in \mathbf{A}(\Gamma_A \cup \mathrm{Int}\Gamma_A)$, *производные* $f'(z)$ *которых ограничены в жордановой области* $\mathrm{Int}\Gamma_A$ *:*

$$\mathrm{F}\left[\mathrm{A}\left(\Gamma_A \cup \mathrm{Int}\Gamma_A\right), \sigma_N f(z)\right] = \left\{f \in \mathrm{A}\left(\Gamma_A \cup \mathrm{Int}\Gamma_A\right) : f' \in \mathrm{H}^\infty\left(\mathrm{Int}\Gamma_A\right)\right\}.$$

Эта теорема была анонсирована автором также в [34, с. 8].

Как уже отмечалось в пункте 3, теорему 5 для замкнутого единичного круга $|z| \le 1$ ($\Leftrightarrow$ теорему 1), получили Д. Алексич [17, с. 50, VIII; 22, с. 24] и А. Зигмунд [7, с. 203, теорема (13.35); 19, с. 274, (1.3)]. Теорема Алексича—Зигмунда была распространена автором с рядов Тейлора на ряды по многочленам Фабера для замкнутых жордановых областей с аналитической границей в [28, с. 49—70; 35, с. 4—5, теорема 2].

7. Класс насыщения средних Зигмунда рядов по многочленам Фабера для замкнутых жордановых областей с кратно-гладкой границей Келлога—Варшавского.

Теорема 6. *Пусть* r *есть фиксированное натуральное число* $1, 2, 3, \ldots$ *И пусть натуральная параметризация* $z = z(s)$ *гладкой жордановой кривой* $\Gamma_{r,\beta}$ *абсолютно непрерывно дифференцируема* $r-1$ *раз и её производная* r*-го порядка* $z^{(r)}(s)$ *удовлетворяет условию Гёльдера с показателем* $0 < \beta < 1$ *и коэффициентом* $0 < A_8 < +\infty$ *:*

$$\forall s_1 \in \left[0, \left|\Gamma_{r,\beta}\right|\right] \ \forall s_2 \in \left[0, \left|\Gamma_{r,\beta}\right|\right] \ \left|z^{(r)}(s_1) - z^{(r)}(s_2)\right| \le A_8 \cdot \left|s_1 - s_2\right|^\beta. \tag{40}$$

Тогда в банаховом пространстве $\mathbf{A}(\Gamma_{r,\beta} \cup \mathrm{Int}\Gamma_{r,\beta})$ *приближение функций средними Зигмунда (17) порядка* r *их рядов по многочленам Фабера насыщаемо с порядком* $O\left(\frac{1}{N^r}\right)$ *при* $N \to +\infty$ *и с классом насыщения, состоящим из всех тех функций* $f \in \mathrm{A}\left(\Gamma_{r,\beta} \cup \mathrm{Int}\Gamma_{r,\beta}\right)$, *производные* r*-го порядка* $f^{(r)}(z)$ *которых ограничены в жордановой области* $\mathrm{Int}\Gamma_{r,\beta}$ *:*

$$\mathrm{F}\left[\mathrm{A}\left(\Gamma_{r,\beta} \cup \mathrm{Int}\Gamma_{r,\beta}\right), Z_N^r f(z)\right] = \left\{f \in \mathrm{A}\left(\Gamma_{r,\beta} \cup \mathrm{Int}\Gamma_{r,\beta}\right) : f^{(r)} \in \mathrm{H}^\infty\left(\mathrm{Int}\Gamma_{r,\beta}\right)\right\}.$$

Очевидно, что $\Gamma_{r,\beta} \subset \Gamma_{r-1,\beta} \subset \ldots \subset \Gamma_{2,\beta} \subset \Gamma_{1,\beta} \subset \Gamma_A$.

В силу доказанной в предыдущем пункте 6 теоремы 4 справедливость теоремы 6 следует из приводимых ниже лемм 3 и 4.

Напомним, что в теории аппроксимаций к прямым относят утверждения, в которых по известным структурным свойствам функции заключают о скорости её аппроксимации, а к обратным — утверждения, в которых по известной скорости аппроксимации заключают о её структурных свойствах.

Лемма 3 (прямая). *Пусть* r *есть фиксированное натуральное число* $1, 2, 3, \ldots$ *И пусть натуральная параметризация* $z = z(s)$ *гладкой жордановой кривой* $\Gamma_{r,\beta}$ *абсолютно непрерывно дифференцируема* $r-1$ *раз и её производная* r*-го порядка* $z^{(r)}(s)$ *удовлетворяет условию Гёльдера (40). Тогда если функция* $f \in \mathbf{A}(\Gamma_{r,\beta} \cup \mathrm{Int}\Gamma_{r,\beta})$ *имеет ограниченную в жордановой области* $\mathrm{Int}\Gamma_{r,\beta}$ *производную* r*-го порядка* $f^{(r)}(z)$ *:* $f^{(r)} \in \mathbf{H}^\infty(\mathrm{Int}\Gamma_{r,\beta})$, *то для отклонения такой функции от средних Зигмунда (17) порядка* r *её ряда по многочленам Фабера имеет место*

$$\max_{z \in \Gamma_{r,\beta}} \left|f(z) - Z_N^r f(z)\right| = O\left(\frac{1}{N^r}\right), \ N \to +\infty. \tag{41}$$

Доказательство. Для средних Фейера $\sigma_N f(z) := Z_N^1 f(z)$ лемму 3 доказал С. Я. Альпер [31, с. 435, теорема 3]. Поэтому считаем фиксированное натуральное число $r \geq 2$.

Интеграл типа Коши (22) в ограниченной внутренности $|w| < 1$ единичной окружности $|w| = 1$ определяет функцию $f_{\text{Int}}(w)$. В единичном круге $|w| < 1$ её производная $(r-1)$-го порядка по известной формуле равна

$$f_{\text{Int}}^{(r\text{-}1)}(w) = \frac{(r-1)!}{2\pi i} \oint\limits_{|\tau|=1} \frac{f[\Psi(\tau)]}{(\tau - w)^r} d\tau . \tag{42}$$

Методом математической индукции при надлежащих предположениях доказывается, что N-я $(N = 1, 2, 3, \ldots)$ производная сложной функции $f[\Psi(\tau)]$ выражается формулой

$$\{f[\Psi(\tau)]\}^{(N)} = \sum\nolimits_{n=1}^{N} h_{N,n}(\tau) \cdot f^{(n)}[\Psi(\tau)], \tag{43}$$

в которой функциональные коэффициенты $h_{N,n}(\tau)$ при $N = 2, 3, 4, \ldots$ и $n = 1, 2, \ldots, N$ вычисляются по рекуррентному соотношению

$$h_{N,n}(\tau) = h_{N-1,n-1}(\tau) \cdot \Psi'(\tau) + h'_{N-1,n}(\tau) , \tag{44}$$

где по определению коэффициент $h_{1,1}(\tau) \equiv \Psi'(\tau)$ и для $N = 1, 2, 3, \ldots$ коэффициенты $h_{N,0}(\tau) \equiv 0 \equiv h_{N,N+1}(\tau)$. Из рекуррентной формулы (44) вытекает, что для $N = 1, 2, 3, \ldots$ коэффициенты $h_{N,1}(\tau) \equiv \Psi^{(N)}(\tau)$ и $h_{N,N}(\tau) \equiv [\Psi'(\tau)]^N$. При $\Psi(\tau) \equiv \tau$ формула (43) влечёт формулу (9) пункта 3.

Из формулы (42) интегрированием по частям с помощью формулы (43) убеждаемся, что в единичном круге $|w| < 1$ производная $(r-1)$-го порядка

$$f_{\text{Int}}^{(r\text{-}1)}(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\tau|=1} \left\{ \Psi^{(r-1)}(\tau) \cdot f'[\Psi(\tau)] + \sum_{n=2}^{r-2} h_{r-1,n}(\tau) \cdot f^{(n)}[\Psi(\tau)] + [\Psi'(\tau)]^{r-1} \cdot f^{(r-1)}[\Psi(\tau)] \right\} \frac{d\tau}{\tau - w} . \tag{45}$$

В силу теоремы Келлога—Варшавского [36, с. 49, теорема 3.6] производная r-го порядка $\Psi^{(r)}(w)$ непрерывно продолжима с неограниченной внешности $|w| > 1$ единичной окружности $|w| = 1$ на саму единичную окружность $|w| = 1$ и на $|w| \geq 1$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $0 < \beta < 1$. Очевидно, что функции $\Psi(w), \Psi'(w), \ldots, \Psi^{(r-1)}(w)$ на $|w| \geq 1$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем 1. Также очевидно, что в рассматриваемом классе замкнутых жордановых областей $\Gamma_{r,\beta} \bigcup \text{Int}\Gamma_{r,\beta}$ и, более общо, в классе замкнутых жордановых областей $\Gamma_{\text{A}} \bigcup \text{Int}\Gamma_{\text{A}}$ с гладкой жордановой границей Γ_{A}, которая удовлетворяет условию С. Я. Альпера (20), функции $f(z), f'(z), \ldots, f^{(r-1)}(z)$ на замкнутой жордановой области $\Gamma_{\text{A}} \bigcup \text{Int}\Gamma_{\text{A}}$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем 1. Отсюда следует, что плотность интеграла типа Коши (45) на единичной окружности $|\tau| = 1$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем 1.

Так как на единичной окружности $|w| = 1$ справедливо интегральное представление

$$\left(f_{\text{Int}}^{+}\right)^{(r-1)}(w) = \sum\nolimits_{n=1}^{r-1} h_{r-1,n}(w) \cdot f^{(n)}[\Psi(w)] -$$
$$- \frac{1}{2\pi i} \text{P.V.} \oint\limits_{|\tau|=1} \left[\frac{\Psi'(\tau)}{\Psi(\tau) - \Psi(w)} - \frac{1}{\tau - w} \right] \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{r-1} h_{r-1,n}(\tau) \cdot f^{(n)}[\Psi(\tau)] - \sum_{n=1}^{r-1} h_{r-1,n}(w) \cdot f^{(n)}[\Psi(w)] \right\} d\tau ,$$

то по схеме С. Я. Альпера [3, с. 185—188; 31, с. 431—434] убеждаемся, что контурная функция $\left(f_{\text{Int}}^{+}\right)^{(r-1)}(w)$ на единичной окружности $|w| = 1$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем 1:

$$\left|\left(f_{\mathrm{Int}}^{+}\right)^{(r-1)}(w_1)-\left(f_{\mathrm{Int}}^{+}\right)^{(r-1)}(w_2)\right| \le A_9 \cdot |w_1 - w_2| \, .$$

Тогда в силу контурно-телесной теоремы [1, с. 426; 37, с. 113] телесная функция $f_{\mathrm{Int}}^{(r\text{-}1)}(w)$ в единичном круге $|w|<1$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем 1 и с той же постоянной A_9.

Следовательно, производная r-го порядка $f_{\mathrm{Int}}^{(r)}(w)$ ограничена в единичном круге $|w|<1$: $f_{\mathrm{Int}}^{(r)} \in \mathbf{H}^{\infty}\left(|w|<1\right)$.

По теореме 1 средние Зигмунда порядка r ряда Тейлора функции $f_{\mathrm{Int}}(w)$ равномерно сходятся на замкнутом единичном круге $|w|\le 1$ к $f_{\mathrm{Int}}(w)$ со скоростью

$$\max_{|w|\le 1}\left|f_{\mathrm{Int}}(w)-Z_N^r f_{\mathrm{Int}}(w)\right| = O\left(\frac{1}{N^r}\right), \; N \to +\infty \, . \tag{46}$$

Помним, что в точках единичной окружности $|w|=1$ значения функции $f_{\mathrm{Int}}(w)=f_{\mathrm{Int}}^{+}(w)$.

Разность $f_{\mathrm{Int}}(w)-Z_N^r f_{\mathrm{Int}}(w)$ прямой F_O оператор Фабера для области $\mathrm{Int}\Gamma_{r,\beta}$ переводит в разность $f(z)-Z_N^r f(z)$. Так как норма прямого F_O оператора Фабера ограничена: $\|F_O\|_{\mathbf{H}^{\infty}(|w|<1)\to \mathbf{H}^{\infty}\left(\mathrm{Int}\Gamma_{r,\beta}\right)} \le 1 + A_6 < +\infty$ [3, с. 163, (7)], то из (46) имеем (41).

Лемма 3 доказана.

Лемма 4 (обратная). *Пусть r есть фиксированное натуральное число $1,2,3,\ldots$ И пусть натуральная параметризация $z=z(s)$ гладкой жордановой кривой $\Gamma_{r,\beta}$ абсолютно непрерывно дифференцируема $r-1$ раз и её производная r-го порядка $z^{(r)}(s)$ удовлетворяет условию Гёльдера (40). Тогда если средние Зигмунда (17) порядка r ряда по многочленам Фабера функции $f \in \mathbf{A}\left(\Gamma_{r,\beta} \bigcup \mathrm{Int}\Gamma_{r,\beta}\right)$ равномерно сходятся к ней на замкнутой жордановой области $\Gamma_{r,\beta} \bigcup \mathrm{Int}\Gamma_{r,\beta}$ со скоростью (41), то производная r-го порядка $f^{(r)}(z)$ ограничена в жордановой области $\mathrm{Int}\Gamma_{r,\beta}$: $f^{(r)} \in \mathbf{H}^{\infty}\left(\mathrm{Int}\Gamma_{r,\beta}\right)$.*

Доказательство. Для средних Фейера $\sigma_N f(z) := Z_N^1 f(z)$ лемму 4 доказал автор [34, с. 8, (3.4); 38, с. 15—17] для более общих замкнутых жордановых областей $\Gamma_{\mathrm{A}} \bigcup \mathrm{Int}\Gamma_{\mathrm{A}}$ с гладкой жордановой границей Γ_{A}, которая удовлетворяет условию С. Я. Альпера (20). Поэтому далее считаем фиксированное натуральное число $r \ge 2$.

Разность $f(z)-Z_N^r f(z)$ обратный $(F_O)^{-1}$ оператор Фабера для области $\mathrm{Int}\Gamma_{r,\beta}$ переводит в разность $f_{\mathrm{Int}}(w)-Z_N^r f_{\mathrm{Int}}(w)$. Так как норма обратного $(F_O)^{-1}$ оператора Фабера ограничена: $\left\|(F_O)^{-1}\right\|_{\mathbf{H}^{\infty}(\mathrm{Int}\Gamma_{r,\beta})\to \mathbf{H}^{\infty}\left(|w|<1\right)} \le 1 + A_6 < +\infty$, то из (41) имеем (46).

По теореме 1 производная r-го порядка $f_{\mathrm{Int}}^{(r)}(w)$ ограничена в единичном круге $|w|<1$: $f_{\mathrm{Int}}^{(r)} \in \mathbf{H}^{\infty}\left(|w|<1\right)$. Далее рассуждаем аналогично доказательству леммы 3.

Функция $f \in \mathbf{A}\left(\Gamma_{r,\beta} \bigcup \mathrm{Int}\Gamma_{r,\beta}\right)$ во всех точках z жордановой области $\mathrm{Int}\Gamma_{r,\beta}$ представима интегралом типа Коши $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{\Gamma_{r,\beta}} \frac{f_{\mathrm{Int}}^{+}\left[\Phi(\zeta)\right]}{\zeta - z}\,d\zeta$.

Тогда её производная $(r-1)$-го порядка

$$\forall z \in \mathrm{Int}\Gamma_{r,\beta} \quad f^{(r-1)}(z)=\frac{(r-1)!}{2\pi i}\oint_{\Gamma_{r,\beta}} \frac{f_{\mathrm{Int}}^{+}\left[\Phi(\zeta)\right]}{(\zeta - z)^r}\,d\zeta \, . \tag{47}$$

Методом математической индукции при надлежащих предположениях доказывается, что N-я $(N=1,2,3,\ldots)$ производная сложной функции $f_{\mathrm{Int}}^{+}\left[\Phi(\zeta)\right]$ выражается формулой

$$\left\{f_{\mathrm{Int}}^{+}[\Phi(\zeta)]\right\}^{(N)}=\sum_{n=1}^{N}h_{N,n}(\zeta)\cdot\left(f_{\mathrm{Int}}^{+}\right)^{(n)}[\Phi(\zeta)], \qquad (48)$$

в которой функциональные коэффициенты $h_{N,n}(\zeta)$ при $N=2,3,4,...$ и $n=1,2,...,N$ вычисляются по рекуррентному соотношению

$$h_{N,n}(\zeta)=h_{N-1,n-1}(\zeta)\cdot\Phi'(\zeta)+h'_{N-1,n}(\zeta), \qquad (49)$$

где по определению коэффициент $h_{1,1}(\zeta)\equiv\Phi'(\zeta)$ и для $N=1,2,3,...$ коэффициенты $h_{N,0}(\zeta)\equiv 0\equiv h_{N,N+1}(\zeta)$. Из рекуррентной формулы (49) вытекает, что для $N=1,2,3,...$ коэффициенты $h_{N,1}(\zeta)\equiv\Phi^{(N)}(\zeta)$ и $h_{N,N}(\zeta)\equiv[\Phi'(\zeta)]^{N}$. Сопоставьте формулы (48) и (49) с формулами (43) и (44).

Из формулы (47) интегрированием по частям с помощью формулы (48) убеждаемся, что в жордановой области $\mathrm{Int}\Gamma_{r,\beta}$ производная $(r-1)$-го порядка

$$f^{(r-1)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_{r,\beta}}\left\{\Phi^{(r-1)}(\zeta)\cdot\left(f_{\mathrm{Int}}^{+}\right)'[\Phi(\zeta)]+\sum_{n=2}^{r-2}h_{r-1,n}(\zeta)\cdot\left(f_{\mathrm{Int}}^{+}\right)^{(n)}[\Phi(\zeta)]+[\Phi'(\zeta)]^{r-1}\cdot\left(f_{\mathrm{Int}}^{+}\right)^{(r-1)}[\Phi(\zeta)]\right\}\frac{d\zeta}{\zeta-z}. \qquad (50)$$

На неограниченной замкнутой внешности $\Gamma_{r,\beta}\bigcup\mathrm{Int}\Gamma_{r,\beta}$ кратно-гладкой жордановой кривой Келлога — Варшавского $\Gamma_{r,\beta}$ функции $\Phi(z),\Phi'(z),...,\Phi^{(r-1)}(z)$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем 1, а производная r-го порядка $\Phi^{(r)}(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $0<\beta<1$ [3, с. 85]. Отсюда следует, что плотность интеграла типа Коши (50) на контуре интегрирования $\Gamma_{r,\beta}$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем 1.

Так как на единичной окружности $|w|=1$ справедливо интегральное представление

$$f^{(r-1)}[\Psi(w)]=\sum_{n=1}^{r-1}h_{r-1,n}[\Psi(w)]\cdot\left(f_{\mathrm{Int}}^{+}\right)^{(n)}(w)+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{P.V.}\oint_{|\tau|=1}\left[\frac{\Psi'(\tau)}{\Psi(\tau)-\Psi(w)}-\frac{1}{\tau-w}\right]\cdot\left\{\sum_{n=1}^{r-1}h_{r-1,n}[\Psi(\tau)]\cdot\left(f_{\mathrm{Int}}^{+}\right)^{(n)}(\tau)-\sum_{n=1}^{r-1}h_{r-1,n}[\Psi(w)]\cdot\left(f_{\mathrm{Int}}^{+}\right)^{(n)}(w)\right\}d\tau,$$

то по схеме С. Я. Альпера [3, с. 185—188; 31, с. 431—434] убеждаемся, что контурная функция $f^{(r-1)}(z)$ на кратно-гладкой жордановой кривой Келлога—Варшавского $\Gamma_{r,\beta}$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем 1: $\left|f^{(r-1)}(z_1)-f^{(r-1)}(z_2)\right|\le A_{10}\cdot|z_1-z_2|$.

Тогда в силу контурно-телесной теоремы [1, с. 426; 37, с. 113] телесная функция $f^{(r-1)}(z)$ в жордановой области $\mathrm{Int}\Gamma_{r,\beta}$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем 1 и с той же постоянной A_{10}.

Следовательно, производная r-го порядка $f^{(r)}(z)$ ограничена в жордановой области $\mathrm{Int}\Gamma_{r,\beta}$: $f^{(r)}\in\mathbf{H}^{\infty}\left(\mathrm{Int}\Gamma_{r,\beta}\right)$.

Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы 6 закончено.

Перечислим жордановы кривые, которые упоминаются в настоящей работе, в порядке увеличения их общности: 1) единичная окружность $|z|=1$; 2) эллипс $\left(\frac{\mathrm{Re}z}{a}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{Im}z}{b}\right)^2=1$ с полуосями $a>0$ и $b>0$; 3) аналитическая жорданова кривая; 4) кратно-гладкая жорданова кривая Келлога—Варшавского $\Gamma_{r,\beta}$; 5) гладкая жорданова кривая С. Я. Альпера Γ_{A}; 6) спрямляемая жорданова кривая Γ_{C}.

Формальный мост между рядами Тейлора и рядами Фурье по многочленам П. Л. Чебышёва первого рода образуют ряды по многочленам Фабера для замкнутого эллипса $\left(\frac{\mathrm{Re}z}{a}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{Im}z}{b}\right)^2\le 1$. Для последних многочленов

Фабера справедлива рекуррентная формула [28, с. 8, пример 4; 30, с. 37] $F_{n+1}(z)=\frac{2}{a+b}z\cdot F_n(z)-\frac{a-b}{a+b}F_{n-1}(z)$, где номер $n=2,3,4,\ldots$, из которой в случае $a=b=1$, т. е. в случае замкнутого единичного круга $|z|\le 1$, имеем $z^{n+1}=z\cdot z^n$, а в случае $a=1$ и $b=0$ имеем рекуррентную формулу для многочленов Чебышёва первого рода $T_{n+1}(z)=2z\cdot T_n(z)-T_{n-1}(z)$. В последнем случае на отрезок $[-1,1]$, если его разрезать от точки $z=-1$ через точку $z=0$ до точки $z=1$, мы можем смотреть как на вырожденный эллипс с большой полуосью $a=1$ и малой полуосью $b=0$. Указанный выше мост был назван формальным, поскольку предельный переход не обладает свойством наследования: 1) члены вещественной последовательности $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{+\infty}$ положительны: $\frac{1}{n}>0$, а предел нулевой: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$; 2) члены функциональной последовательности $\left(z^n\right)_{n=0}^{+\infty}$ непрерывны на отрезке $[-1,1]$, а предельная функция на полуинтервале $(-1,1]$ разрывная:

$$\lim_{n\to+\infty} z^n=\begin{cases}\text{не существует, когда } z=-1,\\ 0, \text{ когда } -1<z<1,\\ 1, \text{ когда } z=1.\end{cases}$$

Для эллипса оценки констант приближения имеются в работах Сьюэлла [39, с. 578, теорема; 40, с. 76, 2.6.5] и автора [41, с. 9—10].

Граница замкнутой жордановой области есть	Результаты теории насыщения
единичная окружность $\lvert z\rvert=1$	теорема 1, [17, с. 50, VIII; 19, с. 274, (1.3)]
аналитическая жорданова кривая	[28, с. 49—70; 35, с. 4—5, теорема 2]
кратно-гладкая жорданова кривая Келлога—Варшавского $\Gamma_{r,\beta}$	теорема 6, [10, с. 13, теорема; 42, с. 55, п. 3, теорема; 43, с. 29, теорема; 44, с. 153–154, теорема 4]
гладкая жорданова кривая С. Я. Альпера Γ_A	теорема 5, [34, с. 8; 38, с. 19, замечание 1; 45, с. 70, следствие]
спрямляемая жорданова кривая Γ_C	теорема 4, [28, с. 47–48, теорема; 34, с. 4–6]

8. Заключение. Пусть Γ_A есть гладкая жорданова кривая, которая удовлетворяет условию С. Я. Альпера (20). И пусть $\mathbf{A}(\Gamma_A\cup\mathrm{Int}\Gamma_A)$ есть множество всех непрерывных на замкнутой жордановой области $\Gamma_A\cup\mathrm{Int}\Gamma_A$ и аналитических в жордановой области $\mathrm{Int}\Gamma_A$ функций. В данной работе установлено, что средние Зигмунда (17) натурального порядка $r=1,2,3,\ldots$ рядов по многочленам Фабера являются сильным процессом приближения в банаховом пространстве $\mathbf{A}(\Gamma_A\cup\mathrm{Int}\Gamma_A)$.

Если о границе $\Gamma_{r,\beta}\subset\Gamma_A$ дополнительно известно, что её натуральная параметризация $z=z(s)$ абсолютно непрерывно дифференцируема $r-1$ раз и производная r-го порядка $z^{(r)}(s)$ удовлетворяет условию Гёльдера (40), то класс насыщения средних Зигмунда (17) порядка r рядов по многочленам Фабера состоит из всех тех функций $f\in\mathbf{A}(\Gamma_{r,\beta}\cup\mathrm{Int}\Gamma_{r,\beta})$, производные r-го порядка $f^{(r)}(z)$ которых ограничены в жордановой области $\mathrm{Int}\Gamma_{r,\beta}$.

Из результата М. Заманского [21, с. 170, теорема 2] для тригонометрических рядов Фурье следует, что класс насыщения средних Зигмунда порядка r рядов по многочленам Фабера для отрезка $[-1,1]$ ($\Leftrightarrow$ рядов Фурье по многочленам П. Л. Чебышёва первого рода) описывается в случае нечётного натурального порядка $r=1,3,5,\ldots$ через функцию $[f(\cos x)]^{\sim}$, тригонометрически сопряжённую к чётной сложной функции $f(\cos x)$. Логично предположить, что при движении от $\Gamma_{r,\beta}$ к $[-1,1]$ выявление структурной характеристики класса насыщения потребует введения сопряжённого по Фаберу ряда и сопряжённой по Фаберу функции [29].

Список цитируемых источников

1. *Дзядык, В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В. К. Дзядык. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. — 512 с.

2. *Butzer, P. L.* Fourier Analysis and Approximation / P. L. Butzer, R. J. Nessel. — Basel; Stuttgart : Birkhäuser, 1971. — Vol. 1. — XVI+533 pp.

3. *Суетин, П. К.* Ряды по многочленам Фабера / П. К. Суетин. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. — 336 с. — Translation from Russian into English : Series of Faber Polynomials / P. K. Suetin. — Amsterdam : Gordon and Breach Science Publishers, 1998. — XX+301 pp. — (Analytical Methods and Special Functions, 1).

4. *Эдвардс, Р.* Ряды Фурье в современном изложении : в 2 т. / Р. Эдвардс. — М. : Мир, 1985. — Т. 1. — 264 с.

5. *Эдвардс, Р.* Ряды Фурье в современном изложении : в 2 т. / Р. Эдвардс. — М. : Мир, 1985. — Т. 2. — 400 с.

6. *Бруй, И. Н.* Средние тригонометрических рядов и пространства периодических функций. Стендовый доклад / И. Н. Бруй // Содружество наук. Барановичи—2016 : материалы XII Междунар. науч.-практ. конф. молодых исследователей: (Барановичи, 19—20 мая 2016 года) : в трёх частях / редкол.: А. В. Никишова (гл. ред.), Ю. Е. Горбач (отв. секр.) [и др.]. — Барановичи : БарГУ, 2016. — Ч. 2. — С. 6—20.

7. *Зигмунд, А.* Тригонометрические ряды : в 2 т. / А. Зигмунд. — М. : Мир, 1965. — Т. I. — 615 с.

8. *Бари, Н. К.* Тригонометрические ряды / Н. К. Бари. — М. : ГИФМЛ, 1961. — 936 с.

9. *Жук, В. В.* Аппроксимация периодических функций / В. В. Жук. — Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1982. — 368 с.

10. *Бруй, И. Н.* О классе насыщения метода Рисса суммирования рядов Фабера / И. Н. Бруй ; Ред. журн. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.». — Минск, 1989. — 60 с. — Деп. в ВИНИТИ АН СССР 16.08.1989. — № 5514-В89.

11. *Bruj, I.* The concept of Faber derivative in saturation theory / I. Bruj, J. Müller // Jean Journal on Approximation. — 2011. — Vol. 3, № 2. — P. 227—239.

12. *Степанец, А. И.* Классификация и приближение периодических функций / А. И. Степанец. — Киев : Наукова думка, 1987. — 268 с.

13. *Бруй, И. Н.* О включении метода Фейера в одну совокупность методов суммирования числовых рядов / И. Н. Бруй // Техника и технологии: инновации и качество : материалы II Междунар. науч.-практ. конф., 24–25 окт. 2013 г., г. Барановичи, Респ. Беларусь / редкол.: А. В. Никишова (гл. ред.) [и др.]. — Барановичи : РИО БарГУ, 2013. — С. 41–56.

14. *Тиман, М. Ф.* О порядке приближения функции нормальными средними Зигмунда / М. Ф. Тиман // Докл. АН СССР. — 1968. — Т. 181, № 1. — С. 29—32.

15. *Gaier, D.* Approximation durch Fejér-Mittel in der Klasse $\mathbf{A}$ / D. Gaier // Mitteilungen aus dem mathem. Seminar Giessen. — 1977. — № 123. — S. 1—6.

16. *Favard, J.* Sur les meilleures procédés d'approximation de certaines classes des fonctions par des polynomes trigonométriques / J. Favard // Bulletin des sciences mathématiques. — 1937. — T. 61. — P. 209—224, 243—256.

17. *Alexits, G.* On the order of approximation by the Cesàro means of Fourier series / G. Alexits // Approximation theory : (Selected papers) / G. Alexits. — Budapest : Akadémiai kiadó, 1983. — P. 41—50.

18. *Никольский, С. М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами / С. М. Никольский // Тр. Матем. ин-та АН СССР. — 1945. — Т. 15. — С. 1—76.

19. *Zygmund, A.* On the degree of approximation of functions by Fejér means / A. Zygmund // Bull. Amer. Math. Soc. — 1945. — Vol. 51. — P. 274—278.

20. *Zamansky, M.* Classes de saturation de certains procédés d'approximation des séries de Fourier des fonctions continues et applications à quelques problèmes d'approximation / M. Zamansky // Annales scientifiques de l'École normale supérieure. 3 série. — 1949. — T. 66, № 1. — P. 19—93.

21. *Zamansky, M.* Classes de saturation des procédés de sommation des séries de Fourier et applications aux séries trigonométriques / M. Zamansky // Annales scientifiques de l'École normale supérieure. 3 série. — 1950. — T. 67. — P. 161—198.

22. *Бруй, И. Н.* Памяти моего научного руководителя А. К. Покало: его идеи / И. Н. Бруй // Технологии, экономика и право: актуальные проблемы и инновации : материалы Междунар. науч.-практ. конф., 20 нояб. 2014 г., г. Барановичи, Респ. Беларусь / редкол.: А. В. Никишова (гл. ред.), А. К. Гавриленя (отв. ред.) [и др.]. — Барановичи : РИО БарГУ, 2014. — С. 16—32.

23. *Гайер, Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной области / Д. Гайер. — М. : Мир, 1986. — 216 с.

24. *Butzer, P. L.* The Operational Properties of the Chebyshev Transform. II. Fractional Derivatives / P. L. Butzer, R. L. Stens // Теория приближения функций : Труды Международной конференции по теории приближения функций : Калуга, 24—28 июля 1975 г. — М. : Наука, 1977. — С. 49—61.

25. *Теляковский, С. А.* Две теоремы о приближении функций алгебраическими многочленами / С. А. Теляковский // Математический сборник. — 1966. — Т. 70 (112), № 2. — С. 252—265.

26. *Дзядык, В. К.* О конструктивной теории функций на замкнутых множествах комплексной плоскости / В. К. Дзядык // Теория приближения функций : Труды Международной конференции по теории приближения функций : Калуга, 24—28 июля 1975 г. — М. : Наука, 1977. — С. 157—172.

27. *Тригуб, Р. М.* Суммируемость рядов Фурье и некоторые вопросы теории приближений / Р. М. Тригуб. — Донецк : Донецкий гос. ун-т, 1980. — 235 с. — Деп. в ВИНИТИ 08.12.1980. — № 5145-80 Деп.

28. *Бруй, И. Н.* Ряды Фабера. Суммирование / И. Н. Бруй. — Гомель : ГГУ, 1988. — 100 с.

29. *Бруй, И. Н.* К понятию сопряжённости в теории рядов по многочленам Фабера / И. Н. Бруй // Экономика, технологии и право в современном мире : материалы Междунар. науч.-практ. конф. факультета экономики и права и инженерного факультета: (Барановичи, 20 октября 2016 года) / редкол.: А. В. Никишова (гл. ред.), Ю. Е. Горбач В. Н. Кременевская (отв. секр.) [и др.]. — Барановичи : БарГУ, 2017. — С. 113—122.

30. *Бруй, И. Н.* Ряды Фабера / И. Н. Бруй. — Гомель : ГГУ, 1983. — 66 с.

31. *Альпер, С. Я.* О равномерных приближениях функций комплексного переменного в замкнутой области / С. Я. Альпер // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1955. — Т. 19, № 3. — С. 423—444.

32. *Голузин, Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г. М. Голузин. — М. : Наука, 1966. — 628 с.

33. *Качмаж, С.* Теория ортогональных рядов / С. Качмаж, Г. Штейнгауз. — М. : ГИФМЛ, 1958. — 507 с.

34. *Бруй, И. Н.* О классе насыщения метода Фейера суммирования рядов Фабера / И. Н. Бруй ; Ред. журн. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.». — Минск, 1987. — 27 с. — Деп. в ВИНИТИ АН СССР 17.12.1987. — № 8858-В87.

35. *Бруй, И. Н.* Об одном результате Д. Алексича / И. Н. Бруй ; Ред. журн. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.». — Минск, 1982. — 20 с. — Деп. в ВИНИТИ АН СССР 16.08.1982. — № 4502-82 Деп.

36. *Pommerenke, Ch.* Boundary Behaviour of Conformal Maps / Ch. Pommerenke. — Berlin ; Heidelberg : Springer, 1992. — X+300 pp.

37. *Тамразов, П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения / П. М. Тамразов. — Киев : Наукова думка, 1975. — 271 с.

38. *Бруй, И. Н.* Конструктивные описания аналитических функций классов Гёльдера / И. Н. Бруй // Математические заметки. — 1990. — Т. 47, № 5. — С. 14—20. — Translation from Russian into English : Constructive descriptions of analytic functions of Hölder classes / I. N. Brui // Mathematical Notes. — 1990. — Vol. 47, no. 5-6. — P. 433—437.

39. *Sewell, W. E.* On the polynomial derivative constant for an ellipse / W. E. Sewell // American Mathematical Monthly. — 1937. — Vol. 44. — P. 577—578.
40. *Sewell, W. E.* Degree of approximation by polynomials in the complex domain / W. E. Sewell. — Princeton : Princeton university press, 1942. — IX+236 pp.
41. *Бруй, И. Н.* Дифференцирование аппроксимационного процесса для одного класса регулярных функций / И. Н. Бруй ; Ред. журн. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.». — Минск, 1975. — 18 с. — Деп. в ВИНИТИ АН СССР 09.06.1975. — № 1625-75 Деп.
42. *Бруй, И. Н.* О классе насыщения метода Рисса суммирования рядов Фабера / И. Н. Бруй // Теория функций и приближений : Труды 4-й Саратовской зимней школы, 25 янв. — 5 февр. 1988 г. : Межвуз. научный сборник : В 3 ч. — Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1990. — Часть 2. — С. 54—56.
43. *Бруй, И. Н.* Ряды Фабера и классы аналитических функций / И. Н. Бруй // Всесоюзная школа «Теория приближения функций» : Тезисы докладов, Луцк, 31 авг. — 8 сент. 1989 г. — Киев : Ин-т математики АН УССР, 1989. — С. 29.
44. *Бруй, И. Н.* Конструктивные описания некоторых классов функций на замкнутых жордановых областях с гладкой границей / И. Н. Бруй, И. Йо // Problems of pure and applied mathematics : Abstracts of conference : 21—22.IX 1990. — Tartu : Tartu Ülikool, 1990. — P. 152—155.
45. *Бруй, И. Н.* О классах насыщения некоторых методов суммирования рядов Фабера / И. Н. Бруй // Вестник Белорус. гос. ун-та. Серия 1. — 1993. — № 1. — С. 69—70.

УДК 519.872.5

В. В. Бураковский, кандидат физико-математических наук, доцент, **А. Д. Разгуляев**
Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель

СИММЕТРИЧНАЯ МАРКЕРНАЯ КОЛЬЦЕВАЯ СЕТЬ СО СЛУЧАЙНЫМ ВЫБОРОМ ДИСЦИПЛИНЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ СООБЩЕНИЙ

Введение. Применение локальной вычислительной сети (далее — ЛВС) в настоящее время приобрело массовый характер во многих отраслях машиностроения, особенно наукоемких, к которым относятся авиаприборостроение, ракетостроение и др. Поэтому представляет интерес проблема повышения эффективности их практического применения.

Протокол маркерного доступа — одна из самых эффективных схем, обеспечивающих связь между станциями в кольцевой сети передачи данных [1]. Кольцевая ЛВС (далее — КЛВС) с маркерным доступом относится к протоколам детерминированного множественного доступа циклического типа [2]. Она представляет собой совокупность абонентских станций (далее — АС), соединенных последовательно двухточечными линиями. Абонентские станции получают право на передачу данных при получении специального служебного кадра — маркера, циркулирующего по кольцу. Функционирование сети происходит в соответствии со стандартом ANSI/IEEE 802.5 [3]. При поступлении маркера на АС может случайным образом подключаться ординарная (ordinary) или вентильная (gated) дисциплины обслуживания сообщений [4]. Математическими моделями КЛВС с маркерным доступом являются циклические системы массового обслуживания [5]. Адекватность математических моделей, описывающих КЛВС с ординарной, а также вентильной дисциплиной обслуживания стоящих в буфере АС сообщений, проверялась с помощью разработанных имитационных моделей [6]. Основные вероятностно-временные характеристики, полученные с помощью стационарных вероятностей состояний рассматриваемой сети, необходимы для анализа эффективности и оптимизации функционирования КЛВС [7].

Основная часть. Рассматривается симметричная КЛВС с протоколом маркерного доступа (стандарт ANSI/IEEE 802.5). На каждой из абонентских станций кольца имеется конечный буфер емкости m ($m > 1$). Всего в сети N АС, связанных между собой моноканалом. Так, АС занумерованы таким образом, что номер станции увеличивается по направлению движения маркера по кольцу. При поступлении маркера на произвольную АС случайным образом подключается одна из двух дисциплин обслуживания находящихся в буфере сообщений. С вероятностью p включается ординарная, а с вероятностью $1-p$ подключается вентильная дисциплина обслуживания.

Поступающие на каждую АС (независимо от номера) сообщения образуют простейший поток интенсивности λ. В момент поступления маркера на АС она может находиться в одном из $m+1$ состояния в зависимости от числа сообщений, находящихся в буфере АС, с соответствующими вероятностями p_i, $0 \le i \le m$. Сообщения, поступающие на АС с полностью занятым буфером, теряются.

Обозначим через δ время передачи сообщения между соседними АС. Для приема сообщения на АС-адресате необходимо время a. Время передачи (обслуживания) одного сообщения для любой станции: $\Delta = N\delta + a$.

Будем рассматривать состояния КЛВС в моменты поступления маркера на станции. Поскольку имеется очевидная симметрия процессов передачи сообщений в сети, исследуется произвольная АС кольца. Поведение рассматриваемой КЛВС в моменты поступления маркера на фиксированную АС описывается неприводимой, непериодической цепью Маркова.