УДК 517.982.22+517.518.456

И. Н. Бруй
Учреждение образования «Барановичский государственный университет», Барановичи, Республика Беларусь

ПРИМЕНЕНИЕ СУММИРУЕМОСТИ СО СКОРОСТЬЮ РЯДОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ К СРЕДНИМ С. Н. БЕРНШТЕЙНА И В. РОГОЗИНСКОГО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Введение. Для комплексного ряда

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

запишем ряд

$$0 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + n \cdot a_n + \ldots, \tag{2}$$

который, следуя Д. Алексичу [1, с. 44], назовём координатным, соответствующим (1).

Если средние Фейера

$$\forall N \in Z_+ := \{0, 1, 2, \ldots\} \;\; \sigma_N(2) := \sum_{n=0}^{N} \left(1 - \frac{n}{N+1}\right) n\, a_n \tag{3}$$

комплексного координатного ряда (2) ограничены: $\sup_{N \in Z_+} |\sigma_N(2)| < +\infty$, то согласно известной теореме [2, с. 165, теорема 71] теории суммируемости числовых рядов средние Фейера

$$\forall N \in Z_+ \;\; \sigma_N(1) := \sum_{n=0}^{N} \left(1 - \frac{n}{N+1}\right) a_n \tag{4}$$

исходного комплексного ряда (1) сходятся:

$$\exists s \in C \;\; \lim_{N \to +\infty} |s - \sigma_N(1)| = 0. \tag{5}$$

Операторы присваивания «$:=$» и «$=:$» означают, что выражению, которое стоит со стороны знака равенства «$=$», присвоено обозначение, которое стоит со стороны знака двоеточия «$:$». В остальных обозначениях мы стремимся следовать духу двухтомника Р. Эдвардса [3; 4].

Первым уточнил (5) Д. Алексич [1, с. 46, замечание]:

$$\exists s \in C \;\; \forall N \in Z_+ \;\; |s - \sigma_N(1)| \le \frac{4}{N+1} \cdot \sup_{N \in Z_+} |\sigma_N(2)|; \tag{6}$$

значение константы уменьшили с 4 до 3 Б. Сёкефальви-Надь [5, с. 84, лемма] и С. Б. Стечкин [6, с. 464, лемма 2, (1.6)]. С. Б. Стечкин получил также [6, с. 463, лемма 1] главный член асимптотики $s - \sigma_N(1)$.

Аналоги (6) получили: для средних Чезаро порядка 2 Б. Сёкефальви-Надь [5, с. 84], для взвешенных средних Рисса Г. Ф. Кангро [7, с. 143, теорема 2; 8, с. 140, лемма 1, с. 144—45, теорема 2; 9, с. 159, теорема; 10, с. 119; 11, с. 376, с. 377—378, пример 4; 12], Н. Саеалле и Х. Тюрнпу [13], Н. Саеалле [14, с. 38, теорема 2], для средних Чезаро порядка $\alpha > 0$ Д. Алексич [15], Г. Ф. Кангро [16, с. 389, теорема 1; 8, с. 141, лемма 2, с. 150, теорема 3; 11, с. 380, пример 6], Э. Мартин (в последующем Э. Ф. Оя) [17, с. 233—236], для средних Эйлера – Кноппа Г. Ф. Кангро [11, с. 378, пример 5] и Э. Мартин [17, с. 224–233]. Эта тематика отражена в обзоре Г. Ф. Кангро [18] и в последнем § 29 монографии С. А. Барона [19, с. 251—261].

Именно от публикации Д. Алексича [1, с. 46, замечание] берёт первое направление исследований в теории приближений: чётко выделять результаты, которые относятся к теории суммируемости числовых рядов.

Другой подход к задачам теории приближений предложил также Д. Алексич [20, с. 62—64]: рассматривать ряды в банаховом пространстве и полученные результаты применять к рядам Фурье по ортогональным системам функций.

Настоящая работа относится ко второму направлению исследований.

Пусть последовательность $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ элементов банахова пространства **B** порождает ряд (1) и соответствующий ему координатный ряд (2). В упомянутой выше работе [20, с. 62—64] для рядов (1) и (2) в произвольном банаховом пространстве **B** доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1. *Из ограниченности в банаховом пространстве* **B** *последовательности средних Фейера (3) координатного ряда (2)* $\sup_{N\in Z_+}\|\sigma_N(2)\|_{\mathbf{B}} =: A_1 < +\infty$ *вытекает суммируемость в пространстве* **B** *к элементу* s *средними Фейера (4) исходного ряда (1) со скоростью* $\forall N \in Z_+ \ \|s-\sigma_N(1)\|_{\mathbf{B}} \le \dfrac{3A_1}{N+1}$.

Теорема 2. *Из суммируемости в банаховом пространстве* **B** *к элементу* s *средними Фейера (4) ряда (1) со скоростью* $\forall N \in Z_+ \ \|s-\sigma_N(1)\|_{\mathbf{B}} \le \dfrac{A_2}{N+1}$*, где* A_2 *есть положительная вещественная постоянная, вытекает ограниченность в пространстве* **B** *последовательности средних Фейера (3) координатного ряда (2)* $\sup_{N\in Z_+}\|\sigma_N(2)\|_{\mathbf{B}} \le 4A_2$.

Средние Фейера $\sigma_N(1)$ ряда (1) являются частным случаем средних Зигмунда вещественного порядка $r>0$ ряда (1):

$$\forall N \in Z_+ \ \ Z_N^r(1) := \sum_{n=0}^{N}\left[1-\left(\frac{n}{N+1}\right)^r\right]a_n, \tag{7}$$

т. е. $\forall N \in Z_+ \ \ \sigma_N = Z_N^1$. Координатным рядом, соответствующим (1), в данном случае будет ряд

$$0^r\cdot a_0 + 1^r\cdot a_1 + 2^r\cdot a_2 + \ldots + n^r\cdot a_n + \ldots, \tag{8}$$

Теоремы 1 и 2 со средних Фейера на средние Зигмунда (7) вещественного порядка $r \ge 1$ ряда (1) и на средние Зигмунда того же порядка $r \ge 1$

$$\forall N \in Z_+ \ \ Z_N^r(8) := \sum_{n=0}^{N}\left[1-\left(\frac{n}{N+1}\right)^r\right]n^r a_n \tag{9}$$

координатного ряда (8) распространил Д. Кралик [21, с. 362, теорема 1] с константами, про которые известно, что они суть $O(1)$ при $N \to +\infty$:

$$\sup_{N\in Z_+}\left\|Z_N^r(1)\right\|_{\mathbf{B}} \le O_1(1) \underset{N\to+\infty}{\overset{1\le r<+\infty}{\Leftrightarrow}} \left[\exists s\in\mathbf{B} \ \forall N\in Z_+ \ \left\|s - Z_N^r(8)\right\|_{\mathbf{B}} \le \frac{O_2(1)}{(N+1)^r}\right]. \tag{10}$$

Применениям теорем Д. Алексича 1, 2 и теоремы Д. Кралика (10) в теории приближений посвящены обзоры на английском [22], немецком [23] и венгерском [24] языках.

И. Йо, ученик В. А. Ильина, доказал теоремы типов 1, 2 и (10) в случае конечного промежутка для рядов Фурье по функциям Уолша в нумерации Пэли [25; с. 251, теорема 4 (средние Фейера); с. 252—253, теорема 4′ (средние Зигмунда натурального порядка $r \ge 1$)] и в случае бесконечного промежутка для рядов Фурье по многочленам Эрмита [26; с. 176, теорема 2 (средние Зигмунда дробного порядка $r = 0{,}5$)]. В двух последних публикациях [25, с. 243; 26; с. 169] указаны работы, в которых получены теоремы типа Д. Алексича для рядов Фурье и по другим системам ортогональных функций. И. Йо предупреждал автора о безупречных с точки зрения формальной логики публикациях для бесконечного промежутка, которые не учитывают физическую реальность: свет распространяется не мгновенно, а с конечной скоростью. Иными словами, передача воздействия на бесконечность физически неосуществима.

Автор уточнил импликацию «$\Rightarrow$» (10) со значением константы, которая в частном случае средних Фейера $\sigma_N = Z_N^1$ равна константе 3 [27, с. 32, теорема 3, с. 34—35], и распространил теорему 2 Д. Алексича на матричные средние M_N [27, с. 33, теорема 4, с. 35].

Основная часть. С помощью комплексной двойной последовательности $\left(d_\nu(N)\right)_{(N,\nu)\in Z_+\times Z_1}$, где номер строки N принимает неотрицательные целые значения $0,1,2,\ldots$, а номер столбца ν принимает натуральные значения $1,2,3,\ldots$:

$$\left(d_\nu(N)\right)_{(N,\nu)\in Z_+\times Z_1} := \begin{pmatrix} d_1(0) & d_2(0) & d_3(0) & \dots \\ d_1(1) & d_2(1) & d_3(1) & \dots \\ d_1(2) & d_2(2) & d_3(2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}_{Z_+\times Z_1}, \tag{11}$$

образуем матричные средние

$$\forall N \in Z_+ \;\; M_N(1) := \sum_{n=0}^{N}\left[1 - \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(N)\left(\frac{n}{N+1}\right)^{\nu}\right] a_n \tag{12}$$

ряда (1).

Если все $d_\nu(N) = 0$, то матричные средние (12) суть частичные суммы:

$$\forall N \in Z_+ \;\; s_N(1) := \sum\nolimits_{n=0}^{N} a_n . \tag{13}$$

Если при натуральном $r \in Z_1 := \{1, 2, 3, \dots\}$ члены двойной последовательности (11) таковы, что в r-том столбце единицы: $\forall N \in Z_+ \;\; d_r(N) = 1$, а в остальных столбцах нули: $\forall N \in Z_+ \;\; \forall \nu \in Z_1 \setminus \{r\} \;\; d_\nu(N) = 0$, то матричные средние (12) суть (7), т. е. средние Зигмунда порядка r ряда (1).

Для средних В. Рогозинского [28, с. 113, (13*)] $\forall N \in Z_+ \;\; R_N(1) := \sum_{n=0}^{N}\left[\cos\frac{\pi n}{2(N+1)}\right] a_n$ ряда (1) с помощью канонического разложения функции косинус в степенной ряд получаем, что члены вещественной двойной последовательности (11) с нечётными номерами столбцов $d_{2\nu-1}(N) = 0$, а с чётными номерами столбцов $d_{2\nu}(N) = \left[(-1)^{\nu-1}/(2\nu)!\right](\pi/2)^{2\nu}$ $(\nu \in Z_1)$.

Для визуально близких к $R_N(1)$ средних С. Н. Бернштейна [29, с. 523, (2)] $\forall N \in Z_+$ $B_N(1) := \sum_{n=0}^{N}\left(\cos\frac{\pi n}{2N+1}\right) a_n$ ряда (1) члены вещественной двойной последовательности (11) с нечётными номерами столбцов также равны нулю: $d_{2\nu-1}(N) = 0$, а с чётными номерами столбцов уже явно зависят от номера строки N: $d_{2\nu}(N) = \left[(-1)^{\nu-1}/(2\nu)!\right]\{(\pi/2)[1 + 1/(2N+1)]\}^{2\nu}$ $(\nu \in Z_1)$.

Теорема 3. *Пусть комплексная двойная последовательность (11) удовлетворяет условию* $\sup_{N\in Z_+} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu\left|d_\nu(N)\right| =: A_1 < +\infty$. *И пусть средние Зигмунда (7) натурального порядка* $r \in Z_1$ *ряда (1) сходятся в банаховом пространстве* $\mathbf{B}$ *к элементу* $\tau \in \mathbf{B}$: $\lim_{N\to+\infty}\left\|\tau - Z_N^r(1)\right\|_{\mathbf{B}} = 0$. *Тогда для суммируемости со скоростью элемента* τ *матричными средними (12) ряда (1) имеем* $(N \ge 3)$ *следующую оценку сверху посредством суммы суммируемостей со скоростями элемента* τ *частичными суммами (13) ряда (1) и средними Зигмунда (7) натурального порядка* $r \in Z_1$ *ряда (1):*

$$\left\|\tau - M_N(1)\right\|_{\mathbf{B}} \le \left(\left|\mu_{N+1}^{(N)}\right| + \frac{A_1}{N+1}\right)\left\|\tau - s_N(1)\right\|_{\mathbf{B}} + \frac{2^{r-1}}{r} A_1 \left\|\tau - Z_{N-1}^r(1)\right\|_{\mathbf{B}} +$$
$$+\left(\sum_{\nu=1}^{r-1} + \sum_{\nu=r+1}^{+\infty}\right)\frac{\left|d_\nu(N)\right|}{(N+1)^{\nu}}\left[\left|\frac{2^{\nu}-1}{2^{r}-1} - 1\right|\left\|\tau - Z_0^r(1)\right\|_{\mathbf{B}} + \frac{2^{2r-2}}{r}\nu(\nu+r-2)\sum_{n=1}^{N-2}(n+2)^{\nu-1}\left\|\tau - Z_n^r(1)\right\|_{\mathbf{B}}\right],$$

в которой комплексные числа $\mu_{N+1}^{(N)}$ *определены соглашениями* $\forall N \in Z_+ \;\; \mu_{N+1}^{(N)} := 1 - \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(N)$.

Сужение теоремы 3 на конкретное банахово пространство $\mathbf{C}$ всех комплексных чисел с естественными операциями их сложения и умножения и модулем комплексного числа в качестве нормы было получено автором в [30, с. 17]. Доказательство теоремы 3 не приводится, поскольку схема доказательства [30, с. 17—19] проходит mutatis mutandis (с очевидными изменениями).

Ниже вместо абстрактного банахова постранства $\mathbf{B}$ будем рассматривать конкретное банахово пространство $\mathbf{C}(T)$ всех непрерывных на вещественной прямой R и периодических с периодом 2π функций с равномерной нормой на отрезке длины периода: $\left\|f(z)\right\|_{\mathbf{C}(T)} := \max_{-\pi\le x\le\pi}\left|f(x)\right|$.

Для средних В. Рогозинского тригонометрических рядов Фурье функций $f \in \mathbf{L}^1(T)$ известна [31, с. 47, (2.8), с. 50, 2.7] следующая теорема.

Теорема 4. *Для суммируемости со скоростью (summabilty with speed)*

$$\max_{-\pi\le x\le\pi}\left| f(x)-\sum_{n=-N}^{N}\left[\cos\frac{\pi\, n}{2(N+1)}\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-i n t}\, dt\right]\cdot e^{i n x}\right| = O\left(\frac{1}{N^2}\right),\ N\to+\infty, \tag{14}$$

необходимо и достаточно условие: у абсолютно непрерывной функции $f\in(\mathbf{AC}\setminus\{\mathrm{const}\})(T)$ *производная первого порядка* f' *абсолютно непрерывная и производная второго порядка* f'' *существенно-ограниченная:* $f'\in\mathbf{AC}(T)\ \ \&\ \ f''\in\mathbf{L}^{\infty}(T)$.

Порядок главного члена константы в правой части неравенства (14) выписан в [32, гл. 4, § 4.3] через несобственный интеграл от подынтегральной функции, содержащей синус интегральный.

Теорема 3 может быть применена для доказательство условия достаточности в теореме 4.

Касательно средних С. Н. Бернштейна тригонометрических рядов Фурье функций $f\in\mathbf{L}^1(T)$ нами получен следующий результат.

Теорема 5. *Для суммируемости со скоростью*

$$\max_{-\pi\le x\le\pi}\left| f(x)-\sum_{n=-N}^{N}\left(\cos\frac{\pi\, n}{2N+1}\right)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-i n t}\, dt\right]\cdot e^{i n x}\right| = O\left(\frac{1}{N}\right),\ N\to+\infty, \tag{15}$$

необходимо и достаточно условие: у абсолютно непрерывной функции $f\in(\mathbf{AC}\setminus\{\mathrm{const}\})(T)$ *производная первого порядка* f' *существенно-ограниченная:* $f'\in\mathbf{L}^{\infty}(T)$.

Заключение. В теореме 3 суммируемость со скоростью (summabilty with speed) матричными средними (12) рядов (1) в абстрактном банаховом пространстве **B** оценена сверху посредством сумм суммируемости со скоростью частичными суммами рассматриваемых рядов и суммируемости со скоростью средними Зигмунда этих рядов. Теорема 3 применена к средним В. Рогозинского и к средним С. Н. Бернштейна тригонометрических рядов Фурье в конкретном банаховом пространстве $\mathbf{C}(T)$ всех непрерывных на вещественной прямой R и периодических с периодом 2π функций с равномерной нормой на отрезке длины периода: $\| f\|_{\mathbf{C}(T)} := \max_{-\pi\le x\le\pi}| f(x)|$.

В публикациях [33, с. 480, теорема 5; 34, с. 354, теорема 2; 35, с. 432, 5)] ошибочно утверждается, что для суммируемости со скоростью средними С. Н. Бернштейна необходимо и достаточно условие теоремы 4: $f\in(\mathbf{AC}\setminus\{\mathrm{const}\})(T)\ \ \&\ \ f'\in\mathbf{AC}(T)\ \ \&\ \ f''\in\mathbf{L}^{\infty}(T)$.

Предположение о суммируемости со скоростью (15) влечёт

$$E_N f := \inf_{\gamma_n\in C}\max_{-\pi\le x\le\pi}\left| f(x)-\sum_{n=-N}^{N}\gamma_n\, e^{i n x}\right| = O\left(\frac{1}{N}\right),\ N\to+\infty.$$

Отсюда на основании обратной теоремы А. Зигмунда [36, с. 144–145, теорема 2; 37, с. 195, теорема (13.20); 38, с. 350, 6.1.4] заключаем: во-первых, функция $f\in\mathbf{C}(T)$, во-вторых, она удовлетворяет условию

$$\max_{-\pi\le x\le\pi}\left| f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\right| = O(h),\ h\to 0. \tag{16}$$

(Функция К. Вейерштрасса $W(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}\cos 2^n x\in\mathbf{C}(T)$ удовлетворяет условию А. Зигмунда (16) и ни в одной точке вещественной прямой R не имеет производной.)

Итак, предположение о суммируемости со скоростью (15) необходимо влечёт выполнение условия А. Зигмунда (16).

В случае $f\in(\mathbf{AC}\setminus\{\mathrm{const}\})(T)$ для выполнения условия А. Зигмунда (16) необходима существенная-ограниченность производной $f'\in\mathbf{L}^{\infty}(T)$:

$$\max_{-\pi\le x\le\pi}\left| f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\right| \le \max_{-\pi\le x\le\pi}\left| f(x+h)-f(x)\right| + \max_{-\pi\le x\le\pi}\left| f(x-h)-f(x)\right| \le$$
$$\le \left\| f'\right\|_{\mathbf{L}^{\infty}(T)}\cdot|h| + \left\| f'\right\|_{\mathbf{L}^{\infty}(T)}\cdot|h| = 2\left\| f'\right\|_{\mathbf{L}^{\infty}(T)}\cdot|h| .$$

Список цитируемых источников

1. *Alexits, G.* On the order of approximation by the Cesàro means of Fourier series / G. Alexits // Approximation theory : (Selected papers) / G. Alexits. — Budapest, 1983. — P. 41—50.

2. *Харди, Г.* Расходящиеся ряды / Г. Харди ; перевод с англ. Д. А. Райкова ; с предисловием и обзорной статьёй С. Б. Стечкина. — М. : ИИЛ, 1951. — 504 с. — Перевод изд.: Divergent Series / G. H. Hardy. — Oxford : Clarendon Press, 1949. — XVI, 396 p.

3. *Эдвардс, Р.* Ряды Фурье в современном изложении : в 2 т. / Р. Эдвардс. — М. : Мир, 1985. — Т. 1. — 264 с.

4. *Эдвардс, Р.* Ряды Фурье в современном изложении : в 2 т. / Р. Эдвардс. — М. : Мир, 1985. — Т. 2. — 400 с.

5. *Sz. Nagy, B. v.* Approximation der Funktionen durch die arithmetischen Mittel ihrer Fourierschen Reihen / Béla v. Sz. Nagy // Acta scientiarum mathematicarum (Szeged). — 1946—1948. — Vol. 11. — P. 71—84.

6. *Стечкин, С. Б.* Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций / С. Б. Стечкин // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1953. — Т. 17, № 5. — С. 461—472.

7. *Кангро, Г.* О множителях суммируемости типа Бора — Харди для заданной скорости. I / Г. Кангро // Изв. АН ЭстССР. Физ., мат. — 1969. — Т. 18, № 2. — С. 137—146.

8. *Кангро, Г.* Множители суммируемости для рядов, λ-ограниченных методами Риса и Чезаро / Г. Кангро // Уч. зап. Тартуского гос. ун-та. — 1971. — Вып. 277. — С. 136—154.

9. *Кангро, Г.* Тауберова теорема с остаточным членом для метода Риса / Г. Кангро // Уч. зап. Тартуского гос. ун-та. — 1971. — Вып. 277. — С. 155—160.

10. *Кангро, Г.* О λ-совершенности методов суммирования и ее применениях. I / Г. Кангро // Изв. АН ЭстССР. Физ., мат. — 1971. — Т. 20, № 2. — С. 111—120.

11. *Кангро, Г.* О λ-совершенности методов суммирования и ее применениях. II / Г. Кангро // Изв. АН ЭстССР. Физ., мат. — 1971. — Т. 20, № 4. — С. 375—385.

12. *Кангро, Г.* Тауберова теорема с остаточным членом для метода Риса. II / Г. Кангро // Уч. зап. Тартуского гос. ун-та. — 1972. — Вып. 305. — С. 156—166.

13. *Saealle, N.* Riesz summability with speed of orthogonal series / N. Saealle, H. Türnpu // Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica. — 2001. — Tome 5. — P. 3—14.

14. *Saealle, N.* Convergence and summability with speed of functional series / N. Saealle // Dissertationes Mathematicae Universitatis Tartuensis. — 2005. — № 40. — P. 1—88.

15. *Alexits, G.,* Über Approximationen mit den arithmetischen Mitteln allgemeiner Orthogonalreihen / G. Alexits, D. Králik // Approximation theory : (Selected papers) / G. Alexits. — Budapest, 1983. — P. 88—100.

16. *Кангро, Г.* О множителях суммируемости типа Бора — Харди для заданной скорости. II / Г. Кангро // Изв. АН ЭстССР. Физ., мат. — 1969. — Т. 18, № 4. — С. 387—395.

17. *Мартин, Э.* О суммируемости со скоростью ортогональных рядов методами Эйлера — Кноппа и Чезаро / Э. Мартин // Уч. зап. Тартуского гос. ун-та. — 1972. — Вып. 305. — С. 222—237.

18. *Кангро, Г. Ф.* Теория суммируемости последовательностей и рядов / Г. Ф. Кангро // Математический анализ. — М., 1974. — Т. 12. — С. 5—70. — (Итоги науки и техники).

19. *Барон, С. А.* Введение в теорию суммируемости рядов / С. А. Барон. — Изд. 2-е. — Таллин : Валгус, 1977. — 280 с.

20. *Alexits, G.* Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction périodique par les sommes de Fejér / G. Alexits // Approximation theory : (Selected papers) / G. Alexits. — Budapest, 1983. — P. 59—70.

21. *Králik, D.* Über die approximationstheoretische Charakterisierung gewisser Funktionenklassen mit Hilfe der Rieszschen Mittel von Fourierreihen / D. Králik // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1969. — Vol. 20, № 3—4. — P. 361—373.

22. *Alexits, G.* An elementary method in the constructive theory of functions / G. Alexits // Approximation theory : (Selected papers) / G. Alexits. — Budapest, 1983. — P. 203—207.

23. *Alexits, G.* Über eine elementare reihentheoretische Methode in der Approximationstheorie / G. Alexits // Approximation theory : (Selected papers) / G. Alexits. — Budapest, 1983. — P. 278—285.

24. *Totik, V.* Az approximációelmélet ún elemi módszeréről / V. Totik // Matematikai Lapok. — 1983. — Vol. 31, № 1—3. — P. 175—190.

25. *Joó, I.* On some problems of M. Horváth (saturation theorems for Walsh — Fourier expansions) / I. Joó // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. — 1988. — Tomus 31. — P. 243—260 (1989).

26. *Joó, I.* Saturation theorems for Hermite — Fourier series / I. Joó // Acta Math. Hungar. — 1991. — Vol. 57, № 1—2. — P. 169—179.

27. *Бруй, И. Н.* Скорость суммируемости средними Зигмунда рядов в банаховом пространстве / И. Н. Бруй // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. — 2020. — Т. 10, № 1. — С. 31—37.

28. *Rogosinski, W.* Über die Abschnitte trigonometrischer Reihen / W. Rogosinski // Mathematische Annalen. — 1926. — 95. Band. — S. 110—134.

29. *Бернштейн, С. Н.* Об одном методе суммирования тригонометрических рядов / С. Н. Бернштейн // Собр. соч. : в 4 т. — М., 1952. — Том I : Конструктивная теория функций [1905—1930]. — С. 523—525.

30. *Бруй, И. Н.* Оценка скорости суммируемости через скорость приближения частичными суммами и средними Зигмунда / И. Н. Бруй // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. — 2014. — № 3 (180). — С. 15—26.

31. *Степанец, А. И.* Классификация и приближение периодических функций / А. И. Степанец. — Киев : Наукова думка, 1987. — 268 с.

32. *Корнейчук, Н. П.* Точные константы в теории приближения / Н. П. Корнейчук. — М. : Наука, 1987. — 424 с.

33. *Sunouchi, G.* On determination of the class of saturation in the theory of approximation of functions / G. Sunouchi, C. Watari // Proc. Japan Acad. — 1958. — Vol. 34, № 8. — P. 477—481.

34. *Харшиладзе, Ф. И.* Классы насыщения для некоторых процессов суммирования / Ф. И. Харшиладзе // Доклады Академии наук СССР. — 1958. — Т. 122, № 3. — С. 352—355.

35. *Турецкий, А. Х.* О классах насыщения в пространстве *C* / А. Х. Турецкий // Изв. Акад. наук СССР. Серия математическая. — 1961. — Т. 25, № 3. — С. 411—442.

36. *Натансон, И. П.* Конструктивная теория функций / И. П. Натансон. — М. ; Л. : ГИТТЛ, 1949. — 688 с.

37. *Зигмунд, А.* Тригонометрические ряды : в 2 т. / А. Зигмунд. — М. : Мир, 1965. — Т. I. — 616 с.

38. *Тиман, А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного / А. Ф. Тиман. — М. : ГИФМЛ, 1960. — 624 с.