

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Барановичский государственный университет»
Инженерный факультет
Факультет экономики и права

ЭКОНОМИКА, ТЕХНОЛОГИИ И ПРАВО В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ

Материалы Международной научно-практической конференции
факультета экономики и права и инженерного факультета

(Барановичи, 20 октября 2016 года)

Барановичи
БарГУ
2017

УДК 001(063)

В сборнике представлены материалы, затрагивающие широкий круг вопросов, посвященных эффективному экономическому развитию организаций и регионов, маркетингу и менеджменту. Особое внимание уделено проблемам применения и совершенствования национального законодательства. Раскрываются теоретические и практические результаты научного поиска авторов по инженерному профилю, затрагивается проблемное поле современной физики и математики. Материалы носят как теоретический, так и практико-ориентированный характер

Издание предназначено для преподавателей, студентов, магистрантов, аспирантов и научных работников.

Редакционная коллегия:

А. В. Никишова (гл. ред.), Ю. Е. Горбач, В. Н. Кременевская (отв. секретари),
В. Н. Познякевич, О. В. Павловская, Г. Я. Житкевич, М. В. Андрияшко, О. И. Людвигевич, О. И. Наранович,
А. К. Гавриленя, И. Н. Бруй, В. А. Дремук

Рецензенты:

кандидат экономических наук, доцент, доцент кафедры международных экономических отношений Белорусского государственного университета Е. В. Бертош,
доктор технических наук, заведующий лабораторией обработки металлов давлением В. А. Томило

К ПОНЯТИЮ СОПРЯЖЁННОСТИ В ТЕОРИИ РЯДОВ ПО МНОГОЧЛЕНАМ ФАБЕРА

Введение. В теории рядов по многочленам Фабера мы стремимся следовать обозначениям и терминологии монографии В. К. Дзядька [1]; в остальных обозначениях мы стремимся следовать двухтомнику Р. Эдвардса [2; 3]. Соглашение $+\pi = \pi$ не распространяется на символы $+\infty$ и ∞ ; последние имеют у нас разный смысл. Вещественная прямая R пополняется двумя несобственными элементами $-\infty$ (отрицательная бесконечность) и $+\infty$ (положительная бесконечность). Комплексная плоскость C пополняется единственным несобственным элементом ∞ (бесконечно удалённая точка). Оператор присваивания $:=$ означает, что выражению справа от него присвоено обозначение, стоящее слева. Аналогичный смысл имеет символ $\hat{=}$.

Если функция $f \in L^1(T)$, то двусторонняя числовая последовательность $\left(f^\wedge(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right)_{n=-\infty}^{+\infty}$ называется последовательностью комплексных коэффициентов Фурье функции f , а двусторонний функциональный ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f^\wedge(n) \cdot e^{inx} \quad (1)$$

называется комплексным тригонометрическим рядом Фурье функции f .

Тригонометрический ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i \cdot \operatorname{sgn} n) f^\wedge(n) \cdot e^{inx} \quad (2)$$

называется сопряжённым с рядом (1). Если существует функция $f^\sim \in L^1(T)$, для которой ряд (2) является её тригонометрическим рядом Фурье $\left[\forall n \in Z (f^\sim)^\wedge(n) = (-i \cdot \operatorname{sgn} n) f^\wedge(n) \right]$, то она называется тригонометрически сопряжённой к функции f .

Условиям, при выполнении которых тригонометрический ряд является рядом Фурье функции из определённого пространства, посвящён обзор автора [4].

Понятие сопряжённости играет существенную роль в теории приближений, о чём свидетельствует приводимый ниже результат [5, с. 169, теорема 1; 6, с. 19, (15)].

Теорема 1. Пусть натуральное число $r \geq 2$. Если на вещественной прямой R периодическая с периодом 2π функция f абсолютно непрерывно дифференцируема $r-1$ раз и её производная r -го порядка существенно ограничена, то для скорости приближения этой функции на R средними Фейера её комплексного тригонометрического ряда Фурье имеет место следующая асимптотическая формула М. Заманского:

$$f(x) - \sum_{n=-N}^N \left(1 - \left| \frac{n}{N+1} \right| \right) f^\wedge(n) \cdot e^{inx} = \frac{[f^\sim(x)]'}{N+1} + O\left(\frac{1}{N^r}\right), \quad N \rightarrow +\infty, \quad (3)$$

где O — оценка равномерная на R .

Пусть $C(T)$ есть множество всех на вещественной прямой R непрерывных и периодических с периодом 2π функций с нормой $\|f\|_{C(T)} := \max_{-\pi \leq x \leq \pi} |f(x)|$. Формула (3) наводит на следующий результат Д. Алексича [7, с. 50, VII; 8, с. 422, случай 2); 9, с. 120, пример 1].

Теорема 2. В пространстве $C(T)$ приближение функций средними Фейера её тригонометрического ряда Фурье насыщается с приближением насыщения порядка $\frac{1}{N}$ при $N \rightarrow +\infty$ и с классом насыщения, состоящим из

всех тех функций $f \in C(T)$, для которых функция f^\sim , тригонометрически сопряжённая к f , абсолютно непрерывная и имеет существенно-ограниченную производную: $f^\sim \in AC(T) \ \& \ (f^\sim)' \in L^\infty(T)$.

Понятие сопряжённого ряда и понятие сопряжённой функции ввели: 1) для ультрасферических рядов — Макенхоупт и Стейн [10, с. 24, (2.4)], 2) для рядов Эрмита — Макенхоупт [11, с. 256, теорема 2, (с); 12, с. 170, (3); 13, с. 112, (51)], 3) для рядов Лагерра — Макенхоупт [14, с. 416, теорема 2, (с)], 4) для рядов Уолша — Хант [15, с. 29, (3.5); 16, с. 248, (22)], 5) для рядов Фурье по многочленам П. Л. Чебышёва первого рода — П. Л. Бутцер и Р. Л. Штэнс [17, с. 56, (4.9)], 6) для рядов Дирихле — И. Йо [18], 7) для разложений Штурма — Лиувилля — также И. Йо [19].

Ряды Фабера — это конструкция, частными случаями которой являются: в случае замкнутого единичного круга $|z| \leq 1$ — ряды Тейлора, в случае отрезка $[-1; 1]$ — ряды Фурье по многочленам П. Л. Чебышёва первого рода.

Настоящая работа находится в русле перечисленных выше исследований о понятии сопряжённости для рядов Фурье по конкретным ортогональным системам функций.

В ней вводится понятие сопряжённости для рядов по многочленам Фабера, порождённым в следующем п. 2 замкнутым единичным кругом $|z| \leq 1$, в п. 3 — отрезком $[-1; 1]$ и в п. 6 — яблокоподобной областью комплексной плоскости.

2. Случай замкнутого единичного круга $|z| \leq 1$ комплексной плоскости. Функция $w = \Phi(z) := z$ конформно и однолистно отображает неограниченную внешность $|z| > 1$ единичной окружности $|z| = 1$ в комплексной z -плоскости на неограниченную внешность $|w| > 1$ единичной окружности $|w| = 1$ в комплексной w -плоскости; $\Phi(\infty) = \infty$. В этом случае последовательность многочленов Фабера для ограниченного замкнутого единичного круга $|z| \leq 1$ есть $F_0(|z| \leq 1, z) = 1$, $F_1(|z| \leq 1, z) = z$, $F_2(|z| \leq 1, z) = z^2$, ..., $F_n(|z| \leq 1, z) = z^n$, ... [1, с. 350, пример 1; 6, с. 24; 20, с. 16, пример 1; 21, с. 55, пример 1].

Функция $w = \varphi(z) := \frac{1}{z}$ конформно и однолистно отображает ограниченную внутренность $|z| < 1$ единичной окружности $|z| = 1$ в комплексной z -плоскости на неограниченную внешность $|w| > 1$ единичной окружности $|w| = 1$ в комплексной w -плоскости; $\varphi(0) = \infty$. Тогда последовательность аналогов многочленов Фабера для неограниченной замкнутой внешности $|z| \geq 1$ единичной окружности $|z| = 1$ есть $f_1(|z| \geq 1, z) = \frac{1}{z}$, $f_2(|z| \geq 1, z) = \frac{1}{z^2}$, $f_3(|z| \geq 1, z) = \frac{1}{z^3}$, ..., $f_n(|z| \geq 1, z) = \frac{1}{z^n}$, ... [1, с. 376].

Очевидно, что при любом натуральном n аналог многочлена Фабера $f_n(|z| \geq 1, z) = F_n(|z| \leq 1, \frac{1}{z})$.

В точках $z = 1$ и $z = -1$, как и в остальных точках единичной окружности $|z| = 1$, существует касательная, т. е. все внешние углы имеют раствор π .

Если аналитическая в единичном круге $|z| < 1$ функция $f(z)$ принадлежит пространству Харди $H^1(|z| < 1)$, то сложная функция $f(e^{ix}) \in L^1(T)$ имеет комплексный тригонометрический ряд Фурье степенного типа:

$$f(e^{ix}) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt \right] \cdot e^{inx}.$$

Тогда тригонометрически сопряжённая функция $[f(e^{ix})]^\sim$ имеет комплексный тригонометрический ряд Фурье тоже степенного типа: $[f(e^{ix})]^\sim \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \left[-i \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt \right] \cdot e^{inx}$.

Итак, в рассматриваемом случае тригонометрически сопряжённая функция $[f(e^{ix})]^\sim$ выражается через функцию $f(e^{ix})$ следующим образом: $[f(e^{ix})]^\sim = -i \left[f(e^{ix}) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) dt \right]$.

Так как производная $\left\{ [f(e^{ix})]^\sim \right\}' = -i f'(e^{ix}) \cdot e^{ix} \cdot i = e^{ix} \cdot f'(e^{ix})$, то асимптотическая формула М. Заманского (3) наводит на нижеприводимый результат [6, с. 22, (23); 22, с. 466, (2.3); 23, с. 751].

Теорема 3. Если у аналитической в единичном круге $|z| < 1$ функции $f(z)$ производная порядка $r=2, 3, 4, \dots$ ограничена: $f^{(r)} \in \mathbf{H}^\infty(|z| < 1)$, то для скорости приближения этой функции на замкнутом единичном круге $|z| \leq 1$ средними Фейера её ряда Тейлора имеет место следующая асимптотическая формула С. Б. Стечкина:

$$f(z) - \sum_{n=0}^N \left(1 - \frac{n}{N+1}\right) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{f(\tau)}{\tau^{n+1}} d\tau \right] \cdot z^n = \frac{z \cdot f'(z)}{N+1} + O\left(\frac{1}{N^r}\right), \quad N \rightarrow +\infty, \quad (4)$$

где O — оценка равномерная на $|z| \leq 1$.

Выше очевидно, что в случае $f^{(r)} \in \mathbf{H}^\infty(|z| < 1)$, где $r=2, 3, 4, \dots$, функция $f(z)$ и её производная $f'(z)$ непрерывно продолжимы на единичную окружность $|z|=1$.

Асимптотическая формула (3) получена М. Заманским в интегральной технике, а формула (4) получена С. Б. Стечкиным в технике рядов.

Фейер первым применил теорию суммируемости расходящихся числовых рядов к суммированию тригонометрических рядов Фурье [24; 25, с. 134]. В работе С. Б. Стечкина [22] вычленены в качестве вспомогательных результаты, которые относятся к числовым рядам.

Пусть $\mathbf{A}(|z| \leq 1)$ есть множество всех непрерывных на замкнутом единичном круге $|z| \leq 1$ и аналитических в единичном круге $|z| < 1$ функций с нормой $\|f\|_{\mathbf{A}(|z| \leq 1)} := \max_{|z| \leq 1} |f(z)|$. Формула (4) наводит на следующий результат также Д. Алексича [7, с. 50, VIII; 6, с. 24].

Теорема 4. В пространстве $\mathbf{A}(|z| \leq 1)$ приближение функций средними Фейера её ряда Тейлора насыщаемо с приближением насыщения порядка $\frac{1}{N}$ при $N \rightarrow +\infty$ и с классом насыщения, состоящим из всех тех функций $f \in \mathbf{A}(|z| \leq 1)$, производная которых ограничена в единичном круге: $f' \in \mathbf{H}^\infty(|z| < 1)$.

Выше также очевидно, что в случае $f' \in \mathbf{H}^\infty(|z| < 1)$ телесная функция $f(z)$ непрерывно продолжима на единичную окружность $|z|=1$ и контурная функция $f(e^{ix})$ абсолютно непрерывная на вещественной прямой R : $f(e^{ix}) \in \mathbf{AC}(T)$.

Обращаем внимание на то, что класс насыщения в теореме 2 описывается через тригонометрически сопряжённую функцию f^\sim , а в теореме 4 — через исходную функцию f .

Предыдущая теорема 4 была распространена автором на ряды Фабера на замкнутых жордановых областях комплексной плоскости сначала (по традиционной схеме) с аналитической границей [26, с. 4—5; 27, с. 49—50, теорема], а затем (по другой схеме) с гладкой границей, которая удовлетворяет дополнительному ограничению С. Я. Альпера на её гладкость [28, с. 8, теорема; 29, с. 19, замечание 1; 30, с. 70, следствие].

3. Случай отрезка $[-1, 1]$ вещественной оси комплексной плоскости. В данном пункте нам удобно пользоваться рядами Фурье в вещественной форме. Если функция $f \in \mathbf{L}^1(T)$, то числовая последовательность

$\left(a_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt \right)_{n=0}^{+\infty}$ называется последовательностью косинус-коэффициентов Фурье функции f ,

числовая последовательность $\left(b_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt \right)_{n=1}^{+\infty}$ называется последовательностью синус-коэффициентов Фурье функции f , а функциональный ряд

$$\frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(f) \cdot \cos nx + b_n(f) \cdot \sin nx] \quad (5)$$

называется тригонометрическим рядом Фурье функции f . Тригонометрический ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} [-b_n(f) \cdot \cos nx + a_n(f) \cdot \sin nx]$ называется сопряжённым с рядом (5).

Если функция $f(z)$ непрерывная на отрезке $[-1; 1]$, то сложная функция $f(\cos x)$ на вещественной прямой R непрерывная, периодическая с периодом 2π и чётная: $f[\cos(-x)] = f(\cos x)$. Тригонометрический ряд Фурье чётной функции $f(\cos x)$ имеет вид $f(\cos x) \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos t) dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos t) \cos nt dt \right] \cdot \cos nx$, а тригонометрически сопряжённой к ней функции

$$[f(\cos x)]^\sim \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos t) \cos nt dt \right] \cdot \sin nx. \quad (6)$$

При надлежащих предположениях асимптотическая формула М. Заманского (3) принимает следующий вид:

$$\forall x \in R \quad f(\cos x) - \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos t) dt + \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{n}{N+1} \right) \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos t) \cos nt dt \right] \cdot \cos nx \right\} = \frac{\{[f(\cos x)]^\sim\}'}{N+1} + O\left(\frac{1}{N^r}\right), \quad N \rightarrow +\infty. \quad (7)$$

По определению $\forall z \in [-1; 1]$ многочлены П. Л. Чебышёва первого рода $\forall n \in Z_+$ $T_n(z) := \cos(n \arccos z)$. Так как при замене переменной интегрирования $t = \arccos \zeta$ дифференциал $dt = \frac{-d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$, то из последней формулы (7) заменой $x = \arccos z$ получаем следующую асимптотическую формулу для скорости приближения на отрезке $[-1; 1]$ функции $f(z)$ средними Фейера её ряда Фурье по многочленам Чебышёва первого рода:

$$f(z) - \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\zeta + \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{n}{N+1} \right) \left[\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} T_n(\zeta) d\zeta \right] \cdot T_n(z) \right\} = \frac{\{[f(\cos x)]^\sim\}' \Big|_{x=\arccos z}}{N+1} + O\left(\frac{1}{N^r}\right), \quad N \rightarrow +\infty.$$

Согласно определению $\forall z \in [-1; 1]$ многочлены П. Л. Чебышёва второго рода $\forall n \in Z_1$ $U_{n-1}(z) := \frac{\sin(n \arccos z)}{\sqrt{1-z^2}}$.

Поскольку $\sin(n \arccos z) = \sqrt{1-z^2} U_{n-1}(z)$, то из (6) приходим к понятию сопряжённого ряда П. Л. Бутцера и Р. Л. Штэнса [17, с. 56, (4.9)]

$$[f(\cos x)]^\sim \Big|_{x=\arccos z} \sim \sqrt{1-z^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} T_n(\zeta) d\zeta \right] \cdot U_{n-1}(z). \quad (8)$$

Отсюда уже видна особая роль точек $z = 1$ и $z = -1$ при приближении на отрезке $[-1; 1]$ функций многочленами [1, с. 334; 31, с. 259, (3.1); 32, с. 158]. В точках $z = 1$ и $z = -1$ отрезок $[-1; 1]$ имеет внешние углы раствора 2π .

Функция Н. Е. Жуковского $z = \Psi(w) := \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right)$ конформно и однолистно отображает неограниченную внешность $|w| > 1$ единичной окружности $|w| = 1$ в комплексной w -плоскости на неограниченную внешность отрезка $[-1; 1]$ вещественной оси в комплексной z -плоскости; $\Psi(\infty) = \infty$. Обратной к функции Н. Е. Жуковского $z = \Psi(w) := \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right)$ является функция $w = \Phi(z) := z + \sqrt{z^2 - 1}$, где для двузначного корня квадратного берётся та ветвь, для которой $\sqrt{1} = 1$. Для выбранной ветви $\sqrt{-1} = i$.

Для отрезка $[-1; 1]$ последовательность многочленов Фабера есть $F_0(-1 \leq z \leq 1, z) = 1$, $F_1(-1 \leq z \leq 1, z) = 2T_1(z)$, $F_2(-1 \leq z \leq 1, z) = 2T_2(z)$, ..., $F_n(-1 \leq z \leq 1, z) = 2T_n(z)$, ... [1, с. 353; 6, с. 26; 20, с. 17, теорема; 21, с. 56, (21)].

Пусть $C[-1; 1]$ есть множество всех непрерывных на отрезке $[-1; 1]$ функций с нормой $\|f\|_{C[-1,1]} := \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|$.

Если функция $f \in C[-1; 1]$, то её коэффициенты Фабера

$$\forall n \in Z_+ \quad c_n(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{f[\Psi(\tau)]}{\tau^{n+1}} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f\left[\frac{1}{2}\left(\frac{e^{it} + 1}{e^{it}}\right)\right]}{e^{j(n+1)t}} d(e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(\cos t) e^{-int} dt + \int_0^{\pi} f(\cos t) e^{-int} dt \right].$$

В первом интеграле предыдущей правой части делаем замену переменной интегрирования $t = -u$: $\int_{-\pi}^0 f(\cos t) e^{-int} dt = \int_0^{\pi} f(\cos u) e^{inu} du$. Тогда коэффициенты Фабера функции $f \in C[-1; 1]$

$$\forall n \in Z_+ \quad c_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos t) \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos t) \cos nt dt.$$

Отсюда заменой переменной интегрирования $t = \arccos \zeta$ получаем

$$\forall n \in Z_+ \quad c_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_1^{-1} f[\cos(\arccos \zeta)] \cos(n \arccos \zeta) \frac{-d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} T_n(\zeta) d\zeta.$$

Таким образом, для функции $f \in C[-1; 1]$ её ряд по многочленам Фабера совпадает с её же рядом Фурье по многочленам Чебышёва первого рода.

Многочлены Чебышёва первого и второго рода связаны соотношением $\forall n \in Z_1 \quad U_{n-1}(z) = \frac{1}{n} T'_n(z)$. По аналогии вводятся многочлены Фабера второго рода: $\forall n \in Z_1 \quad B_{n-1}(z) := \frac{1}{n} F'_n(z)$ [21, с. 129, (10)]. Поэтому сопряжённый ряд П. Л. Бутцера и Р. Л. Штэнса (8) может быть записан в следующем виде:

$$[f(\cos x)]^- \Big|_{x = \arccos z} \sim \sqrt{1-z^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{f[\Psi(\tau)]}{\tau^{n+1}} d\tau \right\} \cdot B_{n-1}(-1 \leq z \leq 1, z).$$

Резюмируют этот пункт нижеформулируемые две теоремы.

Теорема 5. Пусть натуральное число $r \geq 2$. Если на отрезке $[-1; 1]$ функция f абсолютно непрерывно дифференцируема $r-1$ раз и её производная r -го порядка существенно-ограничена, то для скорости приближения этой функции на $[-1; 1]$ средними Фейера её ряда по многочленам Фабера имеет место следующая асимптотическая формула:

$$f(z) - \sum_{n=0}^N \left(1 - \frac{n}{N+1}\right) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{f[\Psi(\tau)]}{\tau^{n+1}} d\tau \right\} \cdot F_n(-1 \leq z \leq 1, z) = \frac{\left\{ [f(\cos x)]^- \right\}' \Big|_{x = \arccos z}}{N+1} + O\left(\frac{1}{N^r}\right), \quad N \rightarrow +\infty,$$

где O — оценка равномерная на $[-1; 1]$.

Теорема 6. В пространстве $C[-1; 1]$ приближение функций средними Фейера её ряда по многочленам Фабера насыщается с приближением насыщения порядка $\frac{1}{N}$ при $N \rightarrow +\infty$ и с классом насыщения, состоящим из всех тех функций $f \in C[-1; 1]$, для которых функция $[f(\cos x)]^-$, тригонометрически сопряжённая к чётной сложной функции $f(\cos x)$, на вещественной прямой R абсолютно непрерывная и имеет существенно-ограниченную производную: $[f(\cos x)]^- \in AC(T)$ & $\left\{ [f(\cos x)]^- \right\}' \in L^\infty(T)$.

Единичная окружность $|\tau|=1$ предыдущего пункта и отрезок $[-1; 1]$ настоящего пункта обладают следующими двумя свойствами: для них 1) вещественная ось $Re z$ является осью симметрии и 2) начало координат $z=0$ является центром симметрии.

В последующих двух пунктах рассматриваются кривые Γ_n и Γ_d , которые перечисленными выше двумя свойствами также обладают.

4. Многочлены Фабера для замкнутой яблокоподобной области комплексной плоскости. Функция Н. Е. Жуковского $z = \Phi(z) := \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ конформно и однолистно отображает неограниченную внешность $|z| > 1$ единичной окружности $|z| = 1$ в комплексной z -плоскости на неограниченную внешность отрезка $[-1; 1]$ вещественной оси в комплексной w -плоскости; $\Phi(\infty) = \infty$. Если комплексную w -плоскость разрезать по вещественной оси от точки $w = 1$ через начало координат $w = 0$ до точки $w = -1$ и если рассматривать получившийся разрез как вырожденный эллипс $\left(\frac{\operatorname{Re} w}{a} \right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im} w}{b} \right)^2 = 1$ с большой полуосью $a = 1$ и малой полуосью $b = 0$, то проходимой от точки $z = 1$ в направлении против хода часовой стрелки единичной окружности $|z| = 1$ будет соответствовать проходимый в том же направлении против хода часовой стрелки вырожденный эллипс: от точки $w = 1$ по верхнему берегу разреза до точки $w = -1$ и от точки $w = -1$ по нижнему берегу разреза до точки $w = 1$.

Функция $w = \Psi(w) := w + \sqrt{w^2 - 1}$, где выбрана та ветвь корня квадратного, для которой $\sqrt{1} = 1$, является обратной к функции Н. Е. Жуковского $z = \Phi(z) := \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$; $\Psi(\infty) = \infty$. Обратная функция $w = \Psi(w) := w + \sqrt{w^2 - 1}$ проходимую против хода часовой стрелки единичную окружность $w = e^{it}$, $-\pi \leq t \leq \pi$, в комплексной w -плоскости переводит в проходимую также против хода часовой стрелки кривую $\Gamma_{\text{я}} := \left\{ z = e^{it} + \sqrt{e^{2it} - 1} : -\pi \leq t \leq \pi \right\}$, которая напоминает контур осевого сечения яблока и которая имеет в z -плоскости вещественную ось $\operatorname{Re} z$ в качестве оси симметрии и начало координат $z = 0$ в качестве центра симметрии. В точках $z = 1$ и $z = -1$ невыпуклая яблокоподобная область $\operatorname{Int} \Gamma_{\text{я}}$ имеет внешние углы раствора $\frac{\pi}{2}$.

Так как по определению [1, с. 350, определение 5; 21, с. 53, (5)] многочлен Фабера n -го ($n \in \mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}$) порядка есть многочленная часть функции $[\Phi(z)]^n = \left[\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right]^n$, то по формуле бинома Ньютона получаем следующую последовательность многочленов Фабера для ограниченной замкнутой яблокоподобной области:

$$\begin{aligned} F_0(\Gamma_{\text{я}} \cup \operatorname{Int} \Gamma_{\text{я}}, z) &= 1, \quad F_1(\Gamma_{\text{я}} \cup \operatorname{Int} \Gamma_{\text{я}}, z) = \frac{z}{2}, \quad F_2(\Gamma_{\text{я}} \cup \operatorname{Int} \Gamma_{\text{я}}, z) = \frac{1}{4}(z^2 + 2), \quad F_3(\Gamma_{\text{я}} \cup \operatorname{Int} \Gamma_{\text{я}}, z) = \frac{1}{8}(z^3 + 3z), \dots, \\ F_{2k}(\Gamma_{\text{я}} \cup \operatorname{Int} \Gamma_{\text{я}}, z) &= \frac{1}{2^{2k}} \left(C_{2k}^0 z^{2k} + C_{2k}^1 z^{2k-2} + C_{2k}^2 z^{2k-4} + \dots + C_{2k}^{k-2} z^4 + C_{2k}^{k-1} z^2 + C_{2k}^k \right), \\ F_{2k+1}(\Gamma_{\text{я}} \cup \operatorname{Int} \Gamma_{\text{я}}, z) &= \frac{1}{2^{2k+1}} \left(C_{2k+1}^0 z^{2k+1} + C_{2k+1}^1 z^{2k-1} + C_{2k+1}^2 z^{2k-3} + \dots + C_{2k+1}^{k-2} z^5 + C_{2k+1}^{k-1} z^3 + C_{2k+1}^k \right), \dots, \end{aligned}$$

где биномиальные коэффициенты $\forall n \in \mathbb{Z}_+, \forall m \in [0, n] \cap \mathbb{Z}_+, C_n^m := \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Многочлены Фабера с чётными номерами являются чётными многочленами: $F_{2k}(\Gamma_{\text{я}} \cup \operatorname{Int} \Gamma_{\text{я}}, -z) = F_{2k}(\Gamma_{\text{я}} \cup \operatorname{Int} \Gamma_{\text{я}}, z)$, при этом в начале координат $F_{2k}(\Gamma_{\text{я}} \cup \operatorname{Int} \Gamma_{\text{я}}, 0) = \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$ [21, с. 111, (16); 27, с. 28; 33, с. 81, (2.5)]. Многочлены Фабера с нечётными номерами являются уже нечётными многочленами: $F_{2k+1}(\Gamma_{\text{я}} \cup \operatorname{Int} \Gamma_{\text{я}}, -z) = -F_{2k+1}(\Gamma_{\text{я}} \cup \operatorname{Int} \Gamma_{\text{я}}, z)$, при этом в начале координат $F_{2k+1}(\Gamma_{\text{я}} \cup \operatorname{Int} \Gamma_{\text{я}}, 0) = 0$ [21, с. 111, (16); 27, с. 28; 33, с. 81, (2.5)].

Ниже нам понадобится следующее интегральное представление [28, с. 12, (4.7); 29, с. 16, (2.6) и замечание в круглых скобках]: $\forall n \in \mathbb{Z}_+, \forall x \in \mathbb{R}$

$$e^{inx} = F_n \left[\Gamma_{\text{я}} \cup \operatorname{Int} \Gamma_{\text{я}}, \Psi(e^{ix}) \right] - \frac{1}{2\pi i} \operatorname{P.V.} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\Psi'(e^{it})}{\Psi(e^{it}) - \Psi(e^{ix})} - \frac{1}{e^{it} - e^{ix}} \right] F_n \left[\Gamma_{\text{я}} \cup \operatorname{Int} \Gamma_{\text{я}}, \Psi(e^{it}) \right] d(e^{it}), \quad (9)$$

где сокращение «P.V.» от английских слов “principal value” означает, что несобственный интеграл справа понимается в смысле главного значения.

5. Аналоги многочленов Фабера для неограниченной замкнутой внешности дископодобной кривой комплексной плоскости. Функция Н. Е. Жуковского $z = \varphi(z) := \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ конформно и однолистно отображает также ограниченную внутренность $|z| < 1$ единичной окружности $|z| = 1$ в комплексной z -плоскости на неограниченную внешность отрезка $[-1; 1]$ вещественной оси в комплексной w -плоскости; $\varphi(0) = \infty$. Проходимой от точки $z = 1$ в положительном направлении (против хода часовой стрелки) единичной окружности $|z| = 1$ будет соответствовать проходимость в противоположном отрицательном направлении (по ходу часовой стрелки) вырожденный эллипс: от точки $w = 1$ по нижнему берегу разреза до точки $w = -1$ и от точки $w = -1$ по верхнему берегу разреза до точки $w = 1$.

Функция $w = \psi(w) := w - \sqrt{w^2 - 1}$, где $\sqrt{1} = 1$, также является обратной к функции Н. Е. Жуковского $z = \varphi(z) := \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$; $\psi(\infty) = 0$. Обратная функция $w = \psi(w) := w - \sqrt{w^2 - 1}$ проходимость в положительном направлении единичную окружность $w = e^{it}$, $-\pi \leq t \leq \pi$, в комплексной w -плоскости переводит в проходимость в противоположном отрицательном направлении кривую $\Gamma_d := \left\{z = e^{it} - \sqrt{e^{2it} - 1} : -\pi \leq t \leq \pi\right\}$, которая напоминает контур осевого сечения диска (симметричной двояковыпуклой линзы) и которая имеет в z -плоскости вещественную ось $\text{Re } z$ в качестве оси симметрии и начало координат $z = 0$ в качестве центра симметрии. В точках $z = 1$ и $z = -1$ выпуклая дископодобная область $\text{Int } \Gamma_d$ имеет внешние углы раствора $3\pi/2$.

Согласно определению [1, с. 375, определение 1] аналог многочлена Фабера n -го ($n \in \mathbb{Z}_1 := \{1, 2, 3, \dots\}$) порядка есть немногочленная часть функции $[\varphi(z)]^n = \left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]^n$. По формуле бинома Ньютона находим следующую последовательность аналогов многочленов Фабера для неограниченной замкнутой внешности дископодобной кривой: $f_1(\Gamma_d \cup \text{Ext } \Gamma_d, z) = \frac{1}{2z}$, $f_2(\Gamma_d \cup \text{Ext } \Gamma_d, z) = \frac{1}{4z^2}$, $f_3(\Gamma_d \cup \text{Ext } \Gamma_d, z) = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{z} + \frac{1}{z^3}\right)$, $f_4(\Gamma_d \cup \text{Ext } \Gamma_d, z) = \frac{1}{16}\left(\frac{4}{z^2} + \frac{1}{z^4}\right)$, ..., $f_{2k}(\Gamma_d \cup \text{Ext } \Gamma_d, z) = \frac{1}{2^{2k}}\left(\frac{C_{2k}^{k+1}}{z^2} + \frac{C_{2k}^{k+2}}{z^4} + \frac{C_{2k}^{k+3}}{z^6} + \dots + \frac{C_{2k}^{2k-2}}{z^{2k-4}} + \frac{C_{2k}^{2k-1}}{z^{2k-2}} + \frac{C_{2k}^{2k}}{z^{2k}}\right)$, ..., $f_{2k+1}(\Gamma_d \cup \text{Ext } \Gamma_d, z) = \frac{1}{2^{2k+1}}\left(\frac{C_{2k+1}^{k+1}}{z} + \frac{C_{2k+1}^{k+2}}{z^3} + \frac{C_{2k+1}^{k+3}}{z^5} + \dots + \frac{C_{2k+1}^{2k-1}}{z^{2k-3}} + \frac{C_{2k+1}^{2k}}{z^{2k-1}} + \frac{C_{2k+1}^{2k+1}}{z^{2k+1}}\right)$, ... Аналоги многочленов Фабера с чётными номерами являются чётными функциями: $f_{2k}(\Gamma_d \cup \text{Ext } \Gamma_d, -z) = f_{2k}(\Gamma_d \cup \text{Ext } \Gamma_d, z)$. Аналоги многочленов Фабера с нечётными номерами являются уже нечётными функциями: $f_{2k+1}(\Gamma_d \cup \text{Ext } \Gamma_d, -z) = -f_{2k+1}(\Gamma_d \cup \text{Ext } \Gamma_d, z)$.

Можно увидеть, что при любом натуральном n аналог многочлена Фабера [1, с. 375]

$$f_n(\Gamma_d \cup \text{Ext } \Gamma_d, z) = F_n\left(\Gamma_y \cup \text{Int } \Gamma_y, \frac{1}{z}\right) - F_n(\Gamma_y \cup \text{Int } \Gamma_y, 0).$$

Отсюда, так как $\frac{1}{\psi(w)} := \frac{1}{w - \sqrt{w^2 - 1}} = \frac{w + \sqrt{w^2 - 1}}{(w - \sqrt{w^2 - 1})(w + \sqrt{w^2 - 1})} = w + \sqrt{w^2 - 1} =: \Psi(w)$, вытекает, что

$$F_n\left[\Gamma_y \cup \text{Int } \Gamma_y, \Psi(e^{ix})\right] = f_n\left[\Gamma_d \cup \text{Ext } \Gamma_d, \psi(e^{ix})\right] + F_n(\Gamma_y \cup \text{Int } \Gamma_y, 0). \quad (10)$$

Из (9) и (10) после замены x на $-x$ получаем следующее интегральное представление: $\forall n \in \mathbb{Z}_1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$e^{-inx} = f_n \left[\Gamma_d \cup \text{Ext} \Gamma_d, \Psi(e^{-ix}) \right] + F_n(\Gamma_y \cup \text{Int} \Gamma_y, 0) - \frac{1}{2\pi i} \text{P.V.} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\Psi(e^{it})}{\Psi(e^{it}) - \Psi(e^{-ix})} - \frac{1}{e^{it} - e^{-ix}} \right] F_n \left[\Gamma_y \cup \text{Int} \Gamma_y, \Psi(e^{it}) \right] d(e^{it}). \quad (11)$$

6. Сопряжённый ряд с рядом по многочленам Фабера. Так как яблокоподобная кривая Γ_y спрямляемая, то мероморфная в неограниченной внешности $|w| > 1$ единичной окружности $|w| = 1$ функция $w = \Psi(w) := w + \sqrt{w^2 - 1}$ с единственным простым полюсом в бесконечно удалённой точке $w = \infty$ непрерывная на неограниченной замкнутой внешности $|w| \geq 1$ и абсолютно непрерывная на единичной окружности $|w| = 1$.

Если функция $f(z)$ непрерывная на яблокоподобной кривой Γ_y , то тогда сложная функция $f[\Psi(e^{ix})] \in \mathbf{C}(T)$ и асимптотическая формула М. Заманского (3) при надлежащих предположениях принимает следующий вид:

$$\forall x \in R \quad f[\Psi(e^{ix})] - \sum_{n=-N}^N \left(1 - \left| \frac{n}{N+1} \right| \right) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\Psi(e^{it})] e^{-int} dt \right\} \cdot e^{inx} = \frac{\left(\left(f[\Psi(e^{ix})] \right)^{\sim} \right)'}{N+1} + O\left(\frac{1}{N^r}\right), \quad N \rightarrow +\infty.$$

Тригонометрически сопряжённая функция $\left\{ f[\Psi(e^{ix})] \right\}^{\sim}$ имеет комплексный тригонометрический ряд Фурье вида

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ -i \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\Psi(e^{it})] e^{-int} dt \right\} \cdot e^{inx} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ i \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\Psi(e^{it})] e^{int} dt \right\} \cdot e^{-inx}.$$

Поэтому интегральные представления (9) и (11) наводят к введению следующего определения.

Определение. Сопряжённым с рядом по многочленам Фабера

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{f[\Psi(\tau)]}{\tau^{n+1}} d\tau \right\} \cdot F_n(\Gamma_y \cup \text{Int} \Gamma_y, z)$$

называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ -i \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\Psi(e^{it})] e^{-int} dt \right\} \cdot F_n \left[\Gamma_y \cup \text{Int} \Gamma_y, \Psi(e^{ix}) \right] + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ i \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\Psi(e^{it})] e^{int} dt \right\} \cdot \left\{ f_n \left[\Gamma_d \cup \text{Ext} \Gamma_d, \Psi(e^{-ix}) \right] + F_n(\Gamma_y \cup \text{Int} \Gamma_y, 0) \right\}.$$

Очевидно, что $\forall n \in \mathbf{Z}_+ \quad c_n(f) = (f \circ \Psi \circ \exp \circ i)^{\wedge}(n)$.

Напоминаем, что в обозначениях мы следуем монографии В. К. Дзядыка [1]: с большим яблокоподобным контуром Γ_y связываем большие заглавные буквы Φ , Ψ , F_n , а с малым дископодобным контуром Γ_d связываем малые прописные буквы ϕ , ψ , f_n .

Естественно получение аналогов асимптотической формулы М. Заманского (3) в следующих трёх случаях: 1) непрерывная на Γ_y функция $f(z)$ аналитически продолжима в $\text{Int} \Gamma_y$: ряды Фабера; 2) непрерывная на Γ_d функция $f(z)$ аналитически продолжима в $\text{Ext} \Gamma_d$: ряды по аналогам многочленов Фабера; 3) непрерывная на Γ_y и Γ_d функция $f(z)$ аналитически продолжима в $\text{Int} \Gamma_y \cap \text{Ext} \Gamma_d$: ряды Фабера—Лорана [21, с. 309—311; 33, с. 113—115].

О большом объёме перечисленных выше предстоящих исследований говорит такой факт. Объём стартовой публикации Макенхоупта и Стейна [10] — 76 страниц.

7. Случай замкнутой области С. Я. Альпера комплексной плоскости. Суммируемость рядов по многочленам Фабера на замкнутых жордановых областях с гладкой границей, удовлетворяющей дополнительному ограничению на гладкость, исследовал С. Я. Альпер [21, с. 176—198; 34].

Ключевым моментом в исследовании С. Я. Альпера явилось установление того, что при его предположениях на единичной окружности e^{it} , $-\pi \leq t \leq \pi$, разность ядер Коши $\frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{d\Psi(e^{it})}{\Psi(e^{it}) - \Psi(e^{ix})}$ и $\frac{d\tau}{\tau - w} = \frac{d(e^{it})}{e^{it} - e^{ix}}$ интегрируема в смысле Лебега, точнее, что конечная верхняя грань [21, с. 181, теорема 3; 34, с. 428]

$$\sup_{-\pi \leq x \leq \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\Psi'(e^{it})}{\Psi(e^{it}) - \Psi(e^{ix})} - \frac{1}{e^{it} - e^{ix}} \right| dt. \quad (12)$$

Яблокоподобный контур Γ_{α} не является гладким: в точках $z=1$ и $z=-1$ внешние углы имеет раствор $\frac{\pi}{2}$. Для

Γ_{α} в (12) подынтегральная разность в точке $1 = e^{i0} \frac{\Psi'(e^{it})}{\Psi(e^{it}) - 1} - \frac{1}{e^{it} - 1} = \frac{1}{e^{it} - 1} \cdot \frac{-1}{\sqrt{e^{i2t} - 1} + e^{it} - 1}$. Из оценки

снизу $\left| \frac{\Psi'(e^{it})}{\Psi(e^{it}) - 1} - \frac{1}{e^{it} - 1} \right| \geq \frac{1}{2\sqrt{10} \left| \sin \frac{t}{2} \right|}$ следует, что для яблокоподобного контура Γ_{α} верхняя грань (12) равна

положительной бесконечности $+\infty$.

Таким образом, для суммирования ряда по многочленам Фабера на замкнутой яблокоподобной области $\Gamma_{\alpha} \cup \text{Int}\Gamma_{\alpha}$ применение подхода С. Я. Альпера в лоб не проходит.

8. Заключение. Понятия сопряжённого ряда и сопряжённой функции возникли в теории тригонометрических рядов Фурье. Инициаторами рассмотрения понятия сопряжённости для рядов Фурье по другим конкретным ортогональным системам функций были ученики А. Зигмунда американские математики Е. М. Стейн [10] и Б. Макенхоупт [10; 11; 14].

В 1975 году на родине П. Л. Чебышёва в городе Калуга проходила Международная конференция по теории приближения функций. На неё была представлена работа немецкого арийского математика П. Л. Бутцера в соавторстве с Р. Л. Штэнсом [17] о понятии сопряжённости в теории рядов Фурье по многочленам П. Л. Чебышёва. Предисловие С. М. Никольского [35] к изданию трудов Калужской конференции свидетельствует о том, что сделанный вызов русской математической школе был понят.

Классическими примерами рядов Фабера являются: в случае замкнутого единичного круга $|z| \leq 1$ — ряды Тейлора, в случае отрезка $[-1; 1]$ — ряды Фурье по многочленам П. Л. Чебышёва первого рода. Венгерский математик И. Йо предложил автору рассмотреть понятие сопряжённости в теории рядов по многочленам Фабера.

В настоящей работе обстоятельно рассмотрено понятие сопряжённости применительно к рядам по многочленам Фабера для замкнутого единичного круга $|z| \leq 1$ и для отрезка $[-1; 1]$, а также предложено определение сопряжённого ряда с рядом по многочленам Фабера для замкнутой яблокоподобной области с двумя входящими в область внешними углами. Если на тригонометрический ряд Фурье смотреть как на ряд Лорана на вырожденном кольце $1-0 \leq |z| \leq 1+0$, то при нашем определении ряда, сопряжённого с рядом по многочленам Фабера для замкнутой яблокоподобной области, «внешней» окружности $|z|=1+0$ соответствует ряд по многочленам Фабера $F_n[\Gamma_{\alpha} \cup \text{Int}\Gamma_{\alpha}, \Psi(e^{ix})]$, а «внутренней» окружности $|z|=1-0$ соответствует ряд по смещённым аналогам многочленов Фабера $f_n[\Gamma_{\alpha} \cup \text{Ext}\Gamma_{\alpha}, \psi(e^{-ix})] + F_n(\Gamma_{\alpha} \cup \text{Int}\Gamma_{\alpha}, 0)$.

Список цитируемых источников

1. Дзядык, В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В. К. Дзядык. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. — 512 с.
2. Эдвардс, Р. Ряды Фурье в современном изложении: в 2 т. / Р. Эдвардс. — М.: Мир, 1985. — Т. 1. — 264 с.
3. Эдвардс, Р. Ряды Фурье в современном изложении: в 2 т. / Р. Эдвардс. — М.: Мир, 1985. — Т. 2. — 400 с.
4. Бруй, И. Н. Средние тригонометрических рядов и пространства периодических функций. Стеновый доклад / И. Н. Бруй // Содружество наук. Барановичи-2016: материалы XII Междунар. науч.-практ. конф. молодых исследователей, Барановичи, 19—20 мая 2016 г.: в 3 ч. / редкол.: А. В. Никишова (гл. ред.), Ю. Е. Горбач (отв. секр.) [и др.]. — Барановичи: БарГУ, 2016. — Ч. 2. — С. 620.
5. Zamansky, M. Classes de saturation des procédés de sommation des séries de Fourier et applications aux séries trigonométriques / M. Zamansky // Annales scientifiques de l'École normale supérieure. 3 série. — 1950. — Т. 67, № 2. — P. 161—198.

6. Бруй, И. Н. Памяти моего научного руководителя А. К. Покало: его идеи / И. Н. Бруй // Технологии, экономика и право: актуальные проблемы и инновации: материалы Междунар. науч.-практ. конф., 20 нояб. 2014 г., Барановичи / редкол.: А. В. Никишова (гл. ред.), А. К. Гавриленя (отв. ред.) [и др.]. — Барановичи: РИО БарГУ, 2014. — С. 16—32.
7. Alexits, G. On the order of approximation by the Cesàro means of Fourier series / G. Alexits // Approximation theory: (Selected papers) / G. Alexits. — Budapest: Académiai kiadó, 1983. — P. 41—50.
8. Турецкий, А. Х. О классах насыщения в пространстве C / А. Х. Турецкий // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1961. — Т. 25, № 3. — С. 411—442.
9. Бруй, И. Н. Эффективные условия на метод суммирования тригонометрических рядов Фурье в задаче о насыщении / И. Н. Бруй // Наука и технологии: инновации и качество: материалы Междунар. науч.-практ. конф., 24—25 нояб. 2011 г., Барановичи. — Барановичи: РИО БарГУ, 2011. — С. 117—123.
10. Muckenhoupt, B. Classical expansions and their relation to conjugate harmonic functions / B. Muckenhoupt, E. M. Stein // Trans. Amer. Math. Soc. — 1965. — Vol. 118, № 6. — P. 17—92.
11. Muckenhoupt, B. Hermite conjugate expansions / B. Muckenhoupt // Trans. Amer. Math. Soc. — 1969. — Vol. 139. — P. 243—260.
12. Joó, I. Saturation theorems for Hermite — Fourier series / I. Joó // Acta Math. Hungar. — 1991. — Vol. 57, № 1—2. — P. 169—179.
13. Joó, I. On Hermite — Fourier series / I. Joó // Period. Math. Hungar. — 1992. — Vol. 24, № 2. — P. 87—118.
14. Muckenhoupt, B. Conjugate functions for Laguerre expansions / B. Muckenhoupt // Trans. Amer. Math. Soc. — 1970. — Vol. 147. — P. 403—418.
15. Hunt, R. A. Developments related to the a. e. convergence of Fourier series / Richard A. Hunt // Studies in harmonic analysis: Proceedings of the Conference in Chicago on June 29 — Juli 02 1974. — Washington, DC: Mathematical Association of America, 1976. — P. 20—37. — (Studies in mathematics, 13).
16. Joó, I. On some problems of M. Horváth (saturation theorems for Walsh — Fourier expansions) / I. Joó // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. — 1988. — Tomus 31. — P. 243—260 (1989).
17. Butzer, P. L. The Operational Properties of the Chebyshev Transform. II. Fractional Derivatives / P. L. Butzer, R. L. Stens // Теория приближения функций: тр. Междунар. конф. по теории приближения функций: Калуга, 24—28 июля 1975 г. — М.: Наука, 1977. — С. 49—61.
18. Joó, I. On the conjugate function of Dirichlet series / I. Joó // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. — 1992. — Tomus 35. — P. 59—67.
19. Joó, I. On some notions of harmonic analysis for Sturm — Liouville expansions / I. Joó // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. — 1992. — Tomus 35. — P. 77—98.
20. Бруй, И. Н. Ряды Фабера / И. Н. Бруй. — Гомель: ГГУ, 1983. — 66 с.
21. Суетин, П. К. Ряды по многочленам Фабера / П. К. Суетин. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. — 336 с. — Translation from Russian into English: Series of Faber Polynomials / P. K. Suetin. — Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1998. — XX+301 pp. — (Analytical Methods and Special Functions, 1).
22. Стечкин, С. Б. Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций / С. Б. Стечкин // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1953. — Т. 17, № 5. — С. 461—472.
23. Покало, А. К. К вопросу о суммировании функций классов $B^{(r)}$ / А. К. Покало // Докл. АН СССР. — 1957. — Т. 116, № 5. — С. 750—753.
24. Fejér, L. Sur les fonctions bornées et intégrables / L. Fejér // Gesammelte Arbeiten: in 2 Bd. / L. Fejér. — Budapest: Akadémiai kiadó, 1970. — Band I. — S. 37—41.
25. Бруй, И. Н. Средние Фейера в теории представления функций / И. Н. Бруй // Техника и технологии: инновации и качество: материалы III Междунар. науч.-практ. конф., Барановичи, 18 декабря 2015 г. / редкол.: А. В. Никишова (гл. ред.), Ю. Е. Горбач (отв. ред.) [и др.]. — Барановичи: БарГУ, 2015. — С. 133—143.
26. Бруй, И. Н. Об одном результате Д. Алексича / И. Н. Бруй; Ред. ж. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.». — Минск, 1982. — 20 с. — Деп. в ВИНТИ АН СССР 16.08.1982. — № 4502-82 Деп. — Аннотация в: Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1983. — № 1. — С. 116.
27. Бруй, И. Н. Ряды Фабера. Суммирование / И. Н. Бруй. — Гомель: ГГУ, 1988. — 100 с.
28. Бруй, И. Н. О классе насыщения метода Фейера суммирования рядов Фабера / И. Н. Бруй; Ред. ж. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.». — Минск, 1987. — 27 с. — Деп. в ВИНТИ АН СССР 17.12.1987. — № 8858-B87. — Аннотация в: Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1989. — № 3. — С. 115.
29. Бруй, И. Н. Конструктивные описания аналитических функций классов Гёльдера / И. Н. Бруй // Мат. заметки. — 1990. — Т. 47, № 5. — С. 14—20. — Translation from Russian into English: Constructive descriptions of analytic functions of Hölder classes / I. N. Brui // Mathematical Notes. — 1990. — Vol. 47, no. 5—6. — P. 433—437.
30. Бруй, И. Н. О классах насыщения некоторых методов суммирования рядов Фабера / И. Н. Бруй // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. I. — 1993. — № 1. — С. 69—70.
31. Теляковский, С. А. Две теоремы о приближении функций алгебраическими многочленами / С. А. Теляковский // Мат. сб. — 1966. — Т. 70 (112), № 2. — С. 252—265.
32. Дзядык, В. К. О конструктивной теории функций на замкнутых множествах комплексной плоскости / В. К. Дзядык // Теория приближения функций: тр. Междунар. конф. по теории приближения функций: Калуга, 24—28 июля 1975 г. — М.: Наука, 1977. — С. 157—172.
33. Суетин, П. К. Ряды по многочленам Фабера и некоторые их обобщения / П. К. Суетин // Современ. проблемы математики. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1975. — Т. 5. — С. 73—140. — (Итоги науки и техники).
34. Альпер, С. Я. О равномерных приближениях функций комплексного переменного в замкнутой области / С. Я. Альпер // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1955. — Т. 19, № 3. — С. 423—444.
35. Никольский, С. М. Предисловие / С. М. Никольский // Теория приближения функций: тр. Междунар. конф. по теории приближения функций: Калуга, 24—28 июля 1975 г. — М.: Наука, 1977. — С. 3.