УДК 330.4

Г. А. Хацкевич[1], **А. Ф. Проневич**[2]
[1]*Государственное учреждение образования «Институт бизнеса и менеджмента технологий» Белорусского государственного университета, Минск*
[2]*Учреждение образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы», Гродно*

МНОГОФАКТОРНЫЕ КВАЗИОДНОРОДНЫЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ С ПОСТОЯННОЙ ЭЛАСТИЧНОСТЬЮ ЗАМЕЩЕНИЯ ФАКТОРОВ ПРОИЗВОДСТВА ПО ХИКСУ

Введение. Производственные функции (далее — ПФ) являются базовым элементом математического аппарата моделирования микро- и макроэкономических процессов. Теория ПФ позволяет выполнить глубокий экономический анализ производственного процесса: рассчитать предельные производительности факторов и факторные эластичности, строить функции факторного спроса и предложения продукта, функции прибыли и издержек, исследовать свойства замещения факторов производства [1]. Количественные меры замещения впервые были введены в 1932 году английским экономистом Д. Р. Хиксом (J. R. Hicks) для двухфакторной ПФ [2]. Позднее в его совместной работе с Р. Д. Алленом (R. G. Allen) понятие эластичности замещения факторов производства было обобщено на случай многофакторной ПФ [3]. Отметим, что данная характеристика является одним из основных объектов теории производства, наиболее содержательным и сложным для изучения. В зависимости от характера поведения этого показателя принято выделять ПФ *постоянной* (Constant Elastisity of Substitution) и *переменной* (Variable Elastisity of Substitution) эластичности замещения факторов производства.

Производственные функции наиболее полно исследованы в случае постоянной эластичности замещения при выполнении условия однородности. Примерами таких функций, широко используемых в практическом анализе, могут служить ПФ Кобба—Дугласа и CES. Однако этот класс ПФ недостаточен для анализа эффектов замещения между факторами производства, ибо эластичность замещения реальных объектов не является постоянной. Аналитическое описание класса однородных ПФ с переменной эластичностью замещения для двух факторов впервые найдено американским экономистом индийского происхождения Н. Реванкаром (N. Revankar) [4] для частного случая линейной зависимости эластичности замещения от пропорции факторов, а в общем (двухфакторном) случае получено экономистами Р. Сато (R. Sato) и Р. Ф. Гофманом (R. F. Hoffman) [5]. Формульно-параметрическое представление класса положительно однородных вогнутых функций произвольной размерности через вогнутые функции, заданные на стандартном симплексе, было получено В. К. Горбуновым [6]. Измерение индекса потребительских цен на основе переменной эластичности замещения приведено в работе Г. А. Хацкевича [7].

В данной работе класс *однородных* двухфакторных и многофакторных ПФ с постоянной эластичностью замещения факторов производства по Хиксу обобщен на класс *квазиоднородных* ПФ.

Основная часть. Рассмотрим дважды непрерывно дифференцируемую на области $G \subset \mathbf{R}_+^n$ ПФ:

$$f : x \to f(x) \quad \forall x \in G, \tag{1}$$

где $\mathbf{R}_+^n$ — положительный ортант n-мерного пространства $\mathbf{R}^n$, каждый вектор $x = (x_1, ..., x_n)$ которого интерпретируется как вектор затрат производственных ресурсов (в стоимостном или натуральном выражении).

Исследователи Л. Лосончи (L. Losonczi) [8] и Б.-Й. Чен (B.-Y. Chen) [9] показали, что если ПФ (1) является *однородной* и имеет *постоянную эластичность замещения* факторов производства по Хиксу, то она является либо функцией Кобба—Дугласа, либо CES-функцией. Этот результат дополняет положения классических работ и согласуется с известными результатами по классификации аналитических видов ПФ (см., например, [1, с. 111—113]).

Полученный Л. Лосончи (для двухфакторных ПФ) и Б.-Й. Чен (для многофакторных ПФ) результат распространен нами на класс *квазиоднородных* двухфакторных и многофакторных ПФ с постоянной эластичностью замещения факторов производства по Хиксу. При этом говоря о квазиоднородности ПФ, будем исходить из следующего определения [10]: ПФ (1) будем называть *квазиоднородной степени* $q \in \mathbf{R}$ относительно ненулевого весового вектора $g = (g_1, \ldots, g_n) \in \mathrm{R}^n$, если выполняется тождество

$$f(\lambda^{g_1} x_1, \lambda^{g_2} x_2, ..., \lambda^{g_n} x_n) = \lambda^q f(x_1, x_2, ..., x_n) \quad \forall x \in G, \quad \forall \lambda \in (0; +\infty). \tag{2}$$

Так, например, трехфакторная ПФ

$$f:(x_1, x_2, x_3) \to 3x_1x_2 + 2x_1^3 + \frac{x_2^2}{x_1} + \frac{1}{x_3^3} \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \{(x_1, x_2, x_3): x_1 > 0, x_2 \geq 0, x_3 > 0\}$$

является квазиоднородной степени три относительно весового вектора $g = (1,\ 2, -1)$.

Заметим, что если у квазиоднородной степени q ПФ (1) весовой вектор является единичным $g = (1,\ ...,\ 1),$ то она будет однородной степени q. Квазиоднородность (2) описывает условие изменения выпуска продукции в случае, когда факторы производства $x_1, ..., x_n$ изменяются в различное число раз.

Основные результаты работы выражают следующие утверждения [11; 12].

Теорема 1. *Параметрический класс квазиоднородных степени q относительно весового вектора $g = (g_1, g_2)$ двухфакторных ПФ с постоянной эластичностью замещения факторов $\sigma \neq 0$ имеет вид*

$$f:(x_1, x_2) \to C_2(x_2)\exp\int z(x_1, x_2)\,dx_1,$$

где функция z определяется из функционального тождества

$$z^{g_2}\left(x_1 z - \frac{q}{g_1}\right)^{-g_1}\left(x_1 z - \frac{q}{g_1 - g_2}\right)^{g_1 - g_2} = C_1(x_2)\, x_1^{-g_2/\sigma},$$

а C_1 и C_2 — функции переменной x_2, которые находятся подстановкой ПФ f в систему уравнений:

$$f_{22} = \left(\frac{g_2(g_2 - g_1)(\sigma - 1)}{\sigma q^2}\, x_2 \left(\frac{f_2}{f}\right)^2 + \frac{\sigma q + (\sigma - 1)(g_1 - 2g_2)}{\sigma q}\left(\frac{f_2}{f}\right) - \frac{1}{\sigma x_2}\right) f_2,$$

$$f_{12} = \left(2 - \frac{(g_1 + g_2)(\sigma - 1)}{\sigma q} + \frac{g_1(g_1 - g_2)(\sigma - 1)}{\sigma q^2}\, x_1\left(\frac{f_1}{f}\right) + \frac{g_2(g_2 - g_1)(\sigma - 1)}{\sigma q^2}\, x_2\left(\frac{f_2}{f}\right)\right)\frac{f_1 f_2}{2f}.$$

Если $g_1 = g_2$ (случай однородной ПФ), то из теоремы 1 следует результат Л. Лосончи и Б.-Й. Чен для однородных двухфакторных ПФ с постоянной эластичностью замещения факторов производства. Для многофакторного случая с единичной эластичностью замещения факторов производства по Хиксу имеет место теорема 2

Теорема 2. *Параметрический класс квазиоднородных степени q относительно весового вектора $g = (g_1, ..., g_n) \in \mathrm{R}^n \setminus \{(0, ..., 0)\}$ многофакторных ПФ единичной эластичности замещения факторов по Хиксу имеет вид $f: x \to \alpha_0\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n} \quad \forall x \in G \subset \mathbf{R}_+^n,\ a_0 > 0,$ где ненулевые вещественные числа $\alpha_i,\ i = 1, ..., n$ такие, что выполняется условие $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + ... + \alpha_n g_n = q.$*

Из теоремы 2 (или теоремы 1 при $\sigma = 1$) получаем следующую закономерность.

Следствие 1. *Квазиоднородные степени q относительно весового вектора $g = (g_1, g_2)$ двухфакторные ПФ с единичной эластичностью замещения имеют вид $f:(x_1, x_2) \to a x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \quad \forall (x_1, x_2) \in G \subset \mathrm{R}_+^2,\ a > 0,$ где ненулевые вещественные числа α и β такие, что выполняется условие $\alpha g_1 + \beta g_2 = q$.*

Заключение. В работе приведено понятие квазиоднородной ПФ (2), указаны связи между условиями однородности и квазиоднородности, исследован вопрос (теорема 1) об аналитическом виде двухфакторных ПФ, обладающих свойствами квазиоднородности и постоянной эластичностью замещения факторов производства [11], а также указан класс многофакторных квазиоднородных ПФ с единичной эластичностью замещения факторов производства по Хиксу (теорема 2 и следствие 1) [12]. Полученные теоретические результаты (теоремы 1 и 2) могут быть использованы при моделировании реальных производственных процессов.

Список цитируемых источников

1. *Клейнер, Г. Б.* Производственные функции: теория, методы, применение / Г. Б. Клейнер. — М. : Финансы и статистика, 1986. — 239 с.
2. *Hicks, J. R.* The theory of wages / J. R. Hicks. — London : Macmillan, 1932. — 247 p.
3. *Allen, R. G.* A reconsideration of the theory of value. Pt. II / R. G. Allen, J. R. Hicks // Economica. — 1934. — Vol. 1. — P. 196—219.
4. *Revankar, N. S.* A class of variable elasticity of substitution production functions / N. S. Revankar // Econometrica. — 1971. — V. 39. — №. 1. — P. 61—71.
5. *Sato, R.* Production functions with variable elasticity of factor substitution: some analysis and testing / R. Sato, R. F. Hoffman // The review of economics and statistics. — 1968. — Vol. 50. — № 4. — P. 453—460.
6. *Горбунов, В. К.* Производственные функции: теория и построение / В. К. Горбунов. — Ульяновск : УлГУ, 2013. — 84 с.
7. *Хацкевич, Г. А.* Измерение индекса потребительских цен на основе переменной эластичности замещения / Г. А. Хацкевич // Экономика и управление. — 2005. — № 1. — С. 32—37.
8. *Losonczi, L.* Production functions having the CES property / L. Losonczi // Acta mathematica academiae paedagogicae Nyiregyhaziensis. — 2010. — Vol. 26 (1). — P. 113—125.
9. *Chen, B.-Y.* Classification of h-homogeneous production functions with constant elasticity of substitution / B.-Y. Chen // Tamkang journal of mathematics. — 2012. — Vol. 43. — № 2. — P. 321—328.
10. *Клейнер, Г. Б.* О характеризации производственных функций Солоу / Г. Б. Клейнер, Д. И. Пионтковский // Экономика и математические методы. — 1999. — Т. 35. — № 2. — С. 124—137.
11. *Khatskevich, G.* On quasi-homogeneous production functions with constant elasticity of factors substitution / G. Khatskevich, A. F. Pranevich // Journal of Belarussian State Unioversity. Economocs. — 2017. — № 1. — P. 46—50.
12. *Хацкевич, Г. А.* Квазиоднородные производственные функции единичной эластичности замещения факторов по Хиксу / Г. А. Хацкевич, А. Ф. Проневич // Экономика, моделирование, прогнозирование : сб. науч. тр. / редкол.: М. К. Кравцов (гл. ред.) [и др.]. — Минск : НИЭИ М-ва экономики Респ. Беларусь, 2017. — Вып. 11. — С. 135—140.