УДК 514.765

**Ю. В. Сергеева, В. А. Серпухов**
*Учреждение образования «Барановичский государственный университет», Барановичи, Республика Беларусь*

# ДЕЙСТВИЕ КАНОНИЧЕСКИХ СТРУКТУР КЛАССИЧЕСКОГО ТИПА НА ОДНОРОДЫХ Ф-ПРОСТРАНСТВАХ ПОРЯДКА 5,6

**Введение.** В современной математике и многих её приложениях одним из фундаментальных понятий является понятие гладкого многообразия. Особую роль играют многообразия, на которых транзитивно действует группа Ли, т. е. однородные многообразия (пространства).

В дифференциальной геометрии важен класс редуктивных однородных пространств. В этот класс входят так называемые однородные Ф-пространства, т. е. однородные пространства, порождаемые автоморфизмами группы Ли.

Целью работы является рассмотрение одного из однородных многообразий, которое может быть порождено разными автоморфизмами транзитивно действующей группы и по разным автоморфизмам конструктивно указать канонические структуры для Ф-пространств порядков 5, 6.

**Основная часть.** Обозначим $A(\theta)$ — множество всех канонических аффинорных структур на $G/H$. Справедлива следующая теорема [1]. Множество $A(\theta)$ является коммутативной подалгеброй в алгебре $A$ — всех инвариантных структур. Более того, $\dim A(\theta) = \deg v \le \dim G/H$, где v — минимальный многочлен оператора θ.

Если $M$ — гладкое многообразие, $F$ — аффинорная структура. Тогда вводятся следующие типы структур (структуры классического типа):

1. Структура почти произведения $P$: $P^2 = id$.
2. Почти комплексная структура $J$: $J^2 = -id$.
3. $f$-структура (в смысле К. Яно) $f$: $f^3 + f = 0$.
4. $f$-структура гиперболического типа $f_h$: ${f_h}^3 - f_h = 0$.

*Однородные Ф-пространства порядка 5* [1; 2]. Пусть спектр оператора θ следующий: $\operatorname{spec}\theta = \{\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4\}$.

Определим для этого случая все канонические структуры $P$, $f$ и $J$.

($P$). Существует единственный (с точностью до знака) набор $\xi_1 = 1,\ \xi_2 = -1$.

Тогда по: $P_0 = a_0 + a_1(\theta + \theta^4) + a_2(\theta^2 + \theta^3)$, где $a_0 = 0,\ a_1 = \frac{2}{5}(\cos\frac{2\pi}{5} - \cos\frac{4\pi}{5}) = \frac{1}{\sqrt{5}} = -a_1$. Следовательно, $P_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\theta - \theta^2 - \theta^3 + \theta^4)$.

($J$). Формула для канонических структур $J$ имеет вид: $J_0 = a_1(\theta - \theta^4) + a_2(\theta^2 - \theta^3)$, где две принципиально различные возможности: ($J_1$) $\xi_1 = \xi_2 = 1$. Тогда $a_1 = \frac{2}{5}(\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5})$; $a_2 = \frac{2}{5}(\sin\frac{4\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5})$.

Так как $\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$; $\sin\frac{4\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, то $a_1 = \frac{1}{10}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$, $a_2 = \frac{1}{10}(\sqrt{10-2\sqrt{5}} - \sqrt{10+2\sqrt{5}})$.

Можно записать проще: $a_1 = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}$; $a_2 = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{5}$.

Таким образом, $(J_1)_0 = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}(\theta - \theta^4) - \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{5}(\theta^2 - \theta^3)$.

($J_2$). Пусть теперь $\xi_1 = 1,\ \xi_2 = -1$. Тогда с учётом предыдущих вычислений, получим:

$$a_1 = \frac{2}{5}(\sin\frac{2\pi}{5} - \sin\frac{4\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{5}; \qquad a_2 = \frac{2}{5}(\sin\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}.$$

Отсюда имеем вид полинома: $(J_2)_0 = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{5}(\theta - \theta^4) - \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}(\theta^2 - \theta^3)$.

($f$). Наконец, определим все канонические структуры.

Пусть $\xi_1 = 1,\ \xi_2 = 0$. Тогда $(f_1)_0 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10}(\theta - \theta^4) + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{10}(\theta^2 - \theta^3)$.

Пусть $\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 1$. $(f_2)_0 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{10}(\theta - \theta^4) - \frac{\sqrt{1+2\sqrt{5}}}{10}(\theta^2 - \theta^3)$.

Случаи $\xi_1 = \xi_2 = 1$ и $\xi_1 = 1 = -\xi_2$ дают почти комплексные структуры.

Итогом проделанных вычислений является следующая теорема.

*Теорема*. [1] На однородном Ф-пространстве порядка 5 имеются (с точностью до знака) следующие канонические структуры типа $P,\ J$ и $f$: $P_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\theta - \theta^2 - \theta^3 + \theta^4)$

$$(J_1)_0 = \alpha(\theta - \theta^4) - \beta(\theta^2 - \theta^3), \quad (J_2)_0 = \beta(\theta - \theta^4) + \alpha(\theta^2 - \theta^3);$$
$$(f_1)_0 = \gamma(\theta - \theta^4) + \delta(\theta^2 - \theta^3), \quad (f_2)_0 = \delta(\theta - \theta^4) - \gamma(\theta^2 - \theta^3),$$

где $\alpha = \frac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{5},\ \beta = \frac{\sqrt{2-2\sqrt{5}}}{5},\ \gamma = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10},\ \delta = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10}\cdot$

При этом следующие условия эквивалентны:

а) спектр $\theta$ состоит из 2-х элементов;

б) структура $P_0$ тривиальна;

в) структуры $(J_1)_0$ и $(J_2)_0$ совпадают (с точностью до знака);

г) одна из структур $(f_1)_0$ и $(f_2)_0$ нулевая, а другая является почти комплексной структурой и совпадает с одной из структур $(J_1)_0$ и $(J_2)_0$.

*Однородные Ф-пространства порядка 6.* Вычисление $P,\ J,\ f$-структур для однородных Ф-пространств порядка 6. Пусть спектр оператора $\theta$ имеет вид: $spec\ \theta = \{\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^5\}$.

Определим все канонические структуры $P,\ J,\ f$.

$(P_0)$: $P_0 = \sum_{m=0}^{n-1} a_m \theta^m$, так как у нас $n = 2k$, где $k = 3$, то коэффициенты $a_m$ будут вычисляться по следующей формуле: $a_m = a_{n-m} = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{k-1}\cos\frac{2\pi mj}{n} + (-1)^m \cdot \frac{\xi_k}{n}$.

Поиск нетривиальных канонических $P$ структур приводит к следующим наборам:

а) $\xi_1 = 1,\ \xi_2 = -1,\ \xi_3 = 1$.

$$\underline{m = 0}: a_0 = \frac{2}{6} - \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6};$$

$$\underline{m = 1}: a_1 = a_5 = \frac{2}{6}\cos\frac{\pi}{3} - \frac{2}{6}\cos\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{6};$$

$$\underline{m = 2}: a_2 = a_4 = \frac{2}{6}\cos\frac{2\pi}{3} - \frac{2}{6}\cos\frac{4\pi}{3} + \frac{1}{6};$$

$$\underline{m = 3}: a_3 = \frac{2}{6}\cos\pi - \frac{2}{6}\cos 2\pi - \frac{1}{6} = -\frac{5}{6}\cdot$$

Таким образом, с учётом равенства $\theta^5 + \theta^4 + \theta^3 + \theta^2 + \theta + 1 = 0$, имеем:

$$P_0 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\theta + \frac{1}{6}\theta^2 - \frac{3}{5}\theta^3 + \frac{1}{6}\theta^4 + \frac{1}{6}\theta^5 = -\theta^3 + \frac{1}{6}(1 + \theta + \theta^2 + \theta^3 + \theta^4 + \theta^5) = -\theta^3.$$

Набор $\xi_1 = -1,\ \xi_2 = 1,\ \xi_3 = -1$ даёт изменение знака, т.е. $(P_0)_1 = \theta^3$;

б) $\xi_1 = -1,\ \xi_2 = 1,\ \xi_3 = 1$. В этом случае получаем следующую структуру: $(P_0)_2 = \frac{1}{3}\theta^3 - \frac{2}{3}(\theta + \theta^5)$. В свою очередь набор $\xi_1 = 1,\ \xi_2 = -1,\ \xi_3 = -1$ даёт изменение знака, т.е. $P_0 = -\frac{1}{3}\theta^3 + \frac{2}{3}(\theta + \theta^5)$;

в) $\xi_1 = -1,\ \xi_2 = -1,\ \xi_3 = 1$. Здесь имеем: $P_0 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}(\theta^2 + \theta^4)$. Набор $\xi_1 = 1,\ \xi_2 = 1,\ \xi_3 = -1$ даёт изменение знака, т.е. $(P_0)_3 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}(\theta^2 + \theta^4)$;

г) наборы $\xi_1 = 1,\ \xi_2 = 1,\ \xi_3 = 1$ и $\xi_1 = -1,\ \xi_2 = -1,\ \xi_3 = -1$ дают тривиальные структуры, т.е. $P_0 = 1$ и $P_0 = -1$ соответственно.

Таким образом, имеем 4 (с точностью до знака) различные структуры почти произведения.

$(J_0)$. Используем следующие наборы:

а) $\xi_1 = 1,\ \xi_2 = 1$.

$J_0 = \frac{2}{n}\sum_{m=1}^{2}(\sin\frac{\pi m}{3} + \sin\frac{2\pi m}{3})(\theta^m - \theta^{n-m}) = \frac{2}{6}(\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3})(\theta - \theta^5) + + \frac{2}{6}(\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3})(\theta^2 - \theta^4) = = \frac{1}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})(\theta - \theta^5) + \frac{1}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})(\theta^2 - \theta^4) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\theta - \theta^5)$.

Набор $\xi_1 = -1,\ \xi_2 = -1$ даёт изменение знака: $(J_0)_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\theta - \theta^5)$;

б) $\xi_1 = 1,\ \xi_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad (J_0)_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\theta^2 - \theta^4)$. В случае набора $\xi_1 = -1,\ \xi_2 = 1$.

$J_0$ имеет вид: $J_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\theta^2 - \theta^4)$.

Таким образом, имеем 2 (с точностью до знака) различные почти комплексные структуры.

$(f_0)$. Имеем следующие наборы:

а) $\xi_1 = 1,\ \xi_2 = 0$.

$(f_0)_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\theta^5) + \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta^2-\theta^4) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\theta-\theta^5) + \frac{1}{2\sqrt{3}}(\theta^2-\theta^4)$.

Набор $\xi_1 = -1,\ \xi_2 = 0$ даёт изменение знака. В случае набора $\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 1$: $(f_0)_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\theta-\theta^5) - \frac{1}{2\sqrt{3}}(\theta^2-\theta^4)$. Набор $\xi_1 = 0,\ \xi_2 = -1$ даёт изменение знака. Таким образом, имеем 2 (с точностью до знака) различные f-структуры.

Итогом вычислений является следующая теорема.

*Теорема.* На однородном Ф-пространстве порядка 6 имеются (с точностью до знака) следующие структуры типа $(P, J, f)$:

$$(P_0)_1 = \theta^3,\ (P_0)_2 = \frac{1}{3}\theta^3 - \frac{2}{3}(\theta+\theta^5),\ (P_0)_3 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}(\theta^2+\theta^4);$$

$$(J_0)_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\theta-\theta^5),\ (J_0)_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\theta^2-\theta^4);$$

$$(f_0)_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\theta-\theta^5) + \frac{1}{2\sqrt{3}}(\theta^2-\theta^4);$$

$$(f_0)_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\theta-\theta^5) - \frac{1}{2\sqrt{3}}(\theta^2-\theta^4).$$

Для порядка 6: $s = diag(1,\ \xi,\ \bar{\xi})$, где $\xi$ — первообразный корень из единицы степени 6. Тогда получаем следующее действие структур:

$$\begin{gathered}
(P_0)_1{:}\,(m_1,\ m_2,\ m_3) \ \to\ (-m_1,\ m_2,\ -m_3);\\
(P_0)_2{:}\,(m_1,\ m_2,\ m_3) \ \to\ (m_1, -m_2,\ m_3);\\
(P_0)_3{:}\,(m_1,\ m_2,\ m_3) \ \to\ (m_1,\ m_2,\ m_3).\\
(J_0)_1{:}\,(m_1,\ m_2,\ m_3) \ \to\ (-im_1,\ im_2,\ im_3);\\
(J_0)_2{:}\,(m_1,\ m_2,\ m_3) \ \to\ (-im_1, -im_2,\ im_3);\\
(f_0)_1{:}\,(m_1,\ m_2,\ m_3) \ \to\ (-im_1,\ 0,\ im_3);\\
(f_0)_2{:}\,(m_1,\ m_2,\ m_3) \ \to\ (0,\ im_2,\ 0).
\end{gathered}$$

Итогом нашего рассмотрения является следующий результат.

*Теорема.* На однородном многообразии $M = SU(3)/T^2$ имеются следующие структуры, порождённые автоморфизмами группы $SU(3)$:

Тогда канонические структуры для Ф порядка $P_0,\ J_0,\ f_0$ для Ф порядка действуют следующим образом:

$$\begin{gathered}
(P_0)_1{:}\,(m_1,\ m_2,\ m_3) \ \to\ (-m_1,\ m_2,\ -m_3);\\
(P_0)_2{:}\,(m_1,\ m_2,\ m_3) \ \to\ (m_1, -m_2,\ m_3);\\
(P_0)_3{:}\,(m_1,\ m_2,\ m_3) \ \to\ (m_1,\ m_2,\ m_3).\\
(J_0)_1{:}\,(m_1,\ m_2,\ m_3) \ \to\ (-im_1,\ im_2,\ im_3);\\
(J_0)_2{:}\,(m_1,\ m_2,\ m_3) \ \to\ (-im_1, -im_2,\ im_3);\\
(f_0)_1{:}\,(m_1,\ m_2,\ m_3) \ \to\ (-im_1,\ 0,\ im_3);\\
(f_0)_2{:}\,(m_1,\ m_2,\ m_3) \ \to\ (0,\ im_2,\ 0)
\end{gathered}$$

**Заключение**. В заключении, отметим, что к настоящему времени получена значительная информация об однородных Ф-пространствах малых порядков, а также серия общих фактов об однородных Ф-пространствах произвольного порядка $k$ и их связи с обобщённой эрмитовой геометрией.

**Список цитируемых источников**

1. Балащенко, В. В. Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Ф-пространствах. / В. В. Балащенко, Н. Ю. Степанов // Математ. сб. — 1995. — Т. 186, № 11. — С 3—34.

2. Балащенко, В. В. Канонические f-структуры гиперболического типа на регулярных Ф-пространствах / В. В. Балащенко // Успехи математ. наук. — 1998. — Т. 59, № 4. — С 213—214 .