

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ. ОБЕСПЕЧЕНИЕ КАЧЕСТВА ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТОВ ИНЖЕНЕРНОГО ПРОФИЛЯ

УДК 517.518.366

И. Н. Бруй, кандидат физико-математических наук, доцент

Учреждение образования «Барановичский государственный университет», Барановичи

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ РЯДЫ И ПРОСТРАНСТВА РИССА

В терминах матричных средних указано условие, необходимое и достаточное для того, чтобы ряд по мультипликативной системе являлся рядом Фурье функции из пространств Рисса.

Ключевые слова: пространства Рисса, ряды Фурье по мультипликативной системе, матричные средние.

In terms of matrix means is to necessary and sufficient conditions for a series with respect to the multiplicative system to be the Fourier series of a function in Riesz's spaces.

Key words: Riesz function spaces, Fourier series with respect to the multiplicative system, matrix means.

Введение. Известен ряд по системе Уолша в нумерации Пэли, который сходится почти всюду на полуинтервале $[0, 1)$ и который не является рядом Фурье своей суммы (см. [1, с. 75, 92—95] или [2, с. 345—348]).

В настоящей работе в терминах матричных средних указано условие, необходимое и достаточное для того, чтобы ряд по мультипликативной системе являлся рядом Фурье функции из пространств Ф. Рисса $L^p[0, 1)$, $1 < p < \infty$. В обозначениях в основном мы стремимся следовать монографии [1] и в $L^p[0, 1)$ не различаем функции, совпадающие почти всюду [1, с. 60, 326]. Символ « $=$ » означает, что правой части присвоено обозначение слева; аналогичный смысл имеет символ « $:=$ ».

Начальные сведения. Обозначим через Z_0 множество всех неотрицательных целых чисел, а через Z_1 множество всех натуральных чисел.

Пусть $P := \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ есть произвольная последовательность натуральных чисел $p_j \geq 2$. Обозначим: $m_0 := 1$ и $\forall v \in Z_1 \quad m_v := \prod_{j=1}^v p_j$. Тогда для любого натурального числа n имеем P -ичную запись $n = \sum_{v=1}^{\sigma(n)} \alpha_v m_{v-1}$, коэффициенты («цифры») которой $\alpha_v \in [0, p_v - 1] \cap Z_0$, а «старший» коэффициент $\alpha_{\sigma(n)} \neq 0$. Очевидно, что $m_{\sigma(n)-1} \leq n < m_{\sigma(n)}$.

Если все p_j делят 10, то имеем 10-ичную запись натурального числа n . Если же все p_j делят 2, то имеем применяемую в вычислительной технике 2-ичную запись числа $n \in Z_1$.

Каждому действительному числу $x \in [0, 1)$ поставим в соответствие последовательность $\{x_v\}_{v=0}^{\infty}$ коэффициентов его P -ичного разложения $x = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{x_v}{m_v}$.

Так как 10-ично-рациональное число $1/2$ имеет две записи в виде десятичной дроби: $1/2 = 0,5$ — конечная запись и $1/2 = 0,4999\ldots$ — бесконечная запись, то условимся P -ично-рациональным числам ставить в соответствие финитные последовательности.

Последовательность V функций, определяемых равенствами

$$\chi_0(P, x) := 1, \quad \forall n \in Z_1 \quad \chi_n(P, x) := \cos \left(2\pi \sum_{v=1}^{\sigma(n)} \frac{\alpha_v x_v}{p_v} \right) + i \sin \left(2\pi \sum_{v=1}^{\sigma(n)} \frac{\alpha_v x_v}{p_v} \right),$$

где i есть мнимая единица с характеристическим свойством $i^2 = -1$, называется мультипликативной системой; она (как известно [1, с. 32]) ортонормированна на полуинтервале определения $[0, 1)$:

$$\forall l \in Z_0 \quad \forall m \in Z_0 \quad \int_0^1 \chi_l(P, x) \overline{\chi_m(P, x)} dx = \begin{cases} 1, & l = m, \\ 0, & l \neq m, \end{cases}$$

где горизонтальная черта означает комплексное сопряжение: $\bar{i} = -i$.

Обозначение V в честь Н. Я. Виленкина, который в [3, с. 469–470] ввёл в терминах теории функций действительного переменного функции $\chi_n(P, x)$. Название «мультипликативная система» объясняется тем, что функции системы V обладают следующими двумя свойствами: 1) вместе с любыми двумя функциями $\chi_l(P, x)$ и $\chi_m(P, x)$ система V содержит их произведение $\chi_r(P, x) = \chi_l(P, x) \cdot \chi_m(P, x)$; 2) вместе с каждой функцией $\chi_n(P, x)$ система V содержит и функцию $\chi_s(P, x) = \frac{1}{\chi_n(P, x)}$.

Постоянная последовательность $\{2\}_{j=1}^{\infty}$ порождает действительную систему $W := \{w_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ функций Уолша в нумерации Пэли, которая рассматривалась автором в [4, с. 58, теорема] и [5].

Основной результат. Через A обозначим последовательность $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ комплексных чисел.

Теорема. *Предположение о порождающей последовательности: ограничена последовательность $P := \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ натуральных чисел $p_j \geq 2$.*

Предположение о методе суммирования: элементы бесконечной нижней треугольной комплексной матрицы $\hat{I} := (\mu_{n,i})$, где $Z_0 \ni n$ — номер строки, а $Z_0 \ni i$ — номер столбца, удовлетворяют четырём условиям: 1) ограничены в совокупности:

$$\tilde{N}_1(M) := \sup_{(n,i) \in Z_0^2} |\mu_{n,i}| < \infty; \quad (1)$$

2) ограничены в совокупности их построчные вариации на P -адических отрезках:

$$\tilde{N}_2(P, M) := \sup_{(n,v) \in Z_0^2} \sum_{i=m_v}^{m_{v+1}-1} |\mu_{n,i} - \mu_{n,i+1}| < \infty; \quad (2)$$

3) элементы имеют по всем столбцам конечные пределы:

$$\forall i \in Z_0 \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n,i} =: \rho_i \in \mathbb{C}; \quad (3)$$

4) последние почти все отделены от нуля:

$$\exists \liminf_{i \rightarrow \infty} |\rho_i| =: \rho_{\infty} > 0. \quad (4)$$

Утверждение: при двух указанных выше предположениях для того, чтобы при показателе $1 < p < \infty$ формальный комплексный ряд по системе $V := \{\chi_i(P, x)\}_{i=0}^{\infty}$ мультипликативных функций

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \chi_i(P, x) \quad (5)$$

являлся рядом Фурье по системе V некоторой функции f из комплексного пространства Рисса $L^p[0, 1)$, т. е.

$$\exists f \in L^p[0, 1) \quad \forall i \in Z_0 \quad a_i = \int_0^1 f(t) \overline{\chi_i(P, t)} dt =: \hat{f}(i), \quad (6)$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность матричных средних

$$\forall n \in Z_0 \quad \sum_{i=0}^n \mu_{n,i} a_i \chi_i(P, x) \quad (7)$$

формального ряда (5) была ограничена в пространстве $L^p[0, 1)$:

$$\tilde{N}_3(M, A, V) := \sup_{n \in Z_0} \left\| \sum_{i=0}^n \mu_{n,i} a_i \chi_i(P, \circ) \right\|_p < \infty. \quad (8)$$

Вышесформулированная теорема без доказательства была приведена автором в [6, с. 10]. Частный случай этой теоремы, когда порождающая последовательность $P = \{2\}_{j=1}^{\infty}$, был опубликован автором в [5].

Смысл условий (1)–(4) автор подробно разъяснил в [5] применительно к постоянной порождающей последовательности $P = \{2\}_{j=1}^{\infty}$, т. е. применительно к действительной системе $W := \{w_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ функций Уолша в нумерации Пэли.

Если порождающая последовательность $P = \{2\}_{j=1}^{\infty}$ и функция $f \in L^p[0, 1)$, $p > 1$, то её ряд Фурье—Уолша—Пэли сходится к $f(x)$ почти всюду на $[0, 1)$: [1, с. 189, теорема 9.2.1: $p=2$], [2, с. 135, теорема 14: $p > 1$], [7, с. 388, теорема: $p=2$]. Предыдущего утверждения прототипом в теории тригонометрических рядов Фурье является теорема Карлесона—Ханта [8; 9].

Справедливость теоремы следует из доказываемых ниже леммы 1 (необходимость) и леммы 2 (достаточность).

Доказательство необходимости основного результата опирается на формулируемые ниже два утверждения.

Обозначим через

$$\forall v \in Z_0 \quad \Delta_v(x, D, f) := \sum_{i=m_v}^{m_{v+1}-1} \hat{f}(i) \chi_i(P, x)$$

P -адические отрезки ряда Фурье по мультипликативной системе V функции $f \in L[0, 1)$, т. е. ряда (5), в котором все коэффициенты a_i определяются по формулам (6).

Лемма Ватари о P -адическом разложении (см. [10, с. 217, теорема P', (4.1)] или [11, с. 148, (5.1)]).

Предположение о порождающей последовательности: ограничена последовательность $P := \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ натуральных чисел $p_j \geq 2$.

Утверждение: если при показателе $1 < p < \infty$ функция f принадлежит комплексному пространству Рисса $L^p[0, 1)$, то

$$C_4^p(P, p) \|f\|_p^p \leq \int_0^1 \left[\left| \hat{f}(0) \right|^2 + \sum_{v=0}^{\infty} |\Delta_v(x, P, f)|^2 \right]^{p/2} dx \leq C_5^p(P, p) \|f\|_p^p, \quad (9)$$

где постоянные $C_4 > 0$ и C_5 зависят только от порождающей последовательности P и показателя p . Точный смысл левого неравенства (9): если при показателе $1 < p < \infty$ формальный комплексный ряд (5) по мультипликативной системе V удовлетворяет условию

$$C_6^p(A, P, p) := \int_0^1 \left[|a_0|^2 + \sum_{v=0}^{\infty} \left| \sum_{i=m_v}^{m_{v+1}-1} a_i \chi_i(P, x) \right|^2 \right]^{p/2} dx < \infty,$$

то существует функция $f \in L^p[0, 1)$, такая, что $\|f\|_p \leq C_6(A, P, p)/C_4(P, p)$ и формальный ряд (5) является её рядом Фурье по системе V .

Для частного случая действительной системы $W := \{w_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ функций Уолша в нумерации Пэли предыдущую лемму доказал ранее Пэли [12, с. 249]. Прототипом лемм Пэли и Ватари в теории тригонометрических рядов Фурье является лемма Литлвуда—Пэли [13, с. 349].

Для P -адических отрезков $\Delta_v(x, D, f)$ ряда Фурье по мультипликативной системе V функции $f \in L^1[0, 1)$ их частные суммы

$$\forall n \in Z_0 \quad S_n[x, P, \Delta_v(D, f)] = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq n < m_v, \\ \sum_{i=m_v}^n \hat{f}(i) \chi_i(P, x), & \text{если } m_v \leq n < m_{v+1} - 1, \\ \Delta_v(x, D, f), & \text{если } n \geq m_{v+1} - 1. \end{cases}$$

Лемма о мажорировании интегралов. *Предположение о порождающей последовательности:* ограничена последовательность $P := \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ натуральных чисел $p_j \geq 2$.

Утверждение: если при показателе $1 < p < \infty$ функция f принадлежит комплексному пространству Рисса $\mathbf{L}^p[0, 1)$, то, каковы бы ни были действительные числа $\gamma_i \geq 0$ и каково бы ни было целое число $k \geq 0$,

$$\int_0^1 \left\{ \sum_{v=0}^k \sum_{i=m_v}^{m_{v+1}-1} \gamma_i |S_i[x, P, \Delta_v(\mathcal{D}, f)]|^2 \right\}^{p/2} dx \leq C_7^p(P, p) \int_0^1 \left[\sum_{v=0}^k \sum_{i=m_v}^{m_{v+1}-1} \gamma_i |\Delta_v(x, \mathcal{D}, f)|^2 \right]^{p/2} dx,$$

где постоянная C_7 зависит только от порождающей последовательности P и от показателя p .

Вышесформулированная лемма доказывается [14, с. 17, лемма 6] по той же схеме, что и её прототип [13, с. 337, лемма (2.15)] в теории тригонометрических рядов Фурье.

Обозначим через

$$\forall n \in Z_0 \quad M_n(x, P, f) := \sum_{i=0}^n \mu_{n,i} \hat{f}(i) \chi_i(P, x) \quad (10)$$

матричные средние ряда Фурье по мультипликативной системе V функции $f \in \mathbf{L}^1[0, 1)$.

Лемма 1. *Предположение о порождающей последовательности:* ограничена последовательность $P := \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ натуральных чисел $p_j \geq 2$.

Предположение о методе суммирования: элементы бесконечной нижней треугольной комплексной матрицы $\hat{I} := (\mu_{n,i})$, где $Z_0 \ni n$ — номер строки, а $Z_0 \ni i$ — номер столбца, удовлетворяют двум условиям: (1) и (2).

Утверждение: если при показателе $1 < p < \infty$ функция f принадлежит комплексному пространству Рисса $\mathbf{L}^p[0, 1)$, то последовательность матричных средних (10) её ряда Фурье по мультипликативной системе V будет ограниченной в пространстве $\mathbf{L}^p[0, 1)$:

$$\sup_{n \in Z_0} \int_0^1 |M_n(x, \mathcal{D}, f)|^p dx \leq C_8^p(\mathcal{D}, M, p) \|f\|_p^p, \quad (11)$$

где постоянная C_8 зависит только от порождающей последовательности P , матрицы $\hat{I}$ и показателя p .

Доказательство. Очевидно, что $\forall n \in Z_1 \exists k(n) \in Z_1 \ m_{k(n)} \leq n < m_{k(n)+1}$. Так как при $i > n$ элементы $\mu_{n,i} \rightarrow 0$, то для матричных средних (10) ряда Фурье по мультипликативной системе V функции $f \in \mathbf{L}^p[0, 1)$, $1 < p < \infty$, имеем следующую P -адическую группировку:

$$M_n(x, P, f) = \mu_{n,0} \hat{f}(0) + \sum_{v=0}^{k(n)} \sum_{i=m_v}^{m_{v+1}-1} \mu_{n,i} \hat{f}(i) \chi_i(P, x).$$

Из неё с помощью левого неравенства Ватари (9) получаем оценку

$$\int_0^1 |M_n(x, P, f)|^p dx \leq C_4^{-p}(P, p) \int_0^1 \left[|\mu_{n,0} \hat{f}(0)|^2 + \sum_{v=0}^{k(n)} \left| \sum_{i=m_v}^{m_{v+1}-1} \mu_{n,i} \hat{f}(i) \chi_i(P, x) \right|^2 \right]^{p/2} dx. \quad (12)$$

Для P -адических отрезков матричных средних (10) ряда Фурье по мультипликативной системе V функции f с помощью преобразования Абеля [1, с. 149] имеем

$$\sum_{i=m_v}^{m_{v+1}-1} \mu_{n,i} \hat{f}(i) \chi_i(P, x) = \sum_{i=m_v}^{m_{v+1}-1} (\mu_{n,i} - \mu_{n,i+1}) S_i[x, P, \Delta_v(P, f)] + \mu_{n,m_{v+1}} \Delta_v(x, P, f).$$

Отсюда после записи модуля общего слагаемого в виде произведения

$$|\mu_{n,i} - \mu_{n,i+1}|^{1/2} \cdot |\mu_{n,i} - \mu_{n,i+1}|^{1/2} |S_i[x, P, \Delta_v(P, f)]|,$$

использования неравенства Коши—Буняковского для сумм [1, с. 326, П.5.2.2] и условий (1) и (2), получаем

$$\left| \sum_{i=m_v}^{m_{v+1}-1} \mu_{n,i} \hat{f}(i) \chi_i(P, x) \right|^2 \leq [\tilde{N}_1(\tilde{I}) + \tilde{N}_2(P, \tilde{I})] \left\{ \sum_{i=m_v}^{m_{v+1}-1} |\mu_{n,i} - \mu_{n,i+1}| |S_i[x, P, \Delta_v(P, f)]|^2 + |\mu_{n,m_{v+1}}| |\Delta_v(x, P, f)|^2 \right\}. \quad (13)$$

Подстановка неравенства (13) в (12) даёт

$$\int_0^1 |M_n(x, P, f)|^p dx \leq \left\{ [C_1(M) + C_2(P, M)]^{1/2} / C_4(P, p) \right\}^p \times \int_0^1 \left\{ |\mu_{n,0}| |\hat{f}(0)|^2 + \sum_{v=0}^{k(n)} \left[\sum_{i=m_v}^{m_{v+1}-1} |\mu_{n,i} - \mu_{n,i+1}| |S_i[x, P, \Delta_v(P, f)]|^2 + |\mu_{n,m_{v+1}}| |\Delta_v(x, P, f)|^2 \right] \right\}^{p/2} dx.$$

Отсюда после использования леммы о мажорировании интегралов и повторного применения условий (1) и (2) $\forall n \in Z_1$ получаем неравенства

$$\int_0^1 |M_n(x, P, f)|^p dx \leq \left\{ \frac{[C_1(M) + C_2(P, M)] C_7(P, p)}{C_4(P, p)} \right\}^p \cdot \int_0^1 \left[|\hat{f}(0)|^2 + \sum_{v=0}^{k(n)} |\Delta_v(x, P, f)|^2 \right]^{p/2} dx.$$

Из них благодаря правому неравенству Ватари (9) получаем (11) с постоянной $C_8(P, M, p) := \max \{C_1(M), [2C_1(M) + C_2(P, M)] C_7(P, p) C_5(P, p) / C_4(P, p)\}$. Лемма 1 доказана.

Полезно обратить внимание на различия в применении неравенства Ватари (9). В начале оно применялось ко всем полиномам по мультипликативной системе V (полиномам Виленкина) $M_n \in L^\infty[0, 1) \subset L^p[0, 1)$, $1 < p < \infty$ (зависимость от элементов $\mu_{n,i}$ явная), а в конце — к функции $f \in L^p[0, 1)$, $1 < p < \infty$ [явная зависимость от элементов $\mu_{n,i}$ была устранена двукратным применением условий (1) и (2)].

Прототип леммы 1 в теории кратных тригонометрических рядов Фурье доказал автор [14, с. 6—8, лемма 1].

Доказательство достаточности основного результата опирается на формулируемую ниже лемму о мультипликаторах.

Комплексная последовательность $\{\lambda_i\}_{i=0}^\infty$ называется мультипликатором типа (L^p, L^p) рядов Фурье по мультипликативной системе V , если для каждой функции g из комплексного пространства $L^p[0, 1)$, $1 \leq p \leq \infty$, формальный мультипликативный ряд $\sum_{i=0}^\infty \lambda_i \hat{g}(i) \chi_i(P, x)$ является рядом Фурье по мультипликативной системе V некоторой функции f из пространства $L^p[0, 1)$.

Лемма о мультипликаторах рядов Фурье по мультипликативной системе V [15, с. 16, теорема 1]. *Предположение о порождающей последовательности: ограничена последовательность $P := \{p_j\}_{j=1}^\infty$ натуральных чисел $p_j \geq 2$.*

Утверждение: если комплексная последовательность $\{\lambda_i\}_{i=0}^\infty$, во-первых, ограничена: $\sup_{i \in Z_0} |\lambda_i| < \infty$, во-вторых, имеет ограниченные в совокупности вариации на P -адических отрезках: $\sup_{v \in Z_0} \sum_{i=m_v}^{m_{v+1}-1} |\lambda_i - \lambda_{i+1}| < \infty$, то она является для всех показателей $1 < p < \infty$ мультипликатором типа (L^p, L^p) рядов Фурье по мультипликативной системе V .

Специальный случай предыдущей леммы для действительной системы $W := \{w_i(x)\}_{i=0}^\infty$ функций Уолша в нумерации Пэли доказал ранее Ватари [16, с. 248, теорема 6]. Прототипом вышесформулированной леммы является в теории тригонометрических рядов Фурье лемма Марцинкевича [13, с. 346—347].

Лемма 2. *Предположение о порождающей последовательности: ограничена последовательность $P := \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ натуральных чисел $p_j \geq 2$.*

Предположение о методе суммирования: элементы бесконечной нижней треугольной комплексной матрицы $\dot{I} := (\mu_{n,i})$, где $Z_0 \ni n$ — номер строки, а $Z_0 \ni i$ — номер столбца, удовлетворяют трём условиям: (2)—(4).

Утверждение: при двух указанных выше предположениях из ограниченности (8) в комплексном пространстве $L^p[0,1)$, $1 < p < \infty$, матричных средних (7) формального комплексного ряда (5) по мультипликативной системе V следует, что формальный ряд (5) является рядом Фурье по системе V некоторой функции $f \in L^p[0,1)$, т. е., что имеют место равенства (6).

Доказательство. Шаг 1. Условие L^p -ограниченности (8), согласно известной теореме [17, с. 40, теорема 1.6.6], влечёт существование подпоследовательности $\{n_v\}_{v=0}^{\infty}$ последовательности Z_0 всех неотрицательных целых чисел и существование функции $g \in L^p[0,1)$ с нормой $\|g\|_p \leq C_3(M, A, V)$, таких, что для любых функций $u(x)$ из сопряжённого пространства $L^{p'}[0,1)$, где $1/p + 1/p' = 1$, имеет место предельное равенство

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^1 u(x) \sum_{i=0}^{n_v} \mu_{n_v,i} a_i \chi_i(P, x) dx = \int_0^1 u(x) g(x) dx.$$

Беря в нём $u(x) = \overline{\chi_m(P, x)} \in L^\infty[0,1) \subset L^{p'}[0,1)$, где $m \in Z_0$, и учитывая свойство ортонормированности мультипликативной системы V на полуинтервале $[0,1)$ (см. начальные сведения), а также определение (6) коэффициентов Фурье относительно системы V функции $g \in L^p[0,1)$, получаем: $\forall m \in Z_0 \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \mu_{n_v,m} a_m = \hat{g}(m)$. Отсюда на основании предельных равенств (3) имеем:

$$\forall m \in Z_0 \quad \rho_m a_m = \hat{g}(m). \quad (14)$$

Если последовательность $\{\rho_m\}_{m=0}^{\infty}$ постолбцовых пределов элементов матрицы M является единичной последовательностью $\{1\}_{m=0}^{\infty}$, то доказательство частного случая леммы 2 закончено с функцией $f := g$.

Бесконечная нижняя треугольная комплексная матрица $\dot{I} := (\mu_{n,i})$ определяет регулярный (сохраняющий сумму) метод суммирования комплексных рядов $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, если из существования конечного предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_i = s$ всегда следует существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \mu_{n,i} a_i = s$ [18, с. 62, § 3.2]. Согласно теореме Тёплица элементы регулярной матрицы $\dot{I} := (\mu_{n,i})$ удовлетворяют двум условиям [19, с. 20, следствие 1.1]: 1) ограничены в совокупности их построчные вариации: $\sup_{n \in Z_0} \sum_{i=0}^n |\mu_{n,i} - \mu_{n,i+1}| < \infty$ [отсюда вытекают условие ограниченности (1) и условие (2)]; 2) имеют по всем столбцам единичный предел: $\forall i \in Z_0 \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n,i} = 1$. Стало быть, предположение предыдущего абзаца заведомо выполняется, если матрица M определяет регулярный метод суммирования комплексных рядов.

Шаг 2. В случае же $\{\rho_m\}_{m=0}^{\infty} \neq \{1\}_{m=0}^{\infty}$ доказательство продолжается.

Благодаря условию (4) существует такой номер $r = m_q$, что все члены последовательности $\{\rho_i\}_{i=0}^{\infty}$ с номерами $i \geq r$ удовлетворяют неравенству

$$|\rho_i| \geq 0,5 \rho_{\infty} > 0. \quad (15)$$

Поскольку функция $g \in L^p[0, 1)$ и поскольку все мультипликативные функции $\chi_i(P, x)$ имеют единичный модуль, то разность $g(x) - \sum_{i=0}^{r-1} \rho_i a_i w_i(x)$ принадлежит пространству $L^p[0, 1)$ и имеет ряд Фурье по системе V вида

$$g(x) - \sum_{i=0}^{r-1} \rho_i a_i \chi_i(P, x) \stackrel{\text{п. а.}}{=} \sum_{i=r}^{\infty} \hat{g}(i) \chi_i(P, x),$$

где символ « $\stackrel{\text{п. а.}}{=}$ » означает равенство почти всюду на $[0, 1)$.

Предельным переходом в неравенствах

$$\forall v \in Z_0 \quad \forall n \in Z_0 \quad \sum_{i=m_v}^{m_{v+1}-1} |\mu_{n,i} - \mu_{n,i+1}| \leq \tilde{N}_2(P, M) \quad (2')$$

при фиксированном $v \in Z_0$ по $n \rightarrow \infty$, ввиду конечности сумм и условию (3), получаем неравенства

$$\forall v \in Z_0 \quad \sum_{i=m_v}^{m_{v+1}-1} |\rho_i - \rho_{i+1}| \leq \tilde{N}_2(P, M).$$

Из них и неравенства (15) имеем

$$\sup_{i \geq r} \left| \frac{1}{\rho_i} \right| \leq \frac{2}{\rho_\infty}, \quad \sup_{v \geq q} \sum_{i=m_v}^{m_{v+1}-1} \left| \frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{\rho_{i+1}} \right| \leq \frac{4C_2(P, M)}{\rho_\infty^2}.$$

Тогда, согласно лемме о мультипликаторах рядов Фурье по мультипликативной системе V ($\lambda_i := 1/\rho_i$), формальный ряд $\sum_{i=r}^{\infty} (1/\rho_i) \hat{g}(i) \chi_i(P, x)$ является рядом Фурье по системе V некоторой функции $h \in L^p[0, 1)$, т. е. $\exists h \in L^p[0, 1) \quad \forall i \in Z_r \quad (1/\rho_i) \hat{g}(i) = \hat{h}(i)$, где Z_r — есть множество всех целых чисел $\geq r$.

Из предыдущего с учётом (14) имеем: $\forall i \in Z_r \quad a_i = \hat{h}(i)$.

Таким образом, формальный комплексный ряд (5) по мультипликативной системе V является рядом Фурье по системе V функции $f(x) := \sum_{i=0}^{r-1} a_i \chi_i(P, x) + h(x) \in L^p[0, 1)$, $1 < p < \infty$. Лемма 2 доказана.

Доказательство основного результата закончено.

Замечание к шагу 2 доказательства леммы 2. Бесконечная нижняя треугольная комплексная матрица $\hat{I} := (\mu_{n,i})$ определяет консервативный (сохраняющий сходимость) метод суммирования комплексных рядов $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, если из существования конечного предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_i =: s$ всегда следует существование конечного предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \mu_{n,i} a_i =: \tau$ [18, с. 62, § 3.2]. В случае $\tau = s$ имеем регулярный метод суммирования комплексных рядов. Согласно теореме Кожима элементы консервативной матрицы $\hat{I} := (\mu_{n,i})$ удовлетворяют двум условиям [19, с. 17—18, теорема 1.3]:

1) ограничены в совокупности их построчные вариации: $\sup_{n \in Z_0} \sum_{i=0}^n |\mu_{n,i} - \mu_{n,i+1}| < \infty$; 2) имеют по всем столбцам конечные пределы: $\forall i \in Z_0 \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n,i} =: \rho_i \in C$.

Если бесконечная нижняя треугольная комплексная матрица $\hat{I} := (\mu_{n,i})$ определяет консервативный метод суммирования числовых рядов и если все постолбцовые пределы отделены от нуля: $\inf_{i \in Z_0} |\rho_i| > 0$, то частные суммы рядов Фурье функций f и g связаны между собой следующим образом [20, с. 682]:

$$\forall n \in Z_0 \quad S_n(x, P, f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{\rho_{i+1}} \right) S_i(x, P, g) + \frac{1}{\rho_n} S_n(x, P, g),$$

где $\forall n \in Z_0 \quad S_n(x, P, g) := \sum_{i=0}^n \hat{g}(i) \chi_i(P, x)$. Тогда шаг 2 доказательства леммы 2 можно провести, опираясь на формулируемую ниже лемму.

Лемма Ватари об L^p -ограниченности [10, с. 224, теорема 2]. *Предположение о порождающей последовательности: ограничена последовательность $P := \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ натуральных чисел $p_j \geq 2$.*

Утверждение: если при показателе $1 < p < \infty$ функция g принадлежит комплексному пространству Рисса $L^p[0, 1)$, то

$$\forall n \in \mathbb{Z}_0 \quad \int_0^1 |S_n(x, P, g)|^p dx \leq C_9^p(P, p) \|g\|_p^p.$$

Предостережение. Исторически так сложилось, что теория тригонометрических рядов Фурье служила эталоном при рассмотрении рядов Фурье по другим ортонормированным системам. Поэтому выше мы указывали тригонометрические прототипы теорем о мультипликативных рядах. В связи с этим предостережём от ложных умозаключений.

Если исключить значения в точках разрыва, то для первых восьми функций Уолша в нумерации Пэли имеем: $w_0(x) = 1$, $w_1(x) = \operatorname{sgn} \sin 2\pi x$, $w_2(x) = \operatorname{sgn} \sin 4\pi x$, $w_3(x) = \operatorname{sgn} \cos 2\pi x$, $w_4(x) = \operatorname{sgn} \sin 8\pi x$, $w_5(x) = \operatorname{sgn} \cos 6\pi x$, $w_6(x) = \operatorname{sgn} \cos 4\pi x$, $w_7(x) = \operatorname{sgn} \sin 6\pi x$. Отсюда видно, что первым восьми функциям системы Уолша—Пэли $W := \{w_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ соответствуют не первые восемь функций действительной тригонометрической системы $\{1, \cos 2\pi x, \sin 2\pi x, \dots, \cos 2n\pi x, \sin 2n\pi x, \dots\}$, а первые восемь функций некоторой переставленной тригонометрической системы.

Моргенталер в параграфе 6 своей диссертации [21, с. 487—492] доказал теоремы о рядах Фурье—Уолша—Пэли, которые аналогичны теоремам о тригонометрических рядах Фурье, приведённым в параграфах 4, 5 и 11 главы IV монографии [22, с. 221—241, 282—287] его научного руководителя Антони Зигмунда. Однако полной аналогии нет; сравните [21, с. 489, теорема 16] или [23, с. 250, теорема 4] с [22, с. 222, теорема (4.3)] и [21, с. 49, теорема 18] с [22, с. 282, теорема (11.4)].

Заключение. В настоящей работе в терминах матричных средних указано условие, необходимое и достаточное для того, чтобы формальный комплексный ряд по мультипликативной системе являлся рядом Фурье функции из комплексных пространств Ф. Рисса $L^p[0, 1)$, $1 < p < \infty$. Укажем поля приложения сил молодых исследователей относительно следующей шкалы пространств:

$$\forall p \in (1, \infty) \quad L^{\infty}[0, 1) \subsetneq L^p[0, 1) \subsetneq L^1[0, 1).$$

Достоинством условия (2) является то, что оно явно зависит от порождающей последовательности $P := \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$: $\forall v \in \mathbb{Z}_1 \quad m_v := \prod_{j=1}^v p_j$. Недостатком эффективных условий (1)—(4) нашего основного результата является то, что они не различают значения показателей p между 1 и ∞ . В сходных исследованиях ставится задача преодолеть указанный недостаток и получить эффективные условия, которые явно зависят от показателя p : [24, с. 130, 6.2.5], [25, с. 156].

Одним из обобщений пространств Ф. Рисса $L^p[0, 1)$, $1 < p < \infty$, являются пространства Орлича $L^{\varphi}[0, 1)$: $\bigcup_{\varphi \in N} L^{\varphi}[0, 1) \supset L^1[0, 1)$, где объединение берётся по всем N -функциям $\varphi(u)$. Автор исследовал проблему «когда тригонометрический и, более общо, ортогональный ряд является рядом Фурье функции из пространств Орлича» в [26, с. 24, теорема 1], [27, с. 21—22, теорема 5], [28, с. 231, теорема 1, 1)], [29, с. 20, теорема]. Но, помимо L^p и L^{ϕ} , имеются и другие пространства измеримых функций, например, пространства Марцинкевича и Лоренца [30, с. 155].

В исследованиях по теории дифференциальных уравнений в частных производных Джон и Ниренберг ввели пространство $\hat{A}^1 \hat{I}(T)$ функций ограниченной средней осцилляции, где $T := R/2\pi\mathbb{Z}$. Хотя $\forall f \in L^{\infty}(T)$ существует предел $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_{\infty}$, однако имеют место строгие включения $L^{\infty}(T) \subsetneq \mathbf{BMO}(T) \subsetneq \bigcap_{1 < p < \infty} L^p(T)$. Сарасон ввёл подпространство $\mathbf{VMO}(T) \subsetneq \hat{A}^1 \hat{I}(T)$ функций исчезающей средней осцилляции. Автор исследовал проблему «когда тригонометрический ряд является рядом Фурье функции из пространств $\mathbf{BMO}(T)$ или $\mathbf{VMO}(T)$ » в [31, с. 485, теорема 4], [27, с. 21, теорема 4], [32, с. 101—102, теорема 2], [33, с. 232, теорема 2], [34, с. 55, теорема 4]. Доказательства автора опирались на теорему Феффермана о том, что для функции $f \in \hat{A}^1 \hat{I}(T)$ можно

найти две функции $\phi \in L^\infty$ и $\psi \in L^\infty$, такие, что $f(x) = \phi(x) + \tilde{\psi}(x) + \text{const}$ и $\max(\|\phi\|_\infty, \|\psi\|_\infty) \leq C_{10} \|f\|_*$, где $\tilde{\psi}$ есть функция, тригонометрически сопряжённая к функции ψ . Интересно выяснить, когда мультипликативный ряд (в частности, ряд Уолша) является рядом Фурье функции из пространств $\text{ВМО}[0,1]$ или $\text{ВМО}[0,1]$ [35, с. 68].

Список цитируемых источников

1. Голубов, Б. И. Ряды и преобразования Уолша : Теория и применения / Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов. — М. : Наука, 1987. — 344 с.
2. Schipp, F. Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis. With the collaboration of J. Pál / F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon. — Bristol ; New York : Adam Hilger, 1990. — X+560 pp.
3. Виленкин, Н. Я. Дополнения. § 1. Теория мультипликативных систем / Н. Я. Виленкин // Теория ортогональных рядов / С. Качмаж, Г. Штейнгауз. — М. : ГИФМЛ, 1958. — С. 457—482, 502—507.
4. Бруй, И. Н. Матричные средние ортогональных рядов и классы функций / И. Н. Бруй // Теория приближений и гармонический анализ : тез. докл. Междунар. конф., Тула, 26—29 мая 1998 г. — Тула : [б. и.], 1998. — С. 58—59.
5. Бруй, И. Н. Ряды Уолша—Пэли и пространства Рисса / И. Н. Бруй // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2. — 2014. — № 2 (173).
6. Бруй, И. Н. Методы суммирования рядов и классы функций : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.01.01 / И. Н. Бруй. — Минск : Изд. центр Белорус. гос. ун-та, 2005. — 34 с.
7. Billard, P. Sur la convergence presque partout des séries de Fourier—Walsh des fonctions de l'espace $L^2(0,1)$ / P. Billard // Studia mathematica. — 1967. — Т. 28. — Fasc. 3. — Р. 363—388.
8. Карлсон, Л. О сходимости рядов Фурье и о росте их частных сумм / Л. Карлсон // Математика : период. сб. пер. иностр. ст. — 1967. — Т. 11, № 4. — С. 113—132.
9. Hunt, R. A. On the convergence of Fourier series / R. A. Hunt // Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues. — Carbondale : Southern Illinois University Press, 1968. — P. 235—255.
10. Watari, C. On generalized Walsh—Fourier series / C. Watari // Tôhoku Math. J. Ser. 2. — 1958. — Vol. 10, № 3. — P. 211—241.
11. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах / Г. Н. Агаев [и др.] — Баку : Элм, 1981. — 180 с.
12. Paley, R. E. A. C. A remarkable series of orthogonal functions (I) / R. E. A. C. Paley // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. — 1932. — Vol. 34. — P. 241—264.
13. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды : в 2 т. / А. Зигмунд. — М. : Мир, 1965. — Т. 2. — 538 с.
14. Бруй, И. Н. Методы суммирования кратных тригонометрических рядов и пространства Рисса $L^p(\mathbb{T}^N)$, $p \in (1, \infty)$ / И. Н. Бруй // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2. — 2007. — № 1 (48). — С. 3—9.
15. Блюмин, С. Л. Некоторые свойства одного класса мультипликативных систем и вопросы приближения функций полиномами по этим системам / С. Л. Блюмин // Изв. вузов. Математика. — 1968. — № 4. — С. 13—22.
16. Watari, C. Multipliers for Walsh—Fourier series / C. Watari // Tôhoku Math. J. Ser. 2. — 1964. — Vol. 16. — P. 239—251.
17. Качмаж, С. Теория ортогональных рядов / С. Качмаж, Г. Штейнгауз. — М. : ГИФМЛ, 1958. — 507 с.
18. Харди, Г. Расходящиеся ряды / Г. Харди ; пер. с англ. Д. А. Райкова ; с предисл. и обзор. ст. С. Б. Стечкина. — М. : ИИЛ, 1951. — 504 с. — Перевод изд.: Divergent Series / G. H. Hardy. — Oxford : [s. n.], 1949. — (М. : Комкнига : Факториал Пресс, 2006).
19. Барон, С. Введение в теорию суммируемости рядов / С. Барон. — Таллин : Валгус, 1977. — 280 с.
20. Бруй, И. Н. Тригонометрические ряды классов $L^p(\mathbb{T})$, $p \in]1, \infty[$, и их консервативные средние / И. Н. Бруй // Мат. заметки. — 1997. — Т. 62, № 5. — С. 677—686. — Translation from Russian into English : Trigonometric Series of the Classes $L^p(\mathbb{T})$, $p \in]1, \infty[$, and Their Conservative Means / I. N. Bruj // Math. Notes. — 1997. — Vol. 62, № 5—6. — P. 566—574 (1998).
21. Morgenthaler, G. W. On Walsh—Fourier series / G. W. Morgenthaler // Trans. Amer. Math. Soc. — 1957. — Vol. 84, № 2. — P. 472—507.
22. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды : в 2 т. / А. Зигмунд. — М. : Мир, 1965. — Т. 1. — 615 с.
23. Fine, N. J. Fourier—Stieltjes series of Walsh functions / N. J. Fine // Trans. Amer. Math. Soc. — 1957. — Vol. 86, № 1. — P. 246—255.
24. Стейн, И. М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / И. М. Стейн. — М. : Мир, 1973. — 344 с.
25. Дынькин, Е. М. Методы теории сингулярных интегралов. II. Теория Литлвуда—Пэли и её приложения / Е. М. Дынькин // Современ. проблемы математики. Фундам. направления. — М. : ВИНТИ АН СССР, 1989. — Т. 42. — С. 105—198. — (Итоги науки и техники).
26. Бруй, И. Н. Матричные средние тригонометрических рядов и пространства Орлича / И. Н. Бруй // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2. — 2001. — № 2 (6). — С. 23—28.
27. Бруй, И. Н. Методы суммирования тригонометрических рядов и пространства функций / И. Н. Бруй // Мат. сб. — 2002. — Т. 193, № 4. — С. 17—36. — Translation from Russian into English : Methods for the summation of trigonometric series, and function spaces / I. N. Bruj // Sb. : Mathematics. — 2002. — Vol. 193, № 3—4. — P. 487—506.
28. Bruj, I. Classes of functions and matrix means of orthogonal series (Part 1) / I. Bruj, J. Müller // Наука. Образование. Технологии-2010 : материалы III Междунар. науч.-практ. конф., Барановичи, 21—22 окт. 2010 г. — Барановичи : РИО БарГУ, 2010. — С. 230—232.
29. Бруй, И. Н. Абелевы средние ортогональных рядов и пространства Орлича / И. Н. Бруй // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2. — 2013. — № 2 (151). — С. 18—24.
30. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М. : Наука, 1977. — 744 с.
31. Bruj, I. Real trigonometric series of class ВМО and $(C,1)$ -means / I. Bruj, G. Schmieder // Acta scientiarum mathematicarum (Szeged). — 1998. — Vol. 64, № 3—4. — P. 483—488.
32. Бруй, И. Н. Функции ограниченной средней осцилляции и абелевы средние рядов Фурье / И. Н. Бруй // Материалы юбилейной науч.-практ. конф., посвящ. 40-летию Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины, Гомель, 11 июня 2009 г. : в 4 ч. — Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины. — Ч. 4. — С. 101—104.
33. Bruj, I. Classes of functions and matrix means of orthogonal series (Part 2) / I. Bruj, J. Müller // Наука. Образование. Технологии-2010 : материалы III Междунар. науч.-практ. конф., Барановичи, 21—22 окт. 2010 г. — Барановичи : РИО БарГУ, 2010. — С. 232—234.

34. Бруй, И. Н. Функции исчезающей средней осцилляции и абелевы средние тригонометрических рядов / И. Н. Бруй // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2. — 2013. — № 1 (148). — С. 54—57.
35. Weisz, F. Martingale Hardy Spaces and their Applications in Fourier Analysis / F. Weisz // Lecture Notes in Mathematics. — 1994. — Vol. 1568. — VIII+217 pp.

Материал поступил в редакцию 07.09.2014 г.

УДК 517.5

И. Н. Бруй, кандидат физико-математических наук, доцент
Учреждение образования «Барановичский государственный университет», Барановичи

ПАМЯТИ МОЕГО НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ А. К. ПОКАЛО: ЕГО ИДЕИ

Дан обзор развития идей А. К. Покало в теории приближений.

Ключевые слова: ряды и интегралы Фурье, ряды Фабера, суммируемость.

A survey of development of the ideas of A. K. Pokalo in the approximation theory.

Key words: Fourier series and integrals, Faber series, summability.

Введение. Настоящая работа посвящена развитию идей научного руководителя автора настоящей статьи (немцы говорят *Doktorvater*) Покало Анатолия Константиновича (11.12.1922—14.12.2006). Его научным руководителем был Турецкий Абрам Хаимович (13.09.1905—01.03.1975), который являлся учеником Бернштейна Сергея Натановича (05.03.1880—26.10.1968). А. Х. Турецкий говорил автору, что его аспирант А. К. Покало самостоятельно проработал монографию [1] Харди Годфри Харольда (07.02.1877—01.12.1947). Сам А. К. Покало в присутствии свидетелей признавал, что его путь в науку определила статья [2] Стечкина Сергея Борисовича (06.09.1920—22.11.1995). Труды четырёх вышеназванных математиков позволяют реконструировать ход мыслей А. К. Покало.

В обозначениях мы стремимся следовать двухтомной монографии Р. Эдвардса [3; 4]. Символ « $\stackrel{\text{def}}{=}$ » означает, что правой части присвоено обозначение слева; аналогичный смысл имеет символ « $\stackrel{\text{def}}{=}$ ».

Метод А. К. Покало суммирования числовых рядов. Возник под влиянием теории простых тригонометрических рядов Фурье.

Функция $f \in L^1(T)$ порождает, во-первых, двустороннюю числовую последовательность
$$\left(\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right)_{n=-\infty}^{\infty}$$
 тригонометрических коэффициентов Фурье функции f и, во-вторых, двусторонний функциональный

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx} \quad (1)$$

тригонометрический ряд Фурье функции f .

Если периодическая с периодом 2π функция f удовлетворяет условию Липшица первого порядка, т. е. если (см. [5, с. 155, теорема 1] или [6, с. 38])

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \|f'\|_{\infty} \cdot |x_1 - x_2|,$$

то, как показал С. Н. Бернштейн, отклонение функции f от средних Фейера её тригонометрического ряда Фурье [7, с. 205, (200)]

$$\max_{-\pi \leq x \leq \pi} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N \left(1 - \left| \frac{n}{N+1} \right| \right) \hat{f}(n) e^{inx} \right| = O\left(\frac{\ln N}{N} \right), \quad N \rightarrow \infty, \quad (2)$$

хотя наилучшее приближение функции $f \in C(T) \setminus \{\text{const}\}$ посредством тригонометрических полиномов степени не выше N согласно теореме Д. Джексона — Н. П. Корнейчука [6, с. 261]

$$\forall N \in \mathbb{Z}_+ \quad E_N f := \inf_{\gamma_n \in C} \max_{-\pi \leq x \leq \pi} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N \gamma_n e^{inx} \right| < \frac{\pi \|f'\|_{\infty}}{N+1}. \quad (3)$$