Необходимо отметить ряд возможных областей сотрудничества, которые являются новыми для университетов-партнеров БарГУ и, возможно, будут полезными для учреждений образования Украины. В качестве таковых следует выделить международную программу Visegrad+, позволяющую участвовать в конкурсах на соискание грантов на выполнение научных исследований, реализацию академической мобильности, проведение международных научных мероприятий. В данной программе участниками являются организации из Польши, Чехии, Венгрии, Словакии. Также необходимо шире использовать возможности сотрудничества университетов при подготовке научных проектов в рамках объявляемых конкурсов Белорусским республиканском фондом фундаментальных исследований совместно с Российским фондом фундаментальных исследований. Необходимо подавать заявки на включение в реализуемые научные направления в рамках международной программы COST, позволяющей подготовить совместную заявку на реализацию программы HORIZON-2020 на основе участия уже сформированной международной рабочей группы исследователей.

Индикаторы оценки эффективности научно-образовательного сотрудничества предлагается определять на основе темпов изменения: 1) количества совместно организуемых научно-практических мероприятий (конференций, семинаров, круглых столов, конкурсов) и количества их участников; 2) количества совместно реализуемых научных, образовательных проектов; 3) количества совместных (двойных) поуровневых образовательных программ и количества их участников; 4) количества зарубежных стажировок (приглашенных профессоров).

Заключение. Международное сотрудничество выступает инструментом роста конкурентоспособности учреждений образования.

УДК 512.643

А. А. Козлов, кандидат физико-математических наук, доцент, **К. Д. Калита**
Учреждение образования «Полоцкий государственный университет», Новополоцк

ИНВАРИАНТНОСТЬ СВОЙСТВА ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ВЕДУЩИХ ГЛАВНЫХ МИНОРОВ ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПОДОБИЯ

Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ — *n*-мерное евклидово векторное пространство; $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — векторы (столбцы) канонического ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^n$; M_{mn} — пространство вещественных матриц размерности $m \times n$; $\mathrm{M}_n := \mathrm{M}_{nn}$. Обозначим через $\mathrm{R}_n \subset \mathrm{M}_n$ совокупность всех нижнетреугольных $n \times n$-матриц с положительными диагональными элементами.

Основная часть. ***Определение 1***. Для любого фиксированного числа $k \in \{1, \ldots, n\}$ и произвольной матрицы $H = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^n \in \mathrm{M}_n$ через $(H)_k \in \mathrm{M}_k$ будем обозначать ее *ведущую главную подматрицу порядка* k, т. е.

$$(H)_1 = h_{11}, \quad (H)_2 = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, \ldots, \quad (H)_n = H.$$

Тогда *ведущими главными минорами* матрицы H назовем определители ведущих главных подматриц H.

Определим множество $\mathcal{H}_n(0)$ матриц *n*-го порядка с положительными ведущими главными минорами, т. е. совокупность вида $\mathcal{H}_n(0) := \{H \in \mathrm{M}_n : \det(H)_k > 0, \ \ k = \overline{1,n}\}$.

Определение 2. Для всякого $j = \overline{1,n}$ обозначим через $S_j \in \mathrm{M}_n$ матрицу, полученную из матрицы R заменой первых *j*-строк соответствующими строками матрицы H, т. е. матрицу $S_j := R + \sum_{i=1}^{j} e_i e_i^T (H - R)$. Будем говорить, что матрицы S_j, $j = \overline{1,n}$ являются *промежуточными шагами на пути от* R *к* H.

Определение 3. Упорядоченную *пару* (R, H) *матриц* из множества M_n назовем *законопослушной*, если справедливо соотношение $\det R > 0$ и при всех $j \in \{1, \ldots, n\}$ для матриц S_j, являющихся промежуточными шагами на пути от R к H, выполнены неравенства $\det S_j > 0$.

Определение 4. Квадратные матрицы S и N *n*-го порядка называются *подобными*, если существует такая невырожденная матрица S $(\det S \neq 0)$, при которой $M = S^{-1} N S$, само же преобразование матрицы N с помощью матрицы S называется *преобразованием подобия.*

Замечание 1. При пребразовании подобия матриц из $\mathcal{H}_n(0)$ свойство положительности ведущих главных миноров, вообще говоря, не сохраняется, т. е. если $N \in \mathcal{H}_n(0)$, то $S^{-1} N S \notin \mathcal{H}_n(0)$ для всякой невырожденной матрицы $S \in \mathrm{M}_n$.

Действительно, возьмем, например, матрицы $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ и $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда, очевидно, справедливы соотношения $\det(N)_i > 0,\ \ i = 1,2,$ и $\det S = 1 \neq 0,$ т. е. матрица S обратима, причем выполняется равенство $S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. На основании определения 4 воспользуемся преобразованием подобия для рассматриваемых матриц. Имеют место равенства $M := S^{-1}NS = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 13 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 33 \\ -17 & 28 \end{pmatrix}$. Поскольку $\det(M)_1 = -20 < 0,$ то, как можно видеть, свойство положительности ведущих главных миноров в общем случае не сохраняется при преобразовании подобия.

Замечание 2. Легко видеть, что если $S^{-1}NS$ — пребразование подобия матрицы $N,$ то и TNT^{-1} — преобразование подобия матрицы N при $T = S^{-1}$. Поэтому в дальнейшем будем считать преобразование вида TNT^{-1} преобразованием подобия.

Замечание 3. Зафиксируем любое число $k \in \{1,\dots,n\}$. Возьмем произвольные вещественные матрицы $A \in \mathrm{M}_k,\ \ B \in \mathrm{M}_{k.n-k},\ \ C \in \mathrm{M}_{n-k.k},\ \ D \in \mathrm{M}_{n-k},$ при этом будем предполагать, что $\det D \neq 0$. Тогда для блочной матрицы $F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n$ имеет место равенство [1, с. 159] $\det F = \det(A - BD^{-1}C) \cdot \det D.$

Теорема. *Пусть* $R \in \mathrm{R}_n,\ \ H \in \mathcal{H}_n(0)$. *Если пара* (R,H) *законопослушна, то положительность главных ведущих миноров матрицы* H *сохраняется при преобразовании подобия с помощью матрицы* $R.$

Доказательство. Возьмем произвольную матрицу $H \in \mathcal{H}(0)$ и такую матрицу $R \in R_n,$ что пара (R,H) законопослушна. Зафиксируем произвольное число $k \in \{1,\dots,n\}$. Представим матрицу H в блочном виде $H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}$, где $H_{11} \in \mathcal{H}_k(0),\ \ H_{12} \in \mathcal{H}_{k.n-k}(0),\ \ H_{21} \in \mathcal{H}_{n-k.k}(0),\ \ H_{22} \in \mathcal{H}_{n-k}(0)$. Легко заметить, что матрица H_{11} является ведущей главной подматрицей k-го порядка матрицы $H,$ т. е. $H_{11} = (H)_k$. Так как выполняется включение $R \in \mathrm{R}_n,$ то матрица $R = \{r_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ является нижнетреугольной, поэтому она представляется в виде блочной нижнетреугольной матрицы $R = \begin{pmatrix} R_{11} & \mathrm{O} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$, где R_{11} — нижнетреугольная матрица k-го порядка с положительными диагональными элементами, O — нулевая матрица размерности $k \times (n-k),$ R_{21} — некоторая вещественная матрица размерности $(n-k)\times k,$ а R_{22} — нижнетреугольная матрица $(n-k)$-го порядка с положительными диагональными элементами. Очевидно, что диагональные элементы матриц R_{11} и R_{22} совпадают с диагональными элементами матрицы $R.$ Тогда имеют место включения $R_{11} \in \mathrm{R}_k,\ \ R_{22} \in \mathrm{R}_{n-k}$ и справедливы соотношения $\det R_{11} = \prod_{i=1}^{k} r_{ii} > 0$ и

$$\det R_{22} = \prod_{i=n-k+1}^{n} r_{ii} > 0, \tag{1}$$

т. е. матрицы R_{11} и R_{22} обратимы, а значит, обратима и матрица R ввиду очевидного равенства $\det R = \det R_{11} \cdot \det R_{22}$. Легко получить, что матрица, обратная к $R,$ имеет блочный вид $R^{-1} = \begin{pmatrix} R_{11}^{-1} & \mathrm{O} \\ -R_{22}^{-1}R_{21}R_{11}^{-1} & R_{22}^{-1} \end{pmatrix}$.

Воспользуемся преобразованием подобия матрицы H с помощью матрицы $R.$ На основании определений матриц $R^{\pm 1}$ и $H,$ а также произведения блочных матриц имеем равенства (здесь блоки, не влияющие на ход дальнейших рассуждений, заменены символом $*$) $M := RHR^{-1} = \begin{pmatrix} R_{11} & \mathrm{O} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}\cdot$

$$\cdot\begin{pmatrix} R_{11}^{-1} & O \\ -R_{22}^{-1}R_{21}R_{11}^{-1} & R_{22}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}H_{11} & R_{11}H_{12} \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_{11}^{-1} & O \\ -R_{22}^{-1}R_{21}R_{11}^{-1} & R_{22}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}H_{11}R_{11}^{-1} - R_{11}H_{12}R_{22}^{-1}R_{21}R_{11}^{-1} & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Легко заметить, что ведущая главная подматрица k-го порядка матрицы M равна $(M)_k = R_{11}H_{11}R_{11}^{-1} - R_{11}H_{12}R_{22}^{-1}R_{21}R_{11}^{-1}$. Тогда для главного углового минора k-го порядка последней матрицы на основании элементарных свойств определителя выполняются равенства $\det(M)_k = \det(R_{11}H_{11}R_{11}^{-1} - R_{11}H_{12}R_{22}^{-1}R_{21}R_{11}^{-1}) = \det R_{11} \cdot \det(H_{11} - H_{12}R_{22}^{-1}R_{21}) \cdot \det R_{11}^{-1} = \det(H_{11} - H_{12}R_{22}^{-1}R_{21}),$ т. е.

$$\det(M)_k = \det(H_{11} - H_{12}R_{22}^{-1}R_{21}). \qquad (2)$$

Возьмем матрицу S_k, представляющую собой k-й промежуточный шаг на пути от R к H, т. е. $S_k = R + \sum_{i=1}^{k} e_i e_i^T (H - R) = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$, и найдем ее определитель $\det S_k$. Поскольку справедливо неравенство (1), то для блочной матрицы S_k ввиду замечания 3 выполняется равенство $\det S_k = \det(H_{11} - H_{12}R_{22}^{-1}R_{21}) \cdot \det R_{22}$.

Отсюда и из формулы (2) следует соотношение $\det(M)_k = \det S_k / \det R_{22}$. Поскольку матрицы (R, H) законопослушны, то $\det S_j > 0$ для всех $j = \overline{1, n}$, значит, $\det S_k > 0$. Тогда в силу формулы (1) имеет место неравенство $\det(M)_k > 0$, означающее положительность ведущего главного минора k-го порядка матрицы, полученной из матрицы H преобразованием подобия с помощью нижнетреугольной матрицы с положительными диагональными элементами. Ввиду произвольности числа $k \in \{1, \ldots, n\}$ последнее неравенство справедливо для всех ведущих главных миноров матрицы M. Теорема доказана.

Заключение. В данной работе получено достаточное условие инвариантности свойства положительности ведущих главных миноров при преобразовании подобия с помощью нижнетреугольных матриц с положительными диагональными элементами.

Список цитируемых источников

1. *Бортаковский, А. С.* Линейная алгебра в примерах и задачах / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. — М. : Высш. шк., 2005. — 591 с.

УДК 538.91+519.65

А. П. Мателенок, И. Б. Сороговец, кандидат физико-математических наук, доцент,
Ф. Ф. Яско, кандидат физико-математических наук, доцент
Учреждение образования «Полоцкий государственный университет», Новополоцк

ОПЫТ ФОРМИРОВАНИЯ У СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ НАВЫКОВ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Введение. Устойчивые тенденции к оптимизации деятельности системы образования высшей школы нашли свое отражение в переходе белорусской высшей школы по ряду специальностей на четырехлетнее обучение. Вследствие этого возникает потребность во внедрении и адаптации имеющихся результатов научных исследований в реальный процесс обучения математике студентов технических специальностей, в научном подборе и обосновании соответствующих, качественно новых методик и механизмов организации учебного процесса с учетом потребностей специальности и значительным сокращением аудиторных часов на изучение математики для большинства технических специальностей. Достижение решения названных задач во многом зависит не только от набора полученных и усвоенных студентами знаний, сформированных компетенций, но и от таких качеств, как способность к обучению, к самообучению, саморазвитию и т. д. Наши исследования направлены на изучение этих вопросов в контексте применения УМК (в широком смысле) [1—5].

Основная часть. Опытно-экспериментальные исследования, проведенные нами, позволяют сделать следующий вывод. Организуя на аудиторных занятиях деятельность преподавателя и студента с использованием УМК (в широком смысле), можно добиться оптимальных результатов усвоения содержания курса математики, формирования навыков самостоятельной познавательной деятельности и необходимых компетенций. При подготовке к организации педагогического эксперимента мы исходили из предположения о том, что поэтапное внедрение самостоятельной работы студентов позволит выработать навыки познавательной самостоятельности. Применение внеаудиторных работ с использованием практико-ориентированных заданий позволяет расширить круг решаемых задач инженерно-физического содержания, обеспечит самоконтроль и самокоррекцию учебно-познавательной деятельности студентов и, как следствие, повысит математическую подготовку. При этом следует уделять внимание осуществлению межпредметных связей математики с численными методами, физикой, информатикой и теоретической механикой. Проводимый нами педагогический эксперимент проходил в три этапа (констатирующий, поисковый и формирующий) и осуществлялся в течение 2006—2016 годов в Полоцком государственном университете.

На первом этапе в целях выявления исходного уровня математической подготовки студентов-первокурсников мы сравнивали полученные данные для контрольной и экспериментальной групп по четырем независимым направлениям: результаты выполнения единой мини-контрольной, результаты централизованного