

МІНІСТЭРСТВА АДУКАЦЫІ РЭСПУБЛІКІ БЕЛАРУСЬ

УСТАНОВА АДУКАЦЫІ «БАРАНАВІЦКІ  
ДЗЯРЖАЎНЫ ЎНІВЕРСІТЭТ»

С. І. РУСАН

## **ВАГАННІ МЕХАНІЧНЫХ СІСТЭМ**

**Вучэбна-метадычны дапаможнік для студэнтаў  
тэхнічных спецыяльнасцей  
вышэйшых навучальных устаноў**

**Рэкамендавана ў друк навукова-метадычным саветам  
універсітэта**

Репозиторий БарГУ

**Баранавічы  
РВА БарДУ  
2008**

УДК 621(075)  
ББК 34.4я73  
Р88

А ў т а р

*С. І. Русан*

Р э ц е н з е н т ы :

**М. І. Латцеў** кандыдат тэхнічных навук, інжынер-тэхнолаг  
РУПП «558 АРЗ» г. Баранавічы;

*М. В. Чычкан*, кандыдат тэхнічных навук, дацэнт кафедры «Тэхналогія і  
абсталяванне машынабудавання» УА БарДУ

**Русан, С. І.**

**P88 Ваганні механічных сістэм [Тэкст] : вучэб.-метад. дапам. для студэнтаў тэхн. спецыяльнасцей выш. навуч. устаноў / С. І. Русан. — Баранавічы : РВА БарДУ, 2008. — 144 с. — ISBN 978-985-498-152-9.**

Дапаможнік мае на мэце аказанне практычнай парады студэнтам у самастойным выкананні заданняў па апошняй самай складанай тэме курса тэрэтычнай механікі. У ім разглядаюцца свабодныя і вымушаныя ваганні кансерватыўных сістэм з адной і дзвюма ступенямі свабоды. Прыводзяцца кароткія звесткі з тэорыі і прыклады выканання заданняў па тэме. Змест даведніка адпавядае вучэбнай праграме тэхнічных спецыяльнасцей ВНУ.

Выданне рэкамендуецца студэнтам тэхнічных спецыяльнасцей вышэйшых навучальных устаноў

УДК 621(075)  
ББК 34.4я73

ISBN 978-985-498-152-9

© Русан С. І., 2008  
© УА БарДУ, 2008

## ЗМЕСТ

*Прадмова* ..... 5

### ЧАСТКА 1 СВАБОДНЫЯ ВАГАННІ

1.1 Устойлівасць раўнавагі. Малыя ваганні механічных сістэм ... 6  
1.2 Вылічэнне кінетычнай энергіі сістэмы з адной ступенню  
свабоды ..... 10

|  |          |
|--|----------|
| 1.3 Патэнцыяльная энергія кансерватыўнай сістэмы . . . . .   | 16       |
| 1.4 Вылічэнне патэнцыяльнай энергіі сістэмы з адной ступенню<br>свабоды . . . . .                      | 18       |
| 1.5 Малыя свабодныя ваганні механічных сістэм з адной<br>ступенню свабоды . . . . .                    | 25       |
| 1.6 Кінетычная і патэнцыяльная энергія механічнай сістэмы з<br>дзвюма ступенямі свабоды . . . . .      | 43       |
| 1.7 Малыя свабодныя ваганні сістэмы з дзвюма ступенямі<br>свабоды . . . . .                            | 48       |
| <br>   |          |
| ЧАСТКА . . . . .   | 3        |
| <b>ВЫМУШАНЫЯ ВАГАННІ . . . . .</b>   | <b>3</b> |
| 2.1 Узбуджэнне ваганняў. Супраціўленне ў сістэме . . . . .   | 104      |
| 2.2 Ваганні механічных сістэм з адной ступенню свабоды . . . . .                                       | 106      |
| 2.3 Ваганні механічных сістэм з дзвюма ступенямі свабоды . . . . .                                     | 137      |
| 2.4 Даследаванне вымушаных ваганняў механічнай сістэмы з адной і<br>дзвюма ступенямі свабоды . . . . . | 164      |
| <i>Пасляслоўе</i> . . . . .  | 176      |
| <br>   |          |
| Спіс крыніц . . . . .  | 141      |

## Прадмова

Вагальныя рухі і, у прыватнасці, вібрацыі, уласцівы большасці машын і механізмаў, інжынерных збудаванняў, транспартных сродкаў і інш. У некаторых аб'ектах тэхнікі ваганні ўтвараюць функцыянальную аснову рабочага працэсу. Прыкладамі такіх аб'ектаў могуць служыць разнастайныя тыпы вібратораў. Уласціvasці ваганняў тут вывучаюцца на стадыі праектавання аб'ектаў тэхнікі для падбора іх аптымальных параметраў. У большасці ж выпадкаў механічныя ваганні прадстаўляюць негатыўную з'яву, якая выклікае датэрміновы знос, а часам — і разбурэнне канструкцый. У такіх выпадках даследаванне ваганняў мае на мэце падбор канструктыўных параметраў, якія гарантуюць бяспечнае функцыянаванне аб'ектаў тэхнікі. Асаблівую небяспеку для механічных сістэм стварае з'ява рэзанансу, пры каторай частата ўласных ваганняў сістэмы супадае з частатаю ўзбуджальнай сілы. Папярэдзальны дынамічны разлік сістэмы дазваляе пазбегнуць гэтай з'явы.

Вучэбна-метадычны дапаможнік складаецца з дзвюх частак. У першай з іх уводзіцца паняцце аб устойлівасці раўнавагі, разглядаецца сутнасць малых ваганняў, а таксама спосабы вылічэння кінетычнай і патэнцыяльнай энергій у агульным выпадку і асобна для сістэм з адной і дзвюма ступенямі свабоды. А таксама даследуюцца свабодныя ваганні гэтых сістэм і прыводзяцца прыклады выканання адпаведных заданняў. Другая частка прысвечана вымушаным ваганням механічных сістэм. Апісваюцца спосабы ўзбуджэння такіх ваганняў, прыводзяцца кароткія звесткі з тэорыі малых ваганняў і прыклады даследавання ваганняў сістэм з адной і дзвюма ступенямі свабоды. Аналізуецца з'ява рэзанансу.

Дапаможнік арыентаваны на самастойнае выкананне заданняў са зборніка [1] і для яго характэрны наступныя асаблівасці:

- структура і складанасць механічных сістэм у заданнях, метадыка іх выканання, абазначэнні прынятыя такія ж, як і ў зборніку [1];
- аўтаномнасць зместу прыведзеных прыкладаў, якая забяспечвае разуменне кожнага з іх без разбору папярэдніх;
- сцісласць выкладання тэарэтычнага матэрыялу і дамінуючая ўвага да практычных прылажэнняў.

Выкананне студэнтамі заданняў Д.23—Д.26 са зборніка [1] прыпадае на канец навучальнага года, абмежавана тэрмінамі выканання і абароны; дадатковыя цяжкасці тлумачацца таксама складанасцю вывучаемай механічнай з'явы і адсутнасцю метадычных дапаможнікаў, якія б змяшчалі дастатковы «асартымент» падрабязна разгледжаных задач. Дадзены метадычны дапаможнік мае на мэце палегчыць умовы працы студэнтаў і павысіць якасць выканання заданняў.

## ЧАСТКА 1 СВАБОДНЫЯ ВАГАННІ

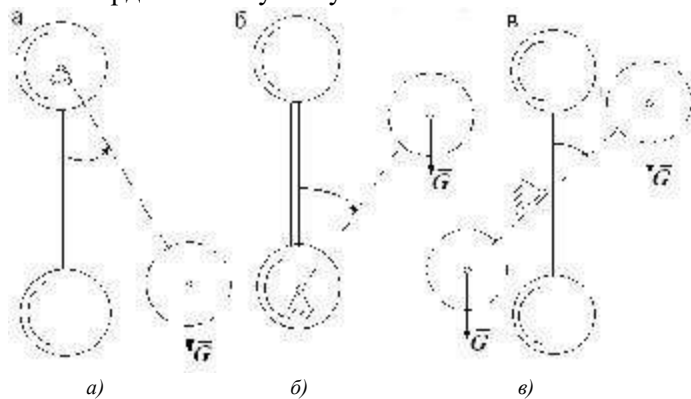
---

### 1.1 Устойлівасць раўнавагі. Малыя ваганні механічных сістэм

Разгледзім кансерватыўную механічную сістэму з галаномнымі стацыянарнымі сувязямі, якая складаецца з  $n$  матэрыяльных пунктаў і мае  $s$  ступеняў свабоды. Становішчы пунктаў сістэмы будзем вызначаць пры дапамозе геаметрычных параметраў  $q$ , называемых *абагульненымі каардынатамі*. Вытворныя па часе ад абагульненых каардынат  $q'$  будзем называць *абагульненымі скорасцямі*. Пры вывучэнні ваганняў у якасці абагульненых каардынат прымаюць лінейныя і вуглавыя перамяшчэнні пунктаў сістэмы адносна *становішча ўстойлівай раўнавагі*.

Такім чынам, у становішчы ўстойлівай раўнавагі абагульненыя каардынаты сістэмы роўныя нулю. Неабходна мець на ўвазе, што калі раўнавага механічнай сістэмы не ўстойлівая, то ваганні каля гэтага становішча не ўзнікаюць — сістэма пры найменшым адхіленні аддаляецца ад гэтага становішча (без наступнага вяртання). З вышэйсказанага вынікае, што паняцце аб устойлівасці раўнавагі з'яўляецца істотным элементам тэорыі ваганняў. Становішча раўнавагі механічнай сістэмы лічыцца ўстойлівым, калі пры досыць малых пачатковых адхіленнях пунктаў сістэмы  $q_{i0}$  з малымі пачатковымі скорасцямі  $q'_{i0}$  ад становішча раўнавагі сілы, што дзейнічаюць на пункты сістэмы, імкнуцца вярнуць яе ў становішча раўнавагі. У адваротным выпадку раўнавага з'яўляецца *няўстойлівай*, або *абьякавай*. На рысунку 1.1.1 паказана механічная сістэма з двух аднолькавых шароў, злучаных стрыжнем, ва ўстойлівым (рыс. 1.1.1, а), няўстойлівым (рыс. 1.1.1, б) і абьякавым (рыс. 1.1.1, в) становішчах раўнавагі (апошняе мае месца пры пачатковай скорасці, роўнай нулю). Характар раўнавагі механічнай сістэмы не заўсёды так відавочны, як на рысунку 1.1.1; у больш складаных выпадках ён устанаўліваецца шляхам даследавання

ўласцівасцяў патэнцыяльнай энергіі сістэмы, якая залежыць ад абагульненых каардынат яе пунктаў.



Рысунак 1.1.1

Пазначым праз  $Q_j$  абагульненую сілу, якая адпавядае абагульненай каардынаце  $q_j$ , і праз  $\Pi$  — патэнцыяльную энергію сістэмы; пры гэтым

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_s).$$

Для кансерватыўнай сістэмы справядлівая залежнасць

$$Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.$$

У становішчы раўнавагі сістэмы ўсе абагульненыя сілы роўныя нулю:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, 5). \quad (1.1.1)$$

Такім чынам, у становішчы раўнавагі патэнцыяльная энергія кансерватыўнай сістэмы прымае экстрэмальныя значэнні. Ураўненне (1.1.1) не ўстанаўлівае характару раўнавагі сістэмы — устойлівая яна або няўстойлівая. Адказ на гэта пытанне дае наступная тэарэма Лагранжа—Дырыхле: раўнаважныя становішчы кансерватыўнай сістэмы, у якіх яе патэнцыяльная энергія дасягае *мінімуму*, устойлівыя. Гэта тэарэма вызначае дастатковыя ўмовы ўстойлівасці становішча раўнавагі сістэмы, якія, аднак, не заўсёды з'яўляюцца неабходнымі. Строгае азначэнне паняцця ўстойлівасці становішча раўнавагі было дадзена ў канцы мінулага стагоддзя ў працах выдатнага рускага вучонага А. М. Ляпунова і больш падрабязна выкладзена ў падручніку [2]. Там жа даецца доказ тэарэмы Лагранжа—Дырыхле і прыводзяцца дапаўняючыя яе дзве тэарэмы

А. М. Ляпунова аб няўстойлівасці раўнавагі.

Характэрнай асаблівасцю ваганняў з'яўляецца тое, што, незалежна ад канструктыўных асаблівасцей розных механічных сістэм, яны падпарадкоўваюцца некаторым агульным заканамернасцям. Можна вылучыць два істотна розныя падзелы агульнай тэорыі ваганняў: ваганні *лінейных сістэм* і ваганні *нелінейных сістэм*, або інакш — *лінейныя і нелінейныя ваганні*. Гэтыя тэрміны запазычаны з матэматыкі на той падставе, што лінейныя і нелінейныя ваганні (сістэмы) апісваюцца аднайменнымі дыферэнцыяльнымі ўраўненнямі. Невядомымі велічынямі ў гэтых ураўненнях з'яўляюцца абагульненыя каардынаты сістэмы  $q_j$ . Пры гэтым лінейныя дыферэнцыяльныя ўраўненні ўключаюць гэтыя абагульненыя каардынаты і іх вытворныя па часе толькі ў першай ступені; у гэтым і заключаецца лінейнасць ураўненняў. У складаемыя нелінейныя ураўненняў неведомыя функцыі могуць уваходзіць у такім выглядзе:  $q_i^n$ ,  $q_i^{\cdot n}$  ( $n \neq 1$ ),  $q_i q_j$ ,  $q_i q_j^{\cdot}$ ,  $\sin q_i$ ,  $\cos q_i$  і г. д. Вывучаныя намі раней прамалінейныя ваганні матэрыяльнага пункта з'яўляюцца лінейнымі, паколькі дыферэнцыяльнае ўраўненне, якое апісвае іх, прыводзілася да выгляду  $\ddot{x} + k^2 x = 0$  або  $\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0$ , дзе абагульненая каардыната  $q = x$  уяўляе адхіленне пункта ад становішча статычнай раўнавагі. Найпрасцейшым прыкладам нелінейнай сістэмы можа служыць матэматычны маятнік. Калі за абагульненую каардынату прыняць вугал адхілення маятніка ад вертыкалі  $\varphi$ , то дыферэнцыяльнае ўраўненне ваганняў прымае выгляд

$$\varphi'' + \frac{g}{l} \sin\varphi = 0, \quad (1.1.2)$$

дзе  $g$  — паскарэнне свабоднага падзення;  $l$  — даўжыня маятніка.

Нелінейнасць дыферэнцыяльных ураўненняў абумоўлена ўласцівасцямі механічнай сістэмы, да якіх адносяцца геаметрычныя параметры руху, фізічныя ўласцівасці матэрыялаў, характар супраціўлення асяроддзя, уласцівасці накладзеных сувязяў і інш.

Тэорыя лінейных ваганняў распрацавана досыць поўна, а станаўленне тэорыі нелінейных ваганняў працягваецца і цяпер. Гэта тлумачыцца цяжкасцямі матэматычнага характару, звязанымі, у прыватнасці, з інтэграваннем нелінейных дыферэнцыяльных ураўненняў. Намаганні стваральнікаў нелінейнай тэорыі, пачынаючы з А. Пуанкарэ і А. М. Ляпунова, былі накіраваны на пабудову алгарытмаў, якія дазваляюць атрымаць набліжаныя вынікі вызначанага ўзроўню дакладнасці. Некаторыя з метадаў нелінейнай тэорыі даюць магчымасць будаваць паслядоўныя набліжэнні з нарастаючай дакладнасцю (метад Пуанкарэ і Ляпунова, метад Крылова—Багалюбава); іншыя дазваляюць атрымаць толькі першае набліжэнне, удакладняючае лінейную тэорыю (метад Ван дэр Поля).

Адзначым адну важную акалічнасць: матэматычнымі і эксперыментальнымі метадамі ўстаноўлена, што тэорыя лінейных ваганняў у большасці выпадкаў можа быць выкарыстана для набліжанага вывучэння ваганняў нелінейных сістэм, калі ў апошніх абмежавацца разглядам малых ваганняў. Пры такім падыходзе дыферэнцыяльнае ўраўненне ваганняў матэматычнага маятніка (1.1.2) набудзе выгляд

$$\varphi'' + \frac{g}{l} \varphi = 0.$$

Крытэрыі, які дазваляе адрозніваць малыя ваганні, будзе прыведзены ніжэй. Тэорыя малых ваганняў дае здавальняючыя вынікі і таму атрымала вельмі шырокае распаўсюджанне ў практыцы

праектавання аб'ектаў новай тэхнікі. Пспеху гэтай тэорыі спрыялі дзве акалічнасці: па-першае, ваганні механічных сістэм у большасці выпадкаў з'яўляюцца малымі — да гэтага імкнуцца праекціроўшчыкі; па-другое, наяўнасць добра распрацаванага матэматычнага апарата даследавання лінейных дыферэнцыяльных ураўненняў.

Такім чынам, тэорыя лінейных ваганняў дазваляе атрымаць дакладны вынік для лінейных механічных сістэм і набліжанае рашэнне ў выпадку нелінейных сістэм (шляхам вывучэння малых ваганняў). Практычныя прыёмы лінеарызацыі ўраўненняў будуць апісаны пры складанні дыферэнцыяльных ураўненняў. Тэорыя нелінейных ваганняў разглядаецца ў дапаможніку [3].

Пры пабудове тэорыі лінейных ваганняў могуць быць выкарыстаны розныя палажэнні механікі: агульныя тэарэмы дынамікі, агульнае ўраўненне дынамікі і інш. У дадзеным выданні, як і ў дапаможніку [1], выкарыстоўваецца ўраўненне Лагранжа другога роду для кансерватыўных сістэм:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (1.1.3)$$

□

дзе  $T, \Pi$  — кінетычная і патэнцыяльная энергія сістэмы;  $q, \dot{q}_j$  — абагульненая каардыната і абагульненая скорасць;  $s$  — колькасць ступеняў свабоды сістэмы.

Каб паспяхова выкарыстоўваць ураўненне (1.1.3), неабходна навучыцца знаходзіць кінетычную і патэнцыяльную энергіі сістэмы.

## 1.2 Вылічэнне кінетычнай энергіі сістэмы з адной ступенню свабоды

У дадзеным раздзеле будуць разглядацца кансерватыўныя сістэмы з галаномнымі двухбаковымі сувязямі.

Радыус-вектар любога пункта сістэмы з адной ступенню свабоды ( $s = 1$ ) вызначаецца адной абагульненай каардынатай  $q$ , гэта значыць  $r_i = r_i(q)$ , і, такім чынам,  $v_i = \frac{dr_i}{dt} = \frac{dr_i}{dq} \dot{q}$ .

Кінетычная энергія сістэмы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{dr_i}{dq} \dot{q} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{dr_i}{dq} \right)^2 \dot{q}^2$$

або

$$T = \frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2,$$

дзе

$$A(q) = \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{dr_i}{dq} \right)^2.$$

Раскладзем функцыю  $A(q)$  у рад Макларэна па абагульненай каардынаце  $q$ :

$$A(q) = A(0) + A'(0)q + \frac{A''(0)}{2!} q^2 + \dots,$$

дзе штрыхом пазначана першая вытворная па каардынаце  $q$ . Каб заставацца ў рамках лінейнай тэорыі ваганняў, абмяжуемся ў гэтым раздзе першым членам  $A(0)$ . Тады атрымаем

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad (1.2.1)$$

дзе  $a = A(0) > 0$ .

Каэфіцыент  $a$  характарызуе інерцыйныя ўласцівасці сістэмы і мае размернасць масы або моманту інерцыі.

Разгледзім некалькі прыкладаў на вызначэнне кінетычнай энергіі сістэмы з адной ступенню свабоды.

### Прыклад 1

У механічнай сістэме (рыс. 1.2.1) стрыжань  $1$  масы  $m_1$  прыводзіць у рух дыск  $2$  радыуса  $r_2$ . Праслізгванне паміж цэламі адсутнічае.

Вызначыць кінетычную энергію сістэмы. Масу ролікаў  $A$  і  $B$  не ўлічваць.

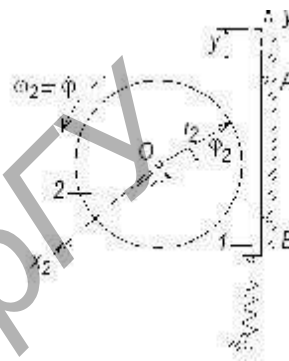
#### Раішэнне

За абагульненую каардынату прымаем перамяшчэнне стрыжня  $y$ .

Кінетычную энергію вызначаем як суму двух складаемых

для цэлаў  $1$  і  $2$ , улічваючы, што стрыжань

здзяйсняе паступальны рух, дыск — вярчальны:



Рысунк 1.2.1

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} J_x \omega_2^2,$$

дзе  $v_1 = \dot{y}$ ;

$J_x = \frac{1}{2} m_2 r_2^2$  — момант інерцыі дыска адносна восі  $Ox_2$ , перпенды-

кулярнай да плоскасці рысунка;

$\omega_2 = \dot{\varphi}$ ; дзе

$\varphi = y$ ; —

$$\dot{\varphi} = \frac{r_2}{r_1} \dot{y}$$

Таму

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \dot{y}^2. \quad (1.2.2)$$

*Заўвага.* Як відаць з формулы (1.2.2), кінетычная энергія дыска — другое складаемае — не залежыць ад яго радыуса  $r_2$  (гэта тлумачыцца выбарам незалежнай абагульненай каардынаты  $y$ ). Далей мяркуецца, што дыск прыводзіцца ў рух з дапамогай стрыжня, і чым большы радыус, а, значыць, і момант інерцыі  $J_x$ , тым меншая вуглавая хуткасць  $\omega_2$  і велічыня  $\omega_2^2$ , а здабытак  $J_x \omega_2^2$ , які вызначае  $T_2$ , не залежыць ад радыуса  $r_2$ . Можа паўстаць пытанне: ці патрэбен у такім разе радыус дыска  $r_2$ ? Адказ на яго залежыць ад умовы задачы, а менавіта: з якой мэтай знаходзіцца энергія  $T$ . Калі, напрыклад, у наступным неабходна даследаваць толькі рух стрыжня, то радыус дыска не патрэбен; калі ж неабходна атрымаць кінематычныя характарыстыкі руху дыска, то для пераходу да яго веданне радыуса неабходна (як гэта відаць з формулы  $\varphi = y$ ). У апошнім выпадку можна за абагульненую каардынату прыняць вугал павароту дыска  $\varphi$ . Велічыня  $T$  залежыць ад радыуса дыска:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \dot{\varphi}^2. \quad (1.2.3)$$

## Прыклад 2

Механічная сістэма (рыс. 1.2.2) складаецца са стрыжняў 1, 2 з масамі  $m_1, m_2$ , дыска 3 масы  $m_3$  і радыуса  $r_3$ . У кропках  $O_1, A, B, O_3$  ідэальныя шарніры;  $O_1A = O_3B, O_1O_3 = AB = l$ . Восі  $O_1x_1, O_3x_3$  перпендыкулярныя плоскасці рысунка.

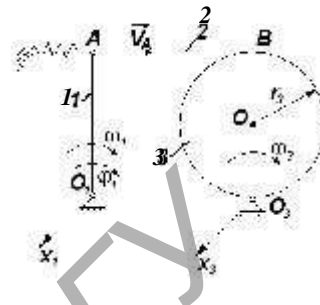
Складзіце выразэнне кінетычнай энергіі сістэмы ў выглядзе функцыі абагульненай скорасці  $\dot{\varphi}_1$  ( $\varphi_1$  — вугал павароту стрыжня  $O_1A$ ).

*Раішэнне*

Кінетычную энергію сістэмы знойдзем як суму трох складаемых:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (1.2.4)$$

Паколькі стрыжань 1 і дыск 3 здзяйсняюць вярчальны рух, а стрыжань 2 — паступальны, то



Рысунк 1.2.2

$$T_1 = \frac{J_{x_1} \omega_1^2}{2}, \quad T_2 = \frac{m_2 v_A^2}{2}, \quad T_3 = \frac{J_{x_3} \omega_3^2}{2},$$

дзе моманты інерцыі па тэарэме Гюйгенса роўныя:

$$J_{x_1} = \frac{1}{3} m_1 (2r_3)^2, \quad J_{x_3} = \frac{1}{2} m_3 r_3^2 + m_3 r_3^2 = \frac{3}{2} m_3 r_3^2.$$

Выразім  $\omega_1, v_A, \omega_3$  праз абагульненую скорасць  $\dot{\varphi}_1$ :

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1, \quad v_A = v_B = \omega_1 \cdot O_1A = \dot{\varphi}_1 \cdot 2r_3, \quad \omega_3 = \frac{v_B}{r_3} = \frac{2\dot{\varphi}_1 \cdot 2r_3}{r_3} = 4\dot{\varphi}_1.$$

Па формуле (1.2.4) атрымліваем

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + 4m_2 + 3m_3) \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} r_3^2 \dot{\varphi}_1^2. \quad (1.2.5)$$

### Прыклад 3

Механічная сістэма (рыс. 1.2.3) складаецца з пяці целаў; цела 1 падвешана да свабоднага канца троса, перакінутага праз блок 2 і прымацаванага іншым канцом да цэнтра дыска 3; вась апошняга шарніра злучана з дапамогай гарызантальнага стрыжня 4 з вертыкальнай стойкай 5. Стойка пружка замацавана ўверсе пры

1                      1                      1

Репозиторий БарГУ

дапомозе двюх спружын, а ніжнім канцом звязана ідэальным шарнірам з нерухомай асновай. Масы целаў 1, 2, 3, 4, 5 роўныя адпаведна  $m_1, m_2, m_3, m_4 = 0, m_5$ ;  $O_5A = AB = \frac{l}{2}$ .

Складзі выраз кінетычнай энергіі сістэмы ў выглядзе функцыі абгульненай хуткасці  $u$  груза 1.

*Рашэнне*

Прадстаўляем кінетычную энергію сістэмы ў выглядзе

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5. \quad (1.2.6)$$

— Паколькі цела 1 здзяйсняе паступальны рух, цела 2, 5 — вярчальны, а цела 3, 4 — плоскапаралельны, то

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{12}^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} J_{x_2} \omega_{22}^2, \quad T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_{32}^2 + \frac{1}{2} J_{x_3} \omega_{32}^2,$$

$$T_4 = 0, \quad T_5 = \frac{1}{2} J_{x_5} \omega_5^2.$$

Моманты інерцыі роўныя:

$$J_{x_2} = \frac{1}{2} m_2 r_{22}^2, \quad J_{x_3} = \frac{1}{2} m_3 r_{32}^2, \quad J_{x_5} = \frac{1}{3} m_5 l^2.$$

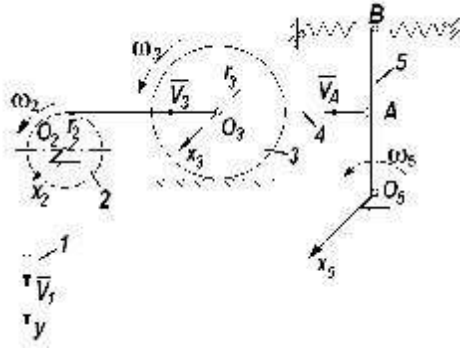


Рисунок 1.2.3

Выразім  $v_1, \omega_2, v_3, \omega_3$  і  $\omega_5$  праз абагульненую скорасць  $y'$  :

$$v_1 = y', \quad \omega_2 = v_1 = y', \quad v_3 = v_1 = y', \quad \omega_3 = v_3 = y', \quad r_1 = r_2 = r_3$$

$$\omega_5 = v_A = \frac{v_3}{\frac{1}{2l}} = v_3 = 2y'.$$

Знаходзім  $T$  па формуле (1.2.6):

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + m_3 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} m_5 v_5^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{3}{2} m_3 + \frac{4}{3} m_5 y'^2. \quad (1.2.7)$$

Пытанні

1. Пакажыце, што механічныя сістэмы, прадстаўленыя на рысунках 1.2.1—1.2.3, маюць адну ступень свабоды.

2. З формул (1.2.2) і (1.2.3) відаць, што кінетычная энергія стрыжня  $I$  — першае складаемае — прапарцыянальная яго масе  $m_1$ , а кінетычная энергія дыска — другое

складаемае — прапарцыянальная  $m_2$ . Як растлумачыць наяўнасць  $\frac{1}{2}$  множніка

?

3. У формуле (1.2.7) у дужках каэфіцыент пры  $m_1$  роўны адзінцы, пры астатніх масах гэтыя каэфіцыенты меншыя або большыя за адзінку. Як растлумачыць гэта адрозненне і розны ўклад мас целаў у іх кінетычную энергію?

4. Устаноўце, ці з'яўляюцца выразы (1.2.2), (1.2.5), (1.2.7) дакладнымі, ці яны справядлівыя толькі для малых рухаў сістэмы.

### 1.3 Патэнцыяльная энергія кансерватыўнай сістэмы

Частка прасторы, у каторай на матэрыяльны пункт, які рухаецца, дзейнічаюць сілы, што залежаць толькі ад яго каардынат, называецца **стацыянарным сілавым полем**.

**Патэнцыяльным (кансерватыўным)** называецца стацыянарнае сілавое поле, у якім работа сілы, што дзейнічае на матэрыяльны пункт, залежыць толькі ад каардынат пачатковага і канчатковага становішча пункта (і не залежыць ад формы траекторыі).

Няхай матэрыяльны пункт перамяшчаецца ў патэнцыяльным сілавым полі з некаторага пачатковага становішча  $M_0$  і ў момант, калі вызначаюць яго патэнцыяльную энергію, займае становішча  $M$ .

**Патэнцыяльнай энергіяй  $\Pi$  матэрыяльнага пункта ў разглядаемым становішчы  $M$**  называюць работу, якую здзяйсняюць сілы поля, што дзейнічаюць на матэрыяльны пункт, пры перамяшчэнні яго са становішча  $M$  у становішча  $M_0$ .

**Патэнцыяльнай энергіяй сістэмы  $\Pi$**  у разглядаемым становішчы  $M$  патэнцыяльнага сілавога поля называюць суму работ сіл поля, што дзейнічаюць на сістэму, якую гэтыя сілы здзяйсняюць пры перамяшчэнні сістэмы з разглядаемага становішча  $M$  у пачатковае становішча  $M_0$ .

Для правільнага вызначэння знака патэнцыяльнай энергіі неабходна звярнуць увагу ў прыведзеных азначэннях на тое, што ў іх гаворка ідзе аб перамяшчэнні пункта або сістэмы з разглядаемага становішча ў пача

т к о в а е, а не наадварот (у тэорыі ваганняў за пачатковае становішча сістэмы прымаецца становішча яе ўстойлівай раўнавагі).

**Кансерватыўнай сістэмай** называюць механічную сістэму, якая знаходзіцца ў кансерватыўным сілавым полі (ад лацінскага *conservatives* — які захоўвае). Менавіта ў гэтым полі выконваецца *закон захавання механічнай энергіі*.

Ваганні механічнай сістэмы вызначаюцца ўздзеяннем на яе двух кансерватыўных палёў: поля прыцягнення (сіл цяжару) і поля сіл пругкасці. Патэнцыяльная энергія сістэмы, паводле азначэння, роўная рабоце сіл і, такім чынам, для згаданых палёў можа быць вылічана па вядомых формулах тыпу

$$\Pi = \pm Gh, \quad \Pi = \frac{1}{2}c\lambda^2, \quad (1.3.1)$$

дзе  $G$  — сіла цяжару;  $h$  — перамяшчэнне па вертыкалі;  $\lambda, c$  — дэфармацыя і каэфіцыент жорсткасці пругкага элемента.

Дэфармацыя  $\lambda$  можа быць як лінейнай  $f$  (рыс. 1.3.1, *a*) з каэфіцыентам жорсткасці ў Н / м, так і вуглавой  $\varphi$  (рыс. 1.3.1, *b*) з каэфіцыентам жорсткасці ў Н · м / рад. Патрэбна памятаць, што другая формула (1.3.1) спрыдліва, калі дэфармацыя пругкага элемента пачынаецца з *нулявога* (ненапружанага) стану. Паяснім гэта на рысунку 1.3.2, дзе па восі абсцыс адкладзена дэфармацыя элемента  $\lambda$ , а па восі ардынат — сіла пругкасці (аднаўляльная сіла)  $F = cx$ . Патэнцыяльная энергія геаметрычна прадстаўлена плошчаю заштрыхаванай фігуры. З рысунка відаць, што дэфармацыя элемента пачынаецца са стану  $\lambda = 0$ . На практыцы часта ўзнікае неабходнасць вылічэння велічыні  $\Pi$ , калі элемент ужо мае пачатковую дэфармацыю  $\lambda = f_0$ . Абзначым дадатковую дэфармацыю літарай  $f_1$ . Адпаведная велічыня  $\Pi$  будзе

роўная плошчы трапецыі вышынёй  $f_1$ , тады як формула  $\Pi = \frac{1}{2}cf_1^2$

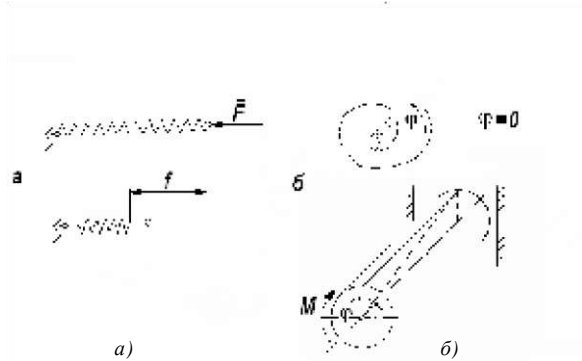
2

прадстаўляе толькі плошчу трохвугольніка  $abc$ .

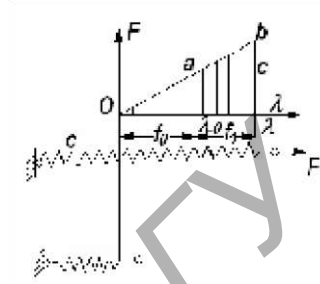
Правільнае значэнне  $\Pi$  трэба вызначаць па формуле

$$\Pi = \frac{1}{2}c\lambda^2 - \frac{1}{2}cf_0^2, \quad (1.3.2)$$

дзе  $\lambda = f_0 + f_1$ .



Рысунак 1.3.1



Рысунак 1.3.2

#### 1.4 Вылічэнне патэнцыяльнай энергіі сістэмы з адной ступенню свабоды

Патэнцыяльная энергія кансерватыўнай сістэмы са стацыянарнымі галаномнымі двухбаковымі сувязямі, якая мае адну ступень свабоды, вызначаецца абагульненай каардынатай  $q$ , гэта значыць  $\Pi = \Pi(q)$ . Раскладзем яе ў ступянёвы рад у наваколлі становішча ўстойлівай раўнавагі сістэмы  $q = 0$ ; атрымаем

$$\Pi(q) = \Pi(0) + \Pi'(0)q + \frac{\Pi''(0)}{2}q^2 + \dots \quad (1.4.1)$$

Патэнцыяльную энергію ў пачатковым становішчы сістэмы  $\Pi(0)$  пры  $q = 0$  можна абраць адвольна; прымем  $\Pi(0) = 0$ . Велічыня  $\Pi'(0)$  уяўляе абагульненую сілу  $Q$  у становішчы раўнавагі; такім чынам,  $\Pi'(0) = 0$ . Згодна тэарэмы

Лагранжа—Дырыхле ў становішчы ўстойлівай раўнавагі патэнцыяльная энергія сістэмы мае мінімум; таму  $\Pi''(0) > 0$ . Пазначым  $\Pi''(0)$  літарай  $c$ . Пастаянную  $c$  называюць *каэфіцыентам жорсткасці*, або *жорсткасцю* сістэмы.

Такім чынам, абмяжоўваючыся ў раскладанні (1.4.1) першым адрозным ад нуля складаемым (гэта значыць трэцім ад пачатку), атрымліваем

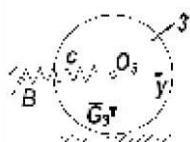
$$\Pi(q) \approx \frac{1}{2}cq^2. \quad (1.4.2)$$

Разгледзім прыклады вызначэння патэнцыяльнай энергіі сістэмы. На рысунках 1.4.1—1.4.3 механічныя сістэмы паказаны ў становішчы ўстойлівай раўнавагі.

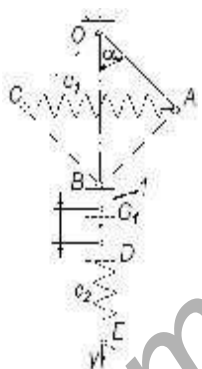
### Прыклад 1

Механічная сістэма складаецца з цела 1, блока 2, катка 3 і спружыны  $BO_3$  жорсткасці  $c$ . У становішчы раўнавагі спружына расцягнута на велічыню  $f_{ст}$ . Груз 1 атрымлівае перамяшчэнне  $y$ , накіраванае ўніз.

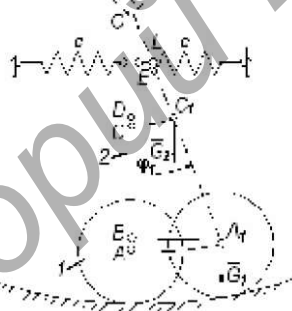
Знайсці патэнцыяльную энергію сістэмы.



Рысунак 1.4.1



Рысунак 1.4.2



Рысунак 1.4.3

*Рашэнне*

Патэнцыяльную энергію сістэмы знойдзем па формуле

$$\Pi = \Pi_I + \Pi_{II}, \quad (1.4.3)$$

дзе  $\Pi_I$  — патэнцыяльная энергія сістэмы ў поле сіл цяжару;  $\Pi_{II}$  — патэнцыяльная энергія пругкай дэфармацыі элементаў.  
У нашым прыкладзе згодна (1.3.2)

$$\Pi_I = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = -G_1 y + G_2 \cdot 0 + G_3 y \cos 90^\circ = -G_1 y,$$

паколькі перамяшчэнне цэнтра цяжару блока роўна нулю. Патэнцыяльная энергія пругкай дэфармацыі спружыны  $\Pi_{II}$ , назапашаная на перамяшчэнні яе віткоў, паводле формулы (1.3.2) роўная рознасці энергій на поўным падаўжэнні  $f_{ст} + y$  і на папярэднім  $f_{ст}$ , гэта значыць

$$\Pi_{II} = \frac{-1}{2} c (f_{ст} + y)^2 - \frac{-1}{2} c f_{ст}^2 = c f_{ст} y + \frac{1}{2} c y^2.$$

Па формуле (1.4.3) атрымліваем

$$\Pi = -(G_1 + c f_{ст}) y + \frac{1}{2} c y^2. \quad (1.4.4)$$

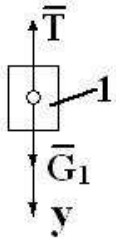
У выраз (1.4.4) уваходзяць ураўнаважваючы адна адну сілы, якія ва ўсякім становішчы сістэмы застаюцца пастаяннымі. Іх лёгка выявіць у становішчы раўнавагі, склаўшы суму праекцый усіх сіл, прыкладзеных да цела 1 (рыс. 1.4.4), на вось  $y$ :

$$\sum Y_i = G_1 - T = 0,$$

Рысунк 1.4.4 дзе  $T$  — нацяжэнне троса:

$$T = R = c f_{ст},$$

дзе  $R$  — рэакцыя спружыны.



Такім чынам,  $G_1 - cf_{ct} = 0$ , або  $-G_1 + cf_{ct} = 0$ .

Улік атрыманай залежнасці дазваляе перапісаць выраз патэнцыяльнай энергіі сістэмы (1.4.4) у канчатковым выглядзе:

$$\Pi = \frac{1}{2}cy^2. \quad (1.4.5)$$

Выявіць ураўнаважаныя сілы можна і шляхам складання ўмовы раўнавагі ў абагульненых сілах, якая ў нашым прыкладзе мае выгляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial y} &= (-G_1 + cf_{ct} + cy)_0 = -G_1 + cf_{ct} = 0. \\ -Q &= \frac{\partial \Pi}{\partial y} \end{aligned}$$

Нуль у пад'індэксе азначае, што вытворная вылічваецца пры  $y = 0$ . Як відаць з формулы (1.4.5), вага цела  $G_1$  не ўплывае на велічыню патэнцыяльнай энергіі сістэмы.

## Прыклад 2

Механічная сістэма (гл. рыс. 1.4.2) складаецца са стрыжневага бязважкага ромба з шарнірамі ў вяршынях  $O, A, B, C$  і падвешанага да яго грузу  $I$  масы  $m$ . Жорсткасці спружын роўныя  $c_1, c_2$ ; у стане спакою спружына  $AC$  недэфармаваная, спружына  $DE$  сціснутая на велічыню  $f_{ct}$ .

Груз перамяшчаюць уніз са стану спакою на малую велічыню  $y$ .

Вызначыць патэнцыяльную энергію сістэмы.

*Рашэнне*

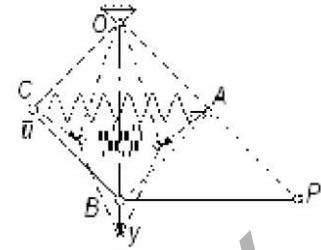
Велічыню патэнцыяльнай энергіі знойдем па формуле (1.4.3).

Значэнне патэнцыяльнай энергіі ў полі сіл прыцягнення  $\Pi_1$  знойдем як работу па перамяшчэнні грузу з адхіленага на велічыню  $y$  становішча ў становішча

спакою:  $\Pi_1 = -G_1 y$ . Велічыня энергіі пружкай дэфармацыі  $\Pi_{II}$  для спружын з каэфіцыентамі жорсткасці  $c_1$  і  $c_2$  роўная

$\Pi_{II} = \Pi_1 + \Pi_2$ . Пазначым дэфармацыю спружыны  $AC$  праз  $f_1$ .

З рысунка 1.4.5 відаць, што пры апусканні і пунктаў  $A$  і  $C$  збліжаюцца, а спружына паміж імі сціскаецца. Пазначым перамяшчэнне пункта  $A$ , якое адпавядае перамяшчэнню у пункта  $B$ , праз  $u$ . Паколькі стрыжань  $AB$  здзяйсняе плоскае перамяшчэнне, а яго імгненны цэнтр вярчэння знаходзіцца ў пункце  $P$ , то



грузу

Рысунк . 1.4.5

$$u = \frac{AP}{BP} y = \frac{BP \sin \alpha}{2 \sin \alpha} y$$

Спрацыруем вектары  $u$  на вось спружыны  $AC$ ; атрымаем:

$$f_1 = 2u \cos \alpha = y \operatorname{ctg} \alpha \quad \Pi_1 = -\frac{1}{2} c_1 f_1^2 = -\frac{1}{2} c_1 \operatorname{ctg}^2 \alpha y^2$$

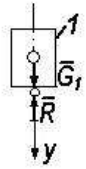
Для вызначэння  $\Pi_2$  улічым, што спружына  $DE$  у становішчы спакою дэфармаваная на велічыню  $f_{ct}$  і ўжо валодае патэнцыяльнай энергіяй.

На падставе формулы (1.3.2) атрымліваем

$$\Pi_2 = -\frac{1}{2} c_2 (f_{ct} + y)^2 - \frac{1}{2} c_2 f_{ct}^2 = c_2 f_{ct} y + \frac{1}{2} c_2 y^2$$

Складаючы  $\Pi_1$ ,  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ , знаходзім

$$\Pi = -\left( G_1 + c f_2 \right) y + \frac{1}{2} (c_1 \operatorname{ctg}^2 \alpha + c_2) y^2. \quad (1.4.6)$$



У вираз (1.4.6) уваходзяць ураўнавання сілы, якія не ўплываюць на велічыню  $\Pi$ . Для іх выяўлення, як і ў папярэднім прыкладзе, складзем суму праекцый усіх сіл, прыкладзеных да цела  $l$  у становішчы раўнавагі (рыс.

1.4.6), улічваючы, што рэакцыя ромба на цела роўная нулю:

Рысунак 1.4.6

$$\sum Y_i = G_1 - R = 0,$$

дзе  $R = c_2 f_{\text{ст}} = 0$  — рэакцыя спружыны  $DE$ .

Такім чынам,

$$G_1 - c f_{2\text{ст}} = 0.$$

Гэты выраз уваходзіць у першае складаемае формулы (1.4.6), ператвараючы яго ў нуль. Таму канчаткова

$$\Pi = -\frac{1}{2} (c_1 \operatorname{ctg}^2 \alpha + c_2) y^2. \quad (1.4.7)$$

Прывесці формулу (1.4.6) да выгляду (1.4.7) можна і шляхам складання ўмовы раўнавагі ў абагульненых сілах:

$$-Q = \frac{\partial \Pi}{\partial y} = G_1 + c f_2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + (c_1 \operatorname{ctg}^2 \alpha + c_2) y = -G_1 + c f_2 \operatorname{ctg}^2 \alpha = 0.$$

### Прыклад 3

Механічная сістэма (зл. рыс. 1.4.3) складаецца з крывашыпа  $OA$  вагою  $G_2$  і даўжынёю  $l$ , шасцярні  $I$  вагою  $G_1$  і дзвюх гарызантальных спружын жорсткасці  $\frac{1}{2}c$ , прымацаваных да крывашыпа на адлегласці  $\frac{1}{2}l$  ад яго восі  $O$ . У становішчы раўнавагі спружыны не дэфармаваны.

Крывашып адхіляецца направа на малы вугал  $\varphi_1$ .

Вызначыць патэнцыяльную энергію сістэмы ў гэтым становішчы.

*Рашэнне*

Знаходзім велічыню патэнцыяльнай энэргіі па формуле (1.4.3).

З пунктаў  $A_1, C_1$  апускаем перпендыкуляры на крывашып  $OA$  і абазначаем  $AB$  і  $CD$  праз  $h_1, h_2$  ( $h_1, h_2$  — вышыні, на якія ўздываецца цэнтр цяжару целаў  $1, 2$  над іх першапачатковым узроўнем).

Патэнцыяльную энергію ў полі сіл цяжару вызначым па першай формуле (1.3.1)

$$\Pi_1 = -G_1 h_1 - G_2 h_2. \quad (1.4.8)$$

Знаходзім  $h_1, h_2$ :

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= OA - OB = l - \cos\varphi_1 l = l(1 - \cos\varphi_1), \\ h_2 &= OC - OD = \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}l \cos\varphi_1 = \frac{1}{2}l(1 - \cos\varphi_1). \end{aligned} \right\} \quad (1.4.9)$$

Раскладваем у ступянёвы рад  $\cos\varphi_1$ :

$$\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2!}\varphi^2 + \frac{1}{4!}\varphi^4 - \dots \quad (1.4.9)'$$

Для малых вуглоў дапушчальна ўтрыманне двух членаў рада; такім чынам,

$$\cos\varphi_1 = 1 - \frac{1}{2} \varphi_1^2. \quad (1.4.10)$$

Падстаўляючы значэнне (1.4.10) у (1.4.9), атрымліваем:

$$h_1 = -\frac{1}{2} l \varphi_1^2, \quad h_2 = -\frac{1}{4} l \varphi_1^2.$$

Па формуле (1.4.8) знаходзім

$$\Pi_1 = -\frac{1}{2} (G_1 + \frac{1}{2} G l_2) \varphi_1^2. \quad (1.4.11)$$

Энергія пругкай дэфармацыі дзвюх спружын паводле формулы (1.3.2) роўная

$$\Pi_{II} = \frac{1}{2} c f^2 = c f^2. \quad (1.4.12)$$

Пры павароце крывашыпа пункт прымацавання спружыны  $E$  перамяшчаецца на дыстанцыю  $\frac{1}{3}$  па дузе акружнасці радыуса  $3l$ . Пры малым вугле  $\varphi_1$  прыем, што спружына перамяшчаецца перпендыкулярна крывашыпу і дэфармацыя спружыны роўна катэту трохвугольніка  $OEL$ :

$$f, \quad \Pi_{II} = \frac{1}{2} = EL = \frac{1}{3} l \operatorname{tg} \varphi_1 \approx \frac{1}{3} l \varphi_1 = c f^2 \varphi_1^2. \quad (1.4.13)$$

9

Па формуле (1.4.3) знаходзім

$$\Pi = -\frac{1}{2}(G_1 + G_2 l_2) + \frac{1}{2}9c^2 \varphi_1^2.$$

*Заўвага.* Захаванне толькі двух членаў рада (1.4.9)' у раскладанні лінейнай функцыі  $\cos\varphi_1$  прадывяжана не толькі дапушчальнай дакладнасцю выніку, але і імкненнем атрымаць лінейныя дыферэнцыяльныя ўраўненні ваганняў сістэмы.

Утрыманне ў ім трэцяга складаемага прывяло б да нелінейных дыферэнцыяльных ураўненняў. Па гэтай жа прычыне ў раскладаннях  $\sin q$  і  $\operatorname{tg} q$  будзем захоўваць толькі першыя складаемыя, гэта значыць будзем прымаць  $\sin q \approx q$ ,  $\operatorname{tg} q \approx q$ .

### 1.5 Малыя свабодныя ваганні механічных сістэм з адной ступенню свабоды

Нагадаем, што становішча пунктаў механічнай сістэмы з адной ступенню свабоды вызначаецца адной абагульненай каардынатай  $q$ . За пачатак адліку абагульненай каардынаты і за нулявы ўзровень патэнцыяльнай энергіі прымаецца становішча ўстойлівай раўнавагі сістэмы. Рух кансерватыўнай сістэмы пры  $s = 1$  апісваецца адным ураўненнем Лагранжа другога роду:

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q}. \quad (1.5.1)$$

Тут  $T$  і  $\Pi$  для малых ваганняў нелінейных сістэм і для адвольных ваганняў лінейных сістэм прымаюцца паводле формул (1.2.1), (1.4.2) у выглядзе:

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} c q^2, \quad (1.5.2)$$

дзе  $a$  і  $c$  — пастаянныя інерцыйныя і квазіпружкія каэфіцыенты.

Знаходзім вытворныя выказаў (1.5.2):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\dot{q}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = a\ddot{q}, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = 0, \quad \frac{d}{dq} \Pi = cq. \quad (1.5.3)$$

Падстаўляем вытворныя (1.5.3) ва ўраўненне (1.5.1), атрымліваем

$$a\ddot{q} + cq = 0 \quad \text{або} \quad \ddot{q} + k^2q = 0, \quad (1.5.4)$$

дзе

$$k^2 = \frac{c}{a}.$$

Гэта ўраўненне па тыпу супадае з дыферэнцыяльным ураўненнем свабодных ваганняў пункта пад дзеяннем лінейнай аднаўляючай сілы. Яго рашэнне мае выгляд

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (1.5.5)$$

або

$$q = A \sin(kt + \beta), \quad (1.5.6)$$

дзе  $C_1, C_2$  — пастаянныя інтэгравання;  $k, A$  — адпаведна кругавая частата і амплітуда ваганняў;  $kt + \beta$  і  $\beta$  — адпаведна фаза і іх пачатковая фаза.

Пастаянныя  $A, \beta, C_1, C_2$  вызначаюцца з пачатковых умоў задачы:  $q = q_0, \dot{q} = \dot{q}_0$  пры  $t = 0$  ( $q_0, \dot{q}_0$  — пачатковыя абагульненая каардыната і абагульненая скорасць); іх вакарыстанне прыводзіць да формул:

$$A = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{k^2}}, \quad \beta = \arctg \frac{kq_0}{\dot{q}_0}, \quad C_1 = q_0, \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{k}. \quad (1.5.7)$$

Перыяд ваганняў

$$T = 2\pi = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (1.5.8) \text{ кс}$$

Як відаць з прыведзеных формул, частата і перыяд свабодных гарманічных ваганняў, здзяйсняемых па законе (1.5.5) або (1.5.6), не залежаць ад пачатковых умоў. Гэта ўласцівасць называецца *ізахраннасцю* малых ваганняў.

Пры выкарыстанні ўраўнення (1.5.1) для рашэння задач на свабодныя ваганні сістэм з адной ступенню свабоды рэкамендуецца наступны парадак дзеянняў:

1. Выбар абагульненай каардынаты. Звычайна ў якасці абагульненай прымаюць каардынату таго пункта або цела, рух якіх неабходна даследаваць па ўмове задачы. Каардынаты астатніх аб'ектаў сістэмы выражаюць праз выбраную абагульненую каардынату.

2. Складанне выразу кінетычнай энергіі сістэмы  $T$  у выглядзе функцыі абагульненай скорасці  $q'$ . Пры гэтым, калі ў сістэму ўваходзяць элементы, якія здзяйсняюць складаны рух, то іх кінетычную энергію неабходна вызначаць у абсалютным руху.

3. Вызначэнне патэнцыяльнай энергіі сістэмы  $U$  у выглядзе функцыі выбранай абагульненай каардынаты.

4. Вывад дыферэнцыяльнага ўраўнення ваганняў. Для гэтага неабходна знайсці вытворныя (1.5.3) і падставіць іх ва ўраўненне (1.5.1).

5. Інтэграванне атрыманага дыферэнцыяльнага ўраўнення ваганняў, якое ўяўляе сабой звычайнае лінейнае дыферэнцыяльнае ўраўненне з пастаяннымі каэфіцыентамі.

6. Вызначэнне пастаянных інтэгравання з пачатковых умоў задачы і атрыманне ўраўнення руху (ваганняў) сістэмы.

7. Вызначэнне перыяду ваганняў і іншых шукаемых велічынь паводле ўмовы задачы.

Апісаная методыка даследавання ваганняў больш падрабязна разгледжана на канкрэтных прыкладах. Структура і складанасць гэтых прыкладаў адпавядае заданню Д.23 са зборніка [1].

### Прыклад 1

Механічная сістэма (рыс. 1.5.1), якая складаецца са ступеньчатага вала 3, замацаванага з дапамогай спружыны жорсткасці  $c$ , грузу  $1$  на канцы троса, перакінутага праз блок 2 і намотанага іншым канцом на вал, знаходзіцца ў стане спакою. Масы грузу, блока і вала роўныя адпаведна  $m_1, m_2, m_3$ ; масу троса не ўлічваем. Радыус інерцыі вала роўны  $i_{x_3}$ . Дэфармацыя сціскання спружыны ў становішчы раўнавагі роўная  $f_{ст}$ . Восі  $O_2x_2$  і  $O_3x_3$  перпендыкулярныя да плоскасці рысунка.

Вызначыць кругавую частату  $k$  і перыяд  $T$  малых свабодных ваганняў сістэмы, а таксама класці ўраўненне ваганняў грузу  $1$  і знайсці амплітуду яго ваганняў пры наступных дадзеных:  $m_1 = 1 \text{ кг}$ ,  $m_2 = 2 \text{ кг}$ ,  $m_3 = 2 \text{ кг}$ ,  $i_{x_3} = r_3 2 \text{ м}$ ,  $c = 40 \text{ Н / см} = 4 \cdot 10^3 \text{ Н / м}$ ,

$$y_0 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad y'_0 = 6 \cdot 10^{-2} \text{ м / с}.$$

### Рашэнне

За абагульненую каардынату сістэмы прыем вертыкальнае адхіленне грузу  $1$  ад становішча спакою (рыс. 1.5.2).

Знойдзем кінетычную энергію сістэмы, роўную суме кінетычных энергій целаў  $1, 2, 3$ :

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (1.5.9)$$



Рысунк 1.5.1

Выразім лінейныя і вуглавыя скорасці праз абагульненую скорасць  $y$ :

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 \quad (1.5.10)$$

Кінетичну енергію блока 2 визначаємо як для суцільного однорідного диска, який вертиться навколо нерухомої осі  $O_2x_2$ ,

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{x_2} \omega_2^2.$$

Після цього

$$J_{x_2} = \frac{1}{2} m r_2^2, \quad \omega_2 = \frac{y_2'}{r_2},$$

то

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m r_2^2 \left( \frac{y_2'}{r_2} \right)^2 = \frac{1}{4} m y_2'^2. \quad (1.5.11)$$

Вал 3 здійснює вільний рух навколо нерухомої осі  $O_3x_3$ , тому його кінетична енергія

$$T_3 = \frac{1}{2} J_{x_3} \omega_3^2,$$

де  $J_{x_3} = m r_3^2$ ,

$$\omega_3 = \frac{y_3'}{r_3}.$$

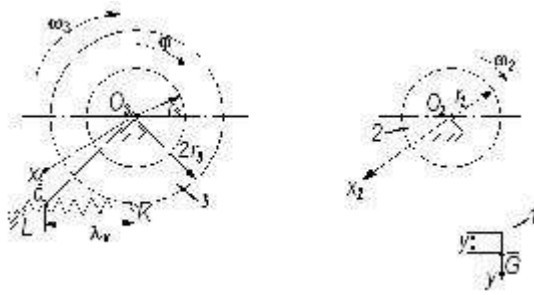


Рисунок 1.5.2

Канчаткова атримліваем

$$T_3 = \frac{1}{2} m \dot{y}_3^2 = \frac{1}{2} m (2r \dot{\varphi})^2 \quad (1.5.12)$$

Па формуле (1.5.9) вылічваем

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}_1^2 + \frac{1}{4} m \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}_3^2 = \frac{1}{2} m \left( \dot{y}_1 + \frac{1}{2} \dot{y}_2 + 2 \dot{y}_3 \right)^2 \quad (1.5.13)$$

Знаходзім патэнцыяльную энергію сістэмы, якая вызначаецца работай сілы цяжару грузу  $l$  і сілы пружкасці спружыны  $KL$ :

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_{II}, \quad (1.5.14)$$

дзе  $\Pi_1 = -G y_1$ ,

$$\Pi_{II} = \frac{c}{2} (f_{ct} + \lambda_K)^2 - \frac{1}{2} c f_{ct}^2,$$

дзе  $\lambda_K$  — перамяшчэнне пункта  $K$  прымацавання спружыны, якое адпавядае каардынаце  $y_3$  рысунка 1.5.2 вынікае, што

$$\lambda_K = 2fy - r_0$$

Гэта значыць  $\lambda_K = 2y$  і  $\Pi = -\frac{1}{2}c(f_{ст} + 2y)^2 - \frac{1}{2}cf_{ст}^2$  або  $\Pi = 2cy^2 + 2cf_{ст}y$ .

Па формуле (1.5.14) знаходзім

$$\Pi = -G_1y + 2cy^2 + 2cf_{ст}y = (-G_1 + 2cf_{ст})y + 2cy^2. \quad (1.5.15)$$

У становішчы спакою, якое адпавядае статычнай дэфармацыі спружыны  $f_{ст}$ , абагульненая сіла роўная 0:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0$$

$$-G_1 + 2cf_{ст} + 4cy = 0$$

або

$$-G_1 + 2cf_{ст} = 0. \quad (1.5.16)$$

Канчаткова патэнцыяльная энергія сістэмы з улікам (1.5.16)

$$\Pi = 2cy^2. \quad (1.5.17)$$

Знаходзім вытворныя ад патэнцыяльнай і кінетычнай энергій:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = (m_1 + 2m_2 + 2m_3)\dot{y}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = 4cy. \quad (1.5.18)$$

Падстаўляем выраз (1.5.18) ва ўраўненне (1.5.1)

$$(m_1 + \frac{1}{2}m_2 + 2m_3) \ddot{y} + 4cy = 0$$

або

$$\ddot{y} + \frac{4c}{m_1 + \frac{1}{2}m_2 + 2m_3} y = 0. \quad (1.5.19)$$

Няхай

$$k_2 = \frac{4c}{m_1 + \frac{1}{2}m_2 + 2m_3};$$

тады замест (1.5.19) маем

$$\ddot{y} + k^2 y = 0. \quad (1.5.20)$$

Мы атрымалі дыферэнцыяльнае ўраўненне свабодных ваганняў механічнай сістэмы. Яно супадае на выгляд з вядомым ўраўненнем ваганняў матэрыяльнага пункта.

Рашаючы ўраўненне (1.5.20), атрымліваем

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (1.5.21)$$

Далей знаходзім

$$y' = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt. \quad (1.5.22)$$

Падстаўляем пачатковыя ўмовы  $t = 0$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = y'_0$  у выразы

(1.5.21) і (1.5.22), адкуль атрымліваем:  $C_1 = y_0$ ,  $C_2 = \frac{y'_0}{k}$ . Тады  $k$  ўраўненне ваганняў сістэмы  $y = y(t)$  прымае выгляд

$$y = y_0 \cos kt + \frac{y \cdot 0}{k} \sin kt. \quad (1.5.23) \quad k$$

Ураўненне  $y = y(t)$  можна атрымаць у амплітуднай форме, калі перайсці да пастаянных інтэгравання  $A$  і  $\beta$ , прыняўшы  $C_1 = A \sin \beta$ ,

$C_2 = A \cos \beta$ . Тады

$$y = A \sin(kt + \beta), \quad (1.5.24)$$

$$\text{дзе } A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \text{ або } A = \sqrt{y_0^2 + \frac{y \cdot 0}{k^2}};$$

$$C_1 = A \sin \beta$$

$$\beta = \arctg \frac{C_2}{C_1} \text{ або } \beta = \arctg \frac{y \cdot 0}{y_0} k t.$$

Выкарыстаўшы лікавыя значэнні задачы пры  $C_1 > 0$ ,  $\sin \beta > 0$ , знаходзім:

$$k = \sqrt{\frac{4 \cdot 4 \cdot 10^3}{1 + 1 + 4}} = 51,6 \text{ с}^{-1}, \quad T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3,14}{51,6} = 0,12 \text{ с},$$

$$C_1 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad C_2 = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$A = 4,18 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad \beta = \arctg 3,44 = 73,8^\circ = 1,29 \text{ рад.}$$

Перапішам кінематычныя ўраўненні ваганняў (1.5.23) і (1.5.24) грузу 1 у канчатковым выглядзе:

$$\left. \begin{aligned} y &= 4 \cdot 10^{-3} \cos 51,6t + 1,2 \cdot 10^{-3} \sin 51,6t \text{ м,} \\ & \qquad \qquad \qquad (1.5.25) \\ y &= 4,18 \cdot 10^{-3} \sin(51,6t + 1,29) \text{ м.} \end{aligned} \right\}$$

### Прыклад 2

Механічная сістэма (рыс. 1.5.3), якая складаецца са ступеньчатага вала 3, замацаванага з дапамогай спружыны жорсткасці  $c$ , ступеньчатага блока 2, звязанага з валам нерасцяжным тросам, і грузу 1 на канцы троса, намотанага на блок 2, знаходзіцца ў стане спакою. Маса грузу 1 роўная  $m_1$ , а масы і радыусы інерцыі блока і вала адпаведна роўныя  $m_2, m_3, i_{x_2}, i_{x_3}$ . Масу троса не ўлічваем. Вось  $O_2x_2$  і рухомая вось  $Kx_3$  перпендыкулярныя да плоскасці малюнка.

Вызначыць кругавую частату  $k$  і перыяд  $T$  малых свабодных ваганняў сістэмы, а таксама класці ўраўненне  $y = y(t)$  ваганняў грузу 1 і знайсці амплітуду  $A$  яго ваганняў пры наступных дадзеных:  $m_1 = 1$  кг,  $m_2 = 3$  кг,  $m_3 = 3$  кг,  $i_{x_2} = r_2 \sqrt{2}$  м,  $i_{x_3} = r_3 \sqrt{2}$  м,

$$c = 40 \text{ Н / см} = 4 \cdot 10^3 \text{ Н / м}, y_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}, y'_0 = 0.$$

#### Рашэнне

За абгульненую каардынату сістэмы прымаем вертыкальнае адхіленне  $y$  грузу 1 ад становішча спакою (рыс. 1.5.4). Знойдзем кінетычную энергію сістэмы, роўную суме кінетычных энергій целаў 1, 2, 3:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (1.5.26)$$

Выразім лінейныя і вуглавыя скорасці праз абгульненую скорасць  $y'$ :

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 y'^2. \quad (1.5.27)$$

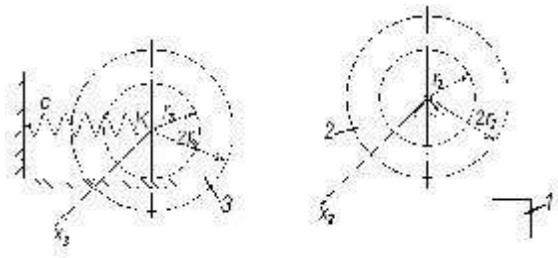


Рисунок 1.5.3

Кінетична енергія блока 2, які вертіцца вакол нерухомай вості  $O_2x_2$ , роўна

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{x_2} \omega_{22}^2.$$

Паколькі  $J_{x_2} = m_2 i_{x_2}^2$ ,  $\omega_{22} = \frac{v_2}{2r_2}$ , то

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left( \sqrt{2} r_2 \right)^2 \left( \frac{2v_2'}{2r_2} \right)^2 = 14 m_2 v_2'^2. \quad (1.5.28)$$

Вал 3 здзяйсняе плоскапаралельны рух, таму кінетична энергія

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_{k2}^2 + \frac{1}{2} J_{x_3} \omega_{23}^2,$$

$$J_{x_3} = m_3 i_{x_3}^2.$$

Використовуючи імгненний центр швидкостей  $P$ , визначимо кутову швидкість  $\omega_3$  і швидкість центра мас вала  $v_k$ . Паколькі

$$v_k = \omega_3 \cdot 2r_3 = 13, \quad v_L = v_N,$$

$$v_L = \omega_3 \cdot r_3$$

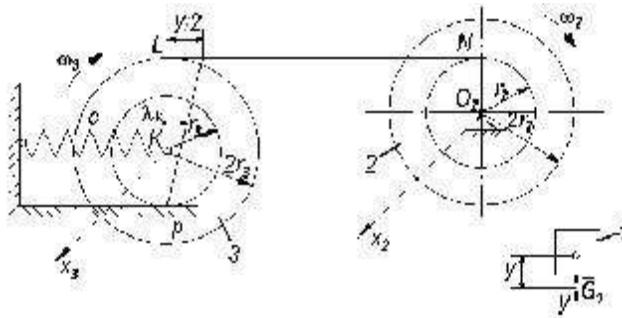


Рисунок 1.5.4

а

$$v_N = v_2 = 1 - y \cdot 2r_2$$

то

$$v_k = \frac{y \cdot 2r_2}{2r_3}, \quad \text{а } \omega_3 = \frac{v_k}{2r_3} = \frac{y \cdot 2r_2}{2r_3 \cdot 2r_3} = \frac{y \cdot r_2}{2r_3^2}$$

Тоді

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_k^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$$

$v_3^2$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \left( \frac{y \cdot r_2}{2r_3} \right)^2 + \frac{1}{2} I_3 \left( \frac{y \cdot r_2}{2r_3^2} \right)^2 = 18 \frac{1}{m} \quad (1.5.29)$$

Па формуле (1.5.26) атрымліваем

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{y}^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m_3) \dot{y}^2. \quad (1.5.30)$$

Знаходзім патэнцыяльную энергію сістэмы, якая вызначаецца работай сілы цяжару грузу  $l$  і сілы пругкасці спружыны:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2, \quad (1.5.31)$$

дзе  $\Pi_1 = -G_1 y$ ,

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} c (f_{ст} + \lambda_K)^2 - \frac{1}{2} c f_{ст}^2,$$

дзе  $\lambda_K$  — перамяшчэнне пункта  $K$  прымацавання спружыны, якое адпавядае каардынаце  $y$ . З рысунка 1.5.4 вынікае, што

$$\lambda_K = 3r^3 \frac{y}{2}, \text{ гэта значыць } \lambda = \frac{3}{2} r^3 y.$$

Тады

$$\Pi = \frac{1}{2} c (f_{ст} + \frac{3}{2} r^3 y)^2 - \frac{1}{2} c f_{ст}^2 = \frac{1}{2} c y^2 + \frac{3}{2} c f_{ст} y. \quad (1.5.32)$$

Па формуле (1.5.31) знаходзім

$$\Pi = -G_1 y + \frac{1}{2} c y^2 + \frac{3}{2} c f_{ст} y = (-G_1 + \frac{3}{2} c f_{ст}) y + \frac{1}{2} c y^2. \quad (1.5.33)$$

У становішчы спакою, якое адпавядае статычнай дэфармацыі спружыны  $f_{ст}$ , абагульненая сіла роўная 0; гэта значыць

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0$$

або

$$-G_1 + \frac{1}{6}cf_{ст} = 0. \quad (1.5.34)$$

Такім чынам, патэнцыяльная энергія сістэмы з улікам (1.5.34)

$$\Pi = \frac{1}{72}cy^2. \quad (1.5.35)$$

Знаходзім вытворныя ад патэнцыяльнай і кінетычнай энергіі:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = (m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{9}m_3) y', \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = -cy. \quad (1.5.36)$$

Падстаўляем выраз (1.5.36) ва ўраўненне (1.5.1):

$$(m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{9}m_3)y'' + \frac{1}{36}cy = 0$$

або

$$y'' + \frac{1}{36} y = 0. \quad (1.5.37)$$

Перапішам роўнасць (1.5.37) у скарачаным выглядзе:

$$y'' + k^2 y = 0, \quad (1.5.38)$$

дзе  $k^2 = c$ .

$$k^2 = \frac{1}{36} \left( m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{9} m_3 \right)$$

Атрымалі дыферэнцыяльнае ўраўненне свабодных ваганняў механічнай сістэмы. Яно, як і ў папярэдніх прыкладах, супадае на выгляд з ураўненнем ваганняў матэрыяльнага пункта.

Рашаючы ўраўненне (1.5.38), атрымліваем

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt; \quad (1.5.39)$$

затым знаходзім

$$y' = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt. \quad (1.5.40)$$

Падстаўляем пачатковыя ўмовы  $t = 0$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = y'_0$  у выразы

(1.5.39) і (1.5.40); адкуль:  $C_1 = y_0$ ,  $C_2 = \frac{y'_0}{k}$ .

Тады ўраўненне ваганняў сістэмы  $y = y(t)$  прыме выгляд

$$y = y_0 \cos kt + \frac{y'_0}{k} \sin kt. \quad (1.5.41)$$

Ураўненне  $y = y(t)$  можна атрымаць у амплітуднай форме, калі перайсці да пастаянных інтэгравання  $A$  і  $\beta$ , прыняўшы  $C_1 = A \sin \beta$ ,  $C_2 = A \cos \beta$ . Тады

$$y = A \sin(kt + \beta), \quad (1.5.42)$$

дзе  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  або  $A = \sqrt{y_0^2 + \frac{y \cdot y_0}{k}}$ ;

$$\beta = \arctg\left(\frac{C_2}{C_1}\right) \text{ або } \beta = \arctg\left(\frac{y \cdot y_0}{k}\right).$$

Выкарыстоўваючы лікавыя значэнні задачы пры  $C_1 > 0$ ,  $\sin \beta > 0$ , знаходзім:

$$k = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^3}{36 \cdot 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{9}}} = 6,26 \text{ с}^{-1}, \quad T = \frac{2\pi}{k} = 1,004 \text{ с},$$

$$C_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad C_2 = 0, \quad A = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad \beta = \arctg 0 = 90^\circ = 1,57 \text{ рад}.$$

Перапішам кінематычныя ўраўненні малых свабодных ваганняў (1.5.41) і (1.5.42) грузу 1:

$$y = 2 \cdot 10^{-3} \cos 12,52t \text{ м}, \quad y = 2 \cdot 10^{-3} \sin(12,52t + 1,57) \text{ м}. \quad (1.5.43)$$

### Прыклад 3

Механічная сістэма (рыс. 1.5.5) складаецца з грузу  $1$ , звязанага з аднародным стрыжнем  $4$  з дапамогай нерасцяжнай ніці, перакінутай праз блок  $2$ , дыска  $3$  і спружыны жорсткасці  $c$ . Сістэма знаходзіцца ў спакоі. Масы грузу, блока і дыска роўныя адпаведна  $m_1, m_2, m_3$ .

Вызначыць кругавую частату  $k$  і перыяд  $T$  малых свабодных ваганняў сістэмы, а таксама скласці ўраўненне  $y = y(t)$  ваганняў грузу  $1$  і знайсці амплітуду  $A$  яго ваганняў пры наступных дадзеных:  $m_1 = 1$  кг,  $m_2 = 2$  кг,

$m_3 = 2$  кг,  $c = 40$  Н / см =  $4 \cdot 10^3$  Н / м,  $y_0 = 3 \cdot 10^{-3}$  м,  $y'_0 = 6 \cdot 10^{-2}$  м / с.

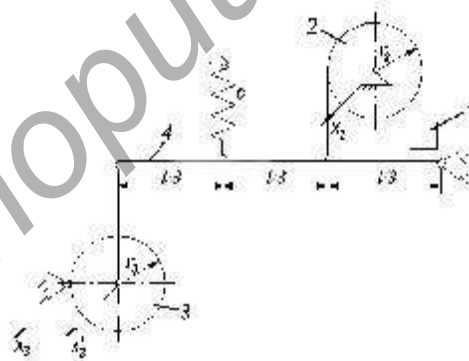
*Рашэнне*

За абагульненую каардынату прымаем вертыкальнае адхіленне грузу  $1$  ад становішча спакою (рыс. 1.5.6). Кінетычную энергію сістэмы знойдем як суму кінетычных энергій целаў  $1, 2, 3, 4$ :

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \quad (1.5.44)$$

Лінейныя і вуглавя скорасці будзем выражаць праз абагульненую скорасць  $y'$ . Кінетычная энергія грузу  $1$  роўна

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 y'^2. \quad (1.5.45)$$



Рысунак 1.5.5

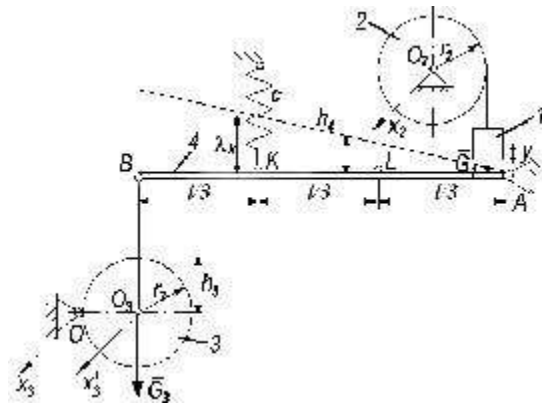


Рисунок 1.5.6

Кінетичну енергію блока 2 знаходзім, як для суцэльнага аднароднага дыска, які верціцца вакол нерухомай восі  $O_2x_2$ :

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{O_2} \omega_2^2.$$

Паколькі

$$J_{O_2} = \frac{1}{2} m r_2^2, \quad \omega_2 = \frac{y_2}{r_2}$$

то

$$T_2 = \frac{1}{2} m r_2 \left( \frac{y_2}{r_2} \right)^2 = \frac{1}{4} m y_2^2. \quad (1.5.46)$$

Дыск 3 здзяйсняе вярчальны рух вакол нерухомай восі  $O_3x_3$ , таму яго кінетычная энергія

$$T_3 = \frac{1}{2} J_{x3} \omega_3^2,$$

дзе  $J_{x3} = J_{x3'} + m r_{33}^2$ ;

$$J_{x3'} = \frac{1}{2} m r_{33}^2;$$

$$\omega_3 = v_{03} = 3y' \cdot r_3 = 3y' \cdot r_3$$

Паколькі  $v_{03} = v_0 = 3y'$ , то

$$T_3 = 12 \frac{1}{2} m r_{33}^2 + m r_{33}^2 \cdot \frac{3y'}{r_3} \cdot \frac{3y'}{r_3} = 27 m y_3'^2. \quad (1.5.47)$$

Кінетычная энергія аднароднага стрыжня 4

$$T_4 = \frac{1}{2} J_{x1} \omega_4^2.$$

Паколькі

$$J_{x1} = \frac{1}{3} m l^2,$$

а

$$\omega^4 = y'' = \frac{1}{3l} \quad l$$

то

$$= 12 \cdot 31 m_4 l^2 \theta \square \square \square - 3 l y'' \square \square \square \square^2 = 23 m_4 y'' \dots 2$$

$$(1.5.48) T_4$$

□ □

Па формуле (1.5.44) атрымліваем:

$$T - = 1 - m - y'^2 - + 1 m_2 y'^2 + 27 m_3 y'^2 + 3 m_4 y'^2 =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{27}{2} \dots^2 \quad (1.5.49)$$

$$= (m_1 + m_2 + m_3 + 3m_4) y.$$

Знаходзім патэнцыяльную энергію сістэмы. Яна вызначаецца работай сіл цяжару груза 1, дыска 3, стрыжня 4 і работай сілы пругкасці спружыны:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2, \quad (1.5.50)$$

дзе  $\Pi_1 = -G_1 y + G_3 h_3 + G_4 h_4$ , дзе  $h_3 = 3y$ ,  $h_4 = \frac{3}{2} y$  — вертыкальныя зрушэнні цэнтраў цяжару дыска 3 і

2 стрыжня 4, якія адпавядаюць перамяшчэнню груза 1;

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} c(f_{ст} + \lambda \kappa)^2 - \frac{1}{2} c f_{ст}^2,$$

дзе  $\lambda_K = 2y$  — перамяшчэнне пункта  $K$  прымацавання спружыны, якое адпавядае каардынаце  $y$ .

Тады

$$\Pi = 2cyf_{ст} + 2cy^2 \quad (1.5.51)$$

Па формуле (1.5.50) знаходзім

$$\Pi = -G_1y + 3G_3y + \frac{3}{2}G_4y + 2cyf_{ст} + 2cy^2. \quad (1.5.52)$$

У становішчы спакою, якое адпавядае статычнай дэфармацыі спружыны  $f_{ст}$ , абагульненая сіла роўна нулю:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0$$

або

$$-G_1 + 3G_3 + \frac{3}{2}G_4 + 2cf_{ст} = 0. \quad (1.5.53)$$

Такім чынам, патэнцыяльная энергія сістэмы з улікам формулы (1.5.53)

$$\Pi = 2cy^2. \quad (1.5.54)$$

Знаходзім вытворныя ад патэнцыяльнай і кінетычнай энергій:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \left( \frac{1}{2} + \frac{27}{2} + 3 \right) \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = 4cy. \quad (1.5.55)$$

Падстаўляем выразы (1.5.55) ва ўраўненне (1.5.1):

$$1 \quad 27 \quad \dots \\ (\bar{m}_1 + 2\bar{m}_2 + 2m_3 + 3m_4) \ddot{y} + 4cy = 0$$

або

$$\ddot{y} + \frac{4c}{\bar{m}_1 + 2\bar{m}_2 + 2m_3 + 3m_4} y = 0. \quad (1.5.56)$$

Няхай

$$2 \quad \frac{m_1 + m_2 + m_3 + 3m_4}{2} \\ k_2 = \frac{4c}{\frac{m_1 + m_2 + m_3 + 3m_4}{2}},$$

тады

$$\ddot{y} + k^2 y = 0. \quad (1.5.57)$$

Атрымалі дыферэнцыяльнае ўраўненне свабодных ваганняў механічнай сістэмы.

Рашаючы ўраўненне (1.5.57), знаходзім

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (1.5.58)$$

адкуль

$$y' = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt. \quad (1.5.59)$$

Падстаўляючы пачатковыя ўмовы  $t = 0$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = y'_0$  у выразы (1.5.58)

і (1.5.59), маем:  $C_1 = y_0$ ,  $C_2 = \frac{y'_0}{k}$ .

Тады ўраўненне ваганняў сістэмы  $y = y(t)$  прыме выгляд

$$y = y_0 \cos kt + \frac{y_0}{k} \sin kt. \quad (1.5.60)$$

Ураўненне  $y = y(t)$ , як і ў папярэдніх прыкладах, можна атрымаць у амплітуднай форме, калі перайсці да пастаянных інтэгрвання  $A$  і  $\beta$ , прыняўшы  $C_1 = A \sin \beta$ ,  $C_2 = A \cos \beta$ . Тады

$$y = A \sin(kt + \beta), \quad (1.5.61)$$

дзе  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{y_0}{k}\right)^2}$ ;

$$\beta = \arctg \frac{C_1}{C_2} = \arctg \frac{y_0}{y_0/k}.$$

Выкарыстаўшы лічбавыя дадзеныя задачы, знаходзім:

$$k = \frac{4 \cdot 4 \cdot 10^3}{1 + 1 + 27 + 3} = 22,4 c^{-1},$$

$$T = \frac{2\pi}{k} = 0,28 c, \quad C_1 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad C_2 = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad A = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad k$$

$$\beta = \arctg(1,11) = 48^\circ = 0,84 \text{ рад.}$$

Запішам ураўненні малых свабодных ваганняў (1.5.60) і (1.5.61) цэла 1 у канчатковым выглядзе:

$$y = 3 \cdot 10^{-3} \cos 22,4t + 2,7 \cdot 10^{-3} \sin 22,4t \text{ м, } y = 4 \cdot 10^{-3} \sin(22,4t + 0,84) \text{ м.}$$

### 1.6 Кінетычная і патэнцыяльная энергія механічнай сістэмы з двюма ступенямі свабоды

Разгледзім рух кансерватыўнай сістэмы, якая складаецца з  $n$  матэрыяльных пунктаў і мае дзве ступені свабоды. На яе накладзены стацыянарныя галаномныя сувязі. Становішча пунктаў гэтай сістэмы вызначаецца двюма абагульненымі каардынатамі  $q_1, q_2$ . Такім чынам, радыус-вектар  $i$ -га пункта  $r_{-i} = r_{-i}(q_1, q_2)$ , а яго скорасць роўна

$$v_i = \frac{dr_i}{dt} = \frac{\partial r_{-i}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial r_{-i}}{\partial q_2} \dot{q}_2 \dots$$

Кінетычная энергія сістэмы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{\partial r_{-i}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial r_{-i}}{\partial q_2} \dot{q}_2 \right)^2 + \sum_{i=n+1}^n m_i \dots$$

$$+ \sum_{i=n+1}^n m_i \frac{\partial r_{-i}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial r_{-i}}{\partial q_2} \dot{q}_2 \dots$$

або ў скарачаным выглядзе

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{q}_{r-1i}^2 + 2A_{12} \dot{q}_{r-1i} \dot{q}_{r-2i} + A_{22} \dot{q}_{r-2i}^2, \quad (1.6.1)$$

дзе  $A_{11} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \underline{q}_{r-1i}}{\partial \underline{q}_{r-1i}}$ ;

$$A_{12} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \underline{q}_{r-1i}}{\partial \underline{q}_{r-2i}};$$

$$A_{22} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial \underline{q}_{r-2i}} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial \underline{q}_{r-2i}}.$$

Кэфіцыенты  $A_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) з'яўляюцца функцыямі абгульненых каардынат  $q_1, q_2$ . Раскладзем іх у рады Макларэна ў наваколлі становішча ўстойлівай раўнавагі сістэмы  $q_1 = 0, q_2 = 0$ :

$$A_{ij}(q_1, q_2) = A_{ij0} + \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_1} q_1 + \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_2} q_2 + \dots \quad (i, j = 1, 2) \quad (1.6.2)$$

Паколькі мы вывучаем малыя рухі частак сістэмы, то абмяжуемся тут першымі членамі радоў і ўвядзем абазначэнні  $(A_{11})_0 = a_{11}$ ,

$$(A_{12})_0 = a_{12}, \quad (A_{22})_0 = a_{22}.$$

Тады замест (1.6.1) атрымаем

$$T = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2) \quad (1.6.3)$$

Тут інерцыйныя каэфіцыенты  $a_{ij}$  у адрозненне ад  $A_{ij}$  з'яўляюцца пастаяннымі.

Патэнцыяльная энергія разглядаемай механічнай сістэмы таксама залежыць ад абагульненых каардынат  $q_1, q_2$ . Раскладзем яе ў тым жа наваколлі  $q_1 = 0, q_2 = 0$  у рад Макларэна:

$$\begin{aligned} \Pi(q_1, q_2) = & \Pi(0, 0) + \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} q_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} q_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} q_1^2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2} q_1 q_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2} q_2^2 + \dots \quad (1.6.4) \end{aligned}$$

Няхай  $\Pi(0, 0) = 0$ . Велічыні  $\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} \Big|_{q_1=0, q_2=0}$  і  $\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} \Big|_{q_1=0, q_2=0}$  роўныя нулю як

абагульненыя сілы ў становішчы раўнавагі сістэмы.  
Увядзем абазначэнні:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} = c_{11}, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2} = c_{12}, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2} = c_{22}.$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0$$

Тады, абмяжоўваючыся ў раскладанні (1.6.4) не роўнымі нулю квадратычнымі адносна абагульненых каардынат членамі, атрымаем

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2), \quad (1.6.5)$$

дзе квазіпружкі каэфіцыенты  $c_{ij}$  ( $i, j, = 1, 2$ ) — пастаянныя велічыні.

Прадстаўленне кінетычнай і патэнцыяльнай энергій сістэмы ў выглядзе выказаў (1.6.3), (1.6.5) забяспечвае лінейнасць дыферэнцыяльных ураўненняў, якія апісваюць малыя ваганні.

### Прыклад

Механічная сістэма, прадстаўленая на рысунку 1.6.1 у дзвюх праекцыях, складаецца з шасцярні 2, якая верціцца вакол восі  $AA$  падвойнага крывашыпа (рамкі)  $OA$ , свабодна замацаванага на вале  $OO$ , і дзвюх спружын жорсткасці  $c_2$ . Масы шасцярняў 1, 2 роўныя  $m_1, m_2$ ; масы крывашыпа, вала і спружын не ўлічваем. Жорсткасць вала на кручэнне роўна  $c_1$ . У стане спакою вал і спружыны не дэфармаваныя.

Знайсі кінетычную і патэнцыяльную энергію сістэмы пры яе малых рухах каля становішча ўстойлівай раўнавагі.

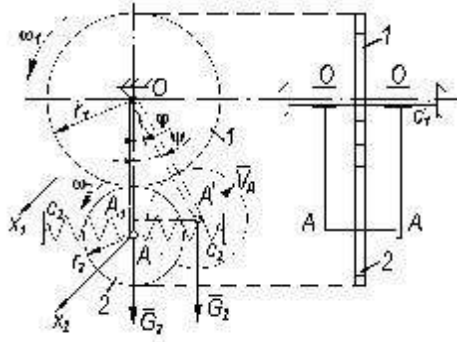


Рисунок 1.6.1

*Рашэнне*

Шасцярня 1 можа здзяйсняць малыя вярчальныя рухі (дзякуючы дэфармацыі вала), шасцярня 2 — плоскія рухі. За абагульненыя каардынаты прымем  $q_1 = \varphi$ ,  $q_2 = \psi$ , дзе  $\varphi$  і  $\psi$  — вуглы павароту шасцярні 1 і крывашыпа  $OA$ .

Кінетычная энергія сістэмы складаецца з сумы кінетычных энергій целаў 1 і 2:

$$T = T_1 + T_2, \quad (1.6.6)$$

дзе

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{O_1}^2 + \frac{1}{2} J_{O_1} \omega_1^2 = \frac{1}{2} m_1 r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_{O_1} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} (m_1 r^2 + J_{O_1}) \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m_1 r_{22}^2 \dot{\varphi}^2;$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_A^2 + \frac{1}{2} J_{x_2} \omega_2^2.$$

Паколькі

$$v_A = (r_1 + r_2) \dot{\psi}, \quad \omega_2 = (r_1 + r_2) \dot{\psi} - r_1 \dot{\varphi} = r_1 + r_2 \dot{\psi} - \dot{\varphi},$$

то

$$\square \quad \square_2$$

Репозиторий БарГУ

$$Tm_2 [(r_1 + r_2)\dot{\psi}]^2 + 12 \cdot 12 m_2 r_{22} \dots r_{1r_1} r_{2\psi} \cdot - \dot{\varphi} \cdot \dots = \frac{1}{4} m_2 r_2^2 \dot{\varphi}^2 -$$

$$- \frac{1}{2} m r^2 \cdot \frac{r_1 + r_2}{\dots} \dot{\varphi} \dot{\psi} + \frac{1}{2} \dots + 1 r_2 \dots \dot{\psi}^2$$

$$2 \dots r_1 \dots 2 m_2 (r_1 + r_2) \dots \dots$$

$$2 r_1 \dots$$

Патэнцыяльную энергію сістэмы знойдем па формуле

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_{\text{ц}}, \quad (1.6.7)$$

дзе  $\Pi_1$  — патэнцыяльная энергія сістэмы ў полі сіл цяжару:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= G_2 \cdot AA_1 = G_2(OA - OA_1) = G_2 [(r_1 + r_2) - (r_1 + r_2)\cos\varphi] = \\ &= G_2(r_1 + r_2)(1 - \cos\varphi) = \frac{1}{2} G_2(r_1 + r_2)\varphi^2, \end{aligned}$$

паколькі

$$\cos\varphi = -1 + \frac{1}{2}\varphi^2;$$

$\Pi_{\text{ц}}$  — патэнцыяльная энергія пружкай дэфармацыі вала і спружын.

Пры вызначэнні  $\Pi_{\text{ц}}$  неабходна ўлічваць, што разглядаемая сістэма ўтрымлівае дзве спружыны і два ўчасткі вала, злучаных паралельна, іх прыведзеныя жорсткасці роўныя  $c_{2\text{пр}} = 2c_2$ ,  $c_{1\text{пр}} = 2c_1$ . Таму

$$\begin{aligned} \dots \dots 1 \dots 1 (2)c_1 \varphi^2 = c_2 (A A_1 \dots)^2 + c_1 \varphi^2 = c_2 [(r_1 + r_2) \\ \dots \sin\varphi]^2 + c_1 \varphi^2 = \dots \dots \Pi_{\text{ц}} = (2c_2)\lambda + \\ \dots \dots = c_2(r_1 + r_2)^2 \psi^2 + c_1 \varphi^2. \end{aligned}$$

### 1.7 Малыя свабодныя ваганні сістэмы з двюма ступенямі свабоды

Для вывучэння свабодных ваганняў сістэмы неабходна атрымаць і даследаваць іх дыферэнцыяльныя ўраўненні. Як і раней, для вываду дыферэнцыяльных ураўненняў ваганняў выкарыстаем ураўненне Лагранжа другога роду (1.2.1). Для сістэмы з двюма ступенямі свабоды ( $s = 2$ ) яны маюць выгляд:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_1} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_1}, \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_2} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_2}. \quad (1.7.1)$$

Кінетычная  $T$  і патэнцыяльная  $\Pi$  энергіі вызначаюцца па формулах (1.6.3) і (1.6.5).

Знаходзім вытворныя:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2, & \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= a_{12}\dot{q}_1 + a_{22}\dot{q}_2, \\ \frac{\partial T}{\partial q_1} &= 0, & \frac{\partial T}{\partial q_2} &= 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} &= c_{11}q_1 + c_{12}q_2, & \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} &= c_{12}q_1 + c_{22}q_2. \end{aligned}$$

Падстаўляем іх ва ўраўненні (1.7.1); у выніку атрымліваем дыферэнцыяльныя ўраўненні малых свабодных ваганняў:

$$\left. \begin{aligned} (a_{11}q''_1 + c_{11}q_1) + (a_{12}q''_2 + c_{12}q_2) \\ (a_{21}q''_1 + c_{21}q_1) + (a_{22}q''_2 + c_{22}q_2) \end{aligned} \right\} = 0, \quad (1.7.2)$$

$$(a_{21}q''_1 + c_{21}q_1) + (a_{22}q''_2 + c_{22}q_2) = 0,$$

дзе  $a_{21} = a_{12}$ ,  $c_{21} = c_{12}$ .

Ва ўраўненне (1.7.2) уведзены дужкі, каб звярнуць увагу на структуру гэтых ураўненняў, а менавіта — на іх пераемнасць адносна ўраўненняў для сістэм з адной ступенню свабоды.

Прыватнае рашэнне сістэмы (1.7.2) будзем шукаць у выглядзе

$$q_1 = A_1 \sin(kt + \beta), \quad q_2 = A_2 \sin(kt + \beta), \quad (1.7.3)$$

Калі  $q^2 = \mu$ , то формулы (1.7.3) можна запісаць інакш: Калі прыняць  $q_1$

$$q_1 = A_1 \sin(kt + \beta), \quad q_2 = \mu q_1 = \mu A_1 \sin(kt + \beta). \quad (1.7.4)$$

Знаходзім вытворныя:

$$q''_1 = -k^2 A_1 \sin(kt + \beta), \quad q''_2 = -\mu k^2 A_1 \sin(kt + \beta).$$

Падстаўляем іх у выразы (1.7.4) ва ўраўненні (1.7.2); атрымліваем:

$$\left. \begin{aligned} (c_{11} - a_{11}k^2) + \mu(c_{12} - a_{12}k^2) \\ (c_{12} - a_{12}k^2) + \mu(c_{22} - a_{22}k^2) \end{aligned} \right\} = 0, \quad (1.7.5)$$

Калі з гэтай сістэмы выключым велічыню  $\mu$ , то атрымаем так званае ўраўненне частот:

$$(c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - (c_{12} - a_{12}k^2)^2 = 0. \quad (1.7.6)$$

Дадатныя карані бікватратнага ўраўнення (1.7.6)  $k_1, k_2$  уяўляюць частоты свабодных ваганняў. Прымем  $k_1 < k_2$ . Адпаведныя гэтым частотам ваганні называюць *галоўнымі ваганнямі сістэмы*. Меншую частату  $k_1$  называюць *асноўнай частатой*, а адпаведнае ёй першае галоўнае ваганне — *асноўным ваганнем*.

Падстаўляем галоўныя частоты  $k_1$  і  $k_2$  ва ўраўненні (1.7.5) і знаходзім два значэнні  $\mu$ :

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= -\frac{c_{11} - a_{11}k_1^2}{a_{22}k_1} - \frac{c_{12} - a_{12}k_1^2}{a_{22}k_1} \\ \mu_2 &= -\frac{c_{11} - a_{11}k_2^2}{a_{22}k_2} - \frac{c_{12} - a_{12}k_2^2}{a_{22}k_2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &- \frac{a_{12}k_{12}}{a_{22}k_1}, \quad c_{22} - \\ & \end{aligned}$$

Велічыні  $\mu_1, \mu_2$  называюцца *каэфіцыентамі размеркавання*, або *каэфіцыентамі форм ваганняў*, таму што яны характарызуюць формы галоўных ваганняў. Пад формай ваганняў будзем разумець дыяграму, якая паказвае перамяшчэнні пунктаў сістэмы, здзяйсняючай якое-небудзь галоўнае ваганне. У далейшым абагульненыя каардынаты і амплітуды ваганняў, якія адпавядаюць першаму і другому галоўным ваганням, будзем адзначаць індэксамі (1) і (2) зверху. У такіх абазначэннях

$$\mu_{1(1)} = \frac{q_{12(1)}}{A_{12(1)}}, \quad A_{2(1)} = \mu_{1(1)} A_{1(1)}.$$

Ураўненні, якія вызначаюць першае галоўнае ваганне, маюць выгляд:

$$q_{1(1)} = A_{1(1)} \sin(k_1 t + \beta_1), \quad q_{2(1)} = \mu_1 A_{1(1)} \sin(k_1 t + \beta_1),$$

дзе  $\beta_1$  — пачатковая фаза, якая адпавядае частаце  $k_1$ .

Аналагічна знойдзем ураўненні, якія вызначаюць другое галоўнае ваганне:

$$q_{1(2)} = A_{1(2)} \sin(k_2 t + \beta_2), \quad q_{2(2)} = \mu_2 A_{1(2)} \sin(k_2 t + \beta_2),$$

дзе  $\beta_2$  — пачатковая фаза, якая адпавядае частаце  $k_2$ .

Агульнае рашэнне ўраўненняў (1.7.2) атрымаем як суму прыватных рашэнняў:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= q_{1(1)} + q_{1(2)} = A_{1(1)} \sin(k_1 t + \beta_1) + A_{1(2)} \sin(k_2 t + \beta_2), \\ q_2 &= q_{2(1)} + q_{2(2)} = \mu_1 A_{1(1)} \sin(k_1 t + \beta_1) + \mu_2 A_{1(2)} \sin(k_2 t + \beta_2). \end{aligned} \right\} \quad (1.7.8)$$

Пастаянныя  $A_1^{(1)}$ ,  $A_1^{(2)}$ ,  $\beta_1$  і  $\beta_2$  вызначаюцца з пачатковых умоў:

$$t = 0, \quad q_1 = q_{10}, \quad q_2 = q_{20}, \quad \dot{q}_1 = \dot{q}_{10}, \quad \dot{q}_2 = \dot{q}_{20}. \quad (1.7.9)$$

Як відаць з агульнага рашэння (1.7.8) ураўненняў (1.7.2), вагальны рух сістэмы з'яўляецца складаным рухам, які атрымліваецца ў выніку накладання двух гарманічных ваганняў з рознымі частотамі, амплітудамі і пачатковымі фазамі. Працэсу ваганняў уласцівы прынцып *суперпазіцыі* (накладання) простых ваганняў.

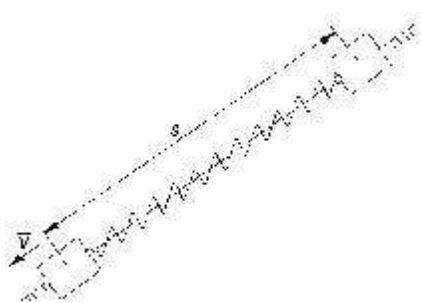
Вышэй меркавалася, што галоўныя частоты  $k_1$ ,  $k_2$  адрозніваюцца ад нуля і не роўныя паміж сабою. Спынімся на прыватных выпадках:

1. Карані ўраўнення частот (1.7.6) роўныя паміж сабою. У гэтым выпадку сістэма (1.7.2) распадаецца на два незалежныя ўраўненні. Ім адпавядаюць простыя ваганні з аднолькавымі частотамі і рознымі амплітудамі і пачатковымі фазамі.

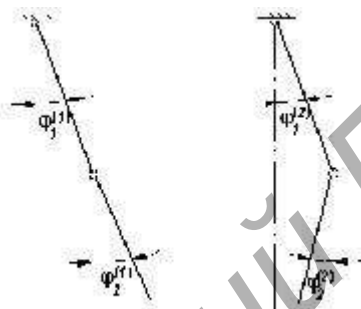
2. Адзін з каранёў ураўнення (1.7.6) роўны нулю. Тады рух сістэмы адносна адной каардынаты з'яўляецца вагальным, а адносна другой — адвольным (у прыватнасці, раўнамерным паступальным). Напрыклад, дзве муфты, злучаныя спружынай на нахільным стрыжні (рыс. 1.7.1) могуць здзяйсняць паступальны рух уніз з адначасовай зменай адлегласці паміж імі па законе простых ваганняў  $s = s_0 + a \sin kt$ ,  $s_0 > a$ .

Раскладанне складанага вагальнага руху сістэмы на галоўныя ваганні з'яўляецца эфектыўным сродкам вывучэння ваганняў. Для лепшага разумення галоўных ваганняў адзначым некаторыя іх уласцівасці:

а) калі сістэма здзяйсняе якое-небудзь галоўнае ваганне, то абедзве яе абгульненыя каардынаты змяняюцца па гарманічным законе з аднолькавымі або процілеглымі фазамі. Супадзенне фаз азначае, што абедзве абгульненыя каардынаты адначасова прыходзяць у становішча раўнавагі, адначасова дасягаюць максімальных адхіленняў ад становішча раўнавагі; адносінны амплітуд роўныя  $\mu_1$  і  $\mu_2$ . Для ілюстрацыі гэтай уласцівасці на рысунку 1.7.2 паказаны формы



Рысунк 1.7.1



Рысунк 1.7.2

галоўных ваганняў падвойнага фізічнага маятніка, вызначаемага каардынатамі  $q_1 = \varphi_1$ ,  $q_2 = \varphi_2$ ;

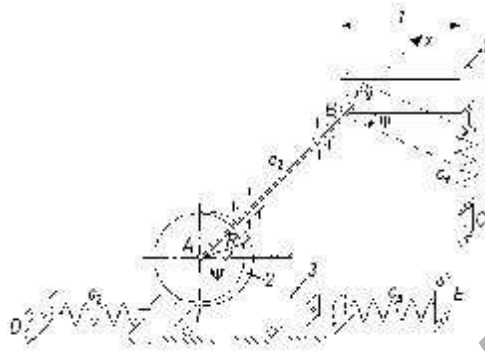
б) амплітуда і пачатковая фаза галоўнага вагання вызначаюцца пачатковымі ўмовамі (1.7.9);

в) частата і перыяд ваганняў залежаць толькі ад уласных характарыстык сістэмы, якая рухаецца.

Методыка прымянення ўраўненняў (1.7.1) да рашэння задач выкладзена ў раздзеле 1.4.

### Прыклад 1

Прызматычнае цела  $1$  даўжынёй  $l$  (рыс. 1.7.3) адным канцом прымацавана да гарызантальнага вала  $AB$ , а другім абাপіраецца на вертыкальную спружыну жорсткасці  $c_1$ . На процілеглым канцы вала



Рысунк 1.7.3

зачапананы дыск радыуса  $R$ , які з дапамогай сілы трэння звязаны з прызмай  $3$ , усталяванай на катках. Прызма прымацаваная гарызантальнымі спружынамі жорсткасці  $c_3$  да нерухомах апор  $D, E$ . Жорсткасць вала на кручэнне роўная  $c_2$ . У стане спакою спружына з жорсткасцю  $c_1$  сціснута на велічыню  $f_{ст}$ ; астатнія спружыны і вал не дэфармаваныя. Прызмы  $1$  і  $3$  займаюць гарызантальнае становішча. Маса вала, каткоў, спружын, а таксама сілы трэння ў сістэме не ўлічваюцца.

Вызначыць частоты свабодных ваганняў і знайсці формы галоўных ваганняў апісанай сістэмы, калі  $l = 0,5$  м;  $R = 0,2$  м;  $m_1 = 30$  кг;  $m_2 = 30$  кг,  $m_3 = 10$  кг;  $i_x = 0,4$  м;  $c_1 = 10^4$  Н / м;  $c_2 = 2 \cdot 10^4$  Н · м / рад;  $c_3 = 0,5 \times 10^4$  Н / м ( $i_x$  — радыус інерцыі цела  $1$ ).

#### Рашэнне

Падчас ваганняў цела  $1$  і  $2$  здзяйсняюць вярчальны рух вакол восі  $Ax$ , цела  $3$  — паступальны. Кансерватыўная сістэма мае дзве ступені свабоды. За абгульненыя каардынаты прыем вуглы павароту  $\varphi, \psi$  целаў  $1$  і  $2$ ; дадатныя

напрямкі вуглоў паказаны на рысунку 1.7.3. Адпаведныя ім становішчы целаў паказаны пункцірнымі лініямі.

Знаходзім кінетычную энергію целаў 1, 2, 3, прадстаўляючы яе ў выглядзе функцый абагульненых скорасцей  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\psi}$ :

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{x_1} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} 12 m_1 x_2 \dot{\varphi}^2,$$

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{x_2} \dot{\psi}^2 = \frac{1}{2} 4 m_2 R^2 \dot{\psi}^2,$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2.$$

Паколькі  $v_3 = v_F = R\dot{\psi}$ , то  $T_3 = \frac{1}{2} m_3 R^2 \dot{\psi}^2$ .

Кінетычная энергія ўсёй сістэмы

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} 12 m_1 x_2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} (2 m_2 + m_3) R^2 \dot{\psi}^2. \quad (1.7.10)$$

Патэнцыяльную энергію сістэмы прадставім у выглядзе сумы:

$$\Pi = \Pi_I + \Pi_{II},$$

дзе  $\Pi_I$  — патэнцыяльная энергія цела 1 у полі сіл цяжару;

$\Pi_{II}$  — патэнцыяльная энергія дэфармацыі спружын і вала. Патэнцыяльная энергія целаў 2 і 3 роўная нулю, бо іх цэнтры мас не перамяшчаюцца ў напрамку сіл цяжару. Таму (рыс. 1.7.4)

$$\Pi_1 = -Gh = -G \frac{1}{2} l \sin \alpha \approx -\frac{1}{2} G_1 l \alpha$$

Для пружких елементів з жорсткостями  $c_1, c_2, c_3$  потенціальна енергія роїна

$$\Pi_{\text{п}} = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3,$$

дзе

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{1}{2} c_1 (\lambda_1 + f_{\text{ст}})^2 - \frac{1}{2} c_1 f_{\text{ст}}^2 = \frac{1}{2} c_1 \lambda_1^2 + c_1 \lambda_1 f_{\text{ст}} = \Pi \\ &= c_1 \left( \frac{1}{2} l^2 \alpha^2 + l \alpha f_{\text{ст}} \right); \end{aligned}$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} c_2 (\varphi + \psi)^2,$$

дзе  $(\varphi + \psi)$  — вугал закручування вала;

$$\Pi_3 = 2 \cdot \frac{1}{2} c_3 \lambda_3^2 = c_3 R^2 \psi^2,$$

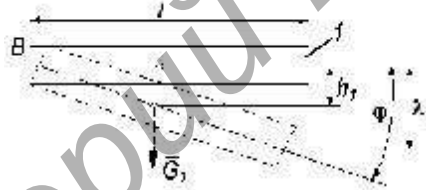


Рисунок 1.7.4

Таким чином,

$$\Pi = \left( -\frac{1}{2} G_1 l + c_1 l f_{\text{ст}} \right) + c_2 \varphi \psi + \frac{1}{2} (c_1 l^2 + c_2) \varphi^2 + \left( -\frac{1}{2} c_2 + c_3 R^2 \right) \psi^2.$$

У стане спокою консервативної системи

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0, \psi=0} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \psi} \Big|_{\varphi=0, \psi=0} = 0.$$

У нашым прыкладзе

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2} G_1 l + c_1 l f_{\text{ст}} + c_2 \psi + (c_1 l^2 + c_2) \varphi$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} = c_2 \varphi + 2\left(\frac{1}{2} c_2 + c_3 R^2\right) \psi,$$

адкуль пры  $\varphi = 0, \psi = 0$  атрымліваем

$$-\frac{1}{2} G_1 l + c_1 l f_{\text{ст}} = 0, \quad 0 = 0.$$

Гэтыя роўнасці дазваляюць спрасціць формулу патэнцыяльнай энергіі:

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_1 l^2 + c_2) \varphi^2 + c_2 \varphi \psi + \frac{1}{2} (c_2 + c_3 R^2) \psi^2. \quad (1.7.11)$$

З параўнання формул (1.7.10) і (1.7.11) з агульнымі выразамі (1.6.3), (1.6.5) знаходзім інерцыйныя і квазіпружкія каэфіцыенты:

$$a_{11} = m_1 i_x^2, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = \frac{1}{2} (m_2 + m R_3)^2, \quad (1.7.12)$$

$$c_{11} = c_1 l^2 + c_2, \quad c_{12} = c_2, \quad c_{22} = c_2 + 2c_3 R^2.$$

Для атримання дыферэнцыяльных ураўненняў свабодных ваганняў сістэмы скарыстаемся ўраўненнямі Лагранжа другога роду (1.7.1) пры

$$q_1 = \varphi, \quad q_2 = \psi :$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \psi} \quad (1.7.13)$$

Вылічым вытворныя выказаў (1.6.3), (1.6.5), што ўваходзяць у (1.7.13):

$$dT/dj = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = a_{11} \dot{\varphi} + a_{12} \dot{\psi},$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = a_{11} \ddot{\varphi} + a_{12} \ddot{\psi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = c_{11} \varphi + c_{12} \psi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \psi} = a_{12} \dot{\varphi} + a_{22} \dot{\psi},$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) = a_{12} \ddot{\varphi} + a_{22} \ddot{\psi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \psi} = c_{12} \varphi + c_{22} \psi,$$

Падстаўляем гэтыя вытворныя ва ўраўненні (1.7.13):

$$a_{11}\varphi'' + a_{12}\psi'' = -(c_{11}\varphi + c_{12}\psi), \quad a_{12}\varphi'' + a_{22}\psi'' = -(c_{12}\varphi + c_{22}\psi)$$

або при  $a_{12} = 0$

$$a_{11}\varphi'' + c_{11}\varphi + c_{12}\psi = 0, \quad a_{22}\psi'' + c_{12}\varphi + c_{22}\psi = 0. \quad (1.7.14)$$

Приватнае рашэнне дыферэнцыяльных ураўненняў ваганняў (1.7.14) мае выгляд

$$\varphi = A_1 \sin(kt + \beta), \quad \psi = A_2 \sin(kt + \beta). \quad (1.7.15)$$

Увядзем каэфіцыент размеркавання  $\mu = \frac{\psi}{\varphi} = \frac{A_2}{A_1}$ . Замест ураўнення

(1.7.15) атрымаем

$$\varphi = A_1 \sin(kt + \beta), \quad \psi = \mu\varphi = \mu A_1 \sin(kt + \beta). \quad (1.7.16)$$

Знаходзім вытворныя:

$$\varphi'' = -k^2 A_1 \sin(kt + \beta), \quad \psi'' = -\mu k^2 A_1 \sin(kt + \beta), \quad (1.7.17)$$

Падстаўляем выразы (1.7.16) і (1.7.17) у (1.7.14) і атрымліваем

$$(-a_{11}k^2 + c_{11} + c_{12}\mu)A_1 \sin(kt + \beta) = 0,$$

$$(-a_{22}\mu k^2 + c_{12} + c_{22}\mu)A_1 \sin(kt + \beta) = 0.$$

Паколькі пры адвольным  $t$  тут  $\sin(kt + \beta) \neq 0$ , то

$$-a_{11}k^2 + c_{11} + c_{12}\mu = 0, \quad -a_{22}\mu k^2 + c_{12} + c_{22}\mu = 0 \quad (1.7.18)$$

З другога ўраўнення знаходзім  $\mu$  і падстаўляем у першае.  
Атрымліваем ураўненне частот

$$(c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - c_{12}^2 = 0,$$

або

$$ak^4 - bk^2 + c = 0, \quad (1.7.19)$$

$$\text{дзе } a = a_{11}a_{22}; \quad b = a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11};$$

$$c = c_{11}c_{22} - c_{12}^2$$

.

Знойдзем лікавыя значэнні каэфіцыентаў  $a_{ij}$ ,  $c_{ij}$  па формулах (1.7.12) і велічыні  $a$ ,  $b$ ,  $c$ :

$$a_{11} = 30 \cdot 0,4^2 = 4,8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$a_{22} = \frac{1}{2} \cdot 30 + 30 \cdot 0,2^2 = 1,8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$c_{11} = 10^4 \cdot 0,5^2 + 2 \cdot 10^4 = 2,25 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}, \quad c_{12} = 2 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$c_{22} = 2 \cdot 10^4 + 2 \cdot 0,5 \cdot 10^4 \cdot 0,2^2 = 2,04 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$a = 4,8 \cdot 1,8 = 8,64,$$

$$b = (4,8 \cdot 2,04 + 1,8 \cdot 2,25 \cdot 10^4)^4 = 13,84 \cdot 10^8,$$

$$c = 2,25 \cdot 2,04 \cdot 10^8 - 4 \cdot 10^8 = 59 \cdot 10^6$$

Вылічваем карані бікватратнага ўраўнення (1.7.19):

$$k_{1,2} = \sqrt[4]{\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{4a}} = \sqrt[4]{\frac{13,84 \cdot 10^8 \pm \sqrt{13,84^2 \cdot 10^8 - 4 \cdot 8,64 \cdot 59 \cdot 10^6}}{4 \cdot 8,64}};$$

$$2a \quad 2 \cdot 8 \cdot 64 k_1^2 = 438,23; \quad k_2^2 = 15582,63.$$

Знаходзім галоўныя частоты свабодных ваганняў (адмоўныя карані не маюць фізічнага сэнсу):  $k_1 = 20,93c^{-1}$ ,  $k_2 = 124,83c^{-1}$ . З ураўненняў (1.7.18) пры  $k = k_1$  і  $k = k_2$  вызначаем каэфіцыенты размеркавання, якія адпавядаюць частотам  $k_1, k_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \mu_{\Gamma}^{(1)} &= \frac{\psi^{(1)}}{A_1^{(1)}} = \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = \frac{ak_{11}^2 - c_{11}}{c_{12}} = \frac{-c_{12}}{c_{22} - ak_{21}^2} = \\ &= \frac{-210 \cdot 10^{-4}}{2,0410 \cdot 10^{-4} - 1,815582, 63} = -1,02; \\ \mu_{\Gamma}^{(2)} &= \frac{\psi^{(2)}}{A_1^{(2)}} = \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = \frac{ak_{12}^2 - c_{11}}{c_{12}} = \frac{-c_{12}}{c_{22} - ak_{22}^2} = \\ &= \frac{-210 \cdot 10^{-4}}{2,0410 \cdot 10^{-4} - 1,815582, 63} = 2,61. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \phi \\ (1.7.20) \end{array}$$

φ

У разглядаемай задачы каэфіцыенты  $\mu_1, \mu_2$  з'яўляюцца безразмернымі. Запішам ураўненні, якія вызначаюць першае і другое галоўныя ваганні:

$$\varphi^{(1)} = A_1^{(1)} \sin(20,93t + \beta_1), \quad \psi^{(1)} = -1,02A_1^{(1)} \sin(20,93t + \beta_1), \quad (1.7.21)$$

$$\varphi^{(2)} = A_1^{(2)} \sin(124,83t + \beta_2), \quad \psi^{(2)} = 2,61A_1^{(2)} \sin(124,83t + \beta_2). \quad (1.7.22)$$

Выразы (1.7.21) і (1.7.22) уяўляюць прыватныя рашэнні сістэмы ўраўненняў (1.7.14). Агульнае рашэнне, якое апісвае вагальныя рухі элементаў 1, 2, 3 механічнай сістэмы, знойдзем як суму прыватных:



## Прыклад 2

На нахіленай плоскасці (рыс. 1.7.6) устаноўлены цялежкі  $L$ , прымацаваныя да ўпору з дапамогай спружыны жорсткасці  $c_1$ . На цялежках пры дапамозе спружын замацавана цыліндрычнае цела  $2$ , якое можа каціцца па дне цялежак без слізгання. У стане спакою спружына жорсткасці  $c_1$  сціснута на велічыню  $f_{c1}$ , спружыны жорсткасці  $c_2$  дэфармаваны на велічыню  $f_{c2}$  (левая сціснутая, правая расцягнутая).

Масу спружын, каткоў і сілы трэння ў сістэме не ўлічваць.

Вызначыць частату свабодных ваганняў, калі  $r_2 = 0,3$  м,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $m_1 = 20$  кг,  $m_2 = 10$  кг,  $c_1 = 3 \cdot 10^4$  Н/м,  $c_2 = 2 \cdot 10^4$  Н/м.

### Рашэнне

Асаблівасцю дадзенай сістэмы з'яўляецца наяўнасць у ёй цела  $2$ , здзяйсняючага складаны рух. Апошні складаецца з пераноснага паступальнага руху разам з цялежкамі і адноснага плоскапаралельнага. Гэта ўлічваецца ў рашэнні задачы пры вызначэнні скорасці восі цыліндра.

Кансерватыўная сістэма мае дзве ступені свабоды. За абагульненыя каардынаты прымаем перамяшчэнне цялежак па нахільнай плоскасці  $q_1 = x$  і вугал павароту цыліндра  $q_2 = \varphi$ ; дадатныя напрамкі каардынат паказаны на рысунку 1.7.6 (гл. с. 60).

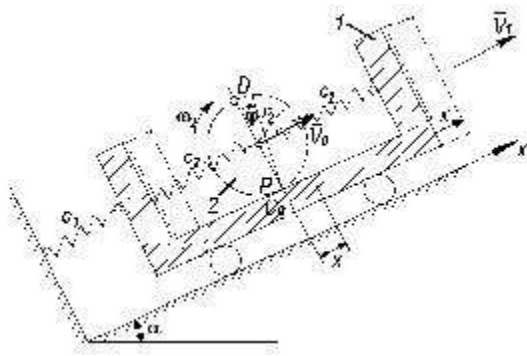


Рисунок 1.7.6

Кінетичная энергія сістэмы ўяўляе суму кінетичных энергій целаў 1 і 2:

$$T = T_1 + T_2, \quad (1.7.25)$$

$$\text{дзе } T_1 = \frac{1}{2} m v_{11}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2;$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_{20}^2 + \frac{1}{2} J_0 \omega_2^2;$$

$$\text{дзе } J_0 = \frac{1}{2} m r_2^2.$$

Абсолютная скорасць восі цялежак

$$v_0^2 = (v_e + v_r)^2 = (\dot{x} + r_2 \dot{\varphi})^2 = \dot{x}^2 + 2r_2 \dot{x} \dot{\varphi} + r_2^2 \dot{\varphi}^2.$$

Па формуле (1.7.25) атрымліваем

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + r_2 m_2 \dot{x} \dot{\varphi} + \frac{3}{4} m_2 r^2 \dot{\varphi}^2. \quad (1.7.26)$$

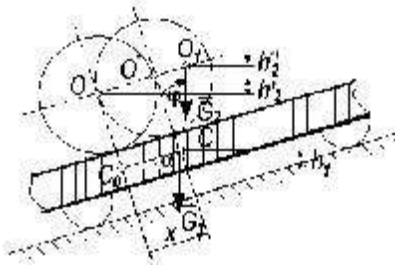
Патэнцыяльную энергію сістэмы прадстаўляем у выглядзе

$$\Pi = \Pi_I + \Pi_{II}, \quad (1.7.27)$$

дзе  $\Pi_I$  — патэнцыяльная энергія цел  
полі сіл цяжару;

$\Pi_{II}$  — патэнцыяльная энергія  
дэфармацыі спружын.

Для вылічэння велічыні  $\Pi_I$   
вызначым перамяшчэнне цэнтраў  
целяў. На рысунку 1.7.7



l і 2 y

цяжару

$$C_0 C = x, OO_1 = OO' + O'O_1,$$

Рысунк 1.7.7

дзе  $OO'$  — перамяшчэнне восі цыліндра ў пераносным руху,  $O'O_1$  —  
перамяшчэнне восі адносна цяляжак. Перамяшчэнні па вертыкалі

$$h_1 = x \sin \alpha, \quad h_2 = h_2' + h_2'' = (x + \varphi \cdot r_2) \sin \alpha.$$

Вызначаем патэнцыяльную энергію  $\Pi_I$  па формуле

$$\Pi_I = -G h_{11} - G h_{22} = -[(G_1 + G x_2) + G r_2 \varphi] \sin \alpha$$

Знаходзім дэфармацыі спружын у становішчы сістэмы, вызначаным  
дадатнымі абагульненымі каардынатамі:  $\lambda_1 = x - f_{cr1}$ ,  $\lambda_2' = r_2 \varphi - f_{cr2}$ ,  $\lambda_2'' =$   
 $f_{cr2} - \varphi r$ ,

дзе  $\lambda_2'$ ,  $\lambda_2''$  — дэфармацыі левай і правай спружын на цялежках.

Патэнцыяльная энергія пружкай дэфармацыі спружын, назапашваемая дзякуючы адхіленню сістэмы ад становішча статычнай раўнавагі, роўная рознасці дзвюх энергій: поўнай, якая адпавядае дэфармацыям  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2'$ ,  $\lambda_2''$ , і патэнцыяльнай энергіі ў становішчы спакою сістэмы, набытай у працэсе першапачатковай статычнай дэфармацыі спружын. Такім чынам,

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} c_1 \lambda_1^2 - \frac{1}{2} c_1 f_1 \sin \alpha x + \frac{1}{2} c_2 \lambda_2'^2 - \frac{1}{2} c_2 f_2 \sin \alpha r \varphi + \frac{1}{2} c_2 \lambda_2''^2 - \frac{1}{2} c_2 f_2 \sin \alpha r \varphi = \\ &= \frac{1}{2} c_1 x^2 - c_1 f_1 \sin \alpha x + \frac{1}{2} c_2 r^2 \sin^2 \alpha \varphi^2 - c_2 f_2 \sin \alpha r \varphi + \frac{1}{2} c_2 r^2 \sin^2 \alpha \varphi^2 - c_2 f_2 \sin \alpha r \varphi. \end{aligned}$$

Поўная патэнцыяльная энергія сістэмы паводле формулы (1.7.27)

$$\begin{aligned} \Pi &= -(G_1 + G_2 + c_1 f_1 \sin \alpha) x - (G_2 r_2 \sin \alpha + 2 c_2 f_2 \sin \alpha r_2) \varphi + \\ &+ \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 r_2^2 \varphi^2. \end{aligned} \quad (1.7.28)$$

У становішчы спакою дадзенай кансерватыўнай сістэмы выконваюцца ўмовы:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} \bigg|_{\substack{x=0 \\ \varphi=0}} = -(G_1 + G_2 + c_1 f_1 \sin \alpha) = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \bigg|_{\substack{x=0 \\ \varphi=0}} = (G_2 r_2 \sin \alpha + 2 c_2 f_2 \sin \alpha r_2) = 0.$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \bigg|_{\substack{x=0 \\ \varphi=0}} = -$$

Атрыманыя роўнасці дазваляюць спрасціць выраз (1.7.28):

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 x^2 + \frac{1}{2} c_2 r_2^2 \varphi^2. \quad (1.7.29)$$

Параўнаем формулы (1.7.26) і (1.7.29) з агульнымі выразамі:

$$\left. \begin{aligned} T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{x}^2 + a_{12} \dot{x} \dot{\varphi} + \frac{1}{2} a_{22} \dot{\varphi}^2, \\ \Pi = \frac{1}{2} c_{11} x^2 + c_{12} x \varphi + \frac{1}{2} a_{22} \varphi^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.7.30)$$

Знаходзім:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} = m_1 + m_2, \quad a_{12} = r_2 m_2, \quad a_{22} = \frac{3}{2} \\ c_{11} = c_1, \quad c_{12} = 0, \quad c_{22} = \end{aligned} \right\} \begin{aligned} m_2 r_2^2, \\ 2c_2 r_2^2. \end{aligned} \quad (1.7.31)$$

Запішам ураўненні Лагранжа другога роду (1.7.1):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad x \text{ і } \varphi \quad (1.7.32)$$

Знаходзім вытворныя выказаў (1.7.30) пры  $c_{12} = 0$ :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}'} = a_{11}\dot{x}' + a_{12}\dot{\varphi}', \quad \frac{\partial T}{\partial x} = c_{11}x, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}'} = a_{12}\dot{x}' + a_{22}\dot{\varphi}', \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = a_{12}\dot{x}' + a_{22}\dot{\varphi}'$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}'} = a_{12}\dot{x}' + a_{22}\dot{\varphi}', \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = a_{12}\dot{x}' + a_{22}\dot{\varphi}', \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = c_{22}\varphi.$$

□

Падстаўляем іх ва ўраўненні (1.7.32):

$$a_{11}\dot{x}' + a_{12}\dot{\varphi}'' = -c_{11}x, \quad a_{12}\dot{x}' + a_{22}\dot{\varphi}'' = -c_{22}\varphi.$$

У выніку прыходзім да дыферэнцыяльных ураўненняў свабодных ваганняў сістэмы

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\dot{x}' + a_{12}\dot{\varphi}'' + c_{11}x &= 0, \\ a_{12}\dot{x}' + a_{22}\dot{\varphi}'' + c_{22}\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} (1.7.33)$$

Прыватнае рашэнне гэтых ураўненняў шукаем у выглядзе:

$$\left. \begin{aligned} x &= A_1 \sin(kt + \beta), \\ \varphi &= A_2 \sin(kt + \beta). \end{aligned} \right\} (1.7.34)$$

Увядзем сюды каэфіцыент формы ваганняў  $\mu = \frac{\varphi}{x} = \frac{A_2}{A_1}$ :

$$\left. \begin{array}{l} x = A_1 \sin(kt + \beta), \\ \text{Знаходзім:} \end{array} \right\} \varphi = \mu x = \mu A_1 \sin(kt + \beta). \quad (1.7.35)$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = -k^2 A_1 \sin(kt \\ + \beta), \\ + \beta). \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1.7.36) \varphi'' = -\mu k^2 A_1 \sin(kt \\ + \beta). \end{array} \quad (1.7.36)$$

Падстаўляем (1.7.35) і (1.7.36) у сістэму ўраўненняў (1.7.33):

$$\begin{aligned} (-a_{11}k^2 - a_{12}\mu k^2 + c_{11})A_1 \sin(kt + \beta) &= 0, \\ (-a_{12}k^2 - a_{22}\mu k^2 + c_{22}\mu)A_1 \sin(kt + \beta) &= 0. \end{aligned}$$

Паколькі пры ўсякім  $t$  тут  $\sin(kt + \beta) \neq 0$ , то

$$\left. \begin{array}{l} -a_{11}k^2 - a_{12}\mu k^2 + c_{11} = 0, \\ -a_{12}k^2 - a_{22}\mu k^2 + c_{22}\mu = 0. \end{array} \right\} \quad (1.7.37)$$

Для выключэння каэфіцыента  $\mu$  знаходзім яго з другога ўраўнення (1.7.37) і падстаўляем у першае. Атрымліваем ураўненне частот

$$(c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - a_{12}^2 k^4 = 0,$$

або

$$ak^4 - bk^2 + c = 0, \quad (1.7.38)$$

$$\begin{aligned} \text{дзе } a &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2, & b &= \\ a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11}, & c &= c_{11}c_{22}. \end{aligned}$$

Для визначення частот  $k_1, k_2$  знайдемо лікавія значенні каэфіцыентаў па формулах (1.7.31) і велічыні  $a, b, c$ :

$$a_{11} = 20 + 10 = 30 \text{ кг}, \quad a_{12} = 0,3 \cdot 10^4$$

$$= 3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad a$$

$$c_{22} = \frac{3}{2} \cdot 10^4 \cdot 0,3^2 = 1,35 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$c_{11} = 3 \cdot 10^4 \text{ Н/м}, \quad c_{22} = 2 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 0,3^2 = 0,36 \cdot 10^4$$

$$\text{Н} \cdot \text{м}, \quad a = 30 \cdot 1,35 - 3^2 = 31,5, \quad b = 30 \cdot 0,36 \cdot 10^4$$

$$+ 1,35 \cdot 3 \cdot 10^4 = 14,85 \cdot 10^4, \quad c = 3 \cdot 10^4 \cdot 0,36 \cdot 10^4$$

$$= 1,08 \cdot 10^8$$

Знаходзім карані ўраўнення (1.7.38):

$$k_{1,2} = \sqrt{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} = 14,85 \cdot 10^4 \pm \sqrt{14,85^2 \cdot 10^8 - 4 \cdot 31,5 \cdot 1,08 \cdot 10^8} =$$

$$= \frac{(14,85 \mp 9,19) \cdot 10^4}{63},$$

$$k_1^2 = 8,98 \cdot 10^2,$$

$$k_2^2 = 38,16 \cdot 10^2.$$

Адсюль

$$k_1 = 29,97 \text{ с}^{-1}, \quad k_2 = 61,77 \text{ с}^{-1}.$$

Коефіцієнти размеркування  $\mu_1, \mu_2$ , які адпавядаюць частотам  $k_1, k_2$ , вызначаюцца з ураўненняў (1.7.37) пры  $k = k_1$  і  $k = k_2$ :

$$\mu = \frac{c_{11} - a_{11}k_{12}}{a_{12}k_{12}} = \frac{3,898 \cdot 10^4 - 1,35 \cdot 8,98 \cdot 10^4}{1,13 \cdot 0,36 \cdot 10^4} = 1,13 \text{ рад/м},$$

$$\mu = \frac{c_{11} - a_{11}k_{22}}{a_{12}k_{22}} = \frac{3,898 \cdot 10^4 - 1,35 \cdot 38,16 \cdot 10^4}{0,36 \cdot 10^4} = -7,38 \text{ рад/м}.$$

Ураўненні, якія вызначаюць першае і другое галоўныя ваганні, у адпаведнасці з формулай (1.7.35), маюць выгляд:

$$\left. \begin{aligned} x^{(1)} &= A_1^{(1)} \sin(29,97t + \beta_1), \\ \varphi^{(1)} &= 1,13A_1^{(1)} \sin(29,97t + \beta_1). \end{aligned} \right\} \quad (1.7.39)$$

$$\left. \begin{aligned} x^{(2)} &= A_1^{(2)} \sin(61,77t + \beta_2), \\ \varphi^{(2)} &= -7,38A_1^{(2)} \sin(61,77t + \beta_2). \end{aligned} \right\} \quad (1.7.40)$$

Ураўненні вагальных рухаў элементаў 1, 2 сістэмы знойдем як агульнае рашэнне ўраўненняў (1.7.33) у выглядзе сумы прыватных рашэнняў:

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} = A_1^{(1)} \sin(29,97t + \beta_1) + A_1^{(2)} \sin(61,77t + \beta_2),$$

$$\varphi = \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} = 1,13A_1^{(1)} \sin(29,97t + \beta_1) - 7,38A_1^{(2)} \sin(61,77t + \beta_2).$$

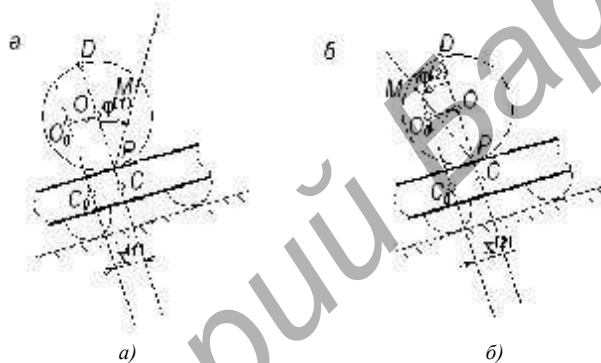
Амплітуды  $A_1^{(1)}$ ,  $A_1^{(2)}$  і пачатковыя фазы  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  галоўных ваганняў вызначаюцца з пачатковых умоў задачы.

Разгледзім рух целаў 1, 2 у працэсе здзяйснення імі галоўных ваганняў (1.7.39) і (1.7.40).

Для гэтага выкарыстаем каэфіцыенты формаў ваганняў:

$$\mu_1 = \Phi x^{(11)}, \quad \mu_2 = \Phi x^{(22)}.$$

У разглядаемым прыкладзе  $\mu_1$  — дадатна,  $\mu_2$  — адмоўна. Значыць, у першым галоўным ваганні абагульненыя каардынаты целаў 1, 2 у кожны момант часу маюць аднолькавыя знакі (зрушаныя ў адзін бок ад становішча раўнавагі), у другім — розныя (рыс. 1.7.8). У адрозненне ад папярэдняй задачы тут абагульненыя каардынаты не супадаюць па размернасці.



Рысуна 1.7.8

Для параўнання рухаў разгледзім на дыяметры  $PD$  цыліндра некаторую кропку  $M$ . Яе лінейнае адхіленне ад становішча раўнавагі ў першым галоўным ваганні (гл. рыс. 1.7.8, *а*) роўна  $\varphi^{(1)} \cdot PM = \mu_1 x^{(1)} PM$ , у другім (гл. рыс. 1.7.8, *б*) —  $\varphi^{(2)} \cdot PM = \mu_2 x^{(2)} PM$ . Няхай  $x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}$  і  $PM$  роўныя адзінцы даўжыні; тады перамяшчэнне пункта  $M$  у першым галоўным ваганні будзе роўнае  $\mu_1$ , у другім —  $\mu_2$  такіх жа адзінак. Выкананыя тут разлікі паказваюць, што перамяшчэнне

кропкі  $M$  ад становішча раўнавагі ў першым галоўным ваганні ў 1,13, а ў другім — у 7,38 разоў большае за перамяшчэнне платформы.

### Прыклад 3

Механічная сістэма складаецца з цела  $B$  масы  $m_1$ , аднароднага стрыжня  $ED$  масы  $m_2$  і трох спружын, жорсткасці якіх роўны  $c_1, c_2, c_3$  (рыс. 1.7.9, зл. с. 68).

Вызначыць частоты свабодных ваганняў і знайсці формы галоўных ваганняў сістэмы, калі  $l_1 = 0,2$  м;  $l_2 = 0,6$  м;  $l_3 = 0,3$  м;  $m_1 = 0,5$  кг;  $m_2 = 3$  кг;  $c_1 = 60$  Н / см;  $c_2 = 40$  Н / см;  $c_3 = 40$  Н / см.

#### Раішэнне

У нерухомым стане стрыжань  $ED$  займае гарызантальнае палажэнне. Спружыны з каэфіцыентамі жорсткасці  $c_1$  і  $c_2$  дэфармаваны адпаведна на велічыні  $f_{ст1}, f_{ст2}$ . Спружына з каэфіцыентам жорсткасці  $c_3$  расцягнута на велічыню  $f_{ст3}$ . За абагульненыя каардынаты прымем  $z$  — вертыкальнае перамяшчэнне цела  $B$  ад палажэння спакою;  $\varphi$  — вугал павароту стрыжня  $ED$  ад палажэння раўнавагі. На рысунку 1.7.10 паказана палажэнне сістэмы пры дадатных абагульненых каардынатах.

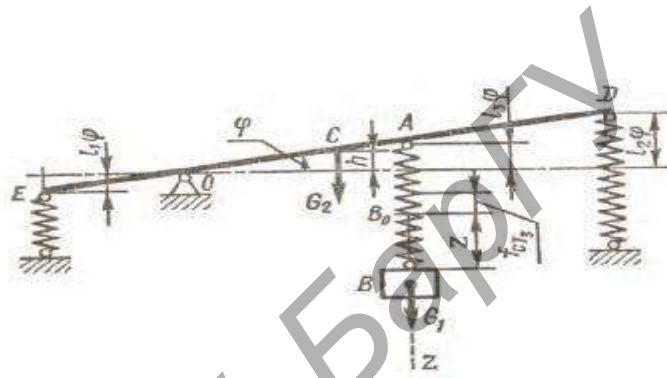
Знойдем кінетычную і патэнцыяльную энергію сістэмы. Першая складаецца з кінетычнай энергіі цела  $B$  і кінетычнай энергіі стрыжня:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\varphi}^2, \quad (1.7.41),$$

дзе  $\dot{z}, \dot{\varphi}$  — абагульненыя скорасці;



Рысунак 1.7.9



Рысунак 1.7.10

$J_0$  — момант інерцыі стрыжня  $ED$  адносна восі вярчэння  $Ox$ , перпендыкулярнай да плоскасці рысунка. Па тэарэме Гюйгенса знаходзім

$$J_0 = J_C + m_2 d^2$$

дзе

$l$  — даўжыня стрыжня;

$d = OC$  — адлегласць ад цэнтру цяжару  $C$  стрыжня да восі вярчэння  $Ox$ :  $d = (l_1 + l_2) / 2 - l_1 = (l_2 - l_1) / 2$ . Падставіўшы лікавыя значэнні, атрымаем  $J_{Ox} = 0,28 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

Патэнцыяльная энергія сістэмы роўна рабоце сіл пры перамяшчэнні сістэмы з адхіленага палажэння ў гарызантальнае (нулявое). Вылічым яе як суму:

$$\Pi = \Pi_I + \Pi_{II}, \quad (1.7.42)$$

дзе  $\Pi_I$  — патэнцыяльная энергія цела  $B$  і стрыжня  $ED$  у полі сіл цяжару;

$\Pi_{II}$  — патэнцыяльная энергія дэфармаваных спружын. Знойдзем спачатку перамяшчэнне цэнтра цяжару  $C$  стрыжня:

$$h = \frac{(l_1^2 + l_2^2 - l_1) \varphi}{2} = \frac{1}{2} (l_2 - l_1) \varphi.$$

Тады

$$\Pi_I = -G_1 z + G_2 h = -G_1 z + \frac{1}{2} G_2 (l_2 - l_1) \varphi. \quad (1.7.43)$$

Каб знайсці патэнцыяльную энергію спружын, будзем разглядаць спачатку перамяшчэнне сістэмы з адхіленага палажэння ў палажэнне, якое адпавядае недэфармаваным спружынам (адпаведныя дэфармацыі спружын абазначым  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ), а затым з гэтага палажэння ў палажэнне спакою (дэфармацыі спружын пры гэтым роўны  $f_{cr1}, f_{cr2}, f_{cr3}$ ). Карыстаючыся рысункам 1.7.10, знаходзім:  $\lambda_1 = l_1 \varphi \pm f_{cr1}$ ,  $\lambda_2 = l_2 \varphi \pm f_{cr2}$ ,  $\lambda_3 = f_{cr3} + l_3 \varphi + z$ .

Адпаведная дэфармацыям патэнцыяльная энергія роўна:

$$\begin{aligned} \Pi_{II} = & \frac{1}{2} 12 c_1 (l_1 \varphi \pm f_{cr1})^2 - \frac{1}{2} 12 c_1 f_{cr1}^2 + \frac{1}{2} 12 c_2 (l_2 \varphi \pm f_{cr2})^2 - \\ & - \frac{1}{2} 12 c_2 f_{cr2}^2 + \frac{1}{2} c_3 (f_{cr3} + l_3 \varphi + \frac{1}{2} z)^2 - c f_{cr3}^2. \end{aligned}$$

Пасля пераўтварэння маем

$$\Pi_{II} = -\frac{1}{2} c_1 l_1^2 \varphi^2 + -\frac{1}{2} c_2 l_2^2 \varphi^2 + -\frac{1}{2} c_3 (l_3 \varphi + z)^2 \pm \\ \pm c_1 l_1 f_{cr1} \varphi \pm c_2 l_2 f_{cr2} \varphi + c_3 f_{cr3} (l_3 \varphi + z).$$

Па формуле (1.7.42) знаходзім патэнцыяльную энергію ўсёй сістэмы:

$$\Pi = -G_1 z + [G_2 (l_2 - l_1) / 2] \varphi + -\frac{1}{2} c_1 l_1^2 \varphi^2 + -\frac{1}{2} c_2 l_2^2 \varphi^2 + \\ + \frac{1}{2} c_3 l_3^2 \varphi^2 + c_3 l_3 \varphi z + -\frac{1}{2} c_3 z^2 \pm c_1 l_1 f_{cr1} \varphi \pm \\ \pm c_2 l_2 f_{cr2} \varphi + c_3 f_{cr3} l_3 \varphi + c_3 f_{cr3} z. \quad (1.7.44)$$

Выкарыстоўваючы ўласцівасці кансерватыўнай сістэмы знаходзім:

$$\left( \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right)_{\varphi=0} = -G_1 + c_3 f_{cr3} = 0; \quad (1.7.45)$$

$$\left( \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right)_{z=0} = G_2 \frac{l_2 - l_1}{2} \pm c_1 l_1 f_{cr1} \pm \\ \pm c_2 l_2 f_{cr2} + c_3 l_3 f_{cr3} = 0 \quad (1.7.46)$$

З улікам роўнасцей (1.7.45) і (1.7.46) формула (1.7.44) спрашчаецца:

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 l_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} c_2 l_2^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} c_3 l_3^2 \dot{\varphi}^2 + c_3 l_3 z \dot{\varphi} + \frac{1}{2} c_3 z^2. \quad (1.7.47)$$

Таким чином,

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J_{0x} \dot{\varphi}^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_3 z^2 + c_3 l_3 z \dot{\varphi} + \frac{1}{2} (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2) \dot{\varphi}^2$$

або ў новых абазначэннях:

$$T = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{z}^2 + 2a_{12} \dot{z} \dot{\varphi} + a_{22} \dot{\varphi}^2), \quad (1.7.48)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11} z^2 + 2c_{12} z \dot{\varphi} + c_{22} \dot{\varphi}^2).$$

дзе  $a_{11} = m_1$ ,  $a_{12} = 0$ ,  $a_{22} = J_{0x}$  — каэфіцыенты інерцыі;  $c_{11} = c_3$ ,  $c_{12} = c_3 l_3$ ,  $c_{22} = c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2$  — каэфіцыенты жорсткасці.

Запішам ураўненні Лагранжа для кансерватыўнай сістэмы:

$$d \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} = - \frac{\partial \Pi}{\partial z}, \quad (1.7.49)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{\partial \Pi}{\partial z} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}$$

Вилічуємо витворнія:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = a_{11} \dot{z}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} = a_{11} \ddot{z}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z} = c_{11} z + c_{12} \varphi, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{z}} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = a_{22} \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = a_{22} \ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = c_{12} z + c_{22} \varphi$$

Падстаўляем іх ва ўраўненні (1.7.49):

$$a_{11} \ddot{z} = -c_{11} z - c_{12} \varphi; \quad a_{22} \ddot{\varphi} = -c_{12} z - c_{22} \varphi$$

або

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \ddot{z} + c_{11} z + c_{12} \varphi &= 0, \\ a_{22} \ddot{\varphi} + c_{12} z + c_{22} \varphi &= 0. \end{aligned} \right\} (1.7.50)$$

Прыватнае рашэнне дыферэнцыяльных ураўненняў свабодных ваганняў (1.7.50) запісваецца ў выглядзе:

$$z = A_z \sin(kt + \beta); \quad \varphi = A_\varphi \sin(kt + \beta),$$

дзе  $A_z$  і  $A_\phi$  — амплітуды галоўных ваганняў;  $k$  — частоты свабодных ваганняў;  $\beta$  — пачатковая фаза ваганняў.

Выконваючы дзеянні, апісаныя ў папярэдніх прыкладах, атрымаем ураўненне частот

$$(c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - c_{12}^2 = 0. \quad (1.7.51)$$

Корань бікватратнага ўраўнення (1.7.51) знойдзем па формуле

$$k_{1,2} = \sqrt{\frac{a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} \pm \sqrt{(a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11})^2 - 4a_{11}a_{22}(c_{12}^2 - c_{11}c_{22})}}{2a_{11}a_{22}}}. \quad (1.7.52)$$

Выканаем папярэднія разлікі:  $a_{11} = 0,5$  кг;  $c_{11} = c_3 = 4\,000$  Н/м;  $c_{12} = c_{21} = 1\,200$  Н;  $a_{22} = J_0 = 0,28$  кг · м<sup>2</sup>;  $c_{22} = 2\,040$  Н · м. Па формуле (1.7.52) знаходзім частоты свабодных ваганняў:  $k_1 = 66,4$  с<sup>-1</sup>;  $k_2 = 104$  с<sup>-1</sup>.

Кэфіцыенты размеркавання, якія адпавядаюць частотам  $k_1$ ,  $k_2$ , у агульным выпадку маюць выгляд:

$$\mu = \frac{A_{\phi 1}}{z_1} = \frac{c_{11} - a_{11}k_{1,2}^2}{c_{12} - a_{12}k_{1,2}} = \frac{c_{11} - a_{11}k_{1,2}^2}{c_{12} - a_{12}k_{1,2}}, \quad (1.7.53)$$

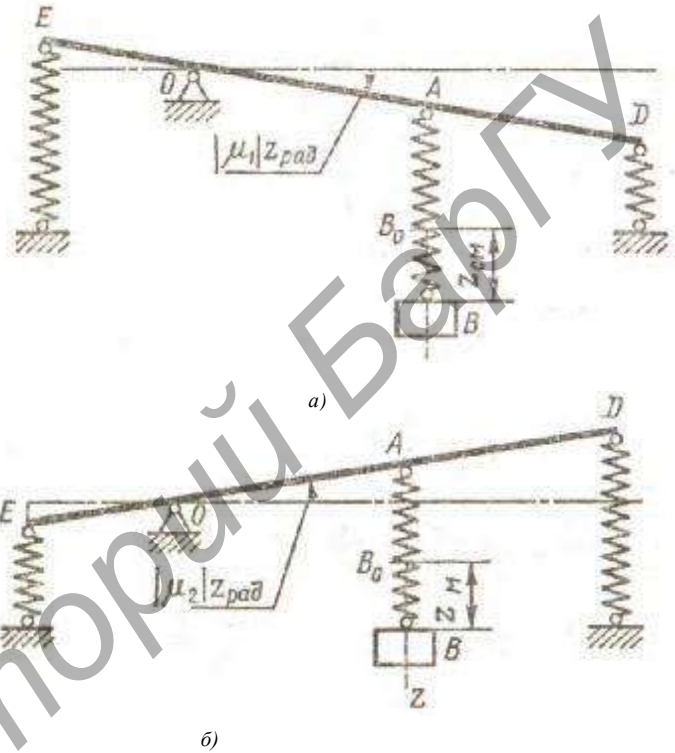
$$\mu = \frac{A_{\phi 2}}{z_2} = \frac{c_{22} - a_{22}k_{1,2}^2}{c_{12} - a_{22}k_{1,2}}.$$

Вилічені дають:  $\mu_1 = -1,49$  рад / м;  $\mu_2 = 1,2$  рад / м.

Цяпер запишем ураўненні, якія вызначаюць першае  $z_1$ ,  $\varphi_1$  пры  $k_1 = 66,4 \text{ с}^{-1}$ ;  $\mu = -1,49$  рад / м (рыс. 1.7.11, а) і другое  $z_2$ ,  $\varphi_2$  пры  $k_2 = 104 \text{ с}^{-1}$ ;  $\mu = 1,2$  рад / м (рыс. 1.7.11, б) галоўныя ваганні сістэмы:

$$z_1 = A_{z_1} \sin(66,4t + \beta_1), \quad \varphi_1 = -1,49 A_{z_1} \sin(66,4t + \beta_1), \quad (1.7.54)$$

$$z_2 = A_{z_2} \sin(104t + \beta_2), \quad \varphi_2 = 1,2 A_{z_2} \sin(104t + \beta_2). \quad (1.7.55)$$



Рысунак 1.7.11

Агульнае рашэнне дыферэнцыяльных ураўненняў (1.7.50) уяўляе сабой суму прыватных рашэнняў:

$$z = z_1 + z_2 = A_{z_1} \sin(66,4t + \beta_1) + A_{z_2} \sin(104t + \beta_2), \quad (1.7.56)$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = -0,0149 A_{z_1} \sin(66,4t + \beta_1) + 0,012 A_{z_2} \sin(104t + \beta_2). \quad (1.7.57)$$

Значэнні  $A_{z_i}$ ,  $\beta_i$  ( $i = 1, 2$ ) знаходзяцца па пачатковых умовах задачы.

## 1.8 Даследаванне свабодных ваганняў з адной і дзвюма ступенямі свабоды

### Заданне 1 (Д.23)

Вызначыць частату і перыяд малых свабодных ваганняў механічнай сістэмы з адной ступенню свабоды. Сілы супраціўлення і масы ніцей не ўлічваць. Знайсці таксама ўраўненне руху цела  $I$  і яго амплітуду. За пачатак адліку прыняць палажэнне спакою цела  $I$  (пры статычнай дэфармацыі спружын).

Схемы сістэм паказаны на рысунках 1.8.1—1.8.3 (гл. с. 75—77), а неабходныя дадзеныя прыведзены ў табліцы 1.8.1. (гл. с. 78).

У заданні прыняты наступныя абазначэнні:

1 — груз масы  $m_1$ ;

2 — блок масы  $m_2$  і радыуса  $r_2$  (суцэльны аднародны дыск);

3 — блок масы  $m_3$  і радыуса інерцыі  $i_x$ ;

4 — суцэльны аднародны дыск масы  $m_4$  і радыуса  $r_4$ ;

5 — дыск масы  $m_5$  і радыуса інерцыі  $i'_x$ ;

6 — тонкі аднародны стрыжань масы  $m_6$  і даўжыні  $l$ ; 7 — стрыжань, маса якога не ўлічваецца;  $c$  — каэфіцыент жорсткасці спружыны;

$y_0$  — пачатковае адхіленне цела  $I$  па вертыкалі ад палажэння спакою, якое адпавядае статычнай дэфармацыі спружыны;

$y'_0$  — праекцыя пачатковай скорасці груза  $I$  на вертыкальную вось.

На рысунках 1.8.1—1.8.3 сістэмы цел  $I$ —7 паказаны ў палажэнні спакою (пры статычнай дэфармацыі спружын).

У варыянтах 5, 6, 14 і 23 стрыжань  $b$  жорстка злучаны з дыскам 4.  
Кароткія тэарэтычныя звесткі, метадыка выканання задання і прыклады змешчаны ў раздзеле 1.5.

### **Заданне 2 (Д.24)**

Вызначыць частоты малых свабодных ваганняў і формы галоўных ваганняў сістэмы з дзвюма ступенямі свабоды. Сілы супраціўлення, масы спружын і моманты інерцыі валаў не ўлічваюць.

Схемы механічных сістэм у палажэнні спакою паказаны на рысунках 1.8.4—1.8.6 (гл. с. 79—81), а неабходныя для рашэння дадзеныя прыведзены ў табліцы 1.8.2 (гл. с. 82—83).

*Заўвага.* Ва ўсіх варыянтах колы лічыць суцэльнымі аднароднымі дыскамі, стрыжні — тонкімі аднароднымі. Ва ўсіх выпадках качэнне колаў адбываецца без слізгання.

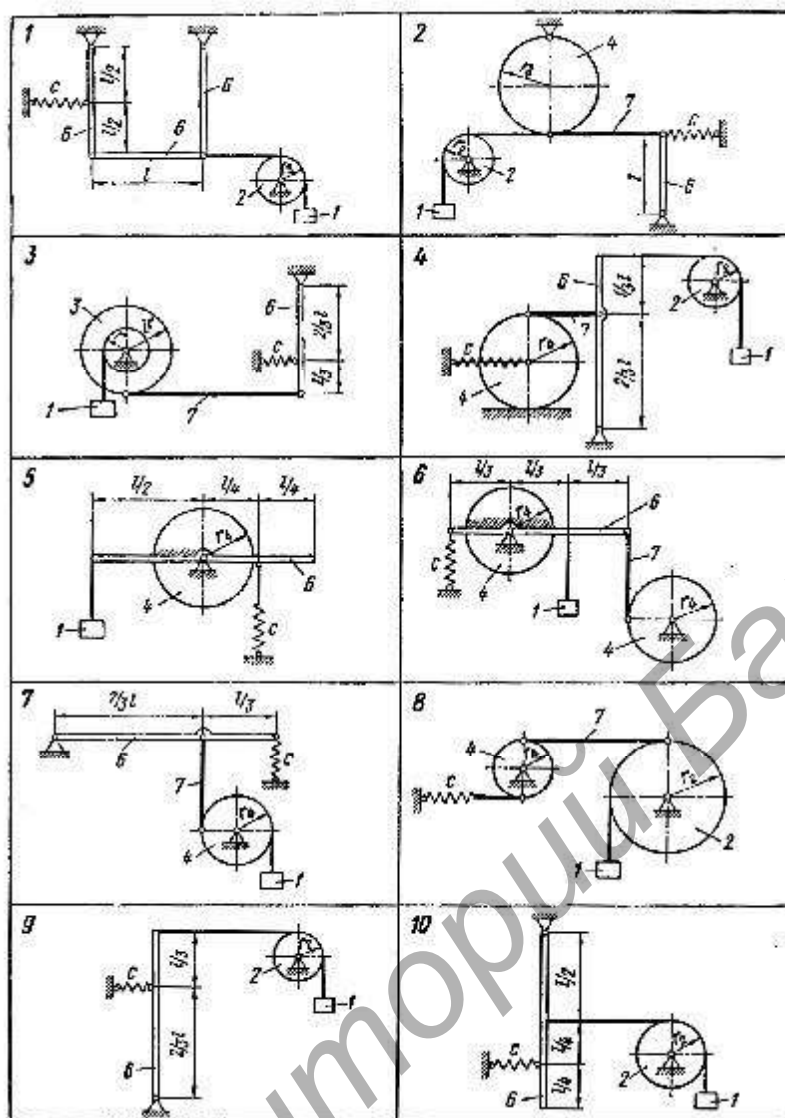


Рисунок 1.8.1

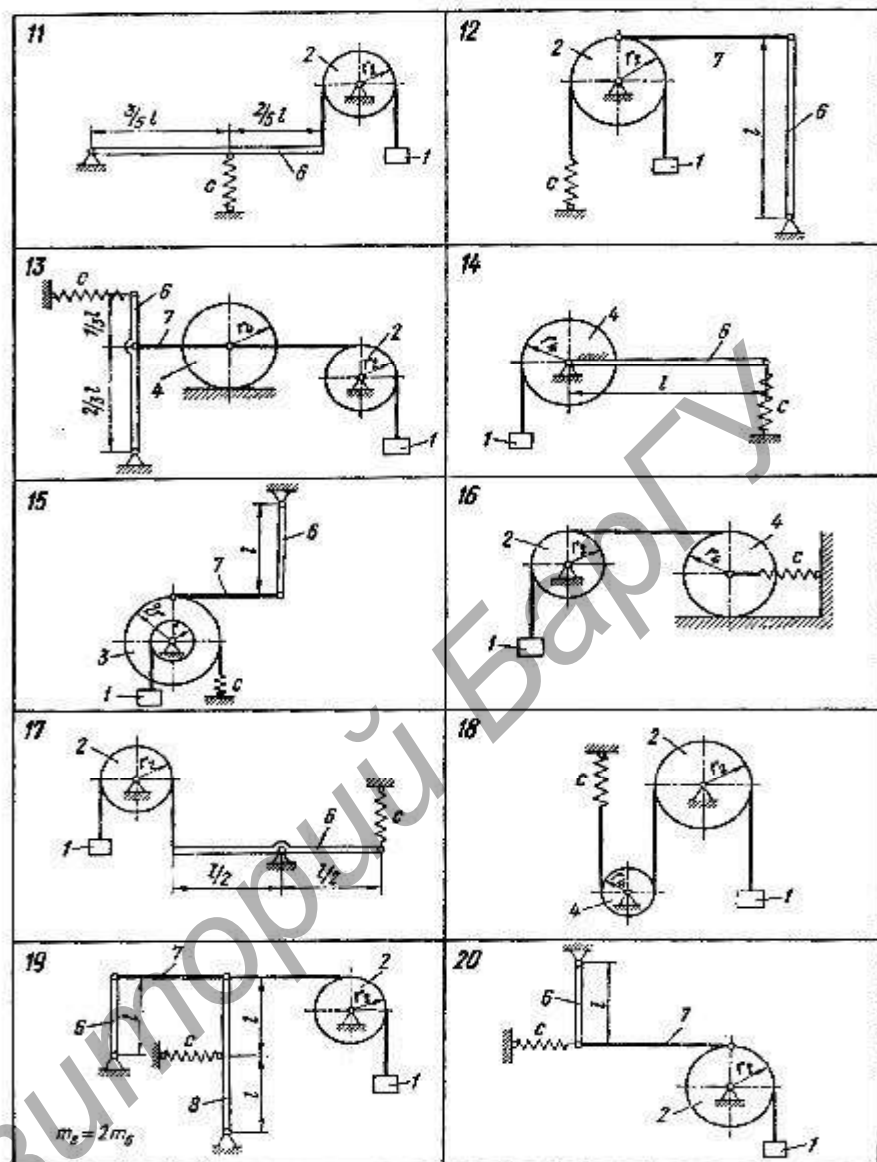


Рисунок 1.8.2

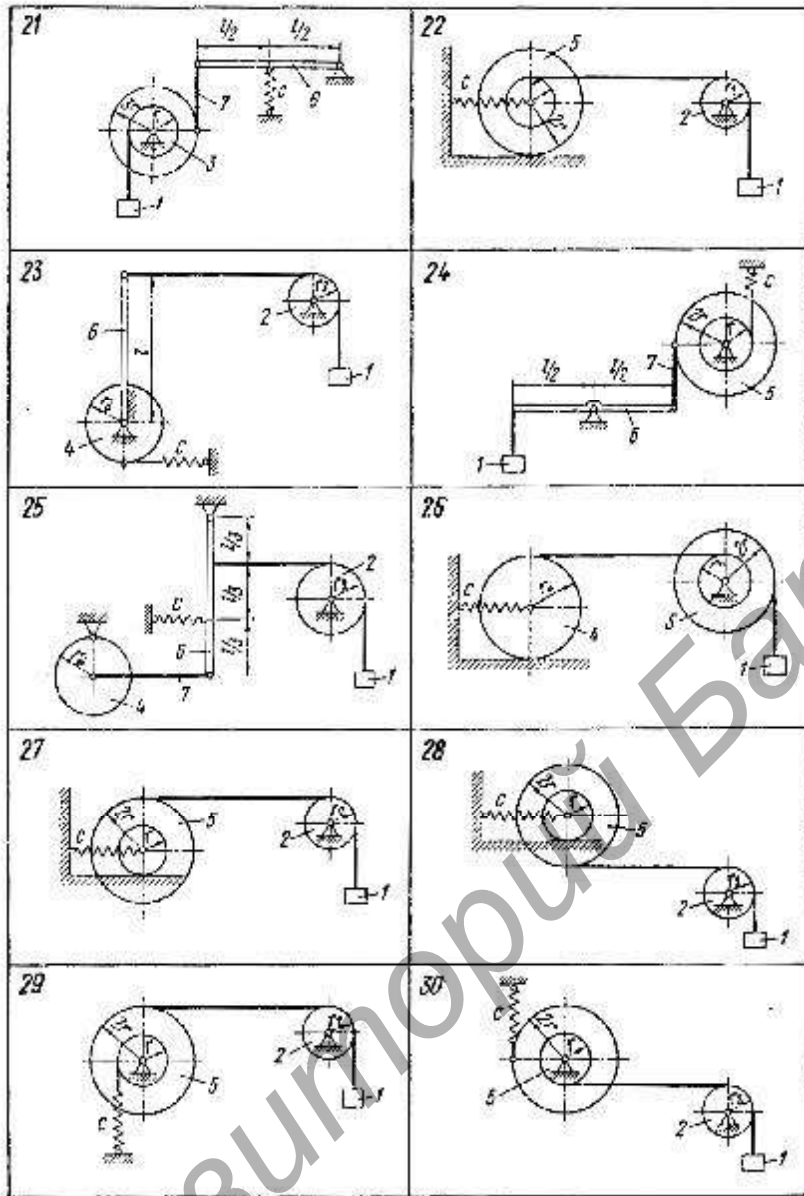


Рисунок 1.8.3

Таблиця — 1.8.1

| Нумар<br>варьянта | $i$ | $i_k$       | $i'_x$      | $r_a$ | $m$ | $m_2$ | $m_3$<br>$m_4$<br>$m_5$ | $m_6$ | $c$  | Печатковыя<br>умовы ( $t=0$ ) |                 |
|-------------------|-----|-------------|-------------|-------|-----|-------|-------------------------|-------|------|-------------------------------|-----------------|
|                   | м   |             |             |       | кг  |       |                         |       | Н/см | $y_0$ ,<br>см                 | $y'_0$ ,<br>м/с |
| 1                 | 0,5 | —           | —           | —     | 1   | 2     | —                       | 3     | 40   | 0,1                           | 5,0             |
| 2                 | 0,5 | —           | —           | 0,2   | 1   | 2     | 2                       | 3     | 40   | 0                             | 6,0             |
| 3                 | 0,5 | $3r/2$      | —           | —     | 1   | —     | 4                       | 3     | 20   | 0,2                           | 7,0             |
| 4                 | 0,6 | —           | —           | —     | 1   | 2     | 3                       | 2     | 36   | 0,2                           | 0               |
| 5                 | 0,6 | —           | —           | 0,15  | 1   | —     | 3                       | 3     | 16   | 0                             | 8,0             |
| 6                 | 0,6 | —           | —           | 0,15  | 1   | —     | 1                       | 1     | 40   | 0,3                           | 0,7             |
| 7                 | —   | —           | —           | —     | 1   | —     | 2                       | 2     | 40   | 0,4                           | 0               |
| 8                 | —   | —           | —           | —     | 1   | 3     | 2                       | —     | 40   | 0                             | 6,0             |
| 9                 | 0,6 | —           | —           | —     | 1   | 2     | —                       | 3     | 38   | 0,5                           | 5,0             |
| 10                | 0,6 | —           | —           | —     | 1   | 2     | —                       | 3     | 32   | 0                             | 6,0             |
| 11                | —   | —           | —           | —     | 1   | 2     | —                       | 3     | 30   | 0,4                           | 7,0             |
| 12                | 0,5 | —           | —           | —     | 1   | 2     | —                       | 3     | 20   | 0,2                           | 0               |
| 13                | 0,3 | —           | —           | —     | 1   | 1     | 1                       | 2     | 32   | 0                             | 8,0             |
| 14                | 0,4 | —           | —           | 0,1   | 1   | —     | 2                       | 3     | 20   | 0                             | 7,0             |
| 15                | 0,4 | $r\sqrt{3}$ | —           | —     | 1   | —     | 2                       | 2     | 20   | 0,1                           | 0               |
| 16                | —   | —           | —           | —     | 1   | 2     | 3                       | —     | 32   | 0,3                           | 6,0             |
| 17                | —   | —           | —           | —     | 1   | 2     | —                       | 2     | 20   | 0                             | 5,0             |
| 18                | —   | —           | —           | —     | 1   | 2     | 1                       | —     | 40   | 0                             | 6,0             |
| 19                | 0,2 | —           | —           | —     | 1   | 1     | —                       | 1     | 32   | 0,1                           | 0               |
| 20                | 0,5 | —           | —           | —     | 1   | 2     | —                       | 3     | 20   | 0,4                           | 7,0             |
| 21                | —   | $2r$        | —           | —     | 1   | —     | 2                       | 3     | 32   | 0                             | 8,0             |
| 22                | —   | —           | $r\sqrt{2}$ | —     | 1   | 2     | 4                       | —     | 40   | 0,1                           | 7,0             |
| 23                | 0,4 | —           | —           | 0,2   | 1   | 2     | 2                       | 3     | 40   | 0,3                           | 0               |
| 24                | —   | —           | $r\sqrt{3}$ | —     | 1   | —     | 3                       | 2     | 40   | 0                             | 6,0             |
| 25                | 0,3 | —           | —           | 0,1   | 1   | 2     | 2                       | 1     | 40   | 0,2                           | 5,0             |
| 26                | —   | $r\sqrt{3}$ | —           | —     | 1   | —     | 2                       | —     | 40   | 0,3                           | 0               |
| 27                | —   | —           | $3r/2$      | —     | 1   | 2     | 3                       | —     | 40   | 0                             | 6,0             |
| 28                | —   | —           | $r\sqrt{3}$ | —     | 1   | 2     | 3                       | —     | 40   | 0,2                           | 0               |
| 29                | —   | —           | $4r/3$      | —     | 1   | 2     | 3                       | —     | 40   | 0                             | 7,0             |
| 30                | —   | —           | $r\sqrt{2}$ | —     | 1   | 2     | 3                       | —     | 40   | 0,3                           | 7,0             |

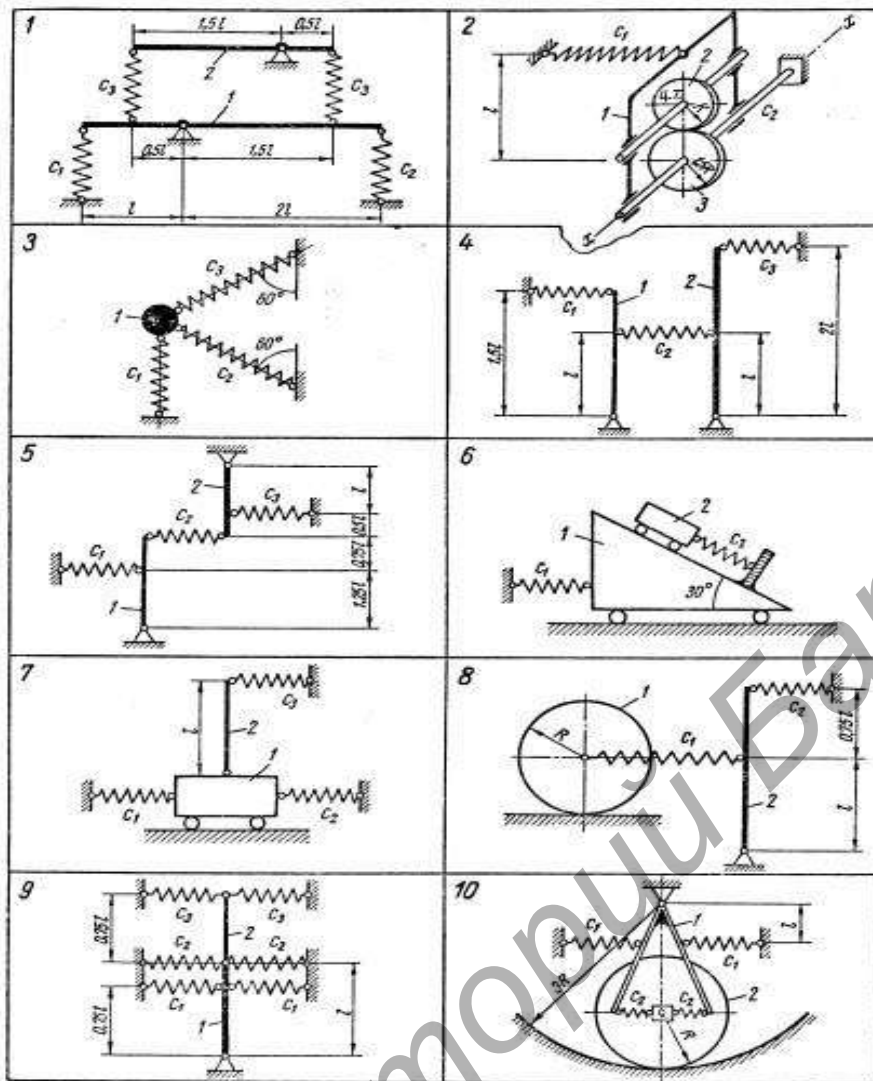


Рисунок 1.8.4

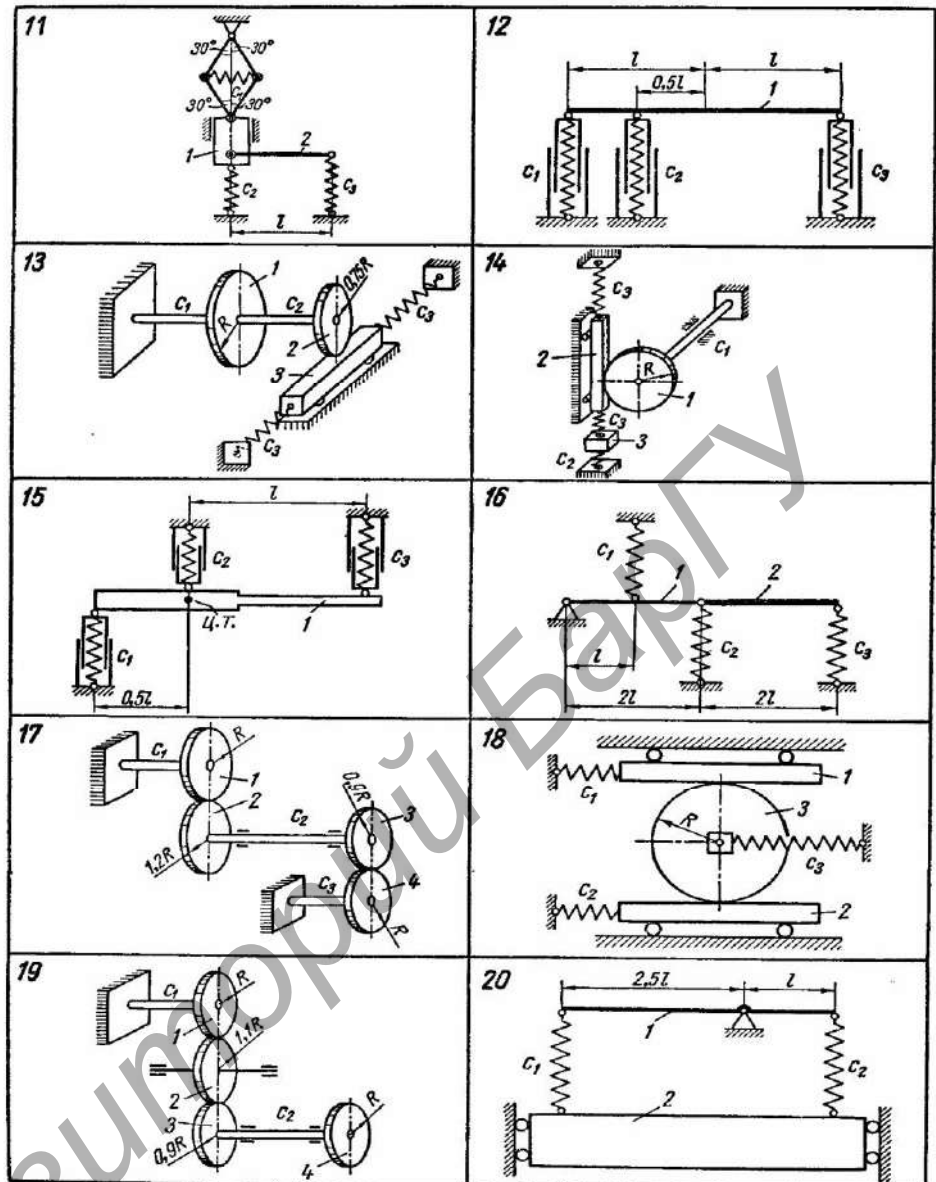


Рисунок 1.8.5

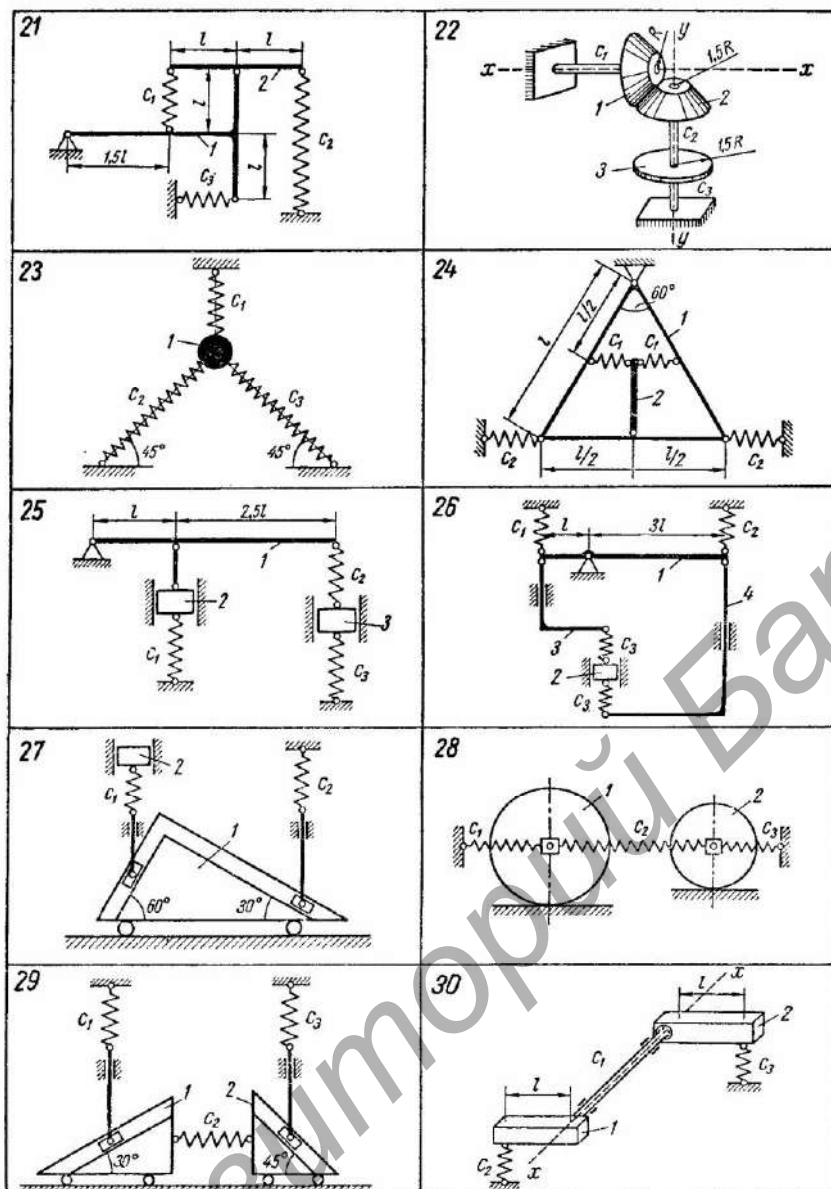


Рисунок 1.8.6

Репозиторий БарГУ



|      |    |
|------|----|
| Зүйл | 14 |
|------|----|

Репозиторий Баргу

|    |    |    |     |      |     |    |                   |     |                   |     |                   |     |
|----|----|----|-----|------|-----|----|-------------------|-----|-------------------|-----|-------------------|-----|
| 1  | 2  | 3  | 4   | 5    | 6   | 7  | 8                 | 9   | 10                | 11  | 12                | 13  |
| 11 | 10 | 3  | —   | —    | —   | 10 | —                 | 10  | —                 | 5   | —                 | 0,4 |
| 12 | 6  | —  | —   | —    | —   | 20 | —                 | 30  | —                 | 40  | —                 | 0,5 |
| 13 | 30 | 30 | 10  | 0,4  | —   | —  | 2 10 <sup>6</sup> | —   | 1 10 <sup>6</sup> | 200 | —                 | —   |
| 14 | 40 | 20 | 10  | —    | —   | —  | 3 10 <sup>6</sup> | 100 | —                 | 150 | —                 | —   |
| 15 | 6  | —  | —   | —    | 0,6 | 40 | —                 | 30  | —                 | 50  | —                 | 1   |
| 16 | 4  | 6  | —   | —    | —   | 60 | —                 | 100 | —                 | 80  | —                 | 0,4 |
| 17 | 50 | 60 | 40  | 0,2  | —   | —  | 2 10 <sup>6</sup> | —   | 3 10 <sup>6</sup> | —   | —                 | —   |
| 18 | 2  | 3  | 8   | 0,4  | —   | 20 | —                 | 40  | —                 | 30  | —                 | —   |
| 19 | 40 | 60 | 30  | 0,35 | —   | —  | 1 10 <sup>6</sup> | —   | 3 10 <sup>6</sup> | —   | —                 | —   |
| 20 | 8  | 10 | —   | —    | —   | 40 | —                 | 60  | —                 | —   | —                 | 0,5 |
| 21 | 4  | 2  | —   | —    | 0,6 | 20 | —                 | 30  | —                 | 30  | —                 | 0,5 |
| 22 | 30 | 40 | 20  | 0,4  | 0,5 | —  | 1 10 <sup>6</sup> | —   | 5 10 <sup>6</sup> | —   | 2 10 <sup>6</sup> | —   |
| 23 | 3  | —  | —   | —    | —   | 10 | —                 | 20  | —                 | 30  | —                 | —   |
| 24 | 40 | 2  | —   | —    | —   | 2  | —                 | 1   | —                 | —   | —                 | 0,4 |
| 25 | 2  | 1  | 0,5 | —    | —   | 20 | —                 | 40  | —                 | 30  | —                 | 0,3 |
| 26 | 6  | 2  | 3   | —    | —   | 40 | —                 | 30  | —                 | 10  | —                 | 0,2 |
| 27 | 8  | 2  | —   | —    | —   | 30 | —                 | 60  | —                 | —   | —                 | —   |
| 28 | 4  | 4  | —   | —    | —   | 20 | —                 | 10  | —                 | 30  | —                 | —   |
| 29 | 4  | 3  | —   | —    | —   | 30 | —                 | 20  | —                 | 40  | —                 | —   |
| 30 | 30 | 30 | —   | —    | 0,4 | —  | 2 10 <sup>6</sup> | 80  | —                 | 100 | —                 | 0,5 |

|  |
|--|
| 14   |
| У талқанні отықо отружыны<br>з кәсфдильентам жорстқалді сї<br>не дөдөрмәвенә                                       |
|  |
|  |
| $k$ – рәдлүс інерділі адросна<br>воді, прәвәдәнәй прәз цәнтр<br>цәжәру, перпенділүлрәна<br>просқалді рәдүнкә       |
| $m_1 = m_1$  |
|  |
| $m_1 = m_1$  |
|  |
| Осыға әәқәдәлді үгәрын-<br>тәпнәй просқалді, уяқәй ағды-<br>вәлді ағу. У талқанні отықо<br>отружыны не дөдөрмәвенә |
| $k_1 = k_2$  |
| тл. әәйәвәлү дә вәрыяпта 3.  |
| У талқанні отықо отружыны не<br>дөдөрмәвенә. Цәғә / отарәлді-<br>цәз трох ағнәлқәвәк сәрәжнәү                      |
| $m_1 = m_1$  |
|  |
|  |
| $k_1 = k_2$  |

Репозиторий БарГУ

Репозиторий БарГУ

## 2.1 Узбуджэнне ваганняў. Супраціўленне ў сістэме

У тэхніцы адрозніваюць ваганні свабодныя (або ўласныя) і вымушаныя. Першыя ўзнікаюць ад кароткачасовых уздзеянняў на сістэму і, як правіла, хутка згасаюць. Другія падтрымліваюцца бесперапынным узбуджальным дзеяннем і працягваюцца як заўгодна доўга. Свабодныя ваганні здзяйснююцца з адной уласцівай дадзенай сістэме частотой або строга вызначанай сукупнасцю (спектрам) частот, калі сістэма мае некалькі ступеняў свабоды. Частата вымушаных ваганняў вызначаецца частотой узбуджальнага дзеяння. Неспрыяльнымі, небяспечнымі для функцыяніравання большасці механічных сістэм з'яўляюцца так званыя *крытычныя* частоты ўзбуджэння, якія супадаюць з уласнымі частотамі сістэм. У сістэме наступае з'ява *рэзанансу*, пры якой размахі (амплітуды) ваганняў рэзка ўзрастаюць. Таму адной з асноўных задач даследавання ваганняў з'яўляецца вызначэнне крытычных (рэзанансных) частот; атрыманыя звесткі выкарыстоўваюцца пры праектаванні механічных сістэм.

Разгледзім *сілавыя* і *кінематычныя* спосабы ўзбуджэння ваганняў. У першым выпадку задаюцца сілавыя фактары (сіла  $P(t)$  або пара сіл з момантам  $M(t)$ ), у другім — перыядычныя рухі якой-небудзь часткі механічнай сістэмы  $\xi(t)$ . У заданні Д.25 узбуджэнне задаецца гарманічнай сілай  $P(t)$ . Выкарыстоўваецца некалькі варыянтаў фарміравання перыядычных уздзеянняў. У адным з іх канец вектара сілы перамяшчаецца ўздоўж лініі  $L$  па закону  $x = x_0 \sin pt$ , пры гэтым напрамак і велічыня сілы не змяняюцца (рыс. 2.1.1, а). У другім — канец вектара перамяшчаецца з пастаяннай скорасцю ўздоўж замкнёнай акружнасці  $K$ , а плячо сілы  $h$  адносна дыяметра  $AB$  роўна  $h = R \sin \omega t$  (рыс. 2.1.1, б). У трэцім варыянце вектар сілы верціцца ў плоскасці з пастаяннай вуглавой скорасцю  $\omega$  вакол пункта прылажэння  $O$ , пры гэтым яго праекцыя  $P(t)$  на прамую  $AB$  вызначаецца па формуле  $P(t) = P \cos \omega t$  (рыс. 2.1.1, в).

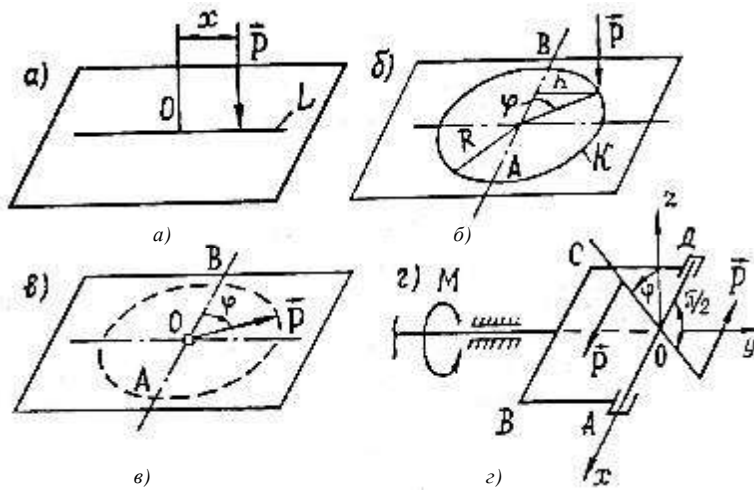


Рисунок 2.1.1

На рисунку 2.1.1, г) узбуджальнае дзеянне прадстаўлена парай сіл  $(P_x, -P_x)$ , плоскасць дзеяння якой верціцца вакол восі  $Ox$ . Дзеянне пары перадаецца на механічную сістэму праз рамку  $ABCD$  у выглядзе прыкладзенага да вала вярчальнага моманту  $M$ . Яго велічыня роўна праекцыі вектара пары на вось  $Oy$ .

У заданні Д.26 лініі і плоскасці дзеяння ўзбуджальных сіл і пар застаюцца нязменнымі, а іх велічыні і напрамкі змяняюцца.

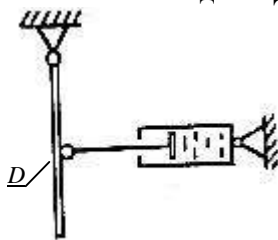


Рисунок 2.1.2

Наяўнасць вязкага супраціўлення ў сістэме ўмоўна паказваецца на схемах у выглядзе дэмпфера — цыліндра з вязкай вадкасцю і поршня, які рухаецца разам з целам  $D$  (рыс. 2.1.2).

## 2.2 Ваганні механічных сістэм з адной ступенню свабоды

Палажэнне пунктаў механічнай сістэмы з адной ступенню свабоды адназначна задаецца адной незалежнай абагульненай каардынатай. Для вываду дыферэнцыяльнага ўраўнення вагальнага руху сістэмы выкарыстоўваецца ўраўненне Лагранжа другога роду:

$$d \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial q} + Q_s, \quad (2.2.1)$$

дзе  $T$  і  $\Pi$  — кінетычная і патэнцыяльная энергіі сістэмы;  
 $\Phi$  — функцыя рассявання энергіі (дысіпатыўная функцыя Рэлея);

$Q_s$  — абагульненая ўзбуджальная сіла.

Два першыя складаемыя справа ва ўраўненні (2.2.1) можна ўяўляць як абагульненыя сілы, дзе  $Q_\Pi = -\partial \Pi / \partial q$  — абагульненая сіла ўсіх механічных уздзеянняў, якія маюць патэнцыял;  $Q_\Phi = -\partial \Phi / \partial q$  — абагульненая сіла ўсіх сіл вязкага супраціўлення.

Пры выкананні задання Д.25 рэкамендуецца прытрымлівацца наступнай metodyкі:

1. Вывучыць умову задання — механічную сістэму, яе фізічныя і геаметрычныя параметры, уявіць рух сістэмы.

2. Пераканацца, што сістэма мае адну ступень свабоды і выбраць незалежную абагульненую каардынату. За пачатак адліку каардынаты прыняць становішча ўстойлівай раўнавагі сістэмы. У такім становішчы сістэма паказана ў заданні.

3. Знайсці велічыні  $T$ ,  $\Pi$  і  $\Phi$  у выглядзе функцый абагульненай каардынаты  $q$  і абагульненай скорасці  $q'$ . Для малых перамяшчэнняў, якія здзяйсняе сістэма, гэтыя функцыі прыводзяцца да выгляду

$$T = aq'^2, \quad \Phi = \frac{1}{2}bq'^2, \quad \Pi = \frac{1}{2}cq^2, \quad (2.2.2)$$

дзе  $a$ ,  $c$  — каэфіцыенты інерцыі і жорсткасці сістэмы;  $b$  — каэфіцыент, які характарызуе супраціўленне ў сістэме.

Для захавання структуры формул (2.2.2) пры вылічэнні  $T$ ,  $\Pi$  і  $\Phi$  нелінейныя складаемыя неабходна прадстаўляць ступеннымі радамі, утрымліваючы адпаведную гэтым формулам колькасць членаў.

4. Вызначыць абагульненую ўзбуджальную сілу  $Q_S$ , якая адпавядае ўзбуджальнаму дзеянню  $S$  — сіле  $P$  або пары сіл  $M$ ,

$$Q_S = \frac{\delta A_S}{\delta q}, \quad (2.2.3)$$

дзе  $\delta A_S$  — работа ўздзеяння  $S$  на элементарным перамяшчэнні сістэмы, якое адпавядае прырашчэнню абагульненай каардынаты  $\delta q$ .

Абагульненую сілу  $Q_R$  можна знаходзіць праз магутнасць па формуле

$$Q_R = \frac{N_R}{q'}, \quad (2.2.4)$$

дзе  $N_R$  — магутнасць сілы (або моманту сілы) вязкага супраціўлення.

5. Вылічыць вытворныя па абагульненай каардынаце  $q$  і абагульненай скорасці  $q'$  функцый  $T$ ,  $\Pi$ ,  $\Phi$  і падставіць вынік і абагульненую сілу (2.2.3) ва ўраўненне (2.2.1); пасля гэтага ўраўненне (2.2.1) прыводзіцца да выгляду

$$q'' + 2nq' + k^2q = Q_S', \quad (2.2.5)$$

дзе  $2n = \frac{b}{a}$ ;

$$k^2 = \frac{c}{a}$$

Выгляд функцыі  $Q_s'$  залежыць ад характару ўзбуджаючага дзеяння  $S$ . Напрыклад, пры  $S = S_0 \sin pt$  велічыня

$$Q_s' = S_0 \sin pt. \quad (2.2.6) a$$

6. Знайсці прыватнае рашэнне ўраўнення (2.2.5).

Калі  $Q_s$  задаецца формулай (2.2.6), то рашэнне ўраўнення выглядае такім чынам:

$$q = A_q \sin(pt - \varepsilon), \quad (2.2.7)$$

дзе  $A_q$  — амплітуда вымушаных ваганняў:

$$A_q = \frac{S_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 - 4n^2 p^2}}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}. \quad (2.2.8)$$

$\varepsilon$  — зрух фазы вымушаных ваганняў.

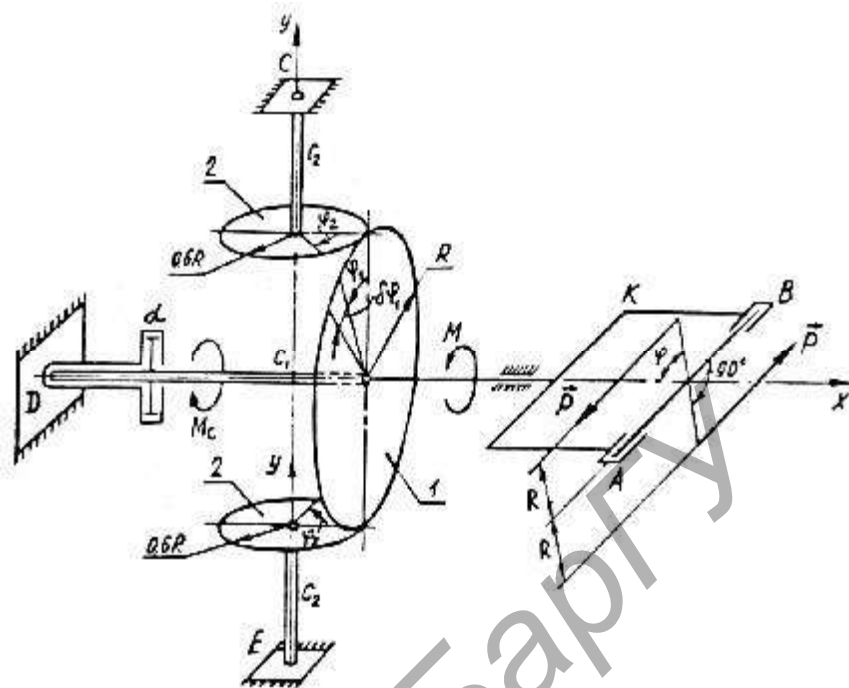
7. Прааналізаваць атрыманы вынік.

**Прыклад 1**

Механічная сістэма (рыс. 2.2.1) складаецца з трох дыскаў  $1, 2$ , якія пасаджаны з нацягам на пругкія валы. Другія канцы валаў жорстка замацаваны на апорах  $C, D, E$ . Дыскі звязаны паміж сабою з дапамогай трэння (праслізгванне выключаецца). Паварот дыскаў выклікае дэфармацыю кручэння валаў; жорсткасці на кручэнне роўныя  $c_1, c_2$ . Акрамя таго, гарызантальны вал забяспечаны дэмпферам з каэфіцыентам вязкага супраціўлення  $\alpha$ . На сістэму дзейнічае пара сіл  $(P_+, -P_-)$ , плоскасць дзеяння якой верціцца вакол восі  $AB$  згодна ўраўненню  $\varphi = \omega t$ . У становішчы спакою валы не дэфармаваныя.

Па наступных дадзеных:  $m_1 = 30$  кг,  $m_2 = 10$  кг;  $R = 0,4$  м;  $c_1 = 3 \cdot 10^4$  Н · м / рад;  $c_2 = 1 \cdot 10^4$  Н · м / рад;  $P = 12$  Н;  $\varphi = \omega t$ ,  $\omega = 3$  рад / с;  $\eta = 1, 2$  — вызначыць:

- 1) каэфіцыент вязкага супраціўлення  $\alpha$  у дэмпферы па зададзеным лагарыфмічным дэкрэменце  $\eta$ ;
- 2) ураўненне вымушаных ваганняў сістэмы;
- 3) максімальныя значэнні амплітуд змянення абагульненых каардынаты, скорасці і паскарэння;
- 4) рэзанансныя значэнні амплітуд змянення абагульненых каардынаты, скорасці і паскарэння.



Рысунак 2.2.1

*Рашэнне*

Вывучаем механічную сістэму. Аналізуючы рысунак 2.2.1, пераконваемся, што пры павароце плоскасці дзеяння пары сіл на вал перадаецца вярчальны момант  $M = 2PR\sin\varphi$ . Калі вугал узрастае ад 0 да  $\pi$ , вярчальны момант  $M$  накіраваны так, як паказана на рысунку; пры гэтым дыск 1 паварочваецца на некаторы вугал  $\varphi_1$ , а дыскі 2, якія судакранаюцца з ім, — на вугал  $\varphi_2$ . На такія ж вуглы паварочваюцца і нязменна звязаныя з імі сячэнні валаў. Так як супрацьлеглыя (ад дыскаў) сячэнні валаў  $C, D, E$  нерухомыя, то пры павароце дыскаў валы закручваюцца, аказваючы, падобна спружынам, пругкае

супраціўленне вярчэнню дыскаў. Гарызантальны вал забяспечаны вязкім дэмпферам, тармазнае дзеянне якога характарызуецца момантам супраціўлення  $M_c$  (гл. рыс. 2.2.1), накіраваным процілегла вуглавой скорасці руху вала.

За абагульненую каардынату прымем вугал павароту  $\varphi_1$  дыска  $I$  і запішам ураўненне Лагранжа другога роду:

$$dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = Q_p, \quad (2.2.9)$$

дзе  $T$  — кінетычная энергія сістэмы;

$\Phi$  — функцыя расейвання сістэмы (дысіпатыўная функцыя Рэлея);

$\Pi$  — патэнцыяльная энергія сістэмы;  $Q_p$

— абагульненая узбуджальная сіла.

Гэтыя функцыі вызначаюцца па формулах:

$$T = \frac{1}{2} a \dot{\varphi}_1^2, \quad \Phi = -\frac{1}{2} b \dot{\varphi}_1^2, \quad \Pi = -\frac{1}{2} c \varphi_1^2, \quad (2.2.10)$$

дзе  $a, c$  — каэфіцыенты інерцыі і жорсткасці сістэмы;  $b$  — каэфіцыент, які характарызуе супраціўленне ў сістэме.

Знойдзем кінетычную энергію сістэмы як суму кінетычных энергій дыскаў  $I, 2$ :

$$T = T_1 + 2T_2, \quad (2.2.11)$$

$$\text{дзе } T_1 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{4} m R^2 \dot{\varphi}_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}_1^2,$$

$$T_2 = 12 J_y \bar{\omega}^2 = 12 \cdot 2 \cdot m_2 (0,6R)^2 \dot{\varphi}^2 = 14m_2 (0,6R)^2 \dot{\varphi}^2 = 14m_2 R^2 \dot{\varphi}^2.$$

Підставляємо  $T_1$  і  $T_2$  у формулу (2.2.11):

$$T = \frac{1}{4} m_1 R^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} m_2 R^2 \dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} m_1 + m_2 R^2 \dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{2} a \dot{\varphi}_1^2, \quad (2.2.12)$$

дзе  $a = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) R^2$ .

Знаходимо функцію розсіювання системи

$$\Phi = \frac{1}{2} a \omega_1^2 = \frac{1}{2} a \dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{2} b \dot{\varphi}_1^2, \quad (2.2.13)$$

дзе  $b = a$ .

Знайдемо потенціальну енергію системи як суму робіт сил пружності вала на переміщенні системи з адхильного стану, визначеного довільними кутами  $\varphi_1, \varphi_2$ , у нульове стану  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  (сили тяжіння диска роботу не виконують):

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi_1 + 2\Pi_2 = \frac{1}{2} c_1 \varphi_1^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} c_2 \varphi_2^2 = \frac{1}{2} c_1 \varphi_1^2 + \\ &+ 2 \cdot \frac{1}{2} c_2 \left( \frac{\varphi_1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} c_1 + \frac{50}{9} c_2 \varphi_1^2 = \frac{1}{2} c \varphi_1^2, \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

дзе каэфіцыент жорсткасці сістэмы  $c = c_1 + \frac{50}{9} c_2$ .

Жорсткасці вертыкальных валаў (2.2.14) пры  $c_2 = c_1$  уносяць большы ўклад у агульную жорсткасць сістэмы  $c$ , чым жорсткасць гарызантальнага вала  $\frac{50}{9} > 1$ . Гэта тлумачыцца вялікім вуглом

$$\frac{50}{9} \approx 5.56$$

закручвання вертыкальных валаў. Для вызначэння абагульненай

сілы  $Q_p$ , якая адпавядае ўзбуджальнай пары сіл  $(P_-, -P_-)$ , нададзім абагульненай каардынаце  $\varphi_1$  прырашчэнне  $\delta\varphi_1$  (гл. рыс. 2.2.1, с. 89) і вылічым работу ўзбуджальнай пары на гэтым прырашчэнні:

$$\delta A = M\delta\varphi_1 = 2PR\sin\omega t \cdot \delta\varphi_1,$$

адкуль

$$Q_p = \frac{\delta A}{\delta\varphi_1} = 2PR \sin \omega t. \quad (2.2.15)$$

Знаходзім вытворныя па  $\varphi_1$ ,  $\dot{\varphi}_1$  і  $t$  функцый (2.2.12) — (2.2.15), якія ўваходзяць ва ўраўненне (2.2.9):

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_1} T_1 = a\dot{\varphi}_1, \quad \frac{\partial}{\partial t} T_1 = \frac{d}{dt} (a\dot{\varphi}_1) = a\ddot{\varphi}_1, \\ \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}_1} T_1 = b\varphi_1, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \Pi_1 = c\varphi_1. \quad (2.2.16)$$

Падстаўляем (2.2.15) і (2.2.16) ва ўраўненне (2.2.9) і атрымліваем

$$a\ddot{\varphi}_1 + b\dot{\varphi}_1 + c\varphi_1 = 2PR\sin\omega t$$

або

$$\ddot{\varphi}_1 + 2n\dot{\varphi}_1 + k^2\varphi_1 = h\sin pt, \quad (2.2.17)$$

дзе  $2n = \frac{b}{a}$ ;  $a$

$$k^2 = \frac{c}{a};$$

$$h = \frac{2PR}{a};$$

$p = \omega$ .

Рашэнне неаднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення (2.2.17) будзем шукаць у выглядзе сумы агульнага рашэння (аднароднага) ураўнення, якое ўяўляе затухаючыя ваганні, і неаднароднага, якое апісвае вымушаныя ваганні сістэмы. Паколькі кароткачасовыя затухаючыя ваганні даследаваліся раней, то тут разгледзім толькі вымушаныя ваганні. Іх ураўненне запісваем, карыстаючыся звесткамі з вышэйшай матэматыкі, у выглядзе

$$\varphi_1 = A_{\varphi_1} \sin(pt - \varepsilon), \quad (2.2.18)$$

дзе  $A_{\varphi}$  — амплітуда вымушаных ваганняў, гэта значыць найбольшае значэнне вугла  $\varphi_1$ ;

$p = \omega$  — частата вымушаных ваганняў сістэмы;

$\varepsilon$  — зрух фазы вымушаных ваганняў адносна фазы ўзбуджальнай сілы.

Амплітуда вымушаных ваганняў і зрух фазы разлічваюцца па формулах:

$$A_{\text{Ф1}} = \sqrt{\frac{(h)^2 + p^2}{k^2 - n^2}}, \quad \text{tg} \varepsilon = \frac{np}{k^2 - n^2}. \quad (2.2.19)$$

Вызначым велічыні  $h, k, n$ :

$$h = \frac{2PR}{a} = 2PR = 2 \cdot 12 = 24 \text{ c}^{-2}; \quad a = \frac{m_1 + m_2}{R_2}$$

$$\frac{m_1}{R_2} \cdot 30 + 10 \frac{m_2}{R_2} \cdot 0,4$$

$$3000 + 9 \sqrt{\frac{50}{1000} \cdot 1000} = 46,2466 \text{ c}^{-1}. \quad k = \frac{c}{c^1 + 9c^2} = \frac{c}{c^1 + 9c^2}$$

Для вызначэння велічыні  $n$  ва ўмовах задання прыводзіцца значэнне лагарыфмічнага дэкрэмета ваганняў сістэмы  $\eta$ . Паколькі

$$\eta = \frac{n \cdot 1}{2} T_1 = \frac{n \cdot 1}{2} \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}},$$

дзе  $T_1$  — перыяд затухаючых ваганняў, то  $n = k$   
 $= 46,2466 \quad = 24,3179 \text{ c}^{-1}.$

$$\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{\eta^2}} \quad \sqrt{1 + \frac{3,14^2}{1,2^2}}$$

Викарыстоўваючы абазначэнні, прынятыя ў формуле (2.2.13) і ва ўраўненні (2.2.17), знаходзім каэфіцыент  $\alpha$ , які характарызуе супраціўленне ў дэмпферы:

$$\alpha = b = 2an = 2 \cdot \frac{1}{m_1 + m_2} \cdot R^2 \cdot n = 2 \cdot \frac{1}{30 + 10} \cdot 0,4^2 \cdot 24,3179 = 194,5432 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}.$$

Вызначым амплітуду змены вугла  $\varphi_1$  і зрух фазы вымушаных ваганняў сістэмы пры зададзеным  $p = \omega = 3\pi = 9,4245$  рад / с па формулах (2.2.19)

$$A_{\varphi_1} = \sqrt{(46,2466^2 - 9,4245^2)^2 + 4 \cdot 24,3179^2 \cdot 9,4245^2} = 1,1426 \cdot 10^{-3} \text{ рад},$$

$$\text{tg } \varepsilon = \frac{2 \cdot 24,3179 \cdot 9,4245}{46,2466^2 - 9,4245^2} = 0,2236; \quad \varepsilon = 12,36^\circ \quad \varphi_1 = 0,2199$$

рад.

Згодна з формулай (2.2.18) атрымліваем

$$\varphi_1 = 1,1426 \cdot 10^{-3} \sin(9,4245t - 0,2199) \text{ рад}.$$

Допустим, што частата ўзбуджэння сістэмы  $p$  з'яўляецца пераменнай. Тады, як гэта відаць з формулы (2.2.19), будзе змяняцца і велічыня  $A_{\phi_1}$ . Вызначым максімальныя велічыні амплітуд змен  $\phi_1$ ,  $\dot{\phi}_1$ ,  $\ddot{\phi}_1$ . Адапаведныя гэтым велічыням значэнні  $p$  абазначым праз  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ . Згодна з формулай (2.2.19)  $A_{\phi_1}$  мае максімальнае значэнне, калі назоўнік формулы мінімальны; значэнне  $p = p_1$  вызначаем з умовы

$$dp/dp \left[ (k_2 - p^2)^2 + 4n_2 p^2 \right] = 0$$

$$\text{ці } 2n^2 - k^2 + p^2 = 0.$$

$$\text{Адкуль } p = p_1 = \sqrt{k^2 - 2n^2} \quad \text{і}$$

$$\frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2,4}{224,31794\sqrt{6,2466^2 - 24,3179}}$$

$$A_{\phi_1}^{\max} = \dots = 1,2544 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Абагульненая скорасць

$$\dot{\phi} = \frac{1}{k} \frac{d}{dt} \left[ A_{\phi_1} \sin \left( \sqrt{\frac{(k^2 - 2n^2)^2}{p^2} + 4n^2} pt - \varepsilon \right) \right] =$$

адкуль

$$A_{\varphi}^{\max_1} = \frac{h}{2n} \sqrt{\frac{(k^2 - p^2)^2}{p^2} + 4n^2} \quad (2.2.20)$$

Назоўнік формулы (2.2.20) дасягае мінімуму, калі

$$\frac{d}{dp} \left( \frac{(k^2 - p^2)^2}{p^2} + 4n^2 \right) = 0 +$$

або  $k^2 - p^2 = 0$ ; адсюль  $p = p_2 = k$ .

По формуле (2.2.20) атрымліваем

$$A_{\varphi_1}^{\max} = \frac{h}{2n} = \frac{2,4}{2 \cdot 24,3179} = 4,9346 \cdot 10^{-2} \text{ рад / с.}$$

Абагульненае паскарэнне

$$\varphi''_1 = \frac{d}{dt} \left( \frac{h}{2n} \cos(pt - \varepsilon) \right) = -\frac{h}{2n} p \sin(pt - \varepsilon)$$

2 □

адкуль

$$(2.2.21) \quad A_{\varphi_{i1}} = \sqrt{\frac{k^2 - p^2 h^2}{4} + 4np} \quad \text{або}$$

$$d \frac{dp}{p^2} = k^2 - p^2 \quad \text{або}$$

$$dp^2 = p^2(k^2 - p^2) \quad \text{або}$$

Назоўнік формулы (2.2.21) мае мінімум, калі

$$\frac{d}{dp} \left( \frac{k^2 - p^2}{4} + 4np \right) = 0$$

$$dp^2 = p^2(k^2 - p^2) = 0$$

або

$$k^4 - p^2 k^2 + 2n^2 p^2 = 0.$$

З апошняга ўраўнення знаходзім

$$2,2371 \text{ рад/с} \quad \frac{k^2 p}{2} = p^3 = k^2 - 2n^2 =$$

Па формуле (2.2.21) атрымліваем

$$A_{\varphi_1}^{\max} = \frac{h}{\sqrt{\frac{k^2}{p_3^2} - 1 + 4 \frac{n^2}{p_3^2}}} = \frac{h}{\sqrt{\frac{k^2 - 2n^2}{k^2} - 1 + 4 \frac{n^2}{k^4} (k^2 - 2n^2)}} =$$

$$= \frac{hk^2}{2nk\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2,446,2466^2}{224,31794\sqrt{2,466^2 - 24,3179^2}} = 2,6830 \text{ рад / с}^2.$$

Визначим амплітуды змянення абагульненых каардынат (2.2.19), скорасці (2.2.20) і паскарэння (2.2.21) пры рэзанансе ( $p = k$ ).

$$A_{\varphi_{\text{рэз}}} = h = \frac{2,4}{2nk} = \frac{2,4}{2 \cdot 24,3179 \cdot 46,2466} = 1,0670 \cdot 10^{-3} \text{ рад,}$$

$$\dot{\varphi}_{\text{рэз}} = \frac{A_{\text{рэз}}}{A} = \frac{\dot{A}_{\text{рэз}}}{A} = \frac{\dot{A}_{\text{рэз}}}{2n} = \frac{\dot{A}_{\text{рэз}}}{2 \cdot 24,3179} = 4,9346 \cdot 10^{-2} \text{ рад / с,}$$

$$A_{\ddot{\varphi}_{\text{рэз}}} = 2hkn = 2 \cdot 2,4 \cdot 46,2466 \cdot 24,3179 = 2,2821 \text{ рад / с}^2.$$

З атрыманых рэзультатаў відаць, што амплітуды змянення велічынь  $\varphi_1$ ,  $\dot{\varphi}_1$  і  $\ddot{\varphi}_1$  пры рэзанансе супадаюць або блізкія да іх максімальных значэнняў.

Змест наступнага прыкладу ў большай ступені адпавядае практыцы дынамічнага разліку рэальных механічных сістэм.

## Прыклад 2

Сістэма складаецца з рухомага якара  $OA$  масы  $m$ , які з дапамогай спружыны ўтрымліваецца ў становішчы спакою, паказаным на

рысунку 2.2.2. Якар — тонкі аднародны стрыжань. Цэнтр цяжару якара знаходзіцца ў пункце  $C$ . У часе руху якара на яго дзейнічае з боку шарніра момант сіл вязкага супраціўлення, прапарцыянальны вуглавой скорасці якара (з каэфіцыентам прапарцыянальнасці  $\beta$ ). А з боку пастаяннага магніта на яго дзейнічае сіла прыцягнення, накіраваная па лініі  $NS$ . Гэта сіла вызначаецца па формуле  $F = D / \delta^2$ , дзе  $D$  — некаторая пастаянная;  $\delta$  — велічыня паветранага зазору.

Плоскасць рысунка супадае з вертыкальнай плоскасцю. Велічыня паветранага зазору ў становішчы спакою роўная  $\delta_0$ .

Корпус прыбора вібрае, перамяшчаючыся паступальна ўздоўж паказанага на рысунку напрамку па законе  $\xi = \xi_0 \sin pt$ , дзе  $\xi_0$  — малая велічыня;  $p$  — цыклічная частата вібрацыі.

Для нармальнага функцыянавання прыбора неабходна задаволіць наступныя ўмовы:

1. Амплітуда адноснага перамяшчэння канца якара пры рэзанансе  $A^{рез}$  павінна складаць  $2/3$  велічыні  $\delta_0$ .

2. Амплітуда адноснага перамяшчэння канца якара  $A_\infty$  пры высокіх частотах узбуджэння ( $p \gg k$ ) павінна быць роўная  $1/3$  ад велічыні  $\delta_0$ .

Зыходзячы з гэтых патрабаванняў, па наступных дадзеных:  $m = 0,1$  кг;  $\beta = 0,01$  Н · м · с;  $\delta_0 = 0,006$  м;  $l = 0,12$  м;  $f = 0,04$  м;  $b = 0,04$  м;  $D = 3 \cdot 10^{-5}$  Н · м<sup>2</sup> — вызначыць:

- 1) цыклічную частату малых свабодных ваганняў якара;
- 2) статычную дэфармацыю  $\lambda_0$  і каэфіцыент жорсткасці  $c_1$  спружыны;
- 3) максімальную дапушчальную велічыню  $\xi_0$  амплітуды вібрацыі корпуса прыбора;
- 4) максімальную амплітуду вымушаных ваганняў якара.

#### Рашэнне

Рух якара складаецца з пераноснага руху разам з корпусам прыбора і адноснага вакол шарніра  $O$ . За абагульненую каардынату прымем вугал  $\varphi$  павароту якара, які адлічваецца ад становішча спакою ў бок памяншэння паветранага зазору  $\delta$  (рыс. 2.2.3).

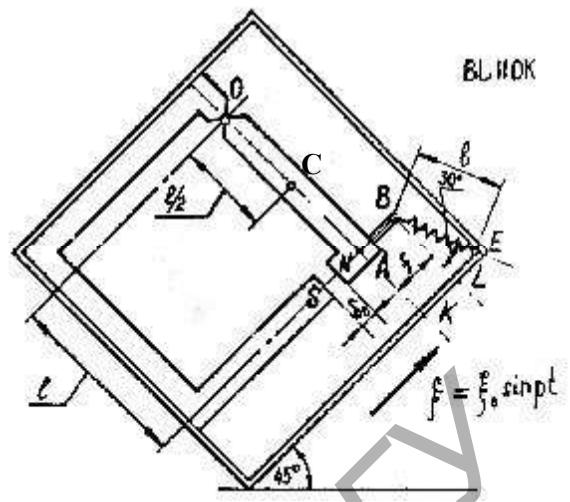


Рисунок 2.2.2

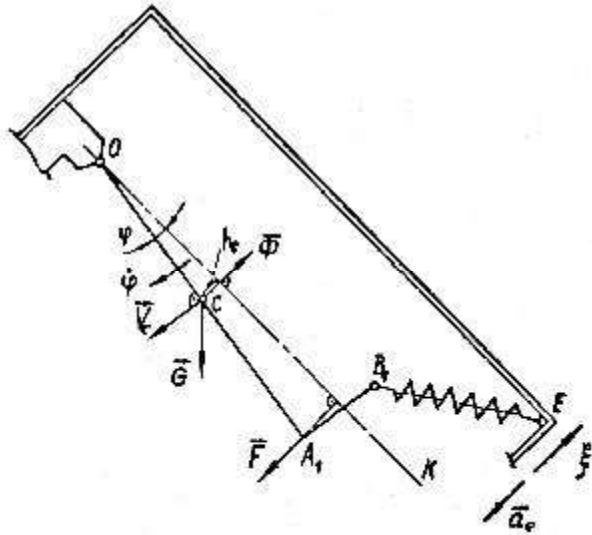


Рисунок 2.2.3

Ураўненне Лагранжа другога роду, якое апісвае адносны рух якара, мае выгляд

$$d \square \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \square \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - dt \square \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \square \square - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = Q_{\phi}, \quad (2.2.22)$$

дзе  $T$  — кінетычная энергія якара ў адносным руху;

$$Q_{\phi} = Q_M + Q_R + Q_{\Phi} + Q_{\Pi},$$

- дзе  $Q_M$  — абагульненая сіла прыцягнення якара;
- $Q_R$  — абагульненая сіла вязкага супраціўлення;
- $Q_{\Phi}$  — абагульненая пераносная сіла інерцыі  $\Phi_e$ ;  $Q_{\Pi}$  — абагульненая патэнцыяльная сіла;

Каб атрымаць лінейныя дыферэнцыяльныя ўраўненні ваганняў, функцыі  $T$ ,  $\Pi$  і  $\Phi$  трэба вылічаць з дакладнасцю да велічынь другога,

а абагульненыя сілы — да велічынь першага парадку маласці адносна  $\varphi, \varphi', \xi, \xi'$ .

Вылічым абагульненыя сілы. Паводле формулы (2.2.4)

$$Q_M = N_F = F \cdot \vec{v}_M, \quad \varphi'$$

дзе  $N_F$  — магутнасць сілы прыцягнення якара  $F$ ;  $v_M$  — скорасць пункта прыкладання сілы  $F$ .

Паколькі  $v_M = l\varphi'$ ,  $\delta = \delta_0 - l\varphi$ , а вугал паміж вектарамі  $\vec{v}_M$  і  $F$  роўны нулю, то

$$Q_M = Fl\varphi' = Fl \frac{d\varphi}{dt} = Dl(\delta - \phi_0 - l) \delta^{-2} \cdot \varphi' \delta$$

Раскладзем  $Q_M$  у рад Макларэна і захаваем складаемыя да першага парадку маласці адносна  $\varphi$ :

$$Q_M = Q_M^{(0)} + Q_M^{(1)}\varphi + \dots, \quad \frac{\varphi}{1}$$

дзе  $Q_M^{(0)} = \frac{Dl}{\delta_0}$ ;

$$Q_M^{(1)} = Dl(-2)(\delta_0 - l\varphi)^{-3}(-l);$$

$$Q_M'(\delta_0) = 2\delta D l_3 \omega^2;$$

таму

$$= D l_2 + 2 D l_3 \delta_0^2 \varphi.$$

$$(2.2.23) \quad Q_M$$

$\delta_0$

Абагульненая сіла  $Q_R$  роўна

$$Q_R = N_{\varphi} \cdot \ddot{\varphi} = - M_R \ddot{\varphi} = - M_R = -\beta \varphi, \quad (2.2.24)$$

дзе  $N_R$  — магутнасць моманту сіл вязкага супраціўлення;

$M_R = \beta \varphi$  — момант сіл вязкага супраціўлення. Знак мінус азначае, што напрамак моманту  $M_R$  процілеглы вуглавой скорасці якара  $\dot{\varphi}$ .

Аналагічна

$$Q_\Phi = N_\Phi = \Phi_e \cdot \ddot{v}_c = - \Phi_e v_c \cos \varphi, \quad (2.2.25)$$

дзе  $N_\Phi$  — магутнасць пераноснай сілы інерцыі  $\Phi_e$ ;

$v_c$  — скорасць пункта прыкладання сілы  $\Phi_e$ .

Напрамак вектараў  $v_{-c}$ ,  $\Phi_{-e}$  і пераноснага паскарэння  $a_e$ , адпаведных дадатнай каардынаце  $\xi$ , паказаны на рысунку 2.2.3. Знак мінус у формуле (2.2.25) з'явіўся пры вылічэнні скалярнага здабытку  $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$ .

Паколькі

$$\Phi_e = ma_e, \quad a_e = \ddot{\xi}, \quad v_c = -\frac{1}{2}l\dot{\varphi},$$

то

$$Q_\Phi = \frac{-m l \cdot \ddot{\xi} \varphi \cdot \cos \varphi}{2\dot{\varphi}^2} = -\frac{ml}{2} \cdot \ddot{\xi} \cos \varphi. \quad (2.2.26)$$

Раскладзем  $Q_\Phi$  у рад Макларэна па каардынаце  $\varphi$  і ўтрымаем у раскладанні складаемае не вышэй першага парадку маласці:

$$Q_\Phi = Q_\Phi(0) + Q_\Phi'(0) \frac{\varphi}{1!} + \dots,$$

дзе  $Q_\Phi(0) = -\frac{ml}{2} \cdot \ddot{\xi};$

$Q_\Phi' = -\frac{ml}{2} \cdot \ddot{\xi} \sin \varphi; \quad Q_\Phi'(0) = 0;$   
таму

$$Q_\Phi = -\frac{ml}{2} \cdot \ddot{\xi}. \quad (2.2.27)$$

Велічыню  $Q_{II}$  знойдзем по формуле

$$Q_{II} = -\frac{\delta\Pi}{\delta\varphi}, \quad (2.2.28)$$

дзе  $\Pi = \Pi_I + \Pi_{II}$  — патэнцыяльная энергія сістэмы.

Патэнцыяльная энергія якара  $\Pi_I$  у полі сіл цяжару вылічваецца ў адпаведнасці з азначэннем, як работа сілы цяжару якара  $G$  на перамяшчэнні яго цэнтра цяжару  $h_c$  з адхіленага становішча ў зыходнае,

$$\Pi_I = -G\frac{l}{2}\sin\varphi \approx -\frac{1}{2}Gl. \quad (2.2.29)$$

Патэнцыяльная энергія дэфармаванай спружыны  $\Pi_{II}$  вызначаецца па формуле

$$\Pi_{II} = -\frac{1}{2}c_1(\lambda_0 + \lambda_\varphi)^2 - \frac{1}{2}c_1\lambda_0^2, \quad (2.2.30)$$

дзе  $\lambda_0$  — дэфармацыя спружыны ў становішчы спакою;  $\lambda_\varphi$  — дадатковая дэфармацыя спружыны, выкліканая паваротам якара на вугал  $\varphi$ .

Для вызначэння дэфармацыі  $\lambda_\varphi$  прадставім стораны многавугольніка  $OABE$  у выглядзе вектараў (рыс. 2.2.4). Тады

$$\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BE} + \vec{EO} = \vec{0} \quad (2.2.31)$$

Спраектуем вектарную роўнасць (2.2.31) на восі  $Ox$ ,  $Oy$  (вось  $Ox$  накіравана паралельна восі спружыны ў становішчы спакою):

$$OA_1\cos(30^\circ + \varphi) + A_1B_1\sin(30^\circ + \varphi) + B_1E\cos\psi = OE\cos\gamma,$$

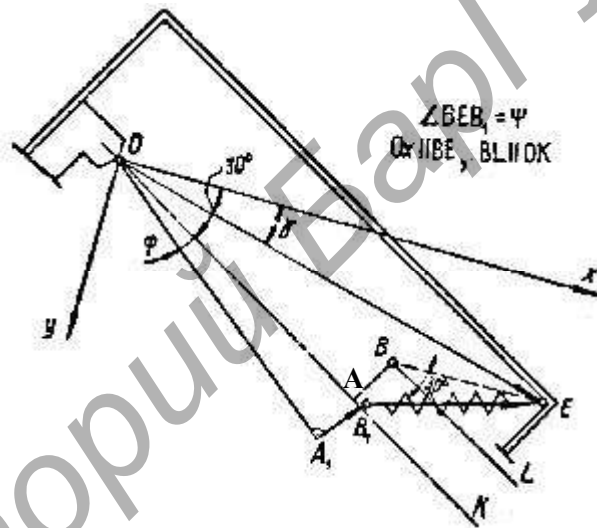
$$OA_1 \sin(30^\circ + \varphi) - A_1 B_1 \cos(30^\circ + \varphi) - B_1 E \sin \psi = OE \sin \gamma,$$

дзе  $B_1 E = b - \lambda_\varphi$ .

Паколькі

$$\cos(30^\circ + \varphi) = \cos 30^\circ \cos \varphi - \sin 30^\circ \sin \varphi,$$

$$\begin{aligned} \sin(30^\circ + \varphi) &= \sin 30^\circ \cos \varphi + \cos 30^\circ \sin \varphi, \text{ то} \\ l(\cos 30^\circ \cos \varphi - \sin 30^\circ \sin \varphi) + f(\sin 30^\circ \cos \varphi + \\ &+ \cos 30^\circ \sin \varphi) + (b - \lambda_\varphi) \cos \psi = OE \cos \gamma, \end{aligned}$$



Рысунак 2.2.4

$$\begin{aligned} l(\sin 30^\circ \cos \varphi + \cos 30^\circ \sin \varphi) - f(\cos 30^\circ \cos \varphi - \\ - \sin 30^\circ \sin \varphi) - (b - \lambda_\varphi) \sin \psi = OE \sin \gamma, \text{ або} \\ (l \cos 30^\circ + f \sin 30^\circ) \cos \varphi + (f \cos 30^\circ - l \sin 30^\circ) \sin \varphi + \end{aligned}$$

$$+ (b - \lambda_\varphi) \cos \psi = OE \cos \gamma,$$

$$(l \sin 30^\circ - f \cos 30^\circ) \cos \varphi + (l \cos 30^\circ + f \sin 30^\circ) \sin \varphi - (b - \lambda_\varphi) \sin \psi = OE \sin \gamma.$$

(2.2.32)

Раскладзем функцыі  $\sin \varphi$ ,  $\sin \psi$ ,  $\cos \varphi$ ,  $\cos \psi$  и  $\lambda_\varphi$  у рад па ступенях малых велічынь  $\varphi$ ,  $\psi$  і  $\lambda_\varphi$ , утрымліваючы складаемая да другога парадку маласці ўключна:

$$\sin \varphi \approx \varphi, \quad \sin \psi \approx \psi, \quad \cos \varphi \approx 1 - \frac{1}{2} \varphi^2, \\ \lambda_\varphi = \lambda_\psi. \quad (2.2.33) \quad \cos \psi = 1 - \frac{1}{2} \psi^2$$

Падставім выраз (2.2.33) у роўнасць (2.2.32); пры гэтым будзем ігнараваць велічынёй трэцяга парадку маласці  $\lambda_\varphi \psi^2$  і ўлічваць, што

$$l \cos 30^\circ + f \sin 30^\circ + b = OE \cos \gamma, \\ l \sin 30^\circ - f \cos 30^\circ = OE \sin \gamma.$$

Атрымаем

$$\frac{1}{2} (3f - l) \varphi - \frac{1}{4} (3l + f) \varphi^2 - \frac{1}{2} b \psi^2 - \lambda_\varphi = 0,$$

$$\frac{1}{2} (3l + f) \varphi + \frac{1}{4} (3f - l) \varphi^2 - b \psi + \lambda_\varphi \psi = 0,$$

адкуль

$$\lambda_\varphi = d_1 \varphi - \frac{1}{2} d_2 \varphi^2 - \frac{1}{2} b \psi^2, \quad (2.2.34)$$

$$\psi = -\frac{1}{2} b^2 d_2 \varphi + \frac{1}{2} d_1 \varphi^2 + \lambda \psi_\varphi \quad (2.2.35)$$

$$\text{дзе } d_1 = \frac{\Gamma(\sqrt{3f-l})}{2}, \quad d_2 = \frac{\Gamma(\sqrt{3l+f})}{2}.$$

Як відаць з формулы (2.2.34), каб атрымаць  $\lambda_\varphi$  з дакладнасцю да  $\varphi^2$ , дастаткова абмежаваць выраз (2.2.35) адным складаемым

$$\psi = \frac{d_2}{b} \varphi.$$

Такім чынам,

$$\lambda_\varphi = d_1 \varphi - \frac{1}{2} d_2 \left(1 + \frac{d_2}{b} \varphi\right)^2$$

або

$$\lambda =_\varphi \quad d_1 \varphi - \frac{1}{2} e \varphi^2, \quad (2.2.36)$$

$$\text{дзе } e = d_2^2 \left(1 + \frac{d_2}{b}\right).$$

Падстаўляем выраз (2.2.36) у формулу (2.2.30):

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 \lambda_{20} + f_2 \varphi^2 + \frac{1}{4} e_2 \varphi^4 + 2\lambda_0 f \varphi - \lambda_0 e \varphi^2 - f e \varphi^5 - \frac{1}{2} c_1 \lambda_{20}.$$

Адкідаючы складаемыя, якія змяшчаюць  $\varphi^5$  і  $\varphi^4$ , атрымліваем

$$\Pi_{II} = c_1 \lambda_0 f \varphi + \frac{1}{2} c_1 (f^2 - \lambda_0 e) \varphi^2. \quad (2.2.37)$$

Складаем велічыні (2.2.29) і (2.2.37):

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 \lambda_0 f - \frac{1}{2} l G - \frac{1}{2} c_1 (f^2 - \lambda_0 e) \varphi^2.$$

Па формуле (2.2.28) знаходзім

$$Q_{II} = \frac{1}{2} l G - c_1 \lambda_0 f - c_1 (f^2 - \lambda_0 e) \varphi. \quad (2.2.38)$$

Складаючы выразы (2.2.23), (2.2.24), (2.2.27), (2.2.38), знаходзім

$$Q_{\varphi} = \frac{Dl}{2} + \frac{1}{2} l G - c_1 \lambda_0 f - \frac{1}{2} c_1 (f^2 - \lambda_0 e) - \frac{2Dl}{3} \varphi^2 - \beta \varphi - \frac{1}{2} ml \xi \delta_0$$

або

$$Q_{\varphi} = \delta \frac{Dl}{2} + \frac{1}{2} l G - c_1 \lambda_0 f - c \varphi - \beta \varphi - \frac{1}{2} ml \xi, \quad (2.2.39)$$

$$\text{дзе } c = c_1(f_2 - \lambda_0 e) - \underline{2Dl_3} \cdot \delta_0$$

Механічная сістэма знаходзіцца ў адноснай раўнавазе пры  $\varphi = 0$ ;  
 $\dot{\varphi} = 0$ ;  $\dot{\xi} = 0$ .

Умова раўнавагі ў абагульненых сілах запісваецца ў выглядзе

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = 0 \\ \dot{\xi} = 0 \end{array} \right\} Q_{\varphi=0} = 0. \quad (2.2.40)$$

На падставе формул (2.2.39) і (2.2.40) знаходзім

$$\frac{Dl}{2} + \tau G - c \lambda f = 0. \quad (2.2.41) \delta_{20}$$

Атрыманая роўнасць азначае, што сілавыя фактары, якія ўвайшлі ў яе, самаўраўнаважаны і на рух якара не ўплываюць.  
 Формула (2.2.39) пры гэтым спрашчаецца

$$Q_{\varphi} = -c\varphi - \beta\dot{\varphi} - \frac{1}{2} ml \dot{\xi}. \quad (2.2.42)$$

Пераходзім да вылічэння кінетычнай энергіі  $T$ . У адносным руху якар здзяйсняе вярчэнне, таму

$$T = -\frac{1}{2} I_0 \dot{\varphi}^2.$$

Для  $\frac{1}{3}$  стержня момент інерції

$$J_0 = \frac{1}{3} ml^2.$$

Таким чином,

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} ml^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} a \dot{\varphi}^2, \quad (2.2.43)$$

дзе  $a = ml^2$  — коефіцієнт інерції системи.

Підставім вирази (2.2.43) і (2.2.42) у (2.2.22), атримаем диференціальне рівняння вимушаних вагань якара:

$$a\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + c\varphi = -\frac{1}{2} ml^2 \xi.$$

$$\text{або } \ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = hp^2 \sin pt, \quad (2.2.44)$$

дзе  $2n = \frac{\beta}{a}$ ,  $h = \frac{ml^2 \xi_0}{a}$ ,  $k = \sqrt{\frac{c}{a}}$  — кругова частота свободних вагань.

Вимушанія ваганні якара апісваюцца приватним рашенням неоднароднаго диференціального рівняння (2.2.44)

$$\varphi = A_b \sin(pt - \varepsilon),$$

дзе  $A_b$  — амплітуда вимушаних вагань;  $\varepsilon$  — зсув фази вимушаних вагань адносна фази збуджальної сили  $pt$ .

Величини  $A_b$  і  $\varepsilon$  визначаюцца па формулах:

$$A_b = \frac{hp^2}{2np}$$

$$A_b = \sqrt{\frac{2 \xi_0^2}{(2.2.45) k^2 - p^2} + 4n p} \cdot \frac{1}{k - p} \cdot \text{tg} \xi = \dots$$

Запішам формулы для вызначэння шукаемых велічынь  $k, \lambda_0, c_1, \xi_0, A_{\max}$  праз зададзеныя параметры прыбора: амплітуду адноснага перамяшчэння канца якара пры рэзанансе  $A_{\text{рэз}}$  і амплітуду адноснага перамяшчэння канца якара  $A_\infty$  пры высокіх частотах узбуджэння ( $p \gg k$ ).

Даследуючы выраз (2.2.45) на экстрэмум, устанаўліваем, што ён мае месца пры

$$\frac{k^2 p - p^2}{\sqrt{k^2 - 2n^2}} = 0 \quad (2.2.46)$$

Таму

$$A_{\varphi}^{\max} = \frac{k^2 h}{\sqrt{k^2 - 2n^2}} \quad (2.2.47)$$

Як відаць з формулы (2.2.45), пры неабмежаваным павелічэнні  $p$  вуглавая амплітуда вымушаных ваганняў  $A_b$  асімптатычна імкнецца да  $h$ , і для канца якара

$$A_\infty = h \quad (2.2.48)$$

Пры рэзанансе  $p = k$  і згодна з формулай (2.2.45)

$$A_{\phi}^{p33} = \frac{hk}{2n}, \quad A_{p33} = lA_{\phi}^{p33} \quad (2.2.49)$$

Прымаючы  $n = \frac{\beta}{2} a = \frac{3\beta}{2ml} a$ , з залежнасцяў (2.2.48), (2.2.49)

знаходзім

$$k = \frac{2nA}{h^{p33}} = \frac{3nA}{ml} \frac{A}{\beta} \frac{A}{2} \frac{A}{p33} \quad (2.2.50)$$

З формулы (2.2.41) вызначаем каэфіцыент статычнай дэфармацыі спружыны:

$$\lambda = \frac{1}{c} = \frac{1}{c_1 f^2 - \frac{e}{\delta_{30}^2 D l^2} \left( \frac{1}{2} G + \delta_{02}^1 D \right)} \quad (2.2.51)$$

Каб знайсці каэфіцыент жорсткасці спружыны, спачатку падставім велічыню (2.2.51) у формулу для  $c$  [гл. абзначэнне да (2.2.39)], а затым выкарыстаем залежнасць  $k^2 = c/a$ . Атрымаем дзве формулы для велічыні  $c$ :

$$c = c_1 f^2 - \frac{e}{\delta_{30}^2 D l^2} \left( \frac{1}{2} G + \delta_{02}^1 D \right) \frac{1}{f}$$

$$i \quad c = ak^2.$$

З роўнасці правых частак гэтых формул атрымліваем

$$c_1 = f_2 \left[ \frac{1}{2} + \frac{e l}{2} \right] \frac{1}{G + \delta_{20}^1 D + \delta_{30}^2 D l^2}. \quad (2.2.52)$$

Згодна з формулай (2.2.48)

$$A_\infty = l h = \frac{m l^2 \xi_0}{2a},$$

адкуль

$$\xi_0 = \frac{2}{m l^2} \frac{a A_\infty}{2} = \frac{2}{3} A_\infty. \quad (2.2.53)$$

Максімальную амплітуду вымушаных ваганняў канца якара вызначаем пры  $p = p_1$ , выкарыстоўваючы формулы (2.2.47) і (2.2.48):

$$A_{\max} = l A_{\max} = \frac{A_\infty^2}{\sqrt{\frac{1}{k p_2^2} + 4 n p_1^2 - 1}}. \quad (2.2.54)$$

Падстаўляем у формулы (2.2.50) — (2.2.54) зададзеныя лікавыя значэнні велічынь, якія ў іх уваходзяць. Знаходзім:

$$k = \frac{3 \cdot 0,01 \cdot \frac{2}{3} \delta_0}{0,1 \cdot 0,12^2 \cdot \frac{1}{3} \delta_0} = 41,67 \text{ c}^{-1}$$

$$c_1 = \frac{0,5070}{0,04} \cdot 0,12 + \frac{1}{0,04^2} \cdot 2 \cdot 0,9810 + \frac{0,006^2}{0,04^2} \cdot 3 \cdot 10^{-5} + \frac{2}{0,006^3} \cdot 3 \cdot 10^{-5} \cdot 0,12^2 = 6,2815 \cdot 10^7 \text{ Н/м,}$$

$$\lambda_0 = \frac{0,12}{6,2810 \cdot 10^7} \cdot \frac{1}{0,04^2} \cdot \frac{1}{0,9810 + \frac{1}{0,006^2} \cdot 3 \cdot 10^{-5}} = 6,3229 \cdot 10^{-8} \text{ м,}$$

$$\xi_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,006 = 0,001333 \text{ м,}$$

$$p^1 = \frac{41,672}{\sqrt{41,67^2 - 2 \cdot (0,8639 \cdot 10^{-4})}} \approx k = 41,67 \text{ c}^{-1},$$

$$A_{\max} \approx A_{\text{рээ}} = \frac{2}{3} \delta_0 = 0,004 \text{ м.}$$

### 2.3 Ваганні механічных сістэм з дзвюма ступенямі свабоды

Для вывучэння ваганняў механічных сістэм з дзвюма ступенямі свабоды таксама выкарыстоўваюцца ўраўненні Лагранжа другога роду, якія запісваюцца ў выглядзе:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} &= Q_{q_1}, \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} &= Q_{q_2}.
 \end{aligned} \right\} (2.3.1)$$

дзе  $T$  і  $\Pi$  — кінетычная і патэнцыяльная энергіі сістэмы;  $q_{1,2}$  — абагульненыя каардынаты;

$Q_{q_1}, Q_{q_2}$  — абагульненыя ўзбуджальныя сілы.

Пры выкананні задання Д.26 неабходна прытрымлівацца такой паслядоўнасці:

1. Уважліва вывучыць механічную сістэму: характар руху, узаемадзеянне звенняў, зыходныя дадзеныя і інш. Пераканацца, што ў стане спакою раўнавага сістэмы ўстойліва; калі ўзнікаюць сумненні, то неабходна праверыць іх шляхам разліку (гл. заданне Д.22).

2. Увесці дзве незалежныя абагульненыя каардынаты  $q_{1,2}$  такім чынам, каб праз іх лёгка вызначаліся перамяшчэнні ўсіх целаў, што ўваходзяць у сістэму.

3. Вызначыць кінетычную і патэнцыяльную энергіі сістэмы ў выглядзе функцый абагульненых каардынат  $q_i$  і абагульненых скорасцяў  $\dot{q}_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Для малых перамяшчэнняў, што тут разглядаюцца, гэтыя функцыі прыводзяцца да выгляду:

$$T = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2), \quad (2.3.2)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11} q_1^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + c_{22} q_2^2), \quad (2.3.3)$$

дзе пастаянныя  $a_{ij}, c_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) называюцца адпаведна *інерцыйнымі і квазіпружкімі каэфіцыентамі*.

Прыклады вызначэння кінетычнай і патэнцыяльнай энергіі прыведзены ў шостым і восьмым раздзелах першай часткі.

4. Вызначыць абагульненыя ўзбуджальныя сілы  $Q_{q_1}, Q_{q_2}$  па формулах:

$$Q_{q_1} = \delta A_{s q_1}, \quad Q_{q_2} = \delta A_{s q_2}, \quad (2.3.4) \quad \delta q_1 \quad \delta q_2$$

дзе  $\delta A_{s q_1}$  — элементарная работа ўзбуджальнага дзеяння на сістэму (сілы або моманту) на яе перамяшчэнні, якое выклікана элементарным прырашчэннем абагульненай каардынаты  $q_1$  пры  $q_2 = \text{const}$ ;

$\delta A_{s q_2}$  — элементарная работа ўзбуджальнага дзеяння на сістэму, на перамяшчэнні сістэмы, выкліканым элементарным прырашчэннем абагульненай каардынаты  $q_2$  пры  $q_1 = \text{const}$ ;

$\delta q_1, \delta q_2$  — элементарныя прырашчэнні абагульненых каардынат.

Элементарная работа ўзбуджальных дзеянняў вылічаецца па формуле

$$\delta A_{s q_i} = H \delta q_i, \quad (2.3.5)$$

у якой  $H = P$  пры  $q_i = x_i$  і  $H = M$  пры  $q_i = \varphi_i$ ; літарамі  $P$  і  $M$  тут абзначаны адпаведна ўзбуджальная сіла і ўзбуджальны момант (пара

сіл), а літарамі  $x_i$  і  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2$ ) — лінейныя і вуглавыя перамяшчэнні пунктаў (або цел) прыкладання ўздзеянняў. У заданні Д.26 узбуджальныя дзеянні змяняюцца па гарманічным законе

$$H = H_0 \cos pt, \quad (2.3.6)$$

дзе  $H_0 = (P \ M_0, \ 0)$  — амплітудныя (найбольшыя) значэнні ўзбуджальных дзеянняў;

$p$  — іх частата.

У зыходных дадзеных значэнні  $H_0$  не прыводзяцца, а задаюцца адпаведныя ім лінейныя і вуглавыя перамяшчэнні (адвольнае заданне значэнняў  $H_0$  магло б прывесці да вялікіх перамяшчэнняў пунктаў сістэмы, што супярэчыла б зыходнай гіпотэзе тэорыі малых ваганняў).

5. Знайсці вытворныя па абагульненых каардынатах  $q_i$  і абагульненых скорасцях  $\dot{q}_i$  функцый  $T$  і  $\Pi$  і падставіць іх разам з абагульненымі сіламі (2.3.4) ва ўраўненні (2.3.1); у выніку апошнія прымуць выгляд:

$$(2.3.7) \left. \begin{aligned} a q_{11}'' + a q_{12}'' + c q_{11} + c q_{12} &= H_1 \cos pt, \\ a q_{21}'' + a q_{22}'' + c q_{21} + c q_{22} &= H_2 \cos pt. \end{aligned} \right\}$$

У заданні Д.26 толькі адно з ураўненняў (2.3.7) з'яўляецца неаднародным, паколькі ўзбуджальнае дзеянне прыкладзена да аднаго цела.

6. Знайсці прыватнае рашэнне сістэмы (2.3.7), якое неабходна шукаць у выглядзе

$$q_1 = A_{q_1} \cos pt, \quad q_2 = A_{q_2} \cos pt, \quad (2.3.8)$$

дзе  $A_{q_1}, A_{q_2}$  — амплітуды вымушаных ваганняў.

Для іх вызначэння падставім выразы (2.3.8) ва ўраўненні (2.3.7) і рошым атрыманую сістэму двух алгебраічных ураўненняў:

$$\left. \begin{aligned} (c_{11} - a_{11}p_2)A_{q_1} + (c_{12} - a_{12})A_{q_2} &= H_1, \\ (c_{21} - a_{21}p_2)A_{q_1} + (c_{22} - a_{22})A_{q_2} &= H_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.9)$$

Адсюль

$$\Delta \begin{cases} A_{q_1} = \frac{1}{\Delta} [(c_{22} - a_{22}p_2)H_1 - (c_{12} - a_{12})H_2], \\ A_{q_2} = \frac{1}{\Delta} [(c_{11} - a_{11}p_2)H_2 - (c_{21} - a_{21}p_2)H_1], \end{cases} \quad (2.3.10)$$

дзе

$$\Delta = (c_{11} - a_{11}p_2)(c_{22} - a_{22}p_2) - (c_{12} - a_{12}p_2)(c_{21} - a_{21}p_2). \quad (2.3.11)$$

Два сапраўдныя значэнні кораня  $p = k_1$  і  $p = k_2$  ( $k_1 < k_2$ ), якія ператвараюць вызначальнік (2.3.11) у нуль, называюцца адпаведна *першай* (ніжэйшай) і *другой* (вышэйшай) рэзананснымі або крытычнымі частотамі сістэмы. Пры гэтых і блізкіх да іх значэннях  $p$  амплітуды ваганняў (2.3.10) могуць дасягаць вялікіх, небяспечных для нармальнага функцыянавання сістэмы, велічынь. Гэта з'ява ў тэхніцы называецца **рэзанансам**. У шматлікіх практычных задачах асноўная мэта дынамічнага разліку і заключаецца ў тым, каб выявіць

вобласці рэзанансаў і забяспечыць работу механізмаў і машын за межамі гэтых абласцей.

Падставіўшы выразы (2.3.10) у формулы (2.3.8), атрымаем ураўненні вымушаных ваганняў сістэмы. На гэтым заканчваецца рашэнне задачы.

7. Даследаваць атрыманыя вынікі. Заклучны этап выканання задання падрабязна разгледжаны на прыкладзе ў раздзеле 1.5.

*Заўвага.* Пры вызначэнні кінетычнай і патэнцыяльнай энергіі сістэмы яе геаметрычныя параметры часта прадстаўляюцца ў выглядзе нелінейных функцый абагульненых каардынат, якія ўтрымліваюць  $\sin q_i$ ,  $\cos q_i$  і г. д. У гэтых выпадках нелінейныя параметры неабходна падаваць у выглядзе раскладанняў па ступенях  $q_i$  і абмяжоўвацца ў іх такой колькасцю складаемых, каб пры выкананні п. 5 атрымліваліся лінейныя дыферэнцыяльныя ўраўненні (2.3.7).

Напрыканцы вернемся да ўраўненняў (2.3.7). У кожнае з іх уваходзяць дзве невядомыя функцыі  $q_1, q_2$ , што аб'ядноўвае ўраўненні ў адну сістэму і ўскладняе рашэнне. Задача спрашчаецца, калі ўвесці новыя пераменныя  $\theta_1, \theta_2$  па формуле

$$\theta_1 + \theta_2 = \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2 \quad (2.3.12)$$

дзе  $\beta_1, \beta_2$  — пастаянныя.

Тады сістэма (2.3.7) распадаецца на два незалежныя ўраўненні выгляду

$$a_{11} \ddot{\theta}_1 + c_{11} \dot{\theta}_1 = H_1' \cos pt, \quad a_{22} \ddot{\theta}_2 + c_{22} \dot{\theta}_2 = H_2' \cos pt \quad (2.3.13)$$

$$k_1 \theta_1 = H_1'' \cos pt, \quad k_2 \theta_2 = H_2'' \cos pt. \quad (2.3.14)$$

Функцыі  $\theta_1, \theta_2$  называюцца *нармальнымі* або *галоўнымі каардынатамі*.

Ва ўраўненнях (2.3.13) і (2.3.14)  $k_1^2 = a_{11}'^2, k_2^2 = a_{22}'^2$  —

*галоўныя частоты* свабодных ваганьняў сістэмы, дзе літарамі  $a_{11}', a_{21}'$

,  $c_{11}', c_{22}', H_1', H_2', H_1'', H_2''$  абзначаны новыя значэнні

каэфіцыентаў ураўненняў і пераўтвораныя амплітуды ўзбуджальных дзеянняў.

Рашэнне ўраўненняў (2.3.14) пры  $H_1'' = H_2'' = 0$  паказвае, што новыя абагульненыя каардынаты  $\theta_1, \theta_2$  змяняюцца па законах гарманічных ваганьняў з частотамі галоўных ваганьняў (гл. частку 1); па гэтай прычыне іх называюць галоўнымі каардынатамі.

Каб перайсці ад ураўненняў (2.3.7) да ўраўненняў (2.3.13) неабходна атрымаць функцыі  $T$  і  $\Pi$  без здабытку абагульненых каардынат  $\theta_1 \cdot \theta_2$  і абагульненых скорасцяў  $\dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2$ , гэта значыць у выглядзе:

$$T = \frac{1}{2} a_{11}' \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} a_{22}' \dot{\theta}_2^2, \quad \Pi = -\frac{1}{2} c_{11}' \theta_1^2 + \frac{1}{2} c_{22}' \theta_2^2. \quad (2.3.15)$$

Падставім выразы (2.3.12) у формулы (2.3.2) і (2.3.3); атрымаем:

$$T = \frac{1}{2} a_{22} \beta_{12}^2 + a_{12} \beta_1^2 + \frac{1}{2} a_{11} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} a_{22} \beta_{22}^2 + a_{12} \beta_2^2 + \frac{1}{2} a_{11} \dot{\theta}_2^2 +$$

$$+ [a_{22}\beta_1\beta_2 + (\beta_1 + \beta_2)a_{12} + a_{11}]\theta_1\theta_2, \quad (2.3.16)$$

$$\begin{aligned} \Pi = & \beta_1^2 c_{22}\beta_{12} + c_{12}\beta_1 + \beta_2^2 c_{11}\beta_{12} + \beta_1\beta_2 c_{12} + \beta_2^2 c_{22}\beta_{22} + c_{12}\beta_2 + \\ & \beta_1^2 c_{11}\beta_{22} + \\ & + [c_{22}\beta_1\beta_2 + (\beta_1 + \beta_2)c_{12} + c_{11}]\theta_1\theta_2. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Формулы (2.3.16) і (2.3.17) приводзяцца да выгляду (2.3.15), калі

$$\begin{aligned} a_{22}\beta_1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_{12} a_{12} + a_{11} &= 0, \quad c_{22}\beta_1 + \beta_1 + \beta_{12} c_{12} + c_{11} \\ &= 0, \quad a_1 = a_{11}' = a_{11} + 2a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_{12}, \quad a_2 = a_{22}' = a_{11} + 2a_{12}\beta_2 + \\ & a_{22}\beta_{22}, \quad c_1 = c_{11}' = c_{11} + 2c_{12}\beta_1 + c_{22}\beta_{12}, \quad c_2 = c_{22}' = c_{11} + 2c_{12}\beta_2 + \\ & c_{22}\beta_{22}. \end{aligned}$$

Знойдзем правыя часткі ўраўненняў (2.3.14). Абагульненыя ўзбуджальныя сілы, якія адпавядаюць каардынатам  $q_1, q_2$ , згодна з ураўненнем (2.3.7) абазначаны

$$Q_{q_1} = H_1 \cos pt, \quad Q_{q_2} = H_2 \cos pt.$$

Адпаведная ім элементарная работа

$$\delta A = Q_{q_1} \delta q_1 + Q_{q_2} \delta q_2 = H_1 \cos pt (\delta\theta + \delta\theta_{12}) + H_2 \cos pt \times$$

$$\times \beta \delta \theta + \beta \delta \theta ( \quad \quad \quad ) = (H_1 + \beta_1 H_2) \cos pt \delta \theta + (H_1 + \beta_2 H_2) \cos pt \delta \theta_2. \quad (2.3.18)$$

Абзначым абагульненыя ўзбуджальныя сілы, якія адпавядаюць абагульненым каардынатам  $\theta_1, \theta_2$ , праз  $Q_{q_1}'$ ,  $Q_{q_2}'$ . Іх элементарная работа

$$\delta A = Q_{q_1}' \delta \theta_1 + Q_{q_2}' \delta \theta_2. \quad (2.3.19)$$

Супастаўляючы выразы (2.3.18) і (2.3.19), знаходзім:

$$Q_{q_1}' = (H_1 + \beta_1 H_2) \cos pt, \quad Q_{q_2}' = (H_1 + \beta_2 H_2) \cos pt. \quad (2.3.20)$$

Дыферэнцыяльныя ўраўненні вымушаных ваганняў (2.3.14) у галоўных каардынатах прымаюць выгляд:

$$\ddot{\theta}_1 + k_{12} \theta_1 = -H_1 + \beta_1 H_2 \cos pt, \quad \ddot{\theta}_2 + k_{22} \theta_2 = -H_1 + \beta_2 H_2 \cos pt. \quad (2.3.21) \quad a_2$$

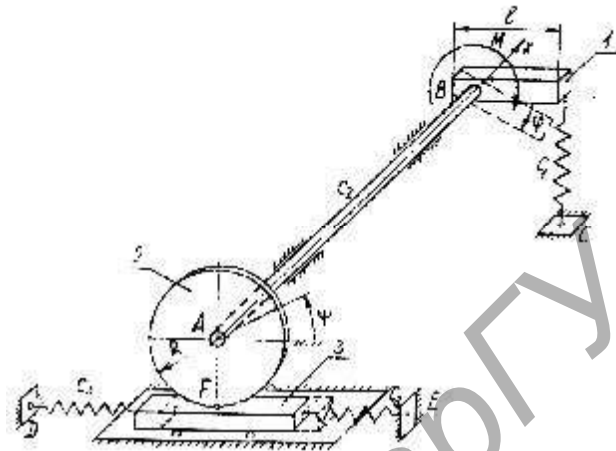
Ураўненні вымушаных ваганняў  $\theta_1, \theta_2$  знаходзяцца як прыватныя інтэгралы ўраўненняў (2.3.21). У раздзеле 1.5 гэтыя ўраўненні выкарыстоўваюцца для вывучэння рэзанансных ваганняў.

### Прыклад 1

Разгледзім ваганні механічнай сістэмы, прадстаўленай на рысунку 2.3.1 (гл. с. 116). Яе апісанне прыведзена ў раздзеле 1.7. Ваганні адбываюцца пад уздзеяннем пары сіл  $M = M_0 \cos pt$ , прыкладзенай да прызматычнага цела  $I$ . Вугал павароту цела пад

уздзяеннем пары сіл з пастаянным момантам  $M = M_0$  роўны  $\varphi_0 = 0,005$  рад.

За абагульнення каардынаты прымем вуглы павароту  $\varphi, \psi$  целаў 1 і 2; дадатныя напрамкі вуглоў паказаны на рысунку 2.3.1.



Рысунк 2.3.1

Ураўненні Лагранжа для даследуемай сістэмы маюць выгляд:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} &= Q_{\varphi}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} + \frac{\partial \Pi}{\partial \psi} &= Q_{\psi}, \end{aligned} \right\} (2.3.22) d$$

дзе  $Q_\phi, Q_\psi$  — абагульненыя ўзбуджальныя сілы.

Выразы для кінетычнай і патэнцыяльнай энергіі атрыманы ў раздзеле 1.7 і прадстаўлены там формуламі (1.7.10) і (1.7.11). У агульным выглядзе

$$T = \frac{1}{2} (a_{11}\dot{\phi} + 2a_{12}\dot{\phi}\dot{\psi} + a_{22}\dot{\psi}^2), \quad (2.3.23)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11}\phi + 2c_{12}\phi\psi + c_{22}\psi^2),$$

дзе  $a_{ij}$  і  $c_{ij}$  — каэфіцыенты інерцыі і жорсткасці сістэмы.

Для нашага прыкладу  $a_{11} = 4,8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $a_{12} = 0$ ,  $a_{22} = 1,8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $c_{11} = 2,25 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ,  $c_{12} = 2 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ,  $c_{22} = 2,04 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

У раздзеле 1.7 вылічаны частоты свабодных ваганняў ( $k_1, k_2$ ) і адпаведныя ім каэфіцыенты размеркавання  $\mu_1, \mu_2$ :

$$k_1 = 20,93 \text{ с}^{-1}, \quad k_2 = 124,83 \text{ с}^{-1}, \quad \mu_1 = -1,02; \quad \mu_2 = 2,61. \quad (2.3.24)$$

Вызначым абагульненыя сілы  $Q_\phi$  і  $Q_\psi$ , якія адпавядаюць узбуджальнаму моманту:

$$Q_\phi = \frac{\delta A_{M\phi}}{\delta \phi}, \quad Q_\psi = \frac{\delta A_{M\psi}}{\delta \psi}, \quad (2.3.25) \quad \delta \phi$$

дзе  $\delta A_M^\phi$  — элементарная работа ўзбуджальнага моманту на перамяшчэнні сістэмы, выкліканым элементарным прырашчэннем абагульненай каардынаты  $\phi$  пры  $\psi = \text{const}$  ;

$\delta A_M^\psi$  — элементарная работа таго ж моманту на перамяшчэнні сістэмы, выкліканым элементарным прырашчэннем абагульненых каардынат  $\psi$  пры  $\phi = \text{const}$ ;

$\delta\phi$   $\delta\psi$  — элементарныя прырашчэнні абагульненых каардынат.

Напрамак узбуджальнага моманту пры  $t = 0$  прыем дадатным і будзем лічыць, што ён супадае з напрамкам адліку дадатнага вугла  $\phi$  (гл. рыс. 2.3.1). Тады

$$\delta A_M^\phi = M_0 \cos pt \delta\phi, \quad \delta A_M^\psi = 0$$

і адпаведна з формулай (2.3.25)

$$Q_\phi = M_0 \cos pt, \quad Q_\psi = 0.$$

Паводле ўраўненняў (2.3.22) атрымліваем дыферэнцыяльнае ўраўненне вымушаных ваганняў сістэмы ў абагульненых каардынатах  $\phi, \psi$  :

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\phi'' + c_{11}\phi + c_{12}\psi &= M_0 \cos pt, \\ (2.3.26) \quad a_{22}\psi'' + c_{12}\phi + c_{22}\psi &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Прыватнае рашэнне ўраўненняў (2.3.26) будзем шукаць у выглядзе:

$$\phi = A_\phi \cos pt, \quad \psi = A_\psi \cos pt. \quad (2.3.27)$$

Знаходзім  $\ddot{\varphi}$ ,  $\ddot{\psi}$  :

$$(2.3.28) \quad \ddot{\varphi} = -p A^2 \cos pt, \quad \ddot{\psi} = -p^2 A_{\psi} \cos pt.$$

Падстаўляем выразы (2.3.27) і (2.3.28) ва ўраўненне (2.3.26), атрымліваем:

$$(c_{11} - a p_{112}) A_{\varphi} + c A_{12\psi} = M_0, \quad c A_{12\varphi} + (c_{22} - a p_{222}) A_{\psi} = 0.$$

Адсюль знаходзім

$$A_{\varphi} = \frac{M_0}{(c_{11} - a p_{112}) - c A_{12\psi} / A_{12\varphi}}, \quad (2.3.29)$$

$$A_{\psi} = - \frac{c M_{12}}{(c - a p^2)(c_{22} - a p_{222}) - c_{122}}. \quad (2.3.30)$$

Амплітуды вымушаных ваганняў звянняў 1 і 2 роўныя абсалютным значэнням  $A_{\varphi}$ ,  $A_{\psi}$ .

У зыходных дадзеных разглядаемага прыкладу не задаецца амплітуднае значэнне  $M_0$  узбуджальнага моманту, а прыводзіцца адпаведнае яму значэнне вугла павароту  $\varphi_0$  (адвольнае заданне велічыні  $M_0$  магло б прывесці да парушэння ўмовы аб маласці ваганняў). Для вызначэння велічыні  $M_0$  скарыстаемся формуламі (2.3.29). Па ўмове задачы пры  $p = 0$  вугал павароту цела 1 роўны  $\varphi_0$ ; такім чынам,

$$\varphi_0 = A_{\varphi p=0} = \frac{c_{22} M_0}{c_{11} c_{22} - c_{12}^2}$$

$$= \frac{2,25 \cdot 10^4 - 4 \cdot 10^4 \cdot 0,005}{2,25 \cdot 10^4 - 2,04 \cdot 10^4} = 14,5 \text{ рад}$$

Адсюль

8

Н · м.

Вугал павароту дыска 2 пад уздзеяннем пастаяннага моманту  $M = M_0$ , прыкладзенага да цела 1, знойдзем па формуле (2.3.30) пры  $p = 0$ :

$$\psi_0 = A_{\psi p=0} = -\frac{c_{12} M_0}{c_{11} c_{22} - c_{12}^2} = -\frac{2 \cdot 10^4 \cdot 14,5}{2,25 \cdot 10^4 - 2,04 \cdot 10^4 - (2 \cdot 10^4)^2} = -0,0049 \text{ рад}$$

Адрозненне велічыні  $\psi_0$  ад  $\varphi_0$  тлумачыцца дадатковым супраціўленнем павароту цела 2, якое аказваецца судакранальным з ім цела 3 (пры адсутнасці пружкага супраціўлення мела б месца роўнасць  $\psi_0 = \varphi_0$ ).

Каб прасачыць за дынамічнымі паводзінамі механічнай сістэмы ў рэальным для яе дыяпазоне змянення частот узбуджальнай сілы (ён уключае ўласныя частоты сістэмы), неабходна прадставіць амплітуды  $A_\varphi$ ,  $A_\psi$  у выглядзе функцый частаты. Звернем увагу, што назоўнікі формул (2.3.29) і (2.3.30) супадаюць з левай часткай ураўнення частот (1.7.19), прыведзенага ў раздзеле 1.7. Такім чынам, значэнні  $k_1^2$ ,  $k_2^2$  з'яўляюцца каранямі мнагачлена, які ўваходзіць у формулы (2.3.29) і (2.3.30). Апошні пасля перамяжэння можна прадставіць у выглядзе

$$a_{11}a_{22}p^4 - (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11})p^2 + (c_{11}c_{22} - c_{12}^2) = a_{11}a_{22} \times$$

$$\left[ p^4 - \frac{1}{a_{11}a_{22}}(a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11})p^2 + \frac{1}{a_{11}a_{22}}(c_{11}c_{22} - c_{12}^2) \right] \times$$

і раскласці на множнікі:  $a_{11}a_{22}(p^2 - k_1^2)(p^2 - k_2^2)$  (па аналогіі з раскладаннем квадратнага мнагачлена  $a(x^2 - dx + e) = a(x - x_1)(x - x_2)$ , дзе  $x_1, x_2$  — карані мнагачлена).

Цяпер па формулах (2.3.29) і (2.3.30) атрымаем:

$$\varphi = \frac{(c_{22} - a_{22}p)M_0}{a a (p^2 - k^2)(p^2 - k^2)} = \frac{(2,04 \cdot 10^{-4} - 18p)14,5}{4,8 \cdot 1,8(p^2 - 438,23)(p^2 - 15582,63)} =$$

$$A = \frac{1,678(20400 - 1,8p)}{(p^2 - 438,23)(p^2 - 15582,63)}, \quad (2.3.31)$$

$$A = - \frac{c M_{12} - 0}{a a (p^2 - k^2)(p^2 - k^2)} = - \frac{2 \cdot 10^{-4} \cdot 14,5}{4,8 \cdot 1,8(p^2 - 438,23)(p^2 - 15582,63)} = \psi$$

$$= \frac{33 \cdot 555}{(p^2 - 438,23)(p^2 - 15582,63)} = \quad (2.3.32)$$

Вылічэнне па формулах (2.3.31) — (2.3.32) і значэнні  $A_\varphi$ ,

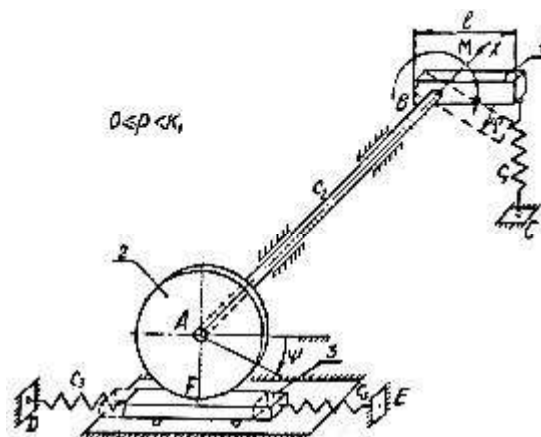
$A_\psi$  прыведзены ў табліцы 2.3.1, а адпаведныя графікі паказаны на рысунку 2.3.3. Прааналізуем паводзіны велічынь  $A_\varphi, A_\psi$  для трох інтэрвалаў змянення частаты  $p$  узбуджальнага моманту. Пры гэтым будзем звяртаць увагу на два бакі з'явы: а) зрух фаз ваганняў

целаў, якія ўваходзяць у сістэму, адносна фазы узбуджальнага моманту; б) характар змянення (узрастанне або змяншэнне) амплітуд ваганняў.

*Інтэрвал 1:*  $0 \leq p < k_1$ . Паколькі  $k_1 < k_2$ , то любое значэнне  $p$  у гэтым інтэрвале меншае за частоты  $k_1, k_2$  і  $p^2 - k_1^2 < 0$ ,  $p^2 - k_2^2 < 0$ . Такім чынам, назоўнікі формул (2.3.31), (2.3.32) дадатныя і  $A_\phi > 0$ ,  $A_\psi < 0$ . З павелічэннем частаты множнікі ў назоўніках формул (2.3.31) і (2.3.32) па абсалютнай велічыні змяншаюцца, а амплітуды ваганняў целаў 1 і 2—3 узрастаюць; пры гэтым ваганні цела 1 адбываюцца ў адной фазе са змяненнем узбуджальнага моманту, а ваганні целаў 2—3 — у супрацьфазе

Таблица 2.3.1 — Вылічэнне значэнняў  $A_{\phi}$ ,  $A_{\psi}$ ,  $\mu_i$

| $p$   | $1,9p^2$ | $2040p - 1,8p^2$ | $p^2 - 489,23$ | $p^2 - 13552,63$ | $1,678 \cdot 10^3$ | $[4] \cdot [5]$ | $A_{\phi} = \frac{[6]}{[7]}$ | $A_{\psi} = \frac{-33565}{[7]}$ | $\mu_i = \frac{[9]}{[8]}$ |
|-------|----------|------------------|----------------|------------------|--------------------|-----------------|------------------------------|---------------------------------|---------------------------|
| 1     | 2        | 3                | 4              | 5                | 6                  | 7               | 8                            | 9                               | 10                        |
| 0     | 0        | 20400            | -489,23        | -15582,63        | 34231,2            | 6828775,0       | $5 \cdot 10^{-3}$            | -49152,10 <sup>-7</sup>         | -98304,10 <sup>-5</sup>   |
| 10    | 180      | 20220            | -389,23        | -15482,63        | 33929,16           | 5236689,0       | $6479 \cdot 10^{-6}$         | -64096,10 <sup>-7</sup>         | -98929,10 <sup>-5</sup>   |
| 20    | 720      | 19680            | -38,23         | -15182,63        | 33023,04           | 590431,9        | $56894 \cdot 10^{-4}$        | -57828,10 <sup>-6</sup>         | -101642,10 <sup>-5</sup>  |
| $K_1$ | 788,81   | 19611,19         | 0              | -15144,40        | 32907,57           | 0               | $\pm \infty$                 | $\pm \infty$                    | -101983,10 <sup>-5</sup>  |
| 30    | 1620     | 18780            | 461,77         | -14682,63        | 31512,84           | -6779998,0      | - $46479 \cdot 10^{-7}$      | -49506,10 <sup>-7</sup>         | -106513,10 <sup>-5</sup>  |
| 40    | 2880     | 17520            | 1161,77        | -13982,63        | 29398,56           | -16244600,0     | -18097,10 <sup>-7</sup>      | -20662,10 <sup>-7</sup>         | -114173,10 <sup>-5</sup>  |
| 50    | 4500     | 15900            | 2061,77        | -13082,63        | 26830,2            | -28973374,0     | -98913,10 <sup>-8</sup>      | -124437,10 <sup>-8</sup>        | -125804,10 <sup>-5</sup>  |
| 60    | 6480     | 13920            | 3161,77        | -11982,63        | 23957,76           | -37886320,0     | -61652,10 <sup>-8</sup>      | -88594,10 <sup>-8</sup>         | -143700,10 <sup>-5</sup>  |
| 70    | 8820     | 11580            | 4461,77        | -10682,63        | 19431,24           | -47663438,0     | -40768,10 <sup>-8</sup>      | -70421,10 <sup>-8</sup>         | -172736,10 <sup>-5</sup>  |
| 80    | 11520    | 8880             | 5961,77        | -9182,63         | 14900,64           | -54744728,0     | -27218,10 <sup>-8</sup>      | -61312,10 <sup>-8</sup>         | -22526,10 <sup>-5</sup>   |
| 90    | 14580    | 5820             | 7661,77        | -7482,63         | 9765,96            | -57330190,0     | -17035,10 <sup>-8</sup>      | -58547,10 <sup>-8</sup>         | -34368,10 <sup>-5</sup>   |
| 100   | 18000    | 2400             | 9561,77        | -5582,63         | 4027,2             | -53379824,0     | -75444,10 <sup>-9</sup>      | -62879,10 <sup>-8</sup>         | -833455,10 <sup>-5</sup>  |
| 110   | 21780    | -380             | 11661,77       | -3482,63         | -2315,64           | -40613630,0     | 570163,10 <sup>-10</sup>     | -82645,10 <sup>-8</sup>         | -144940,10 <sup>-5</sup>  |
| 120   | 25920    | -5520            | 13961,77       | -1182,63         | -9262,56           | -16611608,0     | 56097,10 <sup>-8</sup>       | -20328,10 <sup>-7</sup>         | -362372,10 <sup>-5</sup>  |
| $K_2$ | 28048,73 | -7648,73         | 15144,40       | 0                | -12834,56          | 0               | $\pm \infty$                 | $\pm \infty$                    | -262481,10 <sup>-5</sup>  |
| 130   | 30420    | -10020           | 16461,77       | 1317,37          | -16813,56          | 21688241,0      | -77531,10 <sup>-8</sup>      | -15477,10 <sup>-7</sup>         | -199623,10 <sup>-5</sup>  |
| 140   | 35280    | -14880           | 19167,77       | 4017,37          | -24988,64          | 76979910,0      | -32435,10 <sup>-8</sup>      | -43602,10 <sup>-8</sup>         | -134429,10 <sup>-5</sup>  |



Рысунак 2.3.2

(рыс. 2.3.2). Гэта азначае, што пры дадатных момантах  $M$  вугал  $\varphi$  прымае дадатныя значэнні, вугал  $\psi$  — адмоўныя. Пры  $p = k_1 = 20,93c^{-1}$  у сістэме наступае першы рэзананс і функцыі  $A_\varphi$ ,  $A_\psi$  зазнаюць бясконцы разрыў (рыс. 2.3.3).

*Інтэрвал 2:*  $k_1 < p < k_2$ . Паколькі  $k_1 < k_2$ , то  $p^2 - k_1^2 > 0$ ,  $p^2 - k_2^2 < 0$ , назоўнікі формул (2.3.31) і (2.3.32) адмоўныя. Таму ў дадзеным інтэрвале частаты  $A_\psi > 0$ , гэта значыць ваганні целаў 2—3 адбываюцца сінфазна са зменай ўзбуджальнага моманту (рыс. 2.3.4—2.3.5, гл. с. 124). Што датычыцца функцыі  $A_\varphi$ , то яе знак у гэтым інтэрвале частаты змяняецца. Пункт  $p_1$  змены знака на восі  $p$  вызначаецца з лічніка формулы (2.3.31), гэта значыць з умовы  $c_{22} - a_{22}p_1^2 = 0$ , адкуль  $p_1 = c_{22}/a_{22}$ . Калі  $k_1 < p < p_1$ , то  $A_\varphi < 0$  і ваганні цела 1 адбываюцца ў супрацьфазе з узбуджальным момантам (рыс. 2.3.4). Калі  $p_1 < p < k_2$ , то  $A_\varphi > 0$  і ваганні ўсіх целаў сінфазны са змяненнем моманту  $M$ , гэта значыць дадатнаму моманту  $M$  адпавядаюць дадатныя значэнні вуглоў  $\varphi$  і  $\psi$  (рыс. 2.3.6, гл. с. 125).

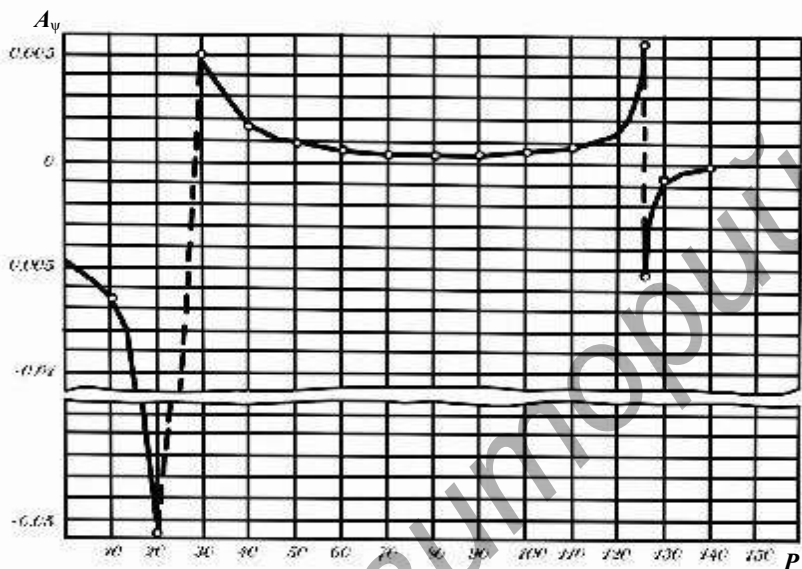
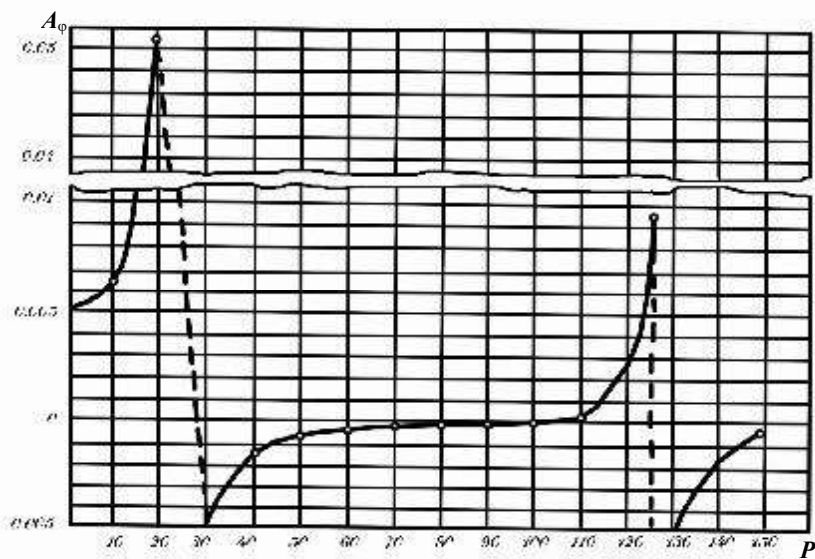


Рисунок 2.3.3

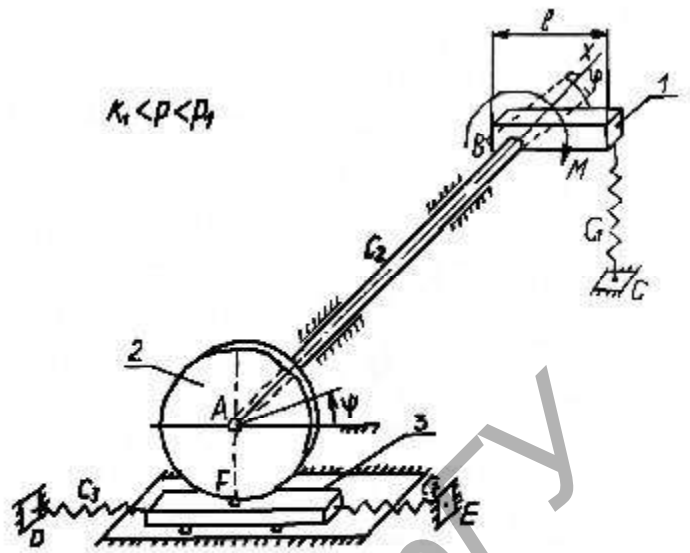


Рисунок 2.3.4

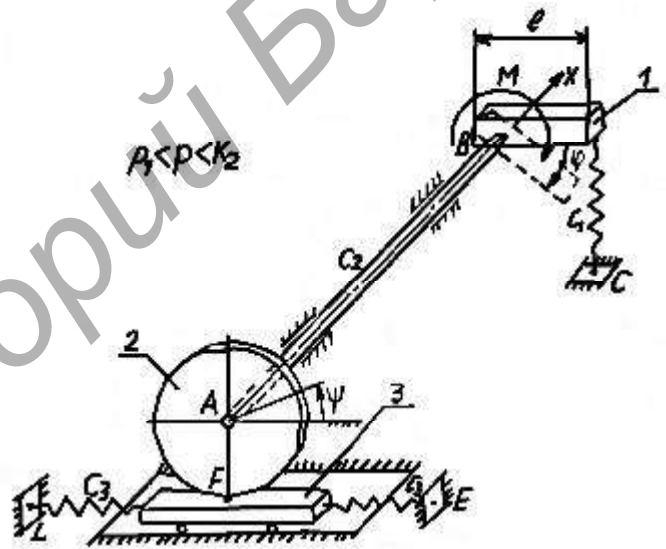
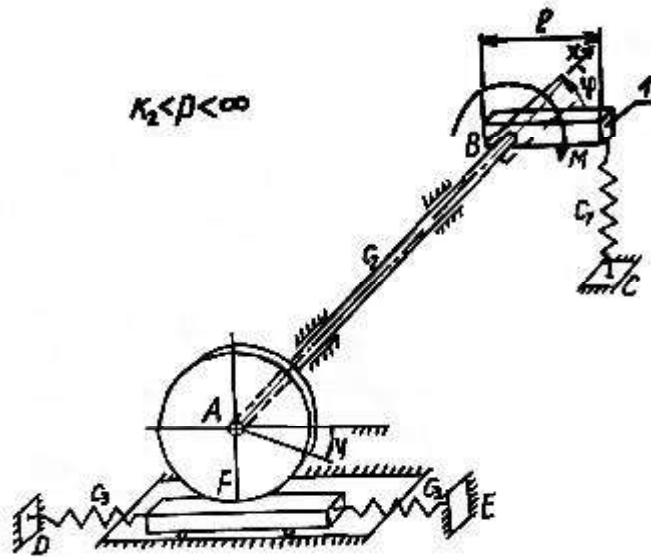


Рисунок 2.3.5



Рисунак 2.3.6

Як відаць з графікаў на рысунку 2.3.3 (гл. с. 123), амплітуда  $A_\psi$  у дадзеным інтэрвале частаты  $P$  спачатку змяншаецца, а потым узрастае. Яе мінімум адпавядае максімуму назоўніка формулы (2.3.30). Знойдзем вытворную гэтага назоўніка па  $p^2$  і прыраўняем яе да нуля:

$$-a_{11}(c_{22} - a_{22}p_2) - a_{22}(c_{11} - a_{11}p_1) = 0$$

або

$$2a_{11}a_{22}p_2 - (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11}) = 0.$$

Адсюль знаходзім значэнне  $p = p_0$ , пры якім назоўнік дасягае максімуму, а амплітуда  $A_\psi$  мае мінімум:

$$p_0 = \frac{1}{2} \sqrt{ac_{11} + ac_{22} \pm \sqrt{12ac_{11}ac_{22} - 224500,8 + 201,4008ac_{11}ac_{22}}} = 16020,85c_{-1}.$$

Алгебраічнае значэнне амплітуды  $A_\varphi$  узрастае ад  $-\infty$  да  $+\infty$ , прымаючы нулявое значэнне  $A_\varphi = 0$  пры  $p = p_1$ . Калі  $p = k_2 = 124,83c^{-1}$  у сістэме наступае другі рэзананс; пры гэтым  $A_\varphi = \infty$ . Калі перанесці тэрмін «рэзананс» на выпадак  $A_\varphi = 0$ , то адпаведную з’яву — адсутнасць ваганняў цела  $I$  — можна назваць *антырэзанансам*. Магчымасць падбіраць параметры сістэмы, пры якіх наступае антырэзананс, мае важнае практычнае значэнне. Таму неабходна ўстанавіць механічны сэнс велічыні  $p_1 = c_{22}/a_{22}$ .

Аналізуючы формулы для  $c_{22}$ ,  $a_{22}$  прыходзім да высновы, што  $p_1$  — частата свабодных ваганняў сістэмы, якая паказана на рысунку 2.3.7. Такім чынам, гэту сістэму можна разглядаць як гасільнік ваганняў цела  $I$  са спружынай.

Велічыні  $p_1$  і  $p_2 = c_{11}/a_{11}$  называюцца *парцыяльнымі частотамі* (тут  $p_2$  — частата ўласных ваганняў сістэмы, якая паказана на рысунку 2.3.8).

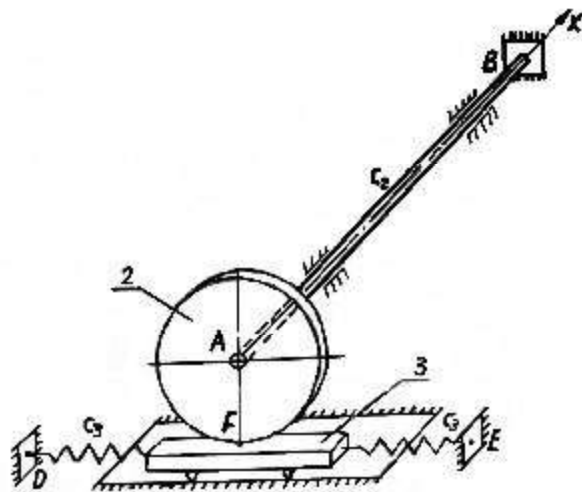


Рисунок 2.3.7

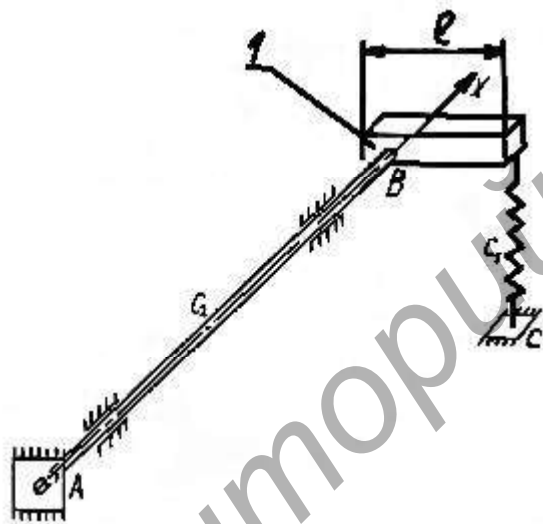


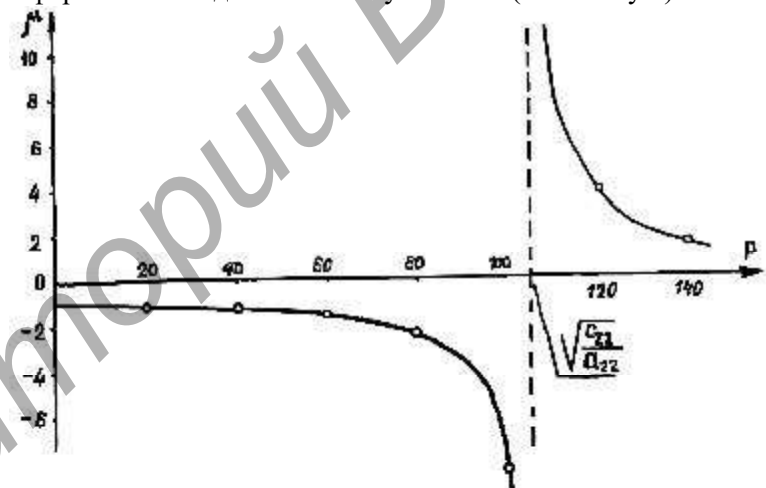
Рисунок 2.3.8

Інтэрвал 3:  $k_2 < p < \infty$ . У гэтым інтэрвале змянення частаты  $p > k_1$  і  $p > k_2$ ; значыць,  $p^2 - k_1^2 > 0$  і  $p^2 - k_2^2 > 0$ , акрамя таго  $c_{22} - a_{22}p^2 < 0$ . Таму па формулах (2.3.31), (2.3.32) атрымліваем адмоўныя значэнні амплітуд  $A_\phi$ ,  $A_\psi$  (гл. рыс. 2.3.3), што адпавядае ваганням сістэмы ў супрацьфазе з вярчальным момантам (гл. рыс. 2.3.6). З узростаннем значэння  $p$  амплітуда вымушаных ваганняў памяншаецца, імкнучыся да нуля.

Для пабудовы графіка змянення каэфіцыента формаў вымушаных ваганняў выканаем вылічэнні па формуле

$$\mu = \frac{A_\psi}{A_\phi} \text{ або } \mu = \frac{-c_{12}}{c_{22} - a_{22}p^2} \quad \text{д. } A_\phi$$

Вынікі вылічэнняў прыведзены ў табліцы 2.3.1, а адпаведны графік прадстаўлены на рысунку 2.3.9. Неабходна звярнуць увагу, што пры рэзанансных частотах  $p = k_1$  і  $p = k_2$  формы вымушаных ваганняў супадаюць з формамі свабодных ваганняў сістэмы (гл. частку 1).



Рысунк 2.3.9

Даследуем рэзанансныя ваганні. Разгледзім галоўныя каардынаты сістэмы  $\theta_1, \theta_2$ . Яны звязаны з абагульненымі каардынатамі  $\varphi, \psi$  суадносінамі выгляду (2.3.12):

$$\varphi = \theta_1 + \theta_2, \quad \psi = \mu_1 \theta_1 + \mu_2 \theta_2 \quad (2.3.33)$$

дзе  $\mu_1, \mu_2$  — каэфіцыенты формаў свабодных ваганняў.

Няхай абагульненыя ўзбуджальныя дзеянні, якія адпавядаюць абагульненым каардынатам  $q_1, q_2$ , роўныя

$$Q_1 = H_1 \sin(pt + \delta), \quad Q_2 = H_2 \sin(pt + \delta). \quad (2.3.34)$$

Тады дыферэнцыяльныя ўраўненні ваганняў у галоўных каардынатах прымаюць выгляд:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + k_{12}\theta_1 &= H_1 + \mu_1 H_2 \sin(pt + \delta), & a_1 \\ \ddot{\theta}_2 + k_{22}\theta_2 &= H_2 + \mu_2 H_1 \sin(pt + \delta), & a_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.35)$$

$$\text{дзе } a_1 = a_{11} + 2\mu_1 a_{12} + \mu_1^2 a_{22}, \quad a_2 = a_{11} + 2\mu_2 a_{12} + \mu_2^2 a_{22} \quad (2.3.36)$$

Для нашага прыкладу  $H_1 = M_0, H_2 = 0$ ; пры рэзанансе зрух фаз  $\delta = \pi/2$ .

Дыферэнцыяльныя ўраўненні прыводзяцца да выгляду:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + k_{12}\theta_1 &= \mu_1 M_0 \sin(pt + \pi), & a_1 \\ \ddot{\theta}_2 + k_{22}\theta_2 &= \mu_2 M_0 \sin(pt + \pi), & a_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.37)$$

Пры  $p = k_1$  прыватныя інтэгралы ўраўненняў (2.3.37) роўныя

$$\theta_1 = \frac{\mu_{21} k M a_0 t \sin k_1 t}{2 k_1 a_2}; \quad \theta_2 = \frac{a_1 (\mu_{22} M - k_1^2)}{2 k_2} \sin(k_1 t + \pi/2). \quad (2.3.38)$$

Аналагічна, пры  $p = k_2$  атрымліваем:

$$\theta_1 = \frac{\mu_{11} M_0 \sin(k_2 t + \pi)}{2 k_2 a_2}, \quad \theta_2 = \frac{\mu_{22} M_0 t \sin k_2 t}{a_1 (k_1^2 - k_2^2)}. \quad (2.3.39)$$

Абагульненыя каардынаты  $\varphi$  і  $\psi$  знаходзім па формулах (2.3.33).

Пры  $p = k_1$

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{\mu_{21} k M a_0 t \sin k_1 t}{2 k_1 a_2} + \frac{(\mu_{22} M - k_1^2)}{k_2} \cos k_1 t, \\ \psi &= \frac{\mu_{12} k a M_0 t \sin k_1 t}{k_1 (\mu_{22} M - k_1^2)} + \frac{a}{k_2} \cos k_1 t. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.40)$$

Пры  $p = k_2$

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{\mu_{22} k a_2 M_0 t \sin k_2 t}{a k_1} - \frac{(\mu_{12} M - k_1^2)}{k_2} \cos k_2 t \end{aligned} \right\}$$

(2.3.41)

$$\psi = \frac{\mu_2 M_0}{2k_2 a_2} t \sin k_2 t - \frac{\mu_1 M_0}{a_1 (k_2^2 - k_1^2)} \cos k_2 t.$$

Як відаць з ураўненняў руху сістэмы (2.3.40) і (2.3.41), пры рэзанансе першыя складаемыя ўтрымліваюць у якасці множніка час  $t$ . Такім чынам, калі ваганні працягваюцца доўга, то іх амплітуды неабмежавана ўзрастаюць. Аднак трэба мець на ўвазе, што пры павелічэнні  $t$  дакладнасць формул (2.3.40) і (2.3.41) зніжаецца, паколькі парушаюцца дапушчэнні аб маласці ваганняў. Рашэнне падобных задач разглядаецца ў тэорыі нелінейных ваганняў. Неабходна памятаць, што наяўнасць супраціўлення ў рэальных сістэмах таксама змяняе характар залежнасцяў (2.3.40) і (2.3.41).

Падставім лікавыя дадзеныя. Па формулах (2.3.36) знаходзім:

$$a_1 = 4,8 + 2 (1,02) 0 \cdot - \cdot + -(1,02)^2 \cdot 1,8 = 2,9273,$$

$$a_2 = 4,8 + 2 \cdot 2,61 0 \cdot \cdot + 2,61 1,^2 \cdot 8 = 17,06.$$

Ураўненні ваганняў пры першым і другім рэзанансах прыводзяцца да выгляду

$$\phi = -0,1207 t \cdot \sin 20,93 t + 0,1465 10 \cos 20, \cdot^{-3} 93 t \text{ рад,}$$

$$\psi = 0,1231 \sin 20, t \cdot 93 t + 0,3823 10 \cos 20, \cdot^{-3} 93 t \text{ рад; (2.3.42)}$$

$$\phi = 0,8884 10 \cdot^{-2} t \cdot \sin 124,83 t + 0,3336 10 \cos 124, \cdot^{-3} 83 t \text{ рад,}$$

$$\psi = 0,2319 10 \cdot^{-1} t \cdot \sin 124,83 t - 0,3403 10 \cos 124, \cdot^{-3} 83 t \text{ рад. (2.3.43)}$$

$$\psi = 0,2319 10 \cdot$$

## **2.4 Даследаванне вымушаных ваганняў механічнай сістэмы з адной і дзвюма ступенямі свабоды**

### **Заданне 1 (Д.25)**

Даследуйце вымушаныя ваганні механічнай сістэмы з адной ступенню свабоды пры сілавым (варыянты 2—5, 7—9, 12—15, 17, 18, 20, 22—25, 27, 28, 30) або кінематычным (варыянты 1, 6, 10, 11, 16, 19, 21, 26, 29) узбуджэнні. Схемы механічных сістэм паказаны на рысунках 2.4.1—2.4.3.

Репозиторий БарГУ



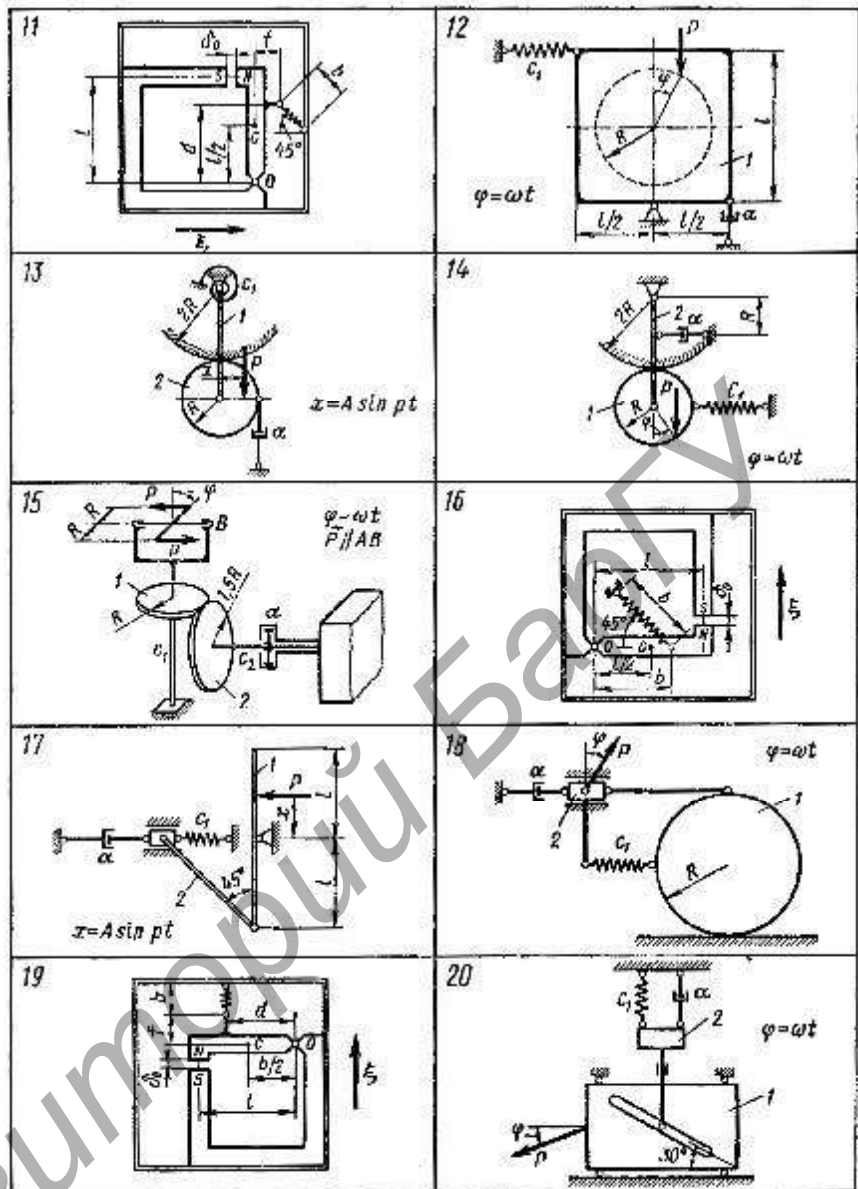


Рисунок 2.4.2

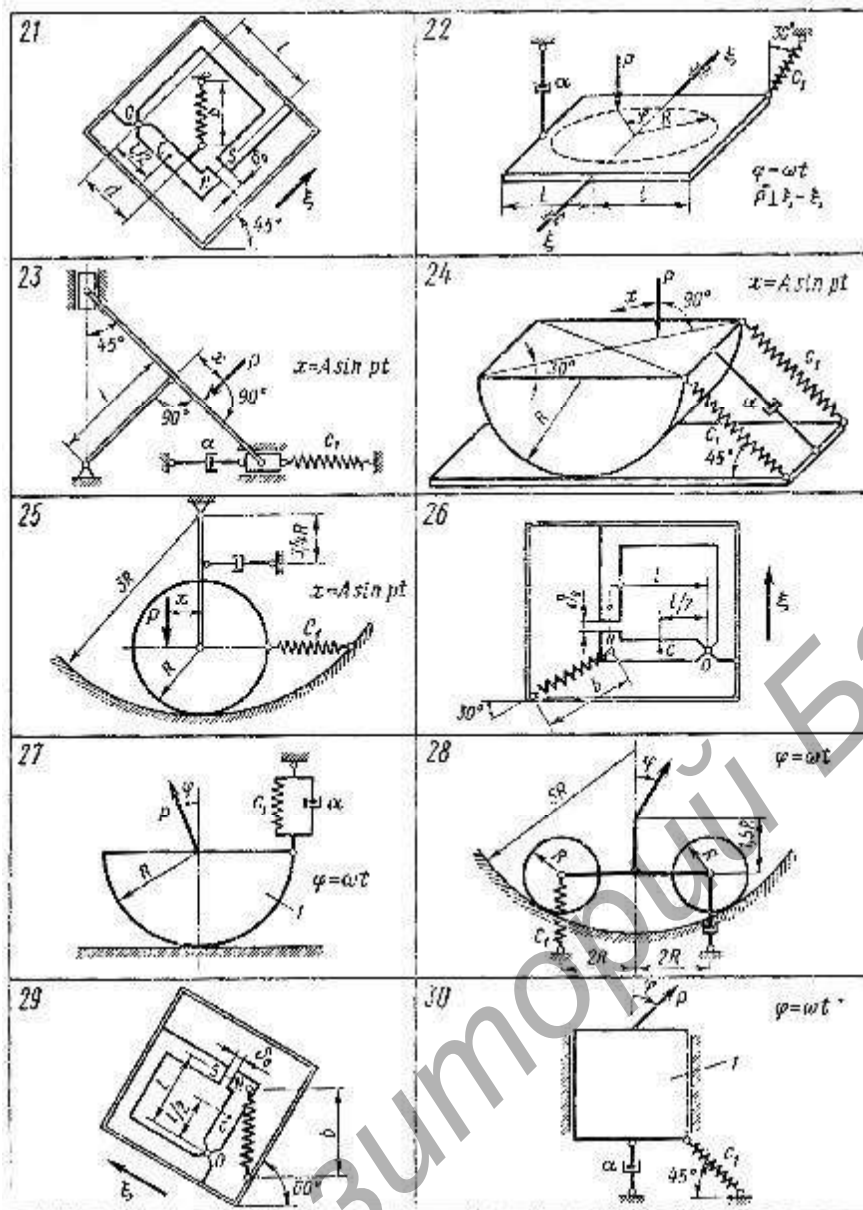


Рисунок 2.4.3

**Сілавое ўзбуджэнне.** Неабходныя звесткі аб параметрах сістэмы і сілавым узбуджэнні прыведзены ў табліцы 2.4.1. Дыспатыўныя ўласцівасці сістэмы зададзены лагарыфмічным дэкрэментам ваганняў.

У варыянтах 9, 23, 30 механічныя сістэмы знаходзяцца ў гарызантальнай плоскасці. У варыянтах 2, 7, 9, 18 спружыны з каэфіцыентам жорсткасці  $c_1$  у палажэнні спакою не дэфармаваны.

Вызначце: 1) каэфіцыент  $\alpha$ , які характарызуе вязкае супраціўленне ў дэмпферы; 2) ураўненне вымушаных ваганняў сістэмы пры зададзенай частаце ўзбуджэння; 3) максімальныя і рэзанансныя значэнні амплітуд змянення абагульненых каардынат, скорасці і паскарэнні пры дапушчэнні, што частата ўзбуджэння можа змяняцца.

*Заўвага.* Ва ўсіх варыянтах колы лічыць суцэльнымі аднароднымі дыскамі; стрыжні — тонкімі аднароднымі; качэнне колаў адбываецца без слізгання.

**Кінематычнае ўзбуджэнне.** Умовы да варыянтаў з кінематычным узбуджэннем 1, 6, 10, 11, 16, 19, 21, 26, 29 прыведзены ў табліцы 2.4.2. Сістэма складаецца з рухомага якара масы  $m$ , які з дапамогай спружыны ўтрымліваецца ў палажэнні спакою (у гэтым палажэнні сістэмы паказаны на рысунках 2.4.1—2.4.3).

Якар лічыць тонкім аднародным стрыжнем. Цэнтр цяжару якара знаходзіцца ў пункце  $C$ . У часе руху якара на яго дзейнічае з боку шарніра момант сіл вязкага супраціўлення, прапарцыянальны да вуглавой скорасці якара (каэфіцыент прапарцыянальнасці  $\beta$ ).

На якар з боку пастаяннага магніта дзейнічае сіла прыцяжэння, накіраваная ўздоўж восі паветранага зазору,

$$F = D / \delta^2,$$

дзе  $D$  — пастаянная;  $\delta$  — велічыня зазору.

Плоскасць чарцяжа супадае з вертыкальнай плоскасцю. Велічыня паветранага зазору ў палажэнні спакою роўна  $\delta_0$ .

Корпус устройства перамяшчаецца паступальна ўздоўж паказанага на чарцяжы напрамку і вібрыруе па закону  $\epsilon = \epsilon_0 \sin pt$ , дзе  $\epsilon_0$  — малая велічыня;  $p$  — цыклічная частата вібрацыі.

Для нармальнага функцыянавання ўстройства неабходна выкананне наступных умоў:

Репозиторий БарГУ

| Нумар варыянта<br>(рыс. 2.4.1—2.4.3) | Маса цап, кг |       |       | Радыус $R$ , м | Адлегласць $l$ , м | Радыус інерцыі $I_x$<br>цэла 1 адносна восі<br>$z$ , м | Кэфіцыент жорсткасці стужкі |          |        |                 | $P, H$ | $A, м$ |
|--------------------------------------|--------------|-------|-------|----------------|--------------------|--|-----------------------------|----------|--------|-----------------|--------|--------|
|                                      | $m$          | $m_2$ | $m_3$ |                |                    |  | $c_1$                       | $c_2$    | $H/cm$ | $H \cdot m/рад$ |        |        |
| 2                                    | 8            | 2     | —     | 0,3            | 0,9                | —  | 50                          | —        | —      | —               | 50     | —      |
| 3                                    | 2            | 4     | —     | 0,2            | —                  | —  | —                           | 2 $10^6$ | —      | 3 $10^6$        | 40     | —      |
| 4                                    | 20           | 5     | 4     | —              | 0,1                | —  | 10                          | —        | —      | —               | 30     | 0,2    |
| 5                                    | 40           | 10    | 20    | 0,4            | —                  | —  | 20                          | —        | —      | —               | 10     | 0,1    |
| 7                                    | 5            | 5     | —     | —              | 0,6                | —  | 15                          | —        | —      | —               | 15     | —      |
| 8                                    | 40           | 30    | —     | —              | —                  | —  | 20                          | —        | —      | —               | 35     | —      |
| 9                                    | 40           | 15    | 10    | 0,3            | —                  | —  | 10                          | —        | —      | —               | 8      | —      |
| 12                                   | 40           | —     | —     | 0,2            | 0,5                | 0,4  | 18                          | —        | —      | —               | 12     | —      |
| 13                                   | 30           | 30    | —     | 0,3            | —                  | —  | —                           | 1 $10^6$ | —      | —               | 25     | 0,4    |
| 14                                   | 20           | 15    | —     | 0,2            | —                  | —  | 12                          | —        | —      | —               | 20     | —      |
| 15                                   | 45           | 30    | —     | 0,3            | —                  | —  | —                           | 2 $10^6$ | —      | 3 $10^6$        | 16     | —      |
| 17                                   | 40           | 30    | —     | —              | 0,4                | —  | 14                          | —        | —      | —               | 24     | 0,1    |
| 18                                   | 50           | 10    | —     | 0,4            | —                  | —  | 10                          | —        | —      | —               | 26     | —      |
| 20                                   | 80           | 20    | —     | —              | —                  | —  | 22                          | —        | —      | —               | 18     | —      |
| 22                                   | 40           | —     | —     | 0,4            | 0,6                | 0,5  | 16                          | —        | —      | —               | 14     | —      |

Табліца 2.4.1

| Р               | ω | Лагарыфічны<br>дэкрэмент |
|-----------------|---|--------------------------|
| с <sup>-1</sup> |   |                          |
| 2π              |   | 0,48                     |
| —               |   | 1,75                     |
| 4π              |   | 0,50                     |
| 4π              |   | 0,40                     |
| 3,5π            |   | 0,35                     |
| 2π              |   | 0,62                     |
| 1,5π            |   | 1,70                     |
| 2,5π            |   | 0,66                     |
| 4,5π            |   | 1,32                     |
| 2,2π            |   | 0,50                     |
| 3π              |   | 1,10                     |
| 2π              |   | 1,08                     |
| 3π              |   | 0,56                     |
| 1,4π            |   | 1,60                     |
| 3,2π            |   | 1,04                     |

Репозиторий БарГУ

| Нумар варыянта<br>(рыс. 2.4.1—2.4.3) | Маса цаг, кг |       |       | Радыус $R$ , м | Адлегласць $l$ , м | Радыус інерцыі $I_x$<br>цэла 1 адносна восі<br>$z$ , м | Кэфіцыент жорсткасці аграўчыны |       |       |       |
|--------------------------------------|--------------|-------|-------|----------------|--------------------|--|--------------------------------|-------|-------|-------|
|                                      | $m$          | $m_x$ | $m_y$ |                |                    |  | $c_1$                          | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ |
| 23                                   | 30           | 15    | —     | —              | 0,4                | —  | 12                             | —     | —     | —     |
| 24                                   | 70           | —     | —     | 0,2            | —                  | —  | 14                             | —     | 30    | —     |
| 25                                   | 10           | 50    | —     | 0,3            | —                  | —  | 25                             | —     | —     | —     |
| 27                                   | 40           | —     | —     | 0,2            | —                  | —  | 14                             | —     | —     | —     |
| 28                                   | 25           | —     | —     | 0,3            | —                  | —  | 15                             | —     | —     | —     |
| 30                                   | 40           | —     | —     | —              | —                  | —  | 12                             | —     | —     | —     |

аБліца 2.4.2

| Нумар варыянта<br>(рыс. 2.4.1—2.4.3) | $m$ , кг | $D \cdot 10^5$<br>$H \cdot m^2$ | $\beta$ , $H \cdot m / c$ | $\delta$   |            | $l$   |       |
|--------------------------------------|----------|---------------------------------|---------------------------|------------|------------|-------|-------|
|                                      |          |                                 |                           | $\delta_1$ | $\delta_2$ | $l_1$ | $l_2$ |
| 1                                    | 0,08     | 1,0                             | 0,009                     | 0,005      | 0,120      | —     | —     |
| 6                                    | 0,09     | 2,0                             | 0,009                     | 0,006      | 0,120      | —     | —     |
| 10                                   | 0,10     | 2,5                             | 0,008                     | 0,008      | 0,090      | —     | —     |
| 11                                   | 0,08     | 1,0                             | 0,008                     | 0,005      | 0,100      | —     | —     |
| 16                                   | 0,15     | 1,5                             | 0,010                     | 0,006      | 0,100      | —     | —     |
| 19                                   | 0,05     | 1,0                             | 0,007                     | 0,007      | 0,080      | —     | —     |
| 21                                   | 0,07     | 1,1                             | 0,080                     | 0,014      | 0,120      | —     | —     |
| 26                                   | 0,12     | 3,6                             | 0,080                     | 0,011      | 0,080      | —     | —     |
| 29                                   | 0,10     | 1,5                             | 0,007                     | 0,006      | 0,120      | —     | —     |

Репозиторий БарГУ

Закінченне табл. 2.4.1

| P <sub>n</sub> | Δ <sub>m</sub> | c <sup>-1</sup> |   | Лагарыфічны<br>дэкрэмент |
|----------------|----------------|-----------------|---|--------------------------|
|                |                | p               | ω |                          |
| 18             | 0,15           | 2,2π            |   | 0,95                     |
| 24             | 0,1            | 3π              |   | 1,62                     |
| 40             | 0,05           | 2,5π            |   | 0,98                     |
| 12             | —              | 1,5π            |   | 1,14                     |
| 18             | —              | 3,2π            |   | 0,86                     |
| 20             | —              | 2,5π            |   | 1,35                     |

| f    | d    | b    |
|------|------|------|
| 0,02 | 0,01 | 0,07 |
| 0,04 | —    | 0,05 |
| —    | —    | 0,07 |
| 0,02 | 0,06 | 0,04 |
| —    | 0,06 | 0,08 |
| 0,03 | 0,06 | 0,05 |
| 0,03 | 0,09 | 0,04 |
| —    | —    | 0,07 |
| —    | —    | 0,06 |

Г

136

1. Амплітуда адноснага перамяшчэння канца якара пры рэзанансе  $A_{\text{рез}}$  ( $p = k$ , дзе  $k$  — цыклічная частата свабодных ваганняў) павінна складаць  $2/3$  велічыні  $\delta_0$ .

2. Амплітуда адноснага перамяшчэння канца якара  $A_\infty$  пры высокіх частотах узбуджэння ( $p \gg k$ ) павінна быць роўна  $1/3$  велічыні  $\delta_0$ .

Улічваючы прыведзеныя абмежаванні, вызначце:

1. Цыклічную частату малых свабодных ваганняў якара.
2. Статычную дэфармацыю  $\lambda_0$  і каэфіцыент жорсткасці  $c_1$  спружыны.
3. Максімальна дапушчальную велічыню  $\epsilon_0$  амплітуды вібрацыі корпуса прыбора.
4. Максімальную амплітуду вымушаных ваганняў якара.

Неабходныя для расэння дадзеныя прыведзены ў табліцы 2.4.2.

#### Заданне 4 (Д.26)

Механічная сістэма з двума ступенямі свабоды знаходзіцца пад дзеяннем сілавога гарманічнага ўзбуджэння ў выглядзе сілы  $P = P_0 \cos pt$  або моманту  $M = M_0 \cos pt$ . Даследуйце вымушаныя ваганні сістэмы, пры гэтым супраціўленнем ігнаруйце.

Схемы механічных сістэм у палажэнні спакою паказаны на рысунках 1.8.4—1.8.6. Неабходныя звесткі аб інерцыйных і пругкіх уласцівасцях сістэмы і яе размеры прыведзены ў табліцы 1.8.2. Масы спружын і валаў не ўлічваюць.

У табліцы 2.4.3 дадзены звесткі, да якога з цел сістэмы прыкладзена ўзбуджальная сіла  $P$  або пара сіл з момантам  $M$ . Лінія дзеяння сілы  $P$  ва ўсіх выпадках праходзіць праз цэнтр цяжару цела, да якога яна прыкладзена. У працэсе ваганняў лінія дзеяння сілы застаецца або вертыкальнай, або гарызантальнай.

Пара сіл з момантам  $M$  знаходзіцца ў плоскасці ваганняў цела, да якога яна прыкладзена. Ва ўсіх варыянтах дадатны напрамак сілы  $P$  і моманта  $M$ , якія змяняюцца па гарманічнаму закону, можна выбраць адвольна.

У таблиці 2.4.3 надана лінійна або вуглова перамяшчэнне ад палажэння спакою для цела, да якога прыкладзена сілавое ўзбуджэнне, пры гэтым уздзеянні лічацца пастаяннымі:  $P = P_0$ ,  $M = M_0$  (выпадак нулявой частаты змянення сілы альбо моманту).

Для сістэм, якія знаходзяцца пад дзеяннем сілы, перамяшчэнне задаецца ўздоўж яе лініі дзеяння, а для сістэм, што знаходзяцца пад дзеяннем пары сіл, задаецца вуглавое перамяшчэнне ў плоскасці дзеяння гэтай пары сіл.

Табліца — 2.4.3

| Нумар варыянта (рыс. 10.1–10.3) | Від узбуджэння | Нумар цела, да якога прыкладзена узбуджэнне | Лінія дзеяння сілы $P$ | Лінейнае перамяшчэнне пры $P = P_0$ , м | Вуглавое перамяшчэнне пры $M = M_0$ , рад |
|---------------------------------|----------------|---|------------------------|---|---|
| 1                               | М              | 1   | —                      | —                                       | 0,100                                     |
| 2                               | М              | 3   | —                      | —                                       | 0,100                                     |
| 3                               | Р              | 1   | Вертыкальна            | 0,002                                   | —   |
| 4                               | М              | 2   | —                      | —                                       | 0,005                                     |
| 5                               | М              | 1   | —                      | —                                       | 0,200                                     |
| 6                               | Р              | 1   | Гарызантальна          | 0,001                                   | —   |
| 7                               | Р              | 1   | Тое ж                  | 0,002                                   | —   |
| 8                               | Р              | 1   | >>                     | 0,001                                   | —   |
| 9                               | М              | 1   | —                      | —                                       | 0,005                                     |
| 10                              | М              | 1   | —                      | —                                       | 0,100                                     |
| 11                              | Р              | 1   | Вертыкальна            | 0,001                                   | —   |
| 12                              | Р              | 1   | Тое ж                  | 0,002                                   | —   |
| 13                              | Р              | 3   | Гарызантальна          | 0,003                                   | —   |
| 14                              | Р              | 2   | Вертыкальна            | 0,001                                   | —   |
| 15                              | М              | 1   | —                      | —                                       | 0,100                                     |
| 16                              | М              | 1   | —                      | —                                       | 0,200                                     |
| 17                              | М              | 2   | —                      | —                                       | 0,005                                     |
| 18                              | Р              | 2   | Гарызантальна          | 0,002                                   | —   |
| 19                              | М              | 1   | —                      | —                                       | 0,005                                     |
| 20                              | Р              | 2   | Вертыкальна            | 0,001                                   | —   |
| 21                              | М              | 1   | —                      | —                                       | 0,100                                     |
| 22                              | М              | 2   | —                      | —                                       | 0,005                                     |
| 23                              | Р              | 1   | Гарызантальна          | 0,003                                   | —   |
| 24                              | М              | 1   | —                      | —                                       | 0,100                                     |
| 25                              | Р              | 2   | Вертыкальна            | 0,005                                   | —   |
| 26                              | М              | 1   | —                      | —                                       | 0,200                                     |
| 27                              | Р              | 1   | Гарызантальна          | 0,004                                   | —   |
| 28                              | Р              | 1   | Тое ж                  | 0,003                                   | —   |
| 29                              | Р              | 2   | >>                     | 0,002                                   | —   |

|    |   |   |   |   |       |
|----|---|---|---|---|-------|
| 30 | M | 1 | — | — | 0,005 |
|----|---|---|---|---|-------|

(Прыклады выканання задання прыведзены ў раздзеле 2.2.3 і ў дапаможніку [1, с. 345–352]).

### Пасляслоўе

Вы выканалі цыкл складаных заданняў Д.23—Д.26, але не спяшайцеся здаць работы выкладчыку. Працу з заданнямі неабходна працягнуць, таму што асноўная мэта Вашай работы заключаецца не ў атрыманні лікавых значэнняў частот ці амплітуд. Вам неабходна зразумець сутнасць такой распаўсюджанай і складанай з’явы, як механічныя ваганні, і цвёрда засвоіць методыку іх даследавання. Сапраўды, ці можаце Вы вось зараз знайсці палажэнне, скорасць і напрамак руху асобных частак ужо даследаванай Вамі механічнай сістэмы ў зададзены момант часу? Да якіх формул для гэтага патрэбна звярнуцца?

Каб дасягнуць мэты, якая пастаўлена вучэбнай праграмай, патрэбна яшчэ раз дапытліва прааналізаваць ужо атрыманыя рэзультаты. Цяпер гэта не зойме шмат часу. Звярніце асаблівую ўвагу на сістэмы з дзвюма ступенямі свабоды.

Яшчэ раз удумайцеся ў вынікі, перанясіце іх мысленна на механічную сістэму і ўявіце адпаведны рух. Вярніцеся, у прыватнасці, да графікаў (рыс. 2.3.3, *гл.* с. 123 (для Вашай сістэмы яны будуць адрознівацца, але не прынцыпова)). Чаму на графіках амплітуды ваганняў фігуруюць як алгебраічныя велічыні, гэта значыць маюць знакі плюс і мінус? Гэта супярэчыць азначэнню паняцця амплітуда. Адказ на гэта пытанне Вы ўжо далі пры аналізе графікаў, яшчэ раз усё асэнсуйце. Задумайцеся над разрывамі графікаў пры  $p = k_1$  і  $p = k_2$ . Ці адпавядаюць яны рэальнасці? А як уплывае супраціўленне на рэзанансныя ваганні, на зрух фазы? Пастаўце сабе падобныя пытанні і па іншых выніках. Звярніце ўвагу на вельмі важную для практыкі з’яву антырэзанансу.

Разгледжаная методыка даследавання вымушаных ваганняў сістэм з дзвюма ступенямі свабоды пераносіцца без змены на сістэмы з адвольным лікам ступеняў свабоды  $n$ . Апошнія маюць  $n$  уласных частот ваганняў  $i$ , значыць,  $n$  значэнняў крытычных частот узбуджальных фактараў.

### СПИС КРЫНЦ

1. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учеб. пособие / под. ред. А. А. Яблонского. — М. : Высш. шк., 1985. — 467 с.
2. *Никити, Н. Н.* Курс теоретической механики : учебник / Н. Н. Никитин. — М. : Высш. шк., 1990. — 607 с.
3. *Бутенин, Н. В.* Введение в теорию нелинейных колебаний : учеб. пособие / Н. В. Бутенин, Ю. А. Неймарк, Н. А. Фуфаев. — М. : Наука, 1976. — 384 с.
4. *Яблонский, А. А.* Курс теории колебаний : учеб. пособие / А. А. Яблонский, С. С. Нореико. — М. : Высш. шк., 1975. — 248 с.
5. *Бабаков, И. М.* Теория колебаний : учеб. пособие / И. М. Бабаков. — М. : Наука, 1965. — 628 с.
6. *Кузьмин, П. А.* Малыя колебания и устойчивость движения : учеб. пособие / П. А. Кузьмин — М. : Наука, 1973. — 206 с.

Репозиторий БарГУ

*Вучэбнае выданне*

**Русан Сяргей Іванавіч**

**ВАГАННІ  
МЕХАНІЧНЫХ СІСТЭМ**

**Вучэбна-метадычны дапаможнік для студэнтаў  
тэхнічных спецыяльнасцей  
вышэйшых навучальных устаноў**

Тэхнічны рэдактар: *І. А. Голуб*  
Камп'ютэрная вёрстка *Ю. В. Хохол*

Адказы за выпуск: *А. Г. Хохол*

Падпісана ў друк 25.11.2008.

Фармат 60 × 84 1/16. Папера афсетная.  
Гарнітура Таймс. Аддрукавана на рызографе.  
Ум. друк. арк. 8,37. Ул.-выд. арк. 7,90.  
Заказ 59. Тыраж экз.

ЛВ 02330/0133486 ад 09.02.2005

Видаец і паліграфічнае выкананне: установа адукацыі  
«Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт»,  
225404 г. Баранавічы, вул. Войкава, 21

142

Репозиторий БарГУ

Репозиторий БарГУ