Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Барановичский государственный университет»
Студенческое научное общество БарГУ

СОДРУЖЕСТВО НАУК. БАРАНОВИЧИ-2016

Материалы XII Международной
научно-практической конференции
молодых исследователей

(Барановичи, 19—20 мая 2016 года)

В трёх частях

Часть 2

Барановичи
БарГУ
2016

УДК 001(082)

В части 2 сборника материалов XII Международной научно-практической конференции молодых исследователей «Содружество наук. Барановичи-2016» представлены результаты исследований в области физики и математики, а также рассмотрены актуальные проблемы в области информационных систем и технологий в образовании, науке и технике. Особое внимание уделено современным тенденциям в технологиях и материалах машиностроительного и сельскохозяйственного производств, а также экономическим аспектам развития предприятия, региона.

Сборник адресован научным работникам, аспирантам, магистрантам и студентам инженерных и экономических специальностей учреждений высшего образования.

Рецензент

кандидат технических наук, заведующий лабораторией механофизики гетерогенных систем Государственного научного учреждения «Физико-технический институт Национальной академии наук» А. М. Милюкова

Научное издание

СОДРУЖЕСТВО НАУК.
БАРАНОВИЧИ-2016

Материалы XII Международной
научно-практической конференции
молодых исследователей

(Барановичи, 19—20 мая 2016 года)

На русском, белорусском, английском языках

В трёх частях

Часть 2

Ответственный за выпуск Е. Г. Хохол
Технический редактор А. Ю. Сидоренко
Компьютерная вёрстка С. М. Глушак
Корректор Н. Н. Колодко

Подписано в печать 04.10.2016. Формат 60 × 84 $^{1}/_{8}$. Бумага ксероксная.
Отпечатано на копировально-множительной технике. Усл. печ. л. 28,00. Уч.-изд. л. 25,10. Тираж 9 экз. Заказ 681.

Учреждение образования «Барановичский государственный университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя № 1/424 от 09.09.2016.
Ул. Войкова, 21, 225404 г. Барановичи. Тел. 8 (0163) 45 46 28, e-mail: rio@barsu.by .

ISBN 978-985-498-736-1 (ч. 2)
ISBN 978-985-498-734-7

ФИЗИКА. МАТЕМАТИКА

УДК 517.518.456

И. Н. Бруй
Учреждение образования «Барановичский государственный университет», Барановичи

СРЕДНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ И ПРОСТРАНСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
Стендовый доклад

Введение. Двусторонняя функциональная последовательность $\left(e^{inx}\right)_{n=-\infty}^{\infty}$ называется тригонометрической системой, а двусторонний функциональный ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \qquad (1)$$

называется тригонометрическим рядом.

Если функция $f \in \mathbf{L}^1(T)$, то двусторонняя числовая последовательность $\left(\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt\right)_{n=-\infty}^{\infty}$ называется последовательностью тригонометрических коэффициентов Фурье функции f, а тригонометрический ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\, e^{inx} \qquad (2)$$

называется тригонометрическим рядом Фурье функции f. В обозначениях и терминологии мы стремимся следовать двухтомной монографии Р. Эдвардса [1]. Оператор присваивания «$:=$» означает, что правой части присвоено обозначение, стоящее слева от него.

Не всякий тригонометрический ряд является рядом Фурье некоторой функции $f \in \mathbf{L}^1(T)$. Классический пример: тригонометрический ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{inx}$ не является тригонометрическим рядом Фурье никакой функции $f \in \mathbf{L}^1(T)$, ибо в противном случае её тригонометрические коэффициенты Фурье по теореме Римана—Лебега [2] стремились бы к нулю с возрастанием модуля их номера, что не так: $\lim_{|n|\to\infty} 1 \neq 0$.

Автор свои работы [3] начинал с тригонометрического ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn} n}{\ln\left(|n|+2\right)} e^{inx}, \qquad (3)$$

который в каждой точке x вещественной прямой R имеет конечную сумму $s(x)$ и который не является рядом Фурье ни своей суммы s, ни другой функции $f \in \mathbf{L}^1(T)$ [4]. Сумма этого ряда $s \notin \mathbf{L}^1(T)$, ибо в противном случае ряд (3) по теореме Дюбуа-Реймона и Валле Пуссена [5] являлся бы рядом Фурье своей суммы s.

Тригонометрический ряд (3) мотивирует постановку следующих трёх трудных и важных проблем: 1) при каких условиях сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы; 2) какое надо ввести понятие интеграла, чтобы каждый сходящийся в конкретном смысле тригонометрический ряд являлся бы рядом Фурье в смысле введённого интеграла; 3) когда тригонометрический ряд является рядом Фурье функции из заранее заданного пространства периодических функций.

Настоящий стендовый доклад посвящён третьей из вышеназванных проблем.

Средние Фейера тригонометрических рядов и пространства периодических функций. Дюбуа-Реймон (1873 г.) явно построил на вещественной прямой R непрерывную и периодическую с периодом 2π функцию f_1 такую, что последовательность симметричных частичных сумм её тригонометрического ряда Фурье

$$\forall N \in Z_+ \;\; s_N f_1(x) := \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}_1(n)\, e^{inx}$$

не является ограниченной в точке x равной 0 (и тем более не сходится в точке x равной 0): $\exists f_1 \in \mathbf{C}(T)$ $\sup_{N\in Z_+} |s_N f_1(0)| = \infty$ [6].

Теорию суммируемости расходящихся числовых рядов применил к тригонометрическим рядом Фурье первым Л. Фейер [7]. Он доказал, что средние

$$\forall N \in Z_+ \;\; \sigma_N f(x) := \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} s_n f(x) = \sum_{n=-N}^{N}\left(1-\left|\frac{n}{N+1}\right|\right)\hat{f}(n)\, e^{inx} \tag{4}$$

тригонометрического ряда Фурье любой на вещественной прямой R непрерывной и периодической с периодом 2π функции f равномерно сходятся на R к ней:

$$\forall f \in \mathbf{C}(T) \;\; \lim_{N\to\infty} \max_{-\pi\le x\le\pi} |f(x) - \sigma_N f(x)| = 0\,. \; (5) \tag{5}$$

Заметим, что в оригинале публикации [8] её автором указан Тейер: не Fejér, а Tejér. Опечатка свидетельствует о том, что в то время никому не известный 20-летний математик мог опубликовать свои результаты в докладах Академии наук.

Будем писать $(1) \in \mathbf{F}(T)$, если тригонометрический ряд (1) является рядом Фурье (2) некоторой функции f из определённого подпространства $\mathbf{F}(T)$ пространства $\mathbf{L}^1(T)$: $(1) \in \mathbf{F}(T) \;\Leftrightarrow\;$ «$\exists f \in \mathbf{F}(T)\;\; \forall n \in Z \;\; c_n = \hat{f}(n)$».

Результат Л. Фейера (5) нам удобно привести в следующей форме [9].

Теорема 1. *Для того чтобы тригонометрический ряд (1) являлся рядом Фурье (2) функции f из сепарабельного полного комплексного пространства $\mathbf{C}(T)$ на вещественной прямой R непрерывных и периодических с периодом 2π функций, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его средних Фейера*

$$\left(\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\left|\frac{n}{N+1}\right|\right)c_n\, e^{inx}\right)_{N=0}^{\infty} \tag{6}$$

сходилась в $\mathbf{C}(T)$: $(1) \in \mathbf{C}(T) \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{\substack{M\to\infty\\N\to\infty}} \max\limits_{-\pi\le x\le\pi}\left|\sum_{n=-M}^{M}\left(1-\left|\frac{n}{M+1}\right|\right)c_n\, e^{inx} - \sum_{n=-N}^{N}\left(1-\left|\frac{n}{N+1}\right|\right)c_n\, e^{inx}\right| = 0,$ *при этом норма функции* $\|f\|_{\mathbf{C}(T)} = \sup_{N\in Z_+} \max_{-\pi\le x\le\pi}\left|\sum_{n=-N}^{N}\left[1-|n|(N+1)^{-1}\right]c_n\, e^{inx}\right|$.

Будем говорить, что измеримая на вещественной прямой R функция f является 2π-периодической, если $\forall x \in R \setminus E \;\; f(x+2\pi) = f(x)$, где множество E имеет линейную лебеговую меру нуль.

Ряды Фурье (2) могут вводиться двумя путями. Первым путём Эйлера—Фурье шёл к своему результату Л. Фейер. Вторым путём И. Грама практически одновременно Фридьеш Рисс [10, с. 616] и Э. Фишер [11, с. 1 023] получили следующий результат [12].

Теорема 2. *Для того чтобы тригонометрический ряд (1) являлся рядом Фурье (2) некоторой функции f из сепарабельного полного комплексного пространства Гильберта $\mathbf{L}^2(T)$ измеримых и 2π-периодических функций с интегрируемым по Лебегу на отрезке длины периода квадратом их модуля, необходимо и достаточно, чтобы вещественный двусторонний ряд из квадратов модулей его коэффициентов*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \tag{7}$$

сходился, при этом полунорма функции $\|f\|_{\mathbf{L}^2(T)} = \left\|(c_n)_{n=-\infty}^{\infty}\right\|_{l^2(Z)}$.

Фундаментальная теорема Рисса—Фишера кратко записывается так:

$$(1) \in \mathbf{L}^2(T) \;\Leftrightarrow\; (c_n)_{n=-\infty}^{\infty} \in l^2(Z)\,. \tag{8}$$

Согласно равенству Парсеваля для тригонометрических полиномов [13]

$$\forall N \in Z_+ \;\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\left|\frac{n}{N+1}\right|\right)c_n\, e^{inx}\right|^2 dx = \sum_{n=-N}^{N}\left(1-\left|\frac{n}{N+1}\right|\right)^2 |c_n|^2\,. \tag{9}$$

Отсюда, с одной стороны, так как $\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\left|\frac{n}{N+1}\right|\right)^2|c_n|^2 \le \sum_{n=-N}^{N}|c_n|^2 \le \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$, имеем

$$\sup_{N\in Z_+}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\left|\frac{n}{N+1}\right|\right)c_n e^{inx}\right|^2 dx \le \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2. \tag{10}$$

Из равенства Парсеваля (9), с другой стороны, для произвольного неотрицательного целого числа M и всех номеров $N>M$ имеем $\sum_{n=-M}^{M}\left(1-\left|\frac{n}{N+1}\right|\right)^2|c_n|^2 \le \sup_{N\in Z_+}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\left|\frac{n}{N+1}\right|\right)c_n e^{inx}\right|^2 dx.$ Отсюда при $N\to\infty$ по теореме о сохранении нестрогого неравенства при предельном переходе получаем $\forall M\in Z_+$ $\sum_{n=-M}^{M}|c_n|^2 \le \sup_{N\in Z_+}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\left|\frac{n}{N+1}\right|\right)c_n e^{inx}\right|^2 dx.$

Так как последнее нестрогое неравенство справедливо для любого неотрицательного целого числа M, то согласно теореме Вейерштрасса о пределе монотонной и ограниченной последовательности

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 \le \sup_{N\in Z_+}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\left|\frac{n}{N+1}\right|\right)c_n e^{inx}\right|^2 dx. \tag{11}$$

Из нестрогих неравенств (10) и (11) следует, что верхняя грань

$$\sup_{N\in Z_+}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\left|\frac{n}{N+1}\right|\right)c_n e^{inx}\right|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2. \tag{12}$$

В силу установленного равенства (12) теорему Рисса—Фишера (8) можно записать также в виде

$$(1)\in \mathbf{L}^2(T) \iff \sup_{N\in Z_+}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\left|\frac{n}{N+1}\right|\right)c_n e^{inx}\right|^2 dx<\infty. \tag{13}$$

У. Юнг и Дж. Юнг распространили [14, с. 57] утверждение (13) с показателя $p=2$ на все показатели $1<p<\infty$. Они доказали следующую теорему [15].

Теорема 3. *При показателе $1<p<\infty$ для того чтобы тригонометрический ряд (1) являлся рядом Фурье (2) некоторой функции f из сепарабельного полного комплексного пространства Ф. Рисса $\mathbf{L}^p(T)$ измеримых и 2π-периодических функций с интегрируемой по Лебегу на отрезке длины периода p-ой степенью их модуля, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его средних Фейера (6) была ограниченной в $\mathbf{L}^p(T)$:*

$$(1)\in \mathbf{L}^{p\in(1,\infty)}(T) \iff \sup_{N\in Z_+}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\left|\frac{n}{N+1}\right|\right)c_n e^{inx}\right|^p dx<\infty \tag{14}$$

или, что равносильно, чтобы последовательность его средних Фейера (6) сходилась в $\mathbf{L}^p(T)$:

$$(1)\in \mathbf{L}^{p\in(1,\infty)}(T) \iff \lim_{\substack{M\to\infty\\ N\to\infty}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=-M}^{M}\left(1-\left|\frac{n}{M+1}\right|\right)c_n e^{inx}-\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\left|\frac{n}{N+1}\right|\right)c_n e^{inx}\right|^p dx=0,$$

при этом полунорма функции $\|f\|_{\mathbf{L}^p(T)}=\sup_{N\in Z_+}\left\{(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=-N}^{N}\left[1-|n|(N+1)^{-1}\right]c_n e^{inx}\right|^p dx\right\}^{1/p}.$

Каждая сходящаяся последовательность элементов метрического пространства ограничена в нём. На примере ограниченно колеблющейся последовательности $\left((-1)^N\right)_{N=0}^{\infty}$ видно, что обращение предыдущего утверждения в общем случае является ложным.

По теореме 3 в сепарабельных полных комплексных пространствах Ф. Рисса $\mathbf{L}^p(T)$, $1<p<\infty$, ограниченность последовательности средних Фейера (6) равносильна её сходимости. Естественно изучить, в каких функциональных пространствах ограниченность последовательности равносильна её сходимости. Ведь было выяснено, в каких нормированных пространствах элемент наилучшего приближения единственен.

Случай левого для теоремы 3 значения показателя $p=1$ рассмотрели В. Гросс [16] и Г. Штейнгауз [17]. Они получили следующий результат [18].

Теорема 4. *Для того чтобы тригонометрический ряд (1) являлся рядом Фурье (2) некоторой функции f из сепарабельного полного комплексного пространства Г. Штейнгауза $\mathbf{L}^1(T)$ измеримых и 2π-периодических интегрируемых по Лебегу на отрезке длины периода функций, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его средних Фейера (6) сходилась в $\mathbf{L}^1(T)$:*

$$(1)\in\mathbf{L}^1(T) \;\Leftrightarrow\; \lim_{\substack{M\to\infty\\ N\to\infty}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=-M}^{M}\left(1-\left|\frac{n}{M+1}\right|\right)c_n\,e^{inx}-\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\left|\frac{n}{N+1}\right|\right)c_n\,e^{inx}\right|dx=0\,.$$

Тригонометрический ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty}1\cdot e^{inx}$ не является тригонометрическим рядом Фурье никакой функции $f\in\mathbf{L}^1(T)$, хотя полунормы всех средних Фейера этого классического ряда в $\mathbf{L}^1(T)$ равны единице [19]:

$$\forall N\in Z_+\;\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\left|\frac{n}{N+1}\right|\right)e^{inx}\right|dx=\frac{1}{2\pi\,(N+1)}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{\sin\left[(N+1)\,\frac{x}{2}\right]}{\sin\frac{x}{2}}\right\}^2dx=1\,.$$

Итак, ограниченность средних Фейера тригонометрического ряда (1) в пространстве $\mathbf{L}^1(T)$ не влечёт то, что ряд (1) является рядом Фурье (2). Другими словами, равносильность в теореме 3 не распространяется с показателей $1<p<\infty$ на левое значение показателя $p=1$.

Пространство $\mathbf{L}^\infty(T)$ не является сепарабельным [20]. Случай правого для теоремы 3 значения показателя $p=\infty$ рассмотрел У. Юнг [21, с. 574] и получил следующий результат [22].

Теорема 5. *Для того чтобы тригонометрический ряд (1) являлся рядом Фурье (2) некоторой функции f из несепарабельного полного комплексного пространства $\mathbf{L}^\infty(T)$ измеримых и 2π-периодических существенно ограниченных на отрезке длины периода функций, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его средних Фейера (6) была ограниченной в пространстве $\mathbf{C}(T)$:*

$$(1)\in\mathbf{L}^\infty(T) \;\Leftrightarrow\; \sup_{N\in Z_+}\max_{-\pi\le x\le\pi}\left|\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\left|\frac{n}{N+1}\right|\right)c_n\,e^{inx}\right|<\infty, \tag{15}$$

при этом полунорма функции $\|f\|_{\mathbf{L}^\infty(T)}=\sup_{N\in Z_+}\max_{-\pi\le x\le\pi}\left|\sum_{n=-N}^{N}\left[1-|n|\,(N+1)^{-1}\right]c_n\,e^{inx}\right|$.

Мы указывали выше, что теоремы 1—5 для классических комплексных пространств функций

$$\mathbf{C}(T)\underset{\neq}{\subset}\mathbf{L}^\infty(T)\underset{\neq}{\subset}\mathbf{L}^q(T)\underset{\neq}{\subset}\mathbf{L}^2(T)\underset{\neq}{\subset}\mathbf{L}^p(T)\underset{\neq}{\subset}\mathbf{L}^1(T)\,, \tag{16}$$

где показатели $1<p<2$ и $2<q<\infty$, приведены в настольных монографиях Н. К. Бари [23] и А. Зигмунда [24]. Первое издание последней монографии вышло в 1935 г. в то время польском городе Вильно.

В 1961 г. в своих исследованиях по теории дифференциальных уравнений в частных производных Ф. Джон и Л. Ниренберг [25] ввели пространства **BMO** функций ограниченной средней осцилляции (ограниченного среднего колебания). Обозначение **BMO** от английских слов “bounded mean oscillation”.

По определению [26] вещественная функция $f \in \mathbf{L}^1(T)$ принадлежит пространству $\mathbf{BMO}(T)$, если конечна её $*$-полунорма

$$\|f\|_* := \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I \left| f(x) - \frac{1}{|I|} \int_I f(t)\, dt \right| dx, \tag{17}$$

где верхняя грань берётся по всем отрезкам $I \subset R$ и где $|I|$ есть длина отрезка I. Очевидно, что $\|\mathrm{const}\|_* = 0$. Норма $\|f\|_{\mathbf{BMO}(T)} := \|f\|_{\mathbf{L}^1(T)} + \|f\|_*$. Когда функция $f \in \mathbf{L}^\infty(T)$, то $\|f\|_* \le 2\|f\|_{\mathbf{L}^\infty(T)}$.

Вещественная функция $f \in \mathbf{C}(T)$ обладает свойством $\exists t_0 \in I \quad \int_I f(t)\, dt = f(t_0) \cdot |I|$, геометрически означающим, что площадь (в смысле Ф. Клейна) криволинейной трапеции равна площади прямоугольника с тем же основанием и высотой, равной значению функции в некоторой внутренней точке отрезка интегрирования. Так как для комплексной функции $e^{it} = \cos t + i \sin t$ вещественного переменного t всегда её модуль $\left|e^{it}\right| = 1$, то она вышеуказанным свойством не обладает, не смотря на то, что $\int_{-\pi}^{\pi} e^{it}\, dt = 0.$

Хотя [27, с. 14, (4)] $\forall f \in \mathbf{L}^\infty(T) \quad \lim_{p\to\infty} \|f\|_{\mathbf{L}^p(T)} = \|f\|_{\mathbf{L}^\infty(T)}$, между вещественным пространством $\mathbf{L}^\infty(T)$ и пересечением вещественных пространств Ф. Рисса $\bigcap_{1<p<\infty} \mathbf{L}^p(T)$ имеется зазор, в котором находится пространство $\mathbf{BMO}(T)$: $\mathbf{L}^\infty(T) \underset{\neq}{\subset} \mathbf{BMO}(T) \underset{\neq}{\subset} \bigcap_{1<p<\infty} \mathbf{L}^p(T)$. Неограниченная вещественная периодическая с периодом 2π функция

$$f_2(x) := \begin{cases} \ln|x|, \text{ когда } x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]; \\ 0, \text{ когда } x = 0 \end{cases} \tag{18}$$

принадлежит [28] разности $\mathbf{BMO}(T) \setminus \mathbf{L}^\infty(T)$, а неограниченная вещественная 2π-периодическая функция

$$f_3(x) := \begin{cases} \ln x, \text{ когда } x \in (0, \pi]; \\ 0, \text{ когда } x \in (-\pi, 0] \end{cases}$$

принадлежит [29] разности $\bigcap_{1<p<\infty} \mathbf{L}^p(T) \setminus \mathbf{BMO}(T)$.

Тригонометрический ряд (1) будет вещественным тогда, и только тогда, когда $\forall n \in Z_+ \quad \overline{c_n} = c_{-n}$, где горизонтальная черта вверху означает комплексное сопряжение. Действительно, в этом случае $c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int} = c_n (\cos nt + i \sin nt) + \overline{c_n} (\cos nt - i \sin nt) = \left(c_n + \overline{c_n}\right) \cos nt + i \left(c_n - \overline{c_n}\right) \sin nt \in R$.

Теорема 6. *Для того чтобы вещественный тригонометрический ряд (1) являлся рядом Фурье (2) некоторой вещественной функции f ограниченной средней осцилляции, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $*$-полунорм (17) его средних Фейера (6) была ограниченной:*

$$(1) \in \mathbf{BMO}(T) \;\Leftrightarrow\; \sup_{N \in Z_+} \left\| \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \left|\frac{n}{N+1}\right|\right) c_n e^{inx} \right\|_* < \infty, \tag{19}$$

при этом $*$-полунорма функции $\|f\|_* = \sup_{N \in Z_+} \left\| \sum_{n=-N}^{N} \left[1 - |n| (N+1)^{-1}\right] c_n e^{inx} \right\|_*$. Далее, для типичной функции ограниченной средней осцилляции (18) справедлива оценка снизу

$$\inf_{N \in Z_+} \| f_2 - \sigma_N f_2 \|_* \ge \frac{1}{2e}, \tag{20}$$

где e — основание натурального логарифма.

Автор доказал (19), т. е. первую часть теоремы 6, в [30]. При этом доказательство репликации (19) опиралось в [31] на свойства мажоранты модуля средних Фейера $\sigma^* f(x) := \sup_{N \in Z_+} |\sigma_N f(x)|$ (на терему Харди—Литтлвуда [32]), а в [33, с. 138—139] на свойства мажоранты модуля симметричных частичных сумм $s^* f(x) := \sup_{N \in Z_+} |s_N f(x)|$ (на фундаментальную теорему Карлесона — Ханта [34]).

Доказательство оценки снизу (20) имеется в работе автора [35].

Пусть вещественная функция $f \in \mathbf{L}^1(T)$ и вещественное число $\delta > 0$. Положим $M_\delta(f) := \sup_{|I| \le \delta} \frac{1}{|I|} \int_I \left| f(x) - \frac{1}{|I|} \int_I f(t)\, dt \right| dx$. Согласно Сарасону [36] функция f имеет исчезающую среднюю осцилляцию (vanishing mean oscillation), если $\lim_{\delta \to 0+0} M_\delta(f) = 0$. Пишут $f \in \mathbf{VMO}(T)$. Очевидно, что $*$-полунорма (17) $\|f\|_* = \lim_{\delta \to 2\pi - 0} M_\delta(f)$. Также очевидно, что $\mathbf{C}(T) \subset \mathbf{VMO}(T) \subset \mathbf{BMO}(T)$. Автором получен [37] следующий результат.

Теорема 7. *Для того чтобы вещественный тригонометрический ряд (1) являлся рядом Фурье (2) некоторой вещественной функции f исчезающей средней осциляции, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его средних Фейера (6) сходилась в $*$-полунорме (17).*

Сравните необходимое условие в теореме 7 с оценкой снизу (20).

Итак, автор, во-первых, установил аналогию между сепарабельным полным пространством $\mathbf{C}(T)$ и пространством Сарасона $\mathbf{VMO}(T)$: тригонометрический ряд (1) принадлежит $\mathbf{C}(T)$ или $\mathbf{VMO}(T)$, если его средние Фейера (6) сходятся соответственно в $\mathbf{C}(T)$ или в $*$-полунорме (17); во-вторых, установил аналогию между несепарабельным полным пространством $\mathbf{L}^\infty(T)$ и пространством Джона—Ниренберга $\mathbf{BMO}(T)$: тригонометрический ряд (1) принадлежит $\mathbf{L}^\infty(T)$ или $\mathbf{BMO}(T)$, если его средние Фейера (6) ограничены соответственно в $\mathbf{C}(T)$ или в $*$-полунорме (17).

Подобно тому как естественным обобщением пространства Гильберта $\mathbf{L}^2(T)$ явились пространства Ф. Рисса $\mathbf{L}^p(T)$, $1 < p < \infty$, так и естественным обобщением последних являются пространства В. Орлича $\mathbf{L}^\varphi(\dot{O})$.

Пусть на вещественной прямой R задана неотрицательная вещественная функция ϕ. Функция $\phi: R \to [0, \infty)$ называется выпуклой на R, если для любых двух точек x_1 и x_2 вещественной прямой R выполняется условие $\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2)}{2}$. Геометрически это означает, что середина любой хорды графика функции ϕ лежит либо над графиком функции, либо на нём. В нашем случае «выпуклость» влечёт «непрерывность».

Выпуклая функция $\phi: R \to [0, \infty)$ называется функцией Юнга, если она 1) чётная: $\forall x \in R$ $\phi(-x) = \phi(x)$; 2) обращается в нуль в начале координат: $\phi(0) = 0$, 3) бесконечно большая при $x \to \infty$: $\lim_{x \to \infty} \phi(x) = \infty$. Например, выпуклая функция $|x|^p$, где показатель степени $1 \le p < \infty$, является функцией Юнга. Функция $\forall y \in R$ $\psi(y) := \sup\{x|y| - \phi(x) : x \ge 0\}$ называется дополнительной в смысле Юнга к функции $\phi(x)$. Примеры: 1) если $\phi_1(x) := |x|^p / p$, где показатель $1 < p < \infty$, то $\psi_1(y) = |y|^q / q$, где сопряжённый показатель q связан с p условием $1/p + 1/q = 1$; 2) если $\phi_2(x) := e^{|x|} - |x| - 1$, то $\psi_2(y) = (1 + |y|)\ln(1 + |y|) - |y|$.

Пусть $\phi: R \to [0, \infty)$ есть функция Юнга. Пространством Орлича $\mathbf{L}^\phi(T)$ называется комплексное линейное пространство всех измеримых и 2π-периодических функций f, для которых существует такое вещественное число $\alpha(f) > 0$, что конечен интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} \phi\left[\alpha(f) \cdot |f(t)|\right] dt$, с обычными операциями сложения функций и умножения их на комплексные числа. Краткая запись определения пространства Орлича: $\mathbf{L}^\phi(T) := \left\{ f : R \to C, \text{изм. и } 2\pi - \text{период.} : \exists \alpha(f) > 0 \int_{-\pi}^{\pi} \phi\left[\alpha(f) \cdot |f(t)|\right] dt < \infty \right\}$.

Укажем, что имеются и другие пространства измеримых функций. Например, в теории интерполяции линейных операторов рассматриваются пространство Лоренца, пространство Марцинкевича.

Функция Юнга $\phi: R \to [0, \infty)$ называется N-функцией (nice Young function), если она 1) обращается в нуль только в точке нуль: $\phi(x) = 0 \Rightarrow x = 0$; 2) бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с x при $x \to 0$: $\lim_{x \to 0} \phi(x)/x = 0$, 3) бесконечно большая более высокого порядка по сравнению с x при $x \to \infty$: $\lim_{x \to \infty} \phi(x)/x = \infty$. Дополнительная в смысле Юнга к N-функции $\phi(x)$ функция $\psi(y)$ является N-функцией. Вышеперед определением пространства Орлича $\mathbf{L}^\phi(T)$ все компоненты пар (ϕ_1, ψ_1) и (ϕ_2, ψ_2) примеров 1 и 2 суть N-функции. Функция Юнга $|x|$ не является N-функцией.

При N-функции $\phi: R \to [0,\infty)$ пространство $\mathbf{L}^{\phi}(T)$ полно относительно полунормы Орлича $\|f\|_{\mathbf{L}^{\phi}(T)} := \sup\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)\cdot g(t)|\,dt : \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi\left(|g(t)|\right)dt \le 1\right\}$, где $\psi(y)$ есть дополнительная в смысле Юнга к $\phi(x)$ N-функция. Если N-функция $\phi_1(x) := |x|^p / p$, где $1 < p < \infty$, то полунорма Орлича $\|f\|_{\mathbf{L}^{\phi_1}(T)} = q^{1/q}\|f\|_{\mathbf{L}^{p}(T)}$, где сопряжённый показатель q определяется равенством $1/p + 1/q = 1$.

Говорят, что функция Юнга $\phi: R \to [0,\infty)$ удовлетворяет Δ_2-условию, если она бесконечно большая медленного роста при $x \to \infty$, т. е. если существуют две вещественные постоянные $k_1 > 0$ и $x_1 \ge 0$, такие, что $\forall x \in [x_1, \infty)$ выполняется неравенство $\phi(2x) \le k_1\,\phi(x)$. Функция Юнга $|x|$ не является N-функцией, но удовлетворяет Δ_2-условию. Функция Юнга $\phi_2(x) := e^{|x|} - |x| - 1$ является N-функцией, но не удовлетворяет Δ_2-условию. Дополнительная в смысле Юнга к $\phi_2(x)$ функция $\psi_2(y) = (1+|y|)\ln(1+|y|) - |y|$ является N-функцией и удовлетворяет Δ_2-условию (рисунок 1).

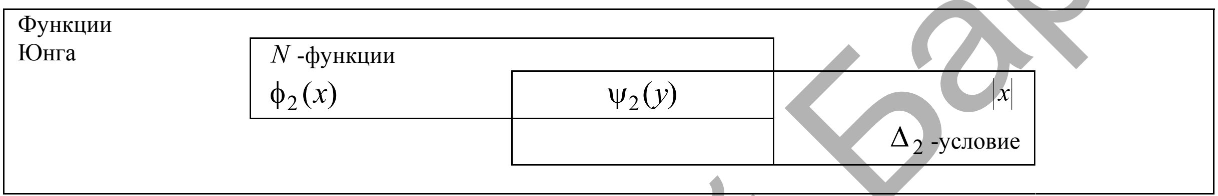

Рисунок 1 — Функции Юнга

Видно (*см.* рисунок 1), что такие характеристики функций Юнга $\phi: R \to [0,\infty)$ как N-функция и Δ_2-условие суть логически разные характеристики.

Для несепарабельного полного комплексного пространства $\mathbf{L}^{\infty}(T)$ и сепарабельного полного комплексного пространства Г. Штейнгауза $\mathbf{L}^{1}(T)$ имеем:

$$\mathbf{L}^{\infty}(T) = \bigcap_{\phi\in N}\left\{f : \int_{-\pi}^{\pi}\phi\left(|f(t)|\right)dt < \infty\right\} \subset \mathbf{L}^{1}(T) = \bigcup_{\phi\in N}\left\{f : \int_{-\pi}^{\pi}\phi\left(|f(t)|\right)dt < \infty\right\} \subset \bigcup_{\phi\in N}\mathbf{L}^{\phi}(T),$$

где пересечение и объединения берутся по всем N-функциям $\phi(x)$.

Эстонский математик М. Тыннов [38] получил следующий результат.

Теорема 8. *При N-функции $\phi: R \to [0,\infty)$ для того, чтобы тригонометрический ряд (1) являлся рядом Фурье (2) некоторой функции f из полного комплексного пространства Орлича $\mathbf{L}^{\phi}(T)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его средних Фейера (6) была ограниченной в $\mathbf{L}^{\phi}(T)$:*

$$(1) \in \mathbf{L}^{\phi\in N}(T) \iff \sup_{N\in Z_+}\left\|\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\left|\frac{n}{N+1}\right|\right)c_n\,e^{inx}\right\|_{\mathbf{L}^{\phi}(T)} < \infty. \tag{21}$$

При N-функции $\phi: R \to [0,\infty)$, удовлетворяющей к тому же Δ_2-условию, для того чтобы тригонометрический ряд (1) являлся рядом Фурье (2) некоторой функции f из сепарабельного полного комплексного пространства Орлича $\mathbf{L}^{\phi}(T)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его средних Фейера (6) сходилась в $\mathbf{L}^{\phi}(T)$, что в рассматриваемом случае $\phi \in N \bigcap \Delta_2$ равносильно как сходимости в среднем: $(1) \in \mathbf{L}^{\phi\in N\bigcap\Delta_2}(T) \iff$ $\iff \lim\limits_{\substack{M\to\infty\\ N\to\infty}}\int_{-\pi}^{\pi}\phi\left[\left|\sum_{n=-M}^{M}\left(1-\left|\frac{n}{M+1}\right|\right)c_n\,e^{inx} - \sum_{n=-N}^{N}\left(1-\left|\frac{n}{N+1}\right|\right)c_n\,e^{inx}\right|\right]dx = 0,$ *так и ограниченности в среднем:*

$$(1) \in \mathbf{L}^{\phi\in N\bigcap\Delta_2}(T) \iff \sup_{N\in Z_+}\int_{-\pi}^{\pi}\phi\left[\left|\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\left|\frac{n}{N+1}\right|\right)c_n\,e^{inx}\right|\right]dx < \infty.$$

Согласно теореме 3 в сепарабельных полных комплексных пространствах Ф. Рисса $\mathbf{L}^p(T)$, $1<p<\infty$, ограниченность последовательности средних Фейера (6) равносильна её сходимости. В обобщении теоремы 3 на полные комплексные пространства Орлича $\mathbf{L}^{\phi}(T)$ — теореме 8 — происходит расщепление на случай ограниченности и на случай сходимости последовательности средних Фейера (6) в $\mathbf{L}^{\phi}(T)$. Естественно выяснить, в каких функциональных пространствах ограниченность последовательности равносильна её сходимости, а в каких нет.

Матричные средние тригонометрических рядов и пространства Рисса периодических функций. Двусторонний комплексный ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \tag{22}$$

называется сходящимся, если существует конечный предел s последовательности его симметричных частичных сумм $\forall N \in Z_+ \;\; s_N := \sum_{n=-N}^{N} a_n$: $\exists \lim_{N\to\infty} s_N =: s \in C$. С помощью бесконечной нижней комплексной матрицы Хессенберга

$$M := \begin{bmatrix} 1 & \mu_1^{(0)} & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & \mu_1^{(1)} & \mu_2^{(1)} & 0 & \ldots \\ 1 & \mu_1^{(0)} & \mu_1^{(0)} & \mu_1^{(0)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \tag{23}$$

образуем последовательность матричных средних

$$\forall N \in Z_+ \;\; M_N := \sum_{n=-N}^{N} \mu_{|n|}^{(N)} a_n \tag{24}$$

ряда (22). Матричные средние (24) двустороннего комплексного ряда (22) называются:

1) регулярными, если для каждого сходящегося ряда они сходятся к его сумме: $\exists \lim_{N\to\infty} s_N =: s \in C \;\Rightarrow$ $\Rightarrow\; \exists \lim_{N\to\infty} M_N = s$;

2) консервативными, если для каждого сходящегося ряда они сходятся к конечному пределу: $\exists \lim_{N\to\infty} s_N =: s \in C \;\Rightarrow\; \exists \lim_{N\to\infty} M_N =: t \in C$;

3) порождающими сходимость, если для каждого ряда с ограниченной последовательностью его симметричных частичных сумм они сходятся к конечному пределу: $\exists \sup_{N\in Z_+} |s_N| < \infty \;\Rightarrow\; \exists \lim_{N\to\infty} M_N =: t \in C$.

Условия на элементы матрицы (23), при выполнении которых матричные средние (24) имеют вышеперечисленный тип (рисунок 2).

Консервативные матричные средние: $\sup_{N\in Z_+} \sum_{n=0}^{N} \left|\mu_n^{(N)} - \mu_{n+1}^{(N)}\right| < \infty$ и $\forall n \in Z_+ \;\; \exists \lim_{N\to\infty} \mu_n^{(N)} =: \rho_n \in C$.

Регулярные матричные средние:
$\forall n \in Z_+ \;\; \rho_n = 1$.

Порождающие сходимость матричные средние:
$\exists \lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$.

Рисунок 2 — Консервативные матричные средние

Автором был получен следующий результат [39].

Теорема 9. *Пусть элементы бесконечной нижней комплексной матрицы Хессенберга (23), во-первых, таковы, что ограничены в совокупности их построчные вариации:*

$$\sup_{N\in Z_+} \sum_{n=0}^{N} \left|\mu_n^{(N)} - \mu_{n+1}^{(N)}\right| < \infty, \tag{25}$$

во-вторых, имеют по всем столбцам единичный предел:

$$\forall n \in Z_+ \;\; \exists \lim_{N\to\infty} \mu_n^{(N)} = 1. \tag{26}$$

При показателе $1<p<\infty$ для того, чтобы тригонометрический ряд (1) являлся рядом Фурье (2) некоторой функции f из сепарабельного полного комплексного пространства Ф. Рисса $\mathbf{L}^p(T)$ измеримых *и 2π-периодических функций с интегрируемой по Лебегу на отрезке длины периода p-ой степенью их модуля, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его регулярных матричных средних*

$$\left(\sum_{n=-N}^{N} \mu_{|n|}^{(N)} c_n e^{inx}\right)_{N=0}^{\infty} \tag{27}$$

была ограниченной в $\mathbf{L}^p(T)$:

$$\left.\begin{array}{l} \sup\limits_{N\in Z_+} \sum\limits_{n=0}^{N} \left|\mu_n^{(N)} - \mu_{n+1}^{(N)}\right| < \infty \\ \forall n \in Z_+ \ \exists \lim\limits_{N\to\infty} \mu_n^{(N)} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left((1) \in \mathbf{L}^{p\in(1,\infty)}(T) \Leftrightarrow \sup_{N\in Z_+} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=-N}^{N} \mu_{|n|}^{(N)} c_n e^{inx} \right|^p dx < \infty \right), \tag{28}$$

при этом полунорма функции $\|f\|_{\mathbf{L}^p(T)} \le A(p)\cdot \sup_{N\in Z_+}\left[(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=-N}^{N}\mu_{|n|}^{(N)} c_n e^{inx}\right|^p dx\right]^{1/p}$, *где постоянная*

$A(p) := \begin{cases} 1 \ \textit{в случае показателя} \ 2 \le p < \infty, \\ 2 \ \textit{в случае показателя} \ 1 < p < 2. \end{cases}$

Если элементы матрицы (23) суть $\mu_n^{(N)} := \max\left(1 - \dfrac{n}{N+1}, 0\right)$, где номер строки N пробегает неотрицательные целые значения $0, 1, 2, \ldots$, а номер столбца n тоже пробегает значения $0, 1, 2, \ldots$, то последовательность матричных средних (27) есть последовательность средних Фейера (6) тригонометрического ряда (1). В силу теоремы О. Коши (1821 г.) $\exists \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=-N}^{N} a_n =: s \in C \ \Rightarrow \ \exists \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=-N}^{N} \left(1 - \left|\dfrac{n}{N+1}\right|\right) a_n = s$ средние Фейера являются регулярными. Поэтому из нашей теоремы (28) имеем теорему У. Юнга и Дж. Юнга (14). Заметим, что в рассмотренном выше частном случае все наддиагональные элементы матрицы (23) равны нулю: $\forall N \in Z_+ \ \mu_{N+1}^{(N)} = 0$, т. е. матрица (23) является бесконечной нижней вещественной треугольной.

Хотя элементы $\mu_{N+1}^{(N)}$ над главной диагональю матрицы (23) и не входят в определение последовательности матричных средних $\forall N \in Z_+ \ M_N f(x) := \sum_{n=-N}^{N} \mu_{|n|}^{(N)} \hat{f}(n) e^{inx}$ тригонометрического ряда Фурье (2) функции f, но установлено их влияние на скорость приближения функции этими средними [40]. Аналогия: в комплексной плоскости геометрические свойства границы области влияют на приближение внутри области, классические примеры — круг и разрезанный по радиусу круг.

Доказательство импликации $\Rightarrow$ в правой части (28) опиралось в [41] на преобразование Абеля (формулу суммирования по частям), неравенство Минковского, оценку Марцеля Рисса полунормы симметричных частичных сумм тригонометрических рядов Фурье в пространствах Фридьеша Рисса $\mathbf{L}^p(T)$, $1<p<\infty$ [42]. Доказательство же репликации $\Leftarrow$ в правой части (28) опиралось в [43] в случае показателя $2 \le p < \infty$ на фундаментальную теорему Рисса—Фишера (8) в части $\Leftarrow$, фундаментальную теорему Л. Карлесона о сходимости тригонометрического ряда Фурье функции из пространства Гильберта $\mathbf{L}^2(T)$ почти всюду на вещественной прямой R к ней [44], теорему О. Тёплица о регулярных матричных средних комплексных рядов [45], теорему П. Фату [46], а в случае показателя $1<p<2$ на критерий Руни [47]:

$$(1) \in \mathbf{L}^{p\in(1,2]}(T) \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \left(\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \|f\|_{\mathbf{L}^p(T)} \ (\text{неравенство Хаусдорфа—Юнга}), \\ \lim\limits_{N\to\infty} (N+1)^{p-1} \sum\limits_{n=0}^{N} \left| \dfrac{N!}{n!\,(N-N)!} \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} c_m \cdot \int\limits_0^1 t^n (1-t)^{N-n} e^{2\pi i m t}\, dt \right|^p = \left(\|f\|_{\mathbf{L}^p(T)}\right)^p, \end{cases} \tag{29}$$

где сопряжённый показатель $q := \dfrac{p}{p-1} \in [2, \infty)$.

Возможно, что потенциал подхода Руни, если его соединить с результатами лауреата Нобелевской премии Л. В. Канторовича [48, глава III], не исчерпан.

Регулярные матричные средние теоремы 9 являются собственной частью консервативных матричных средних. Для последних автором был получен следующий результат [49].

Теорема 10. *Пусть элементы бесконечной нижней комплексной матрицы Хессенберга (23), во-первых, таковы, что ограничены в совокупности их построчные вариации (25), во-вторых, имеют по всем столбцам конечные пределы*

$$\forall n \in Z_+ \ \ \exists \lim\nolimits_{N\to\infty} \mu_n^{(N)} =: \rho_n \in C\,, \tag{30}$$

которые, в-третьих, отграничены от нуля:

$$\inf\nolimits_{n\in Z_+} \left|\rho_n\right| > 0\,. \tag{31}$$

При показателе $1<p<\infty$ для того, чтобы тригонометрический ряд (1) являлся рядом Фурье (2) некоторой функции f из комплексного пространства Ф. Рисса $\mathbf{L}^p(T)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его консервативных матричных средних (27) была ограниченной в $\mathbf{L}^p(T)$:

$$\left.\begin{aligned} &\sup_{N\in Z_+} \sum_{n=0}^{N} \left|\mu_n^{(N)} - \mu_{n+1}^{(N)}\right| < \infty \\ &\forall n \in Z_+ \ \exists \lim_{N\to\infty} \mu_n^{(N)} =: \rho_n \in C \\ &\inf_{n\in Z_+} \left|\rho_n\right| > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left((1) \in \mathbf{L}^{p\in(1,\,\infty)}(T) \ \Leftrightarrow \ \sup_{N\in Z_+} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=-N}^{N} \mu_{|n|}^{(N)} c_n\, e^{i\,n\,x} \right|^p dx < \infty \right), \tag{32}$$

при этом полунорма функции

$$\|f\|_{\mathbf{L}^p(T)} \le B(p) \cdot \left[\frac{\sup\limits_{N\in Z_+} \sum\limits_{n=0}^{N} \left|\mu_n^{(N)} - \mu_{n+1}^{(N)}\right|}{\left(\inf\limits_{n\in Z_+} \left|\rho_n\right|\right)^2} + \frac{1}{\inf\limits_{n\in Z_+} \left|\rho_n\right|} \right] \cdot \sup_{N\in Z_+} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=-N}^{N} \mu_{|n|}^{(N)} c_n\, e^{i\,n\,x} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

где в случае показателя $2\le p<\infty$ постоянная $B(p) \le 2(2p+1)$.

Очевидна импликация (26) $\Rightarrow$ (30).

При выполнении условия (31) невозможно выполнение условия $\exists \lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$ из теоремы Нигама [50]. В силу рисунка 2 ясно, что в теореме 10 из консервативных матричных средних исключены все порождающие сходимость матричные средние.

Доказательство репликации $\Leftarrow$ в правой части (32) опиралось в [51] в случае показателя $2\le p<\infty$ на теоремы Рисса—Фишера и Карлесона [как при доказательстве (28)], на известную в теории суммируемости расходящихся комплексных рядов формулу [52] $t = s\left[\rho_0 - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\rho_n - \rho_{n+1}\right)\right] + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\rho_n - \rho_{n+1}\right)s_n$, теорему Ханта об ограниченности в $\mathbf{L}^2(T)$ мажоранты модуля симметричных частичных сумм $s^* f(x) := \sup_{N\in Z_+} \left| s_N f(x) \right|$ [53], теорему А. Лебега об интегрировании мажорированной последовательности, скрупулёзное решение по правилу Крамера системы линейных алгебраических уравнений и получение следующей связи $\forall N \in Z_+ \quad s_N f(x) = \sum\limits_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{\rho_n} - \frac{1}{\rho_{n+1}}\right) s_n g(x) + \frac{1}{\rho_N} s_N g(x)$ между поточечным пределом g последовательности матричных средних (27) и функцией f, оценку М. Рисса полунормы симметричных частичных сумм тригонометрического ряда Фурье функции $g \in \mathbf{L}^{p\in(1,\,\infty)}(T)$, неравенство Минковского, теорему П. Фату, а в случае показателя $1<p<2$ на критерий Руни (29), фундаментальную теорему Карлесона—Ханта о сходимости тригонометрического ряда Фурье функции из пространства $\mathbf{L}^{p>1}(T)$ почти всюду на вещественной прямой R к ней [54], теорему Кожима о консервативных матричных средних комплексных рядов [55].

Для матричных средних (27), которые могут быть и неконсервативными, автором был получен следующий результат [56].

Теорема 11. *Пусть элементы бесконечной нижней комплексной матрицы Хессенберга (23), во-первых, ограничены в совокупности:*

$$\sup_{(N,n)\in {Z_+}^2}\left|\mu_n^{(N)}\right|<\infty, \tag{33}$$

во-вторых, таковы, что ограничены в совокупности их построчные вариации на диадических отрезках:

$$\sup_{(N,\nu)\in {Z_+}^2}\sum_{n=2^\nu-1}^{2\left(2^\nu-1\right)}\left|\mu_n^{(N)}-\mu_{n+1}^{(N)}\right|<\infty\ , \tag{34}$$

в-третьих, имеют по всем столбцам конечные пределы (30), которые, в-четвёртых, отграничены от нуля (31). При показателе $1<p<\infty$ для того чтобы тригонометрический ряд (1) являлся рядом Фурье (2) некоторой функции f из комплексного пространства Ф. Рисса $\mathbf{L}^p(T)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его матричных средних (27) была ограниченной в $\mathbf{L}^p(T)$:

$$\left.\begin{array}{l}\sup\limits_{(N,n)\in {Z_+}^2}\left|\mu_n^{(N)}\right|<\infty\\ \sup\limits_{(N,\nu)\in {Z_+}^2}\sum\limits_{n=2^\nu-1}^{2\left(2^\nu-1\right)}\left|\mu_n^{(N)}-\mu_{n+1}^{(N)}\right|<\infty\\ \forall n\in Z_+\ \exists\lim\limits_{N\to\infty}\mu_n^{(N)}=:\rho_n\in C\\ \inf\limits_{n\in Z_+}\left|\rho_n\right|>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left((1)\in\mathbf{L}^{p\in(1,\infty)}(T)\Leftrightarrow\sup_{N\in Z_+}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=-N}^{N}\mu_{|n|}^{(N)}\,c_n\,e^{inx}\right|^p dx<\infty\right). \tag{35}$$

Очевидны импликации (25) $\Rightarrow$ (33) и (25) $\Rightarrow$ (34).

Аналог теоремы 11 для кратных тригонометрических рядов доказан автором в [57].

Для гиперболы $y=\dfrac{1}{x}$ площадь криволинейной трапеции с основанием $[1,\infty)$ бесконечна: $\int_1^\infty\dfrac{dt}{t}=\infty$, а площади диадических криволинейных трапеций с основаниями $\left[\,2^\nu-1,\,2\left(2^\nu-1\right)\right]$, где ν пробегает все натуральные значения $1, 2, 3, \ldots$, равны: $\int_{2^\nu-1}^{2\left(2^\nu-1\right)}\dfrac{dt}{t}=\ln 2.$

Поэтому очевидно: если у матрицы (23) элементы столбцов с чётными номерами суть $\forall n\in Z_+\ \ \mu_{2n}^{(N)}:=\begin{cases}0, \text{ когда } 2n>N;\\ 1, \text{ когда } 2n\le N,\end{cases}$ а элементы «нечётных» столбцов суть $\forall n\in Z_+\ \ \mu_{2n+1}^{(N)}:=\begin{cases}0, \text{ когда } 2n+1>N;\\ 1+\dfrac{1}{n+2}, \text{ когда } 2n+1\le N,\end{cases}$ то она удовлетворяет условиям (30), (31) и (33), (34) теоремы 11 и не удовлетворяет условию (25) теорем 9 и 10.

Итак, в теореме 11 помимо регулярных теоремы 9 и консервативных теоремы 10 матричных средних допускаются также некоторые неконсервативные матричные средние, которые, однако, как и в теореме 10 не порождают сходимость.

Вновь обратимся к теореме 2: $(1)\in\mathbf{L}^2(T)\ \Leftrightarrow\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|c_n\right|^2<\infty$, которая является сужением на тригонометрические ряды фундаментального результата Ф. Рисса [58] и Э. Фишера [59] для ортогональных рядов. Поскольку в сходящемся двустороннем ряде с неотрицательными вещественными членами можно каким угодно образом группировать члены и складывать их затем уже по группам, то $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|c_n\right|^2=\left|c_0\right|^2+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{n=-2\left(2^\nu-1\right)}^{-\left(2^\nu-1\right)}+\sum_{n=2^\nu-1}^{2\left(2^\nu-1\right)}\right)\left|c_n\right|^2\right]<\infty.$ На основании равенства Парсеваля для тригонометрических полиномов $\forall n\in Z_1\quad\left(\sum_{n=-2\left(2^\nu-1\right)}^{-\left(2^\nu-1\right)}+\sum_{n=2^\nu-1}^{2\left(2^\nu-1\right)}\right)\left|c_n\right|^2=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\left(\sum_{n=-2\left(2^\nu-1\right)}^{-\left(2^\nu-1\right)}+\sum_{n=2^\nu-1}^{2\left(2^\nu-1\right)}\right)c_n\,e^{inx}\right|^2 dx,$ где $Z_1:=\{1,2,3,\ldots\}$ — множество всех натуральных чисел.

Таким образом, фундаментальная теорема Рисса—Фишера (8) может быть записана не только в виде (13), но и в следующем виде:

$$(1)\in \mathbf{L}^2(T) \;\Leftrightarrow\; \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\left|c_0\right|^2+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\left(\sum_{n=-2\left(2^{\nu}-1\right)}^{-\left(2^{\nu}-1\right)}+\sum_{n=2^{\nu}-1}^{2\left(2^{\nu}-1\right)}\right)c_n\, e^{inx}\right|^2\right]dx<\infty\,; \tag{36}$$

при этом полунорма функции $\|f\|_{\mathbf{L}^2(T)}=\left[(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\left|c_0\right|^2+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\sum_{|n|=2^{\nu}-1}^{2\left(2^{\nu}-1\right)}c_n\, e^{inx}\right|^2\right)dx\right]^{1/2}$.

Дж. И. Литтлвуд и Р. Пэли распространили [60] утверждение (36) с пространства Гильберта $\mathbf{L}^2(T)$ на пространства Ф. Рисса $\mathbf{L}^p(T)$, $1<p<\infty$:

$$(1)\in \mathbf{L}^{p\in(1,\infty)}(T) \;\Leftrightarrow\; \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\left|c_0\right|^2+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\left(\sum_{n=-2\left(2^{\nu}-1\right)}^{-\left(2^{\nu}-1\right)}+\sum_{n=2^{\nu}-1}^{2\left(2^{\nu}-1\right)}\right)c_n\, e^{inx}\right|^2\right]^{\frac{p}{2}}dx<\infty\,. \tag{37}$$

Доказательство импликации $\Rightarrow$ в правой части (35) опиралось в [61] на теорему Литтлвуда—Пэли о диадическом разложении (37) в части $\Rightarrow$, преобразование Абеля, неравенство Коши—Буняковского, лемму Литтлвуда—Пэли о мажоранте интегралов [62], теорему Литтлвуда—Пэли (37) уже в части $\Leftarrow$. Доказательство же репликации $\Leftarrow$ в правой части (35) опиралось в [63] на теорему Марцинкевича о мультипликаторах тригонометрических рядов Фурье [64].

Заметим, что Раймонд Эдвард Алан Христофер Пэли (08.01.1907—07.04.1933) и Йозеф Марцинкевич (20.03.1910—1940, zginął w Starobielsku) погибли молодыми, и полученные ими результаты по сей день не превзойдены.

В теореме У. Юнга и Дж. Юнга (14) и в теоремах автора (28), (32) и (35) предположения об элементах бесконечной нижней комплексной матрицы Хессенберга (23) не зависят от конкретного значения показателя p между 1 и ∞. Напомним один результат Ф. Рисса [65, с. 86–87, лемма]: для того чтобы функция $F\in\mathbf{AC}(T)$ являлась первообра́зной для функции $f\in\mathbf{L}^{p\in(1,\infty)}(T)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого упорядоченного множества точек x_n на отрезке длины периода 2π была конечна верхняя грань $\sup\limits_{0\le x_0<x_1<x_2<\ldots<x_N\le 2\pi}\sum\limits_{n=0}^{N-1}\dfrac{\left|F(x_{n+1})-F(x_n)\right|^p}{\left(x_{n+1}-x_n\right)^{p-1}}$, при этом полунорма функции $\|f\|_{\mathbf{L}^p(T)}=(2\pi)^{-1/p}\cdot\sup_{0\le x_0<x_1<x_2<\ldots<x_N\le 2\pi}\left[\sum_{n=0}^{N-1}\left|F(x_{n+1})-F(x_n)\right|^p\left(x_{n+1}-x_n\right)^{1-p}\right]^{1/p}$.

Поэтому естественно искать эффективные условия на элементы матрицы (23), которые явно зависят от показателя $1<p<\infty$ и которые достаточны для справедливости эквиваленции

$$(1)\in \mathbf{L}^{p\in(1,\infty)}(T) \;\Leftrightarrow\; \sup_{N\in Z_+}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=-N}^{N}\mu_{|n|}^{(N)}\; c_n\, e^{inx}\right|^p dx<\infty\,.$$

Также в процессе решения предыдущей задачи естественно искать такие эффективные условия на элементы матрицы (23), из которых при $p\to 2$ следует фундаментальный результат Рисса—Э. Фишера (8). Возможно, что искомые эффективные условия будут содержать в качестве показателя степени модуль разности $\left|\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{2}\right|$.

При доказательстве теорем 10 и 11 встречается последовательность $\left(\dfrac{1}{\rho_n}\right)_{n=0}^{\infty}$ обратных чисел для постолбцовых пределов (30) матрицы (23), которая при выполнении условий (30), (31) и (34) является мультипликатором типа $\left(\mathbf{L}^{p\in(1,\infty)}(T),\,\mathbf{L}^p(T)\right)$. В силу следующего свойства мультипликаторов [66]: $1\le p_1<p_2\le 2\Rightarrow$ $\Rightarrow\;\left(\mathbf{L}^1(T),\,\mathbf{L}^1(T)\right)=\left(\mathbf{L}^\infty(T),\,\mathbf{L}^\infty(T)\right)\subseteq\left(\mathbf{L}^{p_1}(T),\,\mathbf{L}^{p_1}(T)\right)=\left(\mathbf{L}^{q_1}(T),\,\mathbf{L}^{q_1}(T)\right)\underset{\neq}{\subseteq}\left(\mathbf{L}^{p_2}(T),\,\mathbf{L}^{p_2}(T)\right)=\left(\mathbf{L}^{q_2}(T),\,\mathbf{L}^{q_2}(T)\right)\subseteq$ $\subseteq\left(\mathbf{L}^2(T),\,\mathbf{L}^2(T)\right)=l^\infty(Z)$, где, как обычно, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, естественно установить, обладают ли искомые зависящие от показателя $1<p<\infty$ эффективные условия на элементы матрицы (23) «симметрией» относительно пространства

Гильберта $\mathbf{L}^2(T)$ и в случае отсутствия «симметрии» выяснить, существуют ли «разумные» пространства функций для рассматриваемой проблемы в зазорах $\bigcap_{2<p<\infty}\mathbf{L}^p(T)\underset{\neq}{\subset}\mathbf{L}^2(T)\underset{\neq}{\subset}\bigcap_{1<p<2}\mathbf{L}^p(T)$.

Заключение. Многие математики начинали свой путь в науку с монографии Г. Харди [67]. Например, А. Х. Турецкий говорил автору, что его аспирант А. К. Покало самостоятельно проработал монографию [68] и выполнил представленное А. Н. Колмогоровым исследование [69]. Монография [70] кроме пяти приложений самого Г. Харди содержит также обзорную статью редактора С. Б. Стечкина «Методы суммирования С. Н. Бернштейна и В. Рогозинского», с которой студентом начинал свой путь автор.

Во много раз больше математиков начинали свой путь в науку с монографий Н. К. Бари [71] и А. Зигмунда [72]. Настоящий стендовый доклад представляет собой авторское дополнение к настольным монографиям [73]. В нём классическая проблематика о том, когда тригонометрический ряд является рядом Фурье функции из определённого пространства, дополнена более поздними результатами. Указаны также некоторые направления дальнейших исследований.

Молодым исследователям подскажем, что автор помимо тригонометрических рядов рассматривал аналогичные проблемы также для рядов по системе: 1) $\left(w_n(x)\right)_{n=0}^{\infty}$ функций Уолша в нумерации Пэли [74]; 2) $\left(\chi_n(P,x)\right)_{n=0}^{\infty}$ мультипликативных функций с ограниченной образующей последовательностью P натуральных чисел ≥ 2 [в частности, $\forall n\in Z_+$ $\chi_n\left(\left(2\right)_{j=1}^{\infty},x\right)=w_n(x)$] [75]; 3) $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{\infty}$ функций, ортогональных на конечном отрезке вещественной прямой R [76]; 4) $\left(\varphi_n(O,z)\right)_{n=0}^{\infty}$ функций, ортогональных по площади открытого ограниченного множества $O\subset C$, состоящего из конечного числа конечносвязных областей [77]; 5) $\left(\varphi_n(G,z)\right)_{n=0}^{\infty}$ функций, ортогональных по спрямляемой границе ∂G жордановой области G комплексной плоскости C [78]; 6) $\left(F_n(G,z)\right)_{n=0}^{\infty}$ многочленов Фабера для жордановой области $G\subset C$ с гладкой границей ∂G, удовлетворяющей дополнительному ограничению на её гладкость [условию Дини, ($\Leftarrow$) условию С. Я. Альпера] [79].

Список цитируемых источников

1. Эдвардс Р.: 1) Ряды Фурье в современном изложении : в 2 т. М. : Мир, 1985. Т. 1. 264 с. ; 2) Ряды Фурье в современном изложении : в 2 т. М. : Мир, 1985. Т. 2. 400 с.
2. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. С. 49, 2.3.8 ; 3. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М. : ГИФМЛ, 1961. с. 77, теорема ; Зигмунд А. Тригонометрические ряды : в 2 т. М. : Мир, 1965. Т. I. С. 80, теорема (4.4).
3. Бруй И. Н.: 1) Тригонометрические ряды классов $L^p(\mathbf{T})$ и их регулярные средние // Весці Акадэміі навук Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. 1996. № 1. С. 25 ; 2) Тригонометрические ряды класса $L^\infty(T)$ и их консервативные средние // Весці Акадэміі навук Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. 1996. № 2. С. 48 ; 3) Тригонометрические ряды классов $L^p(\mathbf{T})$, $p\in]1;\infty[$, и их консервативные средние // Математические заметки. 1997. Т. 62, № 5. С. 678 ; Bruj I., Schmieder G. Real trigonometric series of class BMO and $(C,1)$-means // Acta scientiarum mathematicarum (Szeged). 1998. Vol. 64, no. 3–4. P. 483 ; Бруй И. Н.: 1) Матричные средние тригонометрических рядов и пространства Орлича // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага універсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2. 2001. № 2 (6). С. 23 ; 2) Методы суммирования тригонометрических рядов и пространства функций // Математический сборник. 2002. Т. 193, № 4. С. 17 ; 3) Методы суммирования кратных тригонометрических рядов и пространства Рисса $L^p\left(\mathbf{T}^N\right)$, $p\in(1,\infty)$ // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага універсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2. 2007. № 1 (48). С. 3.
4. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. С. 11, 148, 7.3.4; с. 154, 7.7; с. 189, 10.1.6(2) ; Бари Н. К. Тригонометрические ряды. С. 95, теорема 1, с. 123, 199, 671, пример ; . Зигмунд А. Тригонометрические ряды. С. 298, (1.17); с. 403, (2.1) ; Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. С. 275, (1); с. 276.
5. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. С. 293, теорема 5.
6. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. С. 470, теорема (1.1).
7. Fejér L.: 1) Sur les fonctions bornées et intégrables // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. 1900. Tome 131. P. 984—987. ; 2) Untersuchungen über Fouriersche Reihen // Mathematische Annalen. 1904. Band 58. S. 51—69.
8. Fejér L. Sur les fonctions bornées et intégrables.
9. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. С. 165, теорема 1 ; Зигмунд А. Тригонометрические ряды. С. 222, теорема (4.2), (I).
10. Riesz F. Sur les systèmes orthogonaux de fonctions // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. 1907. Tome 144, № 11. P. 615—619.
11. Fischer E. Sur la convergence en moyenne // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. 1907. T. 144, № 11. P. 1 022—1 024.
12. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. С. 74 ; Зигмунд А. Тригонометрические ряды. С. 207, теорема (1.1) ; Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. С. 168, теорема 3.
13. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. С. 21, 1.7(1).
14. Young W. H., Young G. C. On the theorem of Riesz – Fischer. The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. 1913. Vol. 44. P. 49—88.
15. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 2. С. 98, (12.7.8) ; Бари Н. К. Тригонометрические ряды. С. 166, теорема 3; с. 167, (60.7) ; Зигмунд А. Тригонометрические ряды. С. 235, 237, теорема (5.14).
16. Grosz W. Zur Poissonschen Summierung // Sitzungsberichte der Math.-Naturwiss. Klasse der Akad. der Wiss. zu Wien. 1915. Bd. 124. S. 1 017—1 037.
17. Steinhaus H. Sur quelques propriétés des séries trigonométriques et de celles de Fourier / Rozprawy Akademji Umiejetności, Cracow. 1915. T. 56. P. 175—225.
18. Бари Н. К. Тригонометрические ряды, с. 168, теорема 4 ; Зигмунд А. Тригонометрические ряды. С. 233, теорема (5.5).
19. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. С. 98, (5.1.7), 99, (5.1.8).

20. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М. : ГИФМЛ, 1958. С. 232, теорема 6.2.2 ; Brezis H. Analyse fonctionnelle: théorie et applications. Paris ; New York ; Barcelone : Masson, 1983. С. 66, замечание 9.
21. Young W. H. On a Condition that a Trigonometrical Series should have a Certain Form // Proceedings of the Royal Society. Series A. 1913. Vol. 88, № A606. P. 569—574.
22. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 2. С. 98, 12.7.6 ; Бари Н. К. Тригонометрические ряды. С. 165, теорема 2 ; Зигмунд А. Тригонометрические ряды. С. 222, теорема (4.2), (II).
23. Бари Н. К. Тригонометрические ряды.
24. Зигмунд А. Тригонометрические ряды.
25. John F., Nirenberg L. On functions of bounded mean oscillation // Comm. Pure Appl. Math. 1961. Vol. 14. P. 415—426.
26. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М. : Мир, 1984. С. 226 ; Кусис П. Введение в теорию пространств H^p. М. : Мир, 1984. С. 266, определение ; Torchinsky A. Real-Variable Methods in Harmonic Analysis. Orlando ; San Diego ; New York : Academic Press, Inc., 1986. (Pure and Applied Mathematics. A Series of Monographs and Textbooks, Vol. 123) С. 200, (1.5).
27. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М. : Наука, 1977. С. 14, (4).
28. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. С. 224, 232 ; Torchinsky A. Real-Variable Methods in Harmonic Analysis. С. 200.
29. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. С. 224 ; Torchinsky A. Real-Variable Methods in Harmonic Analysis. С. 217, 6.11.
30. Bruj I., Schmieder G. Real trigonometric series of class BMO and $(C,1)$-means ; Бруй И. Н. Средние Фейера в теории представления функций // Техника и технологии: инновации и качество : материалы III Междунар. науч.-практ. конф. Барановичи, 18 дек. 2015 г. / редкол.: А. В. Никишова (гл. ред.), Ю. Е. Горбач (отв. ред.) [и др.]. Барановичи : БарГУ, 2015. С. 133—143.
31. Bruj I., Schmieder G. Real trigonometric series of class BMO and $(C,1)$-means. С. 486—487.
32. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. С. 120, (6.4.11) ; Зигмунд А. Тригонометрические ряды. С. 251, теорема (7.8).
33. Бруй И. Н. Средние Фейера в теории представления функций. С. 138—139.
34. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. С. 201 ; Карлсон Л. О сходимости рядов Фурье и о росте их частных сумм // Математика : Периодич. сб. переводов иностран. ст. 1967. Т. 11, № 4. С. 113 ; Hunt R. A. On the convergence of Fourier series // Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues. Carbondale : Southern Illinois University Press, 1968. P. 235—255.
35. Бруй И. Н. Средние Фейера в теории представления функций. С. 139—140.
36. Sarason, D. Functions of vanishing mean oscillation // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. Vol. 207. P. 392.
37. Бруй И. Н. Средние Фейера в теории представления функций. С. 140—142.
38. Тыннов, М. T -дополнительные пространства коэффициентов Фурье / Уч. зап. Тартуского гос. ун-та. 1966. Вып. 192. С. 67, теорема 1, с. 69, теорема 2 ; Бруй И. Н. Матричные средние тригонометрических рядов и пространства Орлича. С. 24, теорема 1, а), б).
39. Бруй И. Н. Тригонометрические ряды классов $L^p(\mathbf{T})$ и их регулярные средние. С. 26, теорема 3.
40. Покало А. К. Об одном классе линейных методов суммирования рядов Фурье дифференцируемых функций // Весці Акадэміі навук Беларускай ССР. Сер. фіз.-матэм. навук. 1969. № 2. С. 44, (9) ; Бруй И. Н.: 1) Памяти моего научного руководителя А. К. Покало: его идеи // Технологии, экономика и право: актуальные проблемы и инновации : материалы Междунар. науч.-практ. конф., 20 нояб. 2014 г., г. Барановичи, Респ. Беларусь / редкол.: А. В. Никишова (гл. ред.), А. К. Гавриленя (отв. ред.) [и др.]. Барановичи : РИО БарГУ, 2014. С. 20, (18) ; 2) Асимптотическая формула типа С. Н. Бернштейна для кратно дифференцируемых периодических функций // Техника и технологии: инновации и качество : материалы III Междунар. науч.-практ. конф., Барановичи, 18 дек. 2015 г. / редкол.: А. В. Никишова (гл. ред.), Ю. Е. Горбач (отв. ред.) [и др.]. Барановичи : БарГУ, 2015. С. 115, (13).
41. Бруй И. Н. Тригонометрические ряды классов $L^p(\mathbf{T})$ и их регулярные средние. С. 26—27.
42. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 2. С. 120, (12.10.1) ; Бари Н. К. Тригонометрические ряды. С. 593, теорема 1 ; Зигмунд А. Тригонометрические ряды. С. 423, (6.5).
43. Бруй И. Н. Тригонометрические ряды классов $L^p(\mathbf{T})$ и их регулярные средние. С. 27—29.
44. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. С. 201 ; Карлсон Л. О сходимости рядов Фурье и о росте их частных сумм. с. 113.
45. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М. : ГИФМЛ, 1960. 471 с., с. 83, теорема (4.2, II) ; Барон С. А. Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин : Валгус, 1977. С. 20, следствие 1.1.
46. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды. С. 49, теорема (11.2) ; Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. С. 133, теорема 9.
47. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. С. 53, 2.3.10(3) ; Rooney P. G. On the representation of sequences as Fourier coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. 1960. Vol. 11. P. 765.
48. Lorentz G. G. Bernstein Polynomials. Toronto : University of Toronto Press, 1953. (Mathematical Expositions, No. 8). Глава III.
49. Бруй И. Н. Тригонометрические ряды классов $L^p(\mathbf{T})$, $p \in]1;\infty[$, и их консервативные средние. С. 679.
50. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. С. 107, (4.66) ; Барон С. А. Введение в теорию суммируемости рядов. С. 25; Харди Г. Расходящиеся ряды. М. : ИИЛ, 1951. С. 72, теорема 8.
51. Бруй И. Н. Тригонометрические ряды классов $L^p(\mathbf{T})$, $p \in]1;\infty[$, и их консервативные средние. С. 680—686.
52. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. С. 81, теорема (4.2, I), (B) ; Барон С. А. Введение в теорию суммируемости рядов. С. 18, (1.3).
53. Hunt R. A. On the convergence of Fourier series. P. 235–255.
54. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. С. 201 ; Hunt R. A. On the convergence of Fourier series. P. 235—255.
55. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. С. 80—81, теорема (4.2, I) ; Барон С. А. Введение в теорию суммируемости рядов. С. 17—18, теорема 1.3 ; Харди Г. Расходящиеся ряды. С. 72, теорема 7.
56. Бруй И. Н.: 1) Тригонометрические ряды классов $L^p(\mathbf{T})$ и их матричные средние // II школа "Ряди Фур'є: теорія і застосування": (Кам'янець-Подільський, 30 червня – 6 липня 1997 р.) : Тези доповідей. Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. С. 26, теорема 4 ; 2) Тригонометрические ряды классов $L^p(\mathbf{T})$ и их матричные средние // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2000. № 1. С. 47, теорема 4 ; 3) Методы суммирования тригонометрических рядов и пространства функций. С. 19—20, теорема 3, с. 29, замечание.
57. Бруй И. Н. Методы суммирования кратных тригонометрических рядов и пространства Рисса $L^p(\mathbf{T}^N)$, $p \in (1,\infty)$. С. 4—5, теорема.
58. Riesz F. Sur les systèmes orthogonaux de fonctions // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. 1907. Tome 144, № 11. P. 615—619.
59. Fischer E. Sur la convergence en moyenne // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. 1907. Tome 144, № 11. P. 1 022—1 024.
60. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. II. С. 349, теорема (4.24).
61. Бруй И. Н. Тригонометрические ряды классов $L^p(\mathbf{T})$ и их матричные средние. С. 48 ; Бруй И. Н. Методы суммирования тригонометрических рядов и пространства функций. С. 25—26.
62. Зигмунд А. Тригонометрические ряды.Т. II. С. 337, лемма (2.15).
63. Бруй И. Н.: 1) Тригонометрические ряды классов $L^p(\mathbf{T})$ и их матричные средние. С. 48—49 ; 2) Методы суммирования тригонометрических рядов и пространства функций. С. 27—29.

64. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. II. С. 346—347, теорема (4.14).
65. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М. : Мир, 1979. С. 86–87, лемма.
66. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 2. С. 309, 16.1.2(4), 16.1.2(5), с. 332, (16.4.7) ; Torchinsky A. Real-Variable Methods in Harmonic Analysis. С. 129, (4.18), утверждение 4.6; с. 140, 5.40.
67. Харди Г. Расходящиеся ряды.
68. Там же.
69. Покало А. К. К вопросу о суммировании функций классов $B^{(r)}$ // Докл. АН СССР. 1957. Т. 116, № 5. С. 750—753.
70. Харди Г. Расходящиеся ряды.
71. Бари Н. К. Тригонометрические ряды.
72. Зигмунд А.: 1) Тригонометрические ряды. Т. 1 ; 2) Тригонометрические ряды. Т. II.
73. Бари Н. К. Тригонометрические ряды ; Зигмунд А.: 1) Тригонометрические ряды. Т. 1 ; 2) Тригонометрические ряды. Т. II.
74. Бруй И. Н.: 1) Матричные средние ортогональных рядов и классы функций // Международная конференция "Теория приближений и гармонический анализ": (Россия, Тула, 26–29 мая 1998 года) : Тезисы докладов. Тула, 1998. С. 58–59 ; 2) Ряды Уолша – Пэли и пространства Рисса // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. 2014. № 2 (173). С. 11—19.
75. Бруй И. Н. Мультипликативные ряды и пространства Рисса // Технологии, экономика и право: актуальные проблемы и инновации : материалы Междунар. науч.-практ. конф., 20 нояб. 2014 г., г. Барановичи, Респ. Беларусь / редкол.: А. В. Никишова (гл. ред.), А. К. Гавриленя (отв. ред.) [и др.]. Барановичи : РИО БарГУ, 2014. С. 7—16.
76. Бруй, І. М. Матрычныя сярэднія артаганальных шэрагаў і прастора $C[0;1]$ // Весці Беларускага дзяржаўнага педагагічнага універсітэта. 2001. № 2. С. 156—158. ; Bruj I., Müller J. Classes of functions and matrix means of orthogonal series // Наука. Образование. Технологии–2010 : материала III Междунар. науч.-практ. конф., 21—22 окт. 2010 г., Барановичи, Респ. Беларусь / редкол.: А. В. Никишова (гл. ред.) [и др.]. Барановичи : РИО БарГУ, 2010. С. 230—232 (Part 1), 232—234 (Part 2).
77. Бруй, І. М. Метады сумавання артаганальных па плошчы шэрагаў і класы галаморфных функцый // Весці Беларускага дзяржаўнага педагагічнага універсітэта. Серыя 3. 2004. № 1 (39). С. 14—17.
78. Bruj I., Schmieder G. Matrix Mean Series in Terms of Boundary Orthogonal Systems and Functions in the Classes H^{∞} and E^{p} // Journal of Approximation Theory. 2002. Vol. 118, no. 2. P. 246—256 ; Бруй И. Н. Методы суммирования ортогональных по контуру рядов и классы В. И. Смирнова $E^{p}(G)$, $p \in (1, \infty)$, и $H^{\infty}(G)$ // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага універсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. 2004. № 1 (25). С. 16—29.
79. Бруй И. Н. Матричные средние рядов Фабера и классы В. И. Смирнова $E^{p}(G)$, $p \in (1, \infty)$ // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага універсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. 2002. № 1 (9). С. 38—48.

УДК 517.95

А. И. Басик, Н. В. Солопов
Учреждение образования «Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина», Брест

ОБОБЩЁННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА—ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ СИСТЕМ ОРТОГОНАЛЬНОГО ТИПА В $\mathbb{R}^4$

Введение. В настоящей работе рассматривается класс эллиптических систем четырёх уравнений первого порядка с четырьмя переменными ортогонального типа. Для таких систем в неограниченной двусвязной области специального вида изучается неклассическая краевая задача, подобная задаче Римана-Гильберта. Постановку такой задачи ранее изучал Б. Б. Ошоров для одной системы кватернионного типа в четырёхмерном пространстве [1, с. 212—220].

Отметим, что для рассматриваемых систем однородная задача Римана—Гильберта имеет бесконечно много линейно независимых решений в ограниченной односвязной области [2, с. 161—163]. Более того, в работе [3, с. 410—412] доказано нарушение условия регуляризуемости Я. Б. Лопатинского произвольной краевой задачи для таких систем (условие регуляризуемости эквивалентно нетеровости краевой задачи в широком классе банаховых пространств [4, с. 3—120]).

Основные определения и обозначения. Пусть $h > 0$, через Ω обозначим множество

$$\Omega = \left\{ x = \left(x_1, x'\right) \in \mathbb{R}^4 \mid 0 < x_1 < h,\, x' = \left(x_2, x_3, x_4\right) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Пусть, далее, $B(x)$ — заданная в области Ω непрерывная матрица-функция размера 4×4, $A_1 = E_4$ — единичная матрица четвертого порядка, A_2, A_3, A_4 — постоянные действительные квадратные матрицы четвертого порядка, удовлетворяющие соотношениям $A_k A_j^T + A_j A_k^T = 2\delta_{jk} E_4 \quad \left(j, k = \overline{1,4}\right)$, где δ_{jk} — символ Кронекера, T — транспонирование.

Определение 1. Оператор вида

$$\Lambda : U \mapsto \sum_{j=1}^{4} A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} + BU$$

называется оператором ортогонального типа в $\mathbb{R}^4$, здесь $U = \left(u_1(x), \ldots, u_4(x)\right)^T$ — дифференцируемая вектор-функция.