Следствие 1. *Если k = 1, то при* $n \to \infty$ $P_n(z) \to e^{z/2}$.

В случае, когда $k \geq 2$, *то при* $n \to \infty$ $P_{kn}^{j}(z) \to e^{\lambda_j z}$, $j = 1, 2, ..., k$.

Для доказательства следствия 1 достаточно заметить, что при $k = 1$ $\lambda_1 = 1$. Далее, если предположить $k \geq 2$, то легко показать, что $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$.

Следствие 2. *Если k = 1, то при* $n \to \infty$

$$e^z - \pi_{n,n}(z; e^{\xi}) = (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n)!} e^z \sqrt{\frac{\pi}{4n}} \frac{1}{4^n} (1 + O(1)).$$

Данное асимптотическое равенство является частным случаем хорошо известного в теории аппроксимаций Паде равенства Д. Браесса: $n \to \infty$:

$$e^z - \pi_{n,m}(z; e^{\xi}) = \frac{(-1)^m n! m! e^{2mz/(n+m)}}{(n+m)!(n+m+1)!} z^{n+m+1} (1 + O(1).$$

Следствие 3. *Если* $k = 2$, *то* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ *и при* $n \to \infty$

$$e^z - \pi^{1}_{2n,2n}(z; e^{\xi}) = (-1)^n \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} e^{\left(1 - 1/\sqrt{3}\right)z} \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n (1 + O(1)).$$

Заметим, что утверждения следствия согласуются с результатами работ [1—3].

Заключение. Мы нашли асимптотику аппроксимаций Эрмита—Паде второго рода для экспоненциальных функций с комплексными множителями в показателях экспонент.

Список цитируемых источников

1. *Старовойтов, А. П.* Асимптотика аппроксимаций Эрмита—Паде системы экспонент / А. П. Старовойтов // Докл. НАН Беларуси. — 2013. — Т. 57. — № 2. — С. 5—10.
2. *Старовойтов, А. П.* О свойствах аппроксимаций Эрмита—Паде для системы функций Миттаг—Леффлера / А. П. Старовойтов // Докл. НАН Беларуси. — 2013. — Т. 57. — № 1. — С. 5—10.
3. *Старовойтов, А. П.* Аппроксимации Эрмита—Паде для системы функций Миттаг—Леффлера / А. П. Старовойтов // Проблемы физики, математики и техники. — 2013. — № 1 (14). — С. 81—87.

УДК 517.538.52+517.538.53

Е. П. Кечко

Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель

О ЛОКАЛИЗАЦИИ НУЛЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА—ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Введение. Для заданного натурального числа k рассмотрим произвольный фиксированный набор $\{\lambda_p\}_{p=0}^{k}$ различных комплексных и произвольный набор $\{n_p\}_{p=0}^{k}$ натуральных чисел.

Недиагональными многочленами Эрмита—Паде 1-го рода системы экспонент $\left\{e^{\lambda_p z}\right\}_{p=0}^{k}$ называют многочлены $A_{n_p}^{p}(z)$, $\deg A_{n_p}^{p} \leq n_p - 1$, $p = 0, 1, \ldots, k$, среди которых хотя бы один тождественно не равен нулю, удовлетворяющие условию

$$R_{n_0, n_1, \ldots n_k}(z) = \sum_{p=0}^{k} A_{n_p}^{p}(z) e^{\lambda_p z} = O(z^{n_0 + n_1 + \ldots n_k - 1}), \; z \to 0. \quad (1)$$

Если $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = n$, то многочлены $\left\{A_n^p(z)\right\}_{p=0}^k$ называются *диагональными многочленами Эрмита—Паде 1-го рода* системы экспонент $\left\{e^{\lambda_p z}\right\}_{p=0}^k$. Многочлены $\left\{A_{n_p}^p(z)\right\}_{p=0}^k$ были введены Эрмитом [1] (в 1883 году — диагональный случай, в 1893 году — общий случай).

Аппроксимации Эрмита—Паде экспоненциальных функций являются объектом исследования как классиков (Д. Гильберт, Ф. Клейн, Ф. Линдеман, К. Малер, К. Зигель), так и современных математиков (А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, А. И. Аптекарев, H. Stahl, E. Saff, R. Varga, G. Chudnovsky, P. Borwein, W. Van Assche, A. B. J. Kuijlaars, F. Wielonsky и др.). Однако до сих пор в большей степени остается изученным диагональный случай аппроксимаций Эрмита—Паде экспоненциальных функций, нежели недиагональный случай. Отчасти это связано с тем, что методы, ранее применяемые при изучении диагональных аппроксимаций Эрмита—Паде, в общем случае не работают. До настоящего времени известна лишь одна работа, посвященная изучению недиагональных аппроксимаций Эрмита—Паде 1-го рода для системы экспонент $\left\{1, e^{-z}, e^{-2z}\right\}$ [2].

Основная часть. Многочлены $A_{n_0}^0(z), A_{n_1}^1(z), \ldots, A_{n_k}^k(z)$, удовлетворяющие равенству (1), могут быть получены решением линейной системы $n_0 + n_1 + \ldots + n_k - 1$ однородных уравнений с $n_0 + n_1 + \ldots + n_k$ неизвестными коэффициентами. Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Легко показать, что такие нетривиальные решения могут быть выписаны в явном виде. Действительно, пусть C_p — граница круга с центром в точке λ_p столь малого радиуса, что все остальные λ_j лежат во внешности этого круга, а C_∞ — граница круга с центром в нуле столь большого радиуса, что все числа λ_j, $j = 0, 1, \ldots, k$ принадлежат его внутренности. Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что функции

$$A_{n_p}^p(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i} \int_{C_p} \frac{e^{\xi z} d\xi}{\prod_{p=0}^k (\xi - \lambda_p)^{n_p}}, \ 0 \le p \le k \tag{2}$$

удовлетворяют (1) и всем другим условиям. Равенство (2) не является новым и, по всей видимости, было известно ещё Эрмиту [1].

Цель данной работы — локализовать область, в которой находятся нули многочлена $A_{n_p}^p(z)$ в зависимости от выбора чисел $\left\{\lambda_p\right\}_{p=0}^k$ и $\left\{n_p\right\}_{p=0}^k$. Данная тема не является новой. Так, Г. Сегё [3] исследовал поведение нулей многочленов Тейлора и функций, связанных с экспоненциальной функцией; Э. Сафф и Р. Варга [4] изучили расположение нулей многочленов Паде экспоненциальной функции и нашли границы кольца, в котором находятся нули многочленов Паде. Им принадлежит хорошо известная «теорема о кольце».

В работе [5] Вилонский доказал аналог «теоремы о кольце», тем самым получив оценку сверху для модулей нулей многочленов Эрмита—Паде $\left\{A_n^p(z)\right\}_{p=0}^k$ системы экспонент $\left\{e^{pz}\right\}_{p=0}^k$; Г. Шталь [6] исследовал расположение нулей квадратичных диагональных многочленов Эрмита—Паде для системы экспонент $\left\{1, e^z, e^{2z}\right\}$ и показал, что нули лежат на специальных дугах комплексной плоскости.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\left\{\lambda_p\right\}_{p=0}^k$ *— произвольные различные комплексные числа. Тогда при* $n_p \ge 2$, $p = 0, 1, \ldots, k$, $k \ge 1$ *нули многочлена* $A_{n_p}^p(z)$, $0 \le p \le k$ *находятся в круге* $\left\{z : |z| < R_{n_p}^p\right\}$, *где*

$$R_{n_p}^p = \sum_{\substack{j=0 \\ j \ne p}}^k \frac{n_p + n_j - 2/3}{\left|\lambda_p - \lambda_j\right|}. \tag{3}$$

Доказательство теоремы существенно опирается на свойства линейных операторов и теорему Уолша [7].

Заключение. В частных случаях теорема 1 совпадает со всеми известными ранее результатами и содержит их в качестве частных случаев. В диагональном случае многочленов Эрмита—Паде для системы экспонент $\left\{e^{\lambda_p z}\right\}_{p=0}^k$ для произвольных различных действительных и комплексных чисел $\left\{\lambda_p\right\}_{p=0}^k$ из теоремы 1 следуют утверждения, доказанные в работах [8] и [9] соответственно.

Список цитируемых источников

1. *Hermite, C.* Sur la généralisation des fractions continues algebriques / C. Hermite // Ann. Math. Pura Appl. Ser. 2A. — 1883. — № 21. — P. 289—308.
2. *Driver, K.* Nondiagonal Hermite—Padé approximation to the exponential function / K. Driver // J. of Comput. and Appl. Math. — 1995. — V. 65. — P. 125—134.
3. *Szegö, G.* Über eienige Eigenschaft der Exponentialreihe / G. Szegö // Sitzunggsberichte Berliner Math. Ges. — 1924. — V. 23. — P. 50—64.
4. *Saff, E.* On the zeros and poles of Pade approximations to e^z, II, in “Pade and Rational Approximations: Theory and Applications” / E. Saff, R. Varga. — New York : Academic Press, 1977.
5. *Wielonsky, F.* Asymptotics of Diagonal Hermitw—Padé Approximants to e^z / H. Stahl // J. Appox. Theory. — 1997. — V. 90. — № 2. — P. 283—298.
6. *Stahl, H.* Asymptotics for quadratic Hermite—Padé polynomals associated with the exponential function / H. Stahl // Electornic Trans. Num. Anal. — 2002. — № 14. — P. 193—220.
7. *Morden, M.* Geometry of Polynomials / M. Morden. — Providence, American Mathematical Society, 1966.
8. *Герман, А. В.* О нулях многочленов Эрмита / А. В. Герман, Е. П. Кечко, А. П. Старовойтов // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. — 2015. — № 3 (90). — С. 104—111.
9. *Астафьева, А. В.* Аппроксимации Эрмита—Паде экспоненциальных функций / А. В. Астафьева, А. П. Старовойтов // Мат. сб. — 2016. — Т. 207. — № 6. — С. 3—26.

УДК 517.444

И. С. Ковалева

Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель

ОБОБЩЕННЫЙ ОПЕРАТОР МАРКОВА—СТИЛТЬЕСА В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

Введение. Общее определение абстрактного преобразования Стилтьеса мер было дано в [1]. Специальным случаем данного преобразования является оператор Маркова—Стилтьеса S, свойства которого исследовались в работах [2; 3]: были установлены аппаратные свойства, формулы обращения, теорема о свертке, изучены свойства ограниченности и компактности в пространствах Харди и Лебега. Целью данной работы является перенесение ряда полученных результатов на случай обобщенного оператора Маркова—Стилтьеса, зависящего от комплексного параметра α, в пространствах Лебега.

Определение. Пусть $\alpha \in C$. *Обобщенное преобразование Маркова—Стилтьеса* измеримой функции $f:(0,1)\to C$ задается следующим соотношением:

$$S_\alpha f(z) := \int_0^1 \frac{f(t)}{1-\alpha t z}\,dt.$$

Основная часть. В следующих теоремах устанавливаются свойства обобщенного оператора Маркова—Стилтьеса в пространствах Лебега $L^p(0,1)$ и l_A^p для различных значений параметра α.

Теорема 1. *1) Пусть* $\alpha \in C \setminus [1,\infty)$:

а) обобщенный оператор Маркова—Стилтьеса S_α *является компактным в* $L^p(0,1)$ $(1<p<\infty)$;

б) обобщенный оператор Маркова—Стилтьеса S_α *является оператором Гильберта—Шмидта в* $L^2(0,1)$, *причем при* $\alpha \notin R$

$$\|S_\alpha\|_{L^2\to L^2} \le \left(\frac{Li_2(\bar{\alpha})-Li_2(\alpha)}{\bar{\alpha}-\alpha}\right)^{1/2},$$

где $Li_2(z) := -\int_0^z \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^2}$ *— билогарифм, а при* $\alpha \in R\,(a<1)$

$$\|S_\alpha\|_{L^2\to L^2} \le \left(-\frac{\ln(1-\alpha)}{\alpha}\right)^{1/2}.$$