УДК 517.95

А. И. Басик, О. А. Гацкевич
Учреждение образования «Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина», Брест

ГОМОТОПИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ РЕГУЛЯРИЗУЕМЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РИМАНА—ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ КОСОСИММЕТРИЧЕСКИХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В $\mathbf{R}^3$

Введение. В работе проводится гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач Римана—Гильберта для класса эллиптических кососимметрических систем четырех дифференциальных уравнений первого порядка с тремя переменными. Проблема гомотопической классификации регуляризуемых краевых задач была поставлена И. М. Гельфандом в 1960 году и состоит в определении числа компонент связности, а также в указании представителей этих компонент и в установлении гомотопических инвариантов эллиптических псевдодифференциальных операторов, задаваемых регуляризуемыми краевыми задачами [1] (напомним, что краевая задача называется регуляризуемой, если для нее выполнено условие Я. Б. Лопатинского [2]). Несмотря на давность постановки, эта проблема до сих пор не решена, по ней имеются лишь отдельные результаты. Отметим некоторые из них. Так, В. И. Шевченко провел классификацию регуляризуемых задач Римана—Гильберта для системы Моисила—Теодореску [3], А. Т. Усс — для трехмерных аналогов системы Коши—Римана [4]. Заметим, что рассматриваемый нами класс систем содержит систему Моисила—Теодореску и имеет непустое пересечение, но не совпадает с классом трехмерных аналогов системы Коши—Римана.

Основная часть. Пусть в ограниченной односвязной области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, границей которой является поверхность Ляпунова $\partial\Omega$, задана эллиптическая система четырех дифференциальных уравнений первого порядка с действительными коэффициентами

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial U}{\partial x_3} = 0, \qquad (1)$$

где $U = (U_1, U_2, U_3, U_4)^T$ — неизвестная вектор-функция; A_1, A_2 и A_3 являются кососимметрическими матрицами размера 4×4 и имеют вид

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & a_k & b_k & c_k \\ -a_k & 0 & c_k & -b_k \\ -b_k & -c_k & 0 & a_k \\ -c_k & b_k & -a_k & 0 \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Отметим, что эллиптичность системы (1) равносильна линейной независимости векторов $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ и $c = (c_1, c_2, c_3)$ [5].

Задача Римана—Гильберта для системы (1) состоит в отыскании решения этой системы, непрерывно дифференцируемого в Ω и непрерывного по Гельдеру на $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, удовлетворяющего на $\partial\Omega$ граничным условиям

$$B(y)U(y) = f(y) \quad (y \in \partial\Omega), \qquad (2)$$

где B — заданная непрерывная по Гельдеру на $\partial\Omega$ матрица-функция размера 2×4;

f — заданная непрерывная по Гельдеру на $\partial\Omega$ двухкомпонентная вектор-функция.

В работе [5] доказывается, что задача (1), (2) регуляризуема тогда и только тогда, когда в каждой точке $y \in \partial\Omega$ выполняется неравенство $\langle \nu(y); L(y) \rangle \neq 0$. Здесь через $\langle \cdot;\cdot \rangle$ обозначено стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^3$, $\nu(y)$ — единичное поле внутренних нормалей на $\partial\Omega$; $L(y)$ — векторное поле на $\partial\Omega$ с компонентами $L_1 = a_1(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + b_1(\Lambda_{13} - \Lambda_{24}) + c_1(\Lambda_{23} + \Lambda_{14})$, $L_2 = a_2(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + b_2(\Lambda_{13} - \Lambda_{24}) + c_2(\Lambda_{23} + \Lambda_{14})$, $L_3 = a_3(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + b_3(\Lambda_{13} - \Lambda_{24}) + c_3(\Lambda_{23} + \Lambda_{14})$; Λ_{jk} — минор матрицы $B(y)$, составленный из ее j-го и k-го столбцов (j, k = 1, 2, 3, 4).

Напомним, что две задачи Римана—Гильберта называются гомотопными, если существует непрерывная деформация одной задачи в другую, не нарушающая условия Лопатинского. При этом предполагается, что деформация сохраняет гладкость (непрерывность по Гельдеру) коэффициентов этих задач.

Через $\Im$ обозначим множество всех регуляризуемых краевых задач Римана—Гильберта (1), (2); $\Im_+^+$ — множество регуляризуемых задач Римана—Гильберта (1)—(2), для которых выполняется неравенство $\langle \nu(y); L(y)\rangle > 0$ всюду на $\partial\Omega$ и векторы *a,b* и *c* образуют правую тройку; $\Im_+^-$ — множество регуляризуемых задач, для которых $\langle \nu(y); L(y)\rangle > 0$ и *a, b, c* — левая тройка векторов; $\Im_-^-$ — множество регуляризуемых задач, для которых $\langle \nu(y); L(y)\rangle < 0$ и *a, b, c* — левая тройка векторов; $\Im_-^+$ — множество регуляризуемых задач, для которых $\langle \nu(y); L(y)\rangle < 0$ и *a, b, c* — правая тройка векторов.

Теорема 1. *Множество $\Im$ регуляризуемых краевых задач Римана—Гильберта для эллиптических систем кососимметрического типа в $\mathbf{R}^3$ имеет четыре компоненты гомотопической связности $\Im_+^+$, $\Im_+^-$, $\Im_-^+$, $\Im_-^-$. Гомотопическими инвариантами являются знак скалярного произведения $\langle \nu(y); L(y)\rangle$ и знак смешанного произведения* (*a; b; c*). *Индекс произвольной задачи из $\Im$ равен минус единице.*

Наметим схему доказательства теоремы 1. В силу непрерывности векторного поля $L(y)$ и связности поверхности $\partial\Omega$ скалярное произведение $\langle \nu(y); L(y)\rangle$ сохраняет знак на $\partial\Omega$, и, следовательно, задачи, для которых соответствующие скалярные произведения имеют разные знаки, не гомотопны. Заметим также, что если соответствующие тройки векторов *a, b* и *c* двух задач имеют разную ориентацию, то эти задачи не гомотопны. Таким образом, достаточно установить гомотопическую связность множеств $\Im_+^+$, $\Im_+^-$, $\Im_-^+$, $\Im_-^-$.

Рассмотрим множество $\Im_+^+$. Предложенным в работе [3] В. И. Шевченко методом доказывается, что произвольная задача из $\Im_+^+$ гомотопна задаче для системы (1) с граничным условием ($y \in \partial\Omega$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{(\nu(y),b,c)}{(a,b,c)} & \dfrac{(a,\nu(y),c)}{(a,b,c)} & \dfrac{(a,b,\nu(y))}{(a,b,c)} \end{pmatrix} U(y) = f(y). \tag{3}$$

Отметим, что задача (1), (3) регуляризуема для любых линейно независимых векторов a, b и c.

Проведем теперь гомотопию эллиптической системы задачи (1), (3). Если *a*, *b*, *c* образуют правую тройку векторов, то непрерывной деформацией в $\mathbf{R}^3$ с сохранением условия линейной независимости она может быть сгомотопирована в стандартный базис e_1, e_2, e_3 пространства $\mathbf{R}^3$ (см., например, [6, с. 211]). В этом случае задача (1), (3) гомотопна задаче

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_4}{\partial x_3} = 0, \\ -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_4}{\partial x_2} = 0, \\ -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_4}{\partial x_1} = 0, \\ -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0 \end{cases} (x \in \Omega), \qquad \begin{cases} u_1\big|_{\partial\Omega} = f_1(y), \\ (u_2\nu_1 + u_3\nu_2 + u_4\nu_3)\big|_{\partial\Omega} = f_2(y) \end{cases} (y \in \partial\Omega). \tag{4}$$

Заменой $V = (-u_2, -u_3, -u_4)$ и $W = u_1$ (4) приводится к виду $\operatorname{div} V(x) = 0$, $\operatorname{rot} V(x) = \operatorname{grad} W(x)$, $W\big|_{\partial\Omega} = f_1(y)$, $\langle V; \nu\rangle\big|_{\partial\Omega} = -f_2(y)$.

Индекс последней задачи вычислен в работе [7] и равен минус единице.

Аналогичные рассуждения проводятся для множеств $\Im_+^-$, $\Im_-^+$ и $\Im_-^-$. Теорема доказана.

Заключение. Множество регуляризуемых краевых задач Римана—Гильберта для класса эллиптических кососимметрических систем четырех дифференциальных уравнений первого порядка с тремя переменными имеет четыре компоненты гомотопической связности. Индекс произвольной регуляризуемой краевой задачи равен минус единице.

Список цитируемых источников

1. *Гельфанд, И. М.* Об эллиптических уравнениях / И. М. Гельфанд // Успехи мат. наук. — 1960. — Т. 15. — Вып. 3. — С. 121—132.
2. *Агранович, М. С.* Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М. С. Агранович // Успехи мат. наук. — 1965. — Т. 20. — Вып. 5. — С. 3—120.
3. *Шевченко, В. И.* Гомотопическая классификация задач Римана—Гильберта для голоморфного вектора / В. И. Шевченко // Мат. физика : Респ. межвед. сб. — Киев, 1975. — Вып. 17. — С. 184—186.
4. *Усс, А. Т.* Краевая задача Римана—Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши—Римана / А. Т. Усс // Докл. НАН Беларуси. — 2003. — Т. 47. — № 6. — С. 10—15.
5. *Басик, А. И.* Условие регуляризуемости краевой задачи Римана—Гильберта для кососимметрических эллиптических систем в $\mathbf{R}^3$ / А. И. Басик, О. А. Гацкевич // Содружество наук. Барановичи-2016 : сб. материалов XII Междунар. науч.-практ. конф. молодых исследователей, Барановичи, 19 мая 2016 г. — Барановичи, 2016. — С. 25—26.
6. *Александров, П. С.* Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры : [для ун-тов] / П. С. Александров ; с приложением собрания задач, снабженных решениями, сост. А. С. Пархоменко. — М. : Наука, 1968. — 911 с.
7. *Шевченко, В. И.* О некоторых краевых задачах для голоморфного вектора / В. И. Шевченко // Мат. физика : Респ. межвед. сб. — Киев, 1970. — Вып. 8. — С. 172—186.

УДК 517.946

А. И. Басик[1], Т. В. Копайцева[2]
[1]*Учреждение образования «Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина», Брест*
[2]*Учреждение образования «Брестский государственный технический университет», Брест*

ЗАДАЧА ТИПА НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Введение. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ — ограниченная область, границей которой является гладкая кривая Ляпунова $\partial\Omega$. Задача отыскания решения

$$u(x_1, x_2) = (u_1(x_1, x_2),\ u_2(x_1, x_2)) \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$$

равномерно эллиптической системы двух дифференциальных уравнений второго порядка

$$\sum_{j,\,k=1}^{2} A_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{2} A_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + A(x)u = 0\,, \tag{1}$$

удовлетворяющего на границе краевым условиям

$$p_k \left\langle l_1; grad\ u_1 \right\rangle + q_k \left\langle l_2; grad\ u_2 \right\rangle = f_k,\ k = 1, 2, \tag{2}$$

называется задачей типа наклонной производной. Здесь $A_{jk}(x)$, $A_j(x)$ и $A(x)$ — достаточно гладкие квадратные вещественные матрицы-функции второго порядка; $p_k, q_k, f_k : \partial\Omega \to \mathbf{R}$ — заданные функции класса $C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$; l_1, l_2 — некасательные к $\partial\Omega$ векторные поля; $\langle \cdot;\cdot \rangle$ — скалярное произведение на плоскости; $C^{n,\alpha}(\Omega)$ — множество всех непрерывно дифференцируемых в области Ω функций до порядка n включительно, частные производные порядка n которых непрерывны по Гельдеру с показателем α в этой области.

Для произвольной эллиптической системы (1) краевая задача типа наклонной производной, вообще говоря, не является нетеровой. Например, в случае $l_1 = l_2$ задача не будет нетеровой [1], если в качестве системы (1) рассматривается известная система А. В. Бицадзе [2].

В работе [3, с. 74] доказывается, что если (1) является системой ортогонального типа и векторы l_1 и l_2 не коллинеарны в каждой точке границы $\partial\Omega$, то задача (1) — (2) при $p_1 = q_2 = 1$ и $p_2 = q_1 = 0$ является нетеровой независимо от того, какой компоненте гомотопической связности принадлежит система (1).

В настоящей работе приводится пример эллиптической системы двух дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка на плоскости неортогонального типа, для которой краевая задача типа наклонной производной не является нетеровой.