На факультативных занятиях формировать и применять медиакомпетентностный подход помогают учителю программы факультативных занятий: «Введение в информатику» (5-й класс); «Информатика» (9-й класс); «Информационно-образовательные ресурсы сети Интернет» (9-й класс); «Избранные главы информатики» (10-й класс); «Избранные главы информатики» (11-й класс).

Учащиеся обучаются не только компьютерной грамотности при работе с основными офисными приложениями, но и медиаграмотности через сеть Интернет.

Также необходимо учитывать основные способы для формирования медиакомпетенций учащихся, которые позволят применять их в любой ситуации вне учебного предмета «Информатика»:

1) интегрированные учебные занятия (помогают сравнивать знания по различным учебным предметам в рамках одной параллели классов либо уровень знаний между учащимися при проведении учебных занятий с разновозрастными учащимися, что позволяет учащимся обмениваться знаниями, совершенствовать работу в командах, а также проявлять лидерские качества);

2) исследовательская деятельность учащихся (способ познания мира, который воспитывает в человеке заинтересованность и мышление);

3) проектная деятельность учащихся (понимание и применение различных знаний, умений и навыков, приобретенных на всех учебных предметах для решения новых задач).

Заключение. Успех этих способов для формирования медиакомпетенций заключается в привлечении всех учащихся независимо от уровня самооценки в отношении к учебному предмету и способностей к обучению. Учитель информатики обязан стать «ключом» к современному медиамиру. Современный человек должен владеть компьютерными компетенциями и медиакомпетенциями для дальнейшего профессионального карьерного роста. Только образованный человек, овладевший медиакомпетенциями, сможет построить карьеру и быть востребованным специалистом. Таким образом, будет сформирована готовность учащихся применять знания, умения и навыки в окружающем мире.

Список цитируемых источников

1. *Артёмова, К. В.* Формирование медиакомпетентности на учебных занятиях по информатике в общеобразовательной школе // Научно-методическое сопровождение повышения квалификации педагогов: опыт, проблемы, перспективы : сб. материалов III Респ. науч.-практ. конф., 26 мая 2017 г., г. Могилёв / редкол.: М. М. Жудро [и др.] ; под общ. ред. В. Н. Гириной. — Могилёв : МГОИРО, 2017. — 538 с.

УДК 517.521.8

И. Н. Бруй
Учреждение образования «Барановичский государственный университет», Барановичи

СУММИРОВАНИЕ СО СКОРОСТЬЮ РЯДОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Введение. Пусть последовательность $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ элементов банахова пространства $\mathbf{B}$ порождает ряд

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

и ряд

$$0\,a_0 + 1\,a_1 + 2\,a_2 + \ldots + n\,a_n + \ldots, \tag{2}$$

который назовём координатным, соответствующим (1). Правило дифференцирования экспоненты $\left(e^{i\,n\,x}\right)' = in\,e^{i\,n\,x}$ объясняет появление ряда (2) в теории тригонометрических рядов Фурье и в теории рядов по многочленам Фабера [1, с. 9—12]. И пусть

$$\forall N \in Z_+ := \{0, 1, 2, \ldots\}\ \ \sigma_N(1) := \sum_{n=0}^{N}\left(1 - \frac{n}{N+1}\right)a_n \tag{3}$$

суть средние Фейера ряда (1), а

$$\forall N \in Z_+\ \ \sigma_N(2) := \sum_{n=0}^{N}\left(1 - \frac{n}{N+1}\right)n\,a_n \tag{4}$$

суть средние Фейера координатного ряда (2). Оператор присваивания «$:=$» означает, что выражению справа от него присвоено обозначение, стоящее слева; аналогичный смысл имеет символ «$=:$».

В начале рассматривались ряды комплексных чисел. Если средние Фейера комплексного координатного ряда (2) ограничены: $\sup_{N\in Z_+}\left|\sigma_N(2)\right|<+\infty$, то согласно известной теореме [2, с. 165, теорема 71] теории суммируемости числовых рядов средние Фейера исходного комплексного ряда (1) сходятся: $\exists s\in C$ $\lim_{N\to+\infty}\left|s-\sigma_N(1)\right|=0$. Первым скорость последней суммируемости (summabilty with speed) установил Д. Алексич [3, с. 46, замечание]: $\forall N\in Z_+$ $\left|s-\sigma_N(1)\right|\le\dfrac{4}{N+1}\sup\limits_{N\in Z_+}\left|\sigma_N(2)\right|$; значение константы уменьшили с 4 до 3 Б. Сёкефальви-Надь [4, с. 84, лемма] и С. Б. Стечкин [5, с. 464, лемма 2, (1.6)]. Множество комплексных чисел C с обычными арифметическими операциями их сложения и умножения и с модулем в качестве нормы становится банаховым пространством.

Для рядов (1) и (2) в произвольном банаховом пространстве **B** Д. Алексич доказал следующие две теоремы [6, с. 62—64].

Теорема 1. *Из ограниченности в банаховом пространстве* **B** *последовательности средних Фейера (4) координатного ряда (2)* $\sup_{N\in Z_+}\left\|\sigma_N(2)\right\|_{\mathbf{B}}=:A_1<+\infty$ *вытекает сходимость в пространст* **B** *средних Фейера (3) исходного ряда (1) к элементу* s *со скоростью* $\forall N\in Z_+$ $\left\|s-\sigma_N(1)\right\|_{\mathbf{B}}\le\dfrac{3A_1}{N+1}$.

Теорема 2. *Из сходимости в банаховом пространстве* **B** *средних Фейера (3) ряда (1) к элементу* s *со скоростью* $\forall N\in Z_+$ $\left\|s-\sigma_N(1)\right\|_{\mathbf{B}}\le\dfrac{A_2}{N+1}$, *где вещественная постоянная* $A_2\ge 0$, *вытекает ограниченность в пространств* **B** *последовательности средних Фейера (4) координатного ряда (2)* $\sup_{N\in Z_+}\left\|\sigma_N(2)\right\|_{\mathbf{B}}\le 4A_2$.

В настоящей работе теоремы 1 и 2 Д. Алексича для средних Фейера σ_N распространяются на матричные средние M_N.

2. Основные результаты. Пусть $Z_1:=\{1,2,3,...\}$ есть множество всех натуральных чисел. С помощью комплексной двойной последовательности $\left(d_\nu(N)\right)_{(N,\nu)\in Z_+\times Z_1}$, где номер строки N принимает неотрицательные целые значения $0,1,2,\dots$, а номер столбца ν принимает натуральные значения $1,2,3,\dots$:

$$\left(d_\nu(N)\right)_{(N,\nu)\in Z_+\times Z_1}:=\begin{pmatrix} d_1(0) & d_2(0) & d_3(0) & \dots \\ d_1(1) & d_2(1) & d_3(1) & \dots \\ d_1(2) & d_2(2) & d_3(2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}_{Z_+\times Z_1}, \tag{5}$$

образуем матричные средние

$$\forall N\in Z_+\ \ M_N(1):=\sum_{n=0}^{N}\left[1-\sum_{\nu=1}^{+\infty}d_\nu(N)\left(\frac{n}{N+1}\right)^{\nu}\right]a_n \tag{6}$$

ряда (1) и матричные средние

$$\forall N\in Z_+\ \ M_N(8):=\sum_{n=0}^{N}\left[1-\sum_{\nu=1}^{+\infty}d_\nu(N)\left(\frac{n}{N+1}\right)^{\nu}\right]n^r a_n \tag{7}$$

ряда

$$0^r a_0+1^r a_1+2^r a_2+\dots+n^r a_n+\dots, \tag{8}$$

который назовём координатным, соответствующим (1). Появление последнего ряда мотивирует то, что производная r-ого $(r\in Z_1)$ порядка экспоненты $\left(e^{inx}\right)^{(r)}=(in)^r e^{inx}$. Координатный ряд (2) получается из координатного ряда (8) при $r=1$.

Очевидно: 1) если все $d_\nu(N)=0$, то матричные средние суть частичные суммы s_N; 2) если члены двойной последовательности $(d_\nu(N))_{(N,\nu)\in Z_+\times Z_1}$ таковы, что в первом столбце единицы: $\forall N\in Z_+\ \ d_1(N)=1$, а в остальных столбцах нули: $\forall N\in Z_+\ \ \forall\nu\in Z_2:=\{2,3,4,...\}\ \ d_\nu(N)=0$, то матричные средние суть средние Л. Фейера σ_N; 3) если при натуральном $r=1,2,3,...$ члены двойной последовательности $(d_\nu(N))_{(N,\nu)\in Z_+\times Z_1}$ таковы, что в r -том столбце единицы: $\forall N\in Z_+\ \ d_r(N)=1$, а в остальных столбцах нули: $\forall N\in Z_+\ \ \forall\nu\in Z_1\setminus\{r\}$ $d_\nu(N)=0$, то матричные средние суть средние А. Зигмунда Z_N^r порядка r $\left(\sigma_N=Z_N^1\right)$.

Для средних В. Рогозинского [7, с. 113, (13*)] $\forall N\in Z_+\ \ R_N(1):=\sum_{n=0}^{N}\left[\cos\frac{\pi n}{2(N+1)}\right]a_n$ ряда (1) с помощью канонического разложения функции косинус в степенной ряд получаем, что члены двойной последовательности $(d_\nu(N))_{(N,\nu)\in Z_+\times Z_1}$ с нечётными номерами столбцов $d_{2\nu-1}(N)=0$, а с чётными номерами столбцов $d_{2\nu}(N)=(-1)^{\nu-1}\{1/[(2\nu)!]\}(\pi/2)^{2\nu}$ $(\nu\in Z_1)$.

Для внешне схожих с $R_N(1)$ средних С. Н. Бернштейна [8, с. 523, (2)] $\forall N\in Z_+$ $B_N(1):=\sum_{n=0}^{N}\left(\cos\frac{\pi n}{2N+1}\right)a_n$ ряда (1) члены двойной последовательности $(d_\nu(N))_{(N,\nu)\in Z_+\times Z_1}$ с нечётными номерами столбцов также равны нулю: $d_{2\nu-1}(N)=0$, а с чётными номерами столбцов уже явно зависят от номера строки N: $d_{2\nu}(N)=(-1)^{\nu-1}\{1/[(2\nu)!]\}(\pi/2)^{2\nu}[1+1/(2N+1)]^{2\nu}$ $(\nu\in Z_1)$.

Теорема 3. *Пусть комплексная двойная последовательность (5) удовлетворяет условию*

$$\sup_{N\in Z_+}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\nu\left|d_\nu(N)\right|=:A_3<+\infty \tag{9}$$

и при натуральном $r\in Z_2$ первые столбцы с номерами ν от 1 до $r-1$ удовлетворяют условиям

$$\exists A_4\ge 0\ \ \forall N\in Z_+\ \ \forall\nu\in[1,r-1]\cap Z_1\ \ \left|d_\nu(N)\right|\le\frac{A_4}{(N+1)^{r-\nu}}. \tag{10}$$

И пусть при натуральном $r=1,2,3,...$ описанная выше комплексная двойная последовательность (5) и координатный ряд (8) связаны между собой условием

$$\sup_{N\in Z_+}\left[\left(\max_{0\le M\le N}\left\|s_M(8)\right\|_{\mathbf{B}}\right)\cdot\left|1-\sum_{\nu=1}^{+\infty}d_\nu(N)\right|\right]=:A_5<+\infty \tag{11}$$

и нормы частичных сумм координатного ряда (8) мажорируются логарифмической функцией в степени $\alpha\ge 1$:

$$\exists\alpha\in[1;+\infty)\ \ \forall N\in Z_+\ \ \left\|s_N(8)\right\|_{\mathbf{B}}\le A_6\ln^{\alpha}(N+2). \tag{12}$$

Тогда из ограниченности в банаховом пространстве **B** *последовательности матричных средних (7) такого координатного ряда (8)*

$$\sup_{N\in Z_+}\left\|M_N(8)\right\|_{\mathbf{B}}=:A_7<+\infty \tag{13}$$

вытекает сходимость в пространстве **B** *матричных средних (6) исходного ряда (1) к элементу s со скоростью*

$$\forall N\in Z_+\ \ \left\|s-M_N(1)\right\|_{\mathbf{B}}\le\frac{A_8}{(N+1)^r}, \tag{14}$$

где для всех достаточно больших номеров N константа

$$A_8:=\frac{2^{r+1}r}{2r-1}+\frac{4\cdot 3^r r}{2r+1}A_3+2^rA_5+2A_7+\left[2^{2r}+\frac{2^{r-1}(3+2^r)}{r}\right]A_3A_7+ \\ +2^r(r-1)\left[1+r+2^{r-2}(r-1)\right]A_4A_7 \tag{15}$$

В силу условия (12) нормы частичных сумм

$$\forall N \in Z_+ \;\; s_N(8) := \sum_{n=0}^{N} n^r a_n \tag{16}$$

координатного ряда (8) обладают следующим свойством: для любого положительного вещественного $\beta > 0$ предел $\lim_{N\to+\infty} N^{-\beta} \| s_N(8) \|_{\mathbf{B}} = 0$, т. е.

$$\forall \beta > 0 \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_{\beta,\varepsilon} \in Z_+ \;\; \forall N \in Z_+ \left[N \ge N_{\beta,\varepsilon} \Rightarrow \frac{\| s_N(8) \|_{\mathbf{B}}}{N^{\beta}} \le \varepsilon \right]. \tag{17}$$

Теорема 4. *Пусть при некотором натуральном* $r = 1, 2, 3, \ldots$ *банахово пространств* **B** *дополнительно обладает ещё зигмундовской структурой:*

$$\exists A_9 > 0 \;\; \forall f \in \mathbf{B} \;\; \forall N \in Z_+ \;\; \left\| Z_N^r f \right\|_{\mathbf{B}} \le A_9 \| f \|_{\mathbf{B}}. \tag{18}$$

Тогда из сходимости в таком банаховом пространстве **B** *матричных средних (6) ряда (1) к элементу* s *со скоростью (14), где вещественная постоянная* $A_8 \ge 0$, *вытекает ограниченность в пространств* **B** *последовательности матричных средних (7) координатного ряда (8)*

$$\sup_{N\in Z_+} \| M_N(8) \|_{\mathbf{B}} \le A_8 (1 + A_9). \tag{19}$$

В банаховом пространстве $\mathbf{C}(T)$ всех непрерывных на вещественной прямой R и периодических с периодом 2π функций с равномерной нормой $\| f \|_{\mathbf{C}(T)} := \max_{-\pi\le x\le+\pi} | f(x) |$ условие (18) выполняется с постоянной $A_9 = 2r - 1$ [9, с. 236].

3. Доказательство теоремы 3. *Шаг 1.* Выразим разность Коши членов последовательности $(M_N(1))_{N=0}^{+\infty}$ матричных средних (6) ряда (1) через члены последовательности $(M_N(8))_{N=0}^{+\infty}$ матричных средних (7) координатного ряда (8).

Для разности последующего и предыдущего членов последовательности $(M_N(1))_{N=0}^{+\infty}$ имеем

$$\begin{aligned} M_K(1) - M_{K-1}(1) &:= \sum_{n=0}^{K} \left[1 - \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(K) \left(\frac{n}{K+1} \right)^{\nu} \right] a_n - \\ - \sum_{n=0}^{K-1} \left[1 - \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(K-1) \left(\frac{n}{K} \right)^{\nu} \right] a_n &= \left[1 - \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(K) \left(\frac{K}{K+1} \right)^{\nu} \right] a_K + \\ + \sum_{n=0}^{K-1} \left[1 - \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(K) \left(\frac{n}{K+1} \right)^{\nu} \right] a_n &- \sum_{n=0}^{K-1} \left[1 - \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(K-1) \left(\frac{n}{K} \right)^{\nu} \right] a_n = \\ = \left[1 - \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(K) \left(\frac{K}{K+1} \right)^{\nu} \right] a_K &+ \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left[\frac{d_\nu(K-1)}{K^{\nu}} - \frac{d_\nu(K)}{(K+1)^{\nu}} \right] \sum_{n=0}^{K-1} n^{\nu} a_n \, . \end{aligned} \tag{20}$$

Из аналогичной (20) формулы для разности последующего и предыдущего членов последовательности $(M_N(8))_{N=0}^{+\infty}$ матричных средних (7) координатного ряда (8)

$$\begin{aligned} M_K(8) - M_{K-1}(8) &= \left[1 - \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(K) \left(\frac{K}{K+1} \right)^{\nu} \right] K^r a_K + \\ &+ \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left[\frac{d_\nu(K-1)}{K^{\nu}} - \frac{d_\nu(K)}{(K+1)^{\nu}} \right] \sum_{n=0}^{K-1} n^{\nu+r} a_n \end{aligned}$$

получаем

$$\left[1-\sum_{\nu=1}^{+\infty} d_{\nu}(K)\left(\frac{K}{K+1}\right)^{\nu}\right] a_K = \frac{1}{K^r}\left[M_K(8)-M_{K-1}(8)\right]-$$

$$-\frac{1}{K^r}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left[\frac{d_{\nu}(K-1)}{K^{\nu}}-\frac{d_{\nu}(K)}{(K+1)^{\nu}}\right]\sum_{n=0}^{K-1} n^{\nu+r} a_n \ . \qquad (21)$$

Подстановка (21) в (20) даёт

$$M_K(1)-M_{K-1}(1)=\frac{1}{K^r}\left[M_K(8)-M_{K-1}(8)\right]-$$

$$-\frac{1}{K^r}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left[\frac{d_{\nu}(K-1)}{K^{\nu}}-\frac{d_{\nu}(K)}{(K+1)^{\nu}}\right]\sum_{n=0}^{K-1} n^{\nu+r} a_n+\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left[\frac{d_{\nu}(K-1)}{K^{\nu}}-\frac{d_{\nu}(K)}{(K+1)^{\nu}}\right]\sum_{n=0}^{K-1} n^{\nu} a_n=$$

$$=\frac{1}{K^r}\left[M_K(8)-M_{K-1}(8)\right]+\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left[\frac{d_{\nu}(K-1)}{K^{\nu}}-\frac{d_{\nu}(K)}{(K+1)^{\nu}}\right]\sum_{n=0}^{K-1}\left[1-\left(\frac{n}{K}\right)^r\right] n^{\nu} a_n \ . \qquad (22)$$

Просуммируем разности (22) по K от $N+1$ до P:

$$M_P(1)-M_N(1)=\sum_{K=N+1}^{P}\left[M_K(1)-M_{K-1}(1)\right]\overset{(22)}{=}\sum_{K=N+1}^{P}\frac{1}{K^r}\left[M_K(8)-M_{K-1}(8)\right]+$$

$$+\sum_{K=N+1}^{P}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left[\frac{d_{\nu}(K-1)}{K^{\nu}}-\frac{d_{\nu}(K)}{(K+1)^{\nu}}\right]\sum_{n=0}^{K-1}\left[1-\left(\frac{n}{K}\right)^r\right] n^{\nu} a_n \ .$$

В предыдущем равенстве правую часть преобразуем по методу Абеля :

$$M_P(1)-M_N(1)=\sum_{K=N+1}^{P}\frac{1}{K^r}M_K(8)-\sum_{K=N}^{P-1}\frac{1}{(K+1)^r}M_K(8)+$$

$$+\sum_{K=N}^{P-1}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_{\nu}(K)}{(K+1)^{\nu}}\sum_{n=0}^{K}\left[1-\left(\frac{n}{K+1}\right)^r\right] n^{\nu} a_n-$$

$$-\sum_{K=N+1}^{P}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_{\nu}(K)}{(K+1)^{\nu}}\sum_{n=0}^{K-1}\left[1-\left(\frac{n}{K}\right)^r\right] n^{\nu} a_n=$$

$$=\frac{1}{P^r}M_P(8)+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]M_K(8)-\frac{1}{(N+1)^r}M_N(8)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_{\nu}(N)}{(N+1)^{\nu}}\sum_{n=0}^{N}\left[1-\left(\frac{n}{N+1}\right)^r\right] n^{\nu} a_n+$$

$$+\sum_{K=N+1}^{P-1}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_{\nu}(K)}{(K+1)^{\nu}}\left\{\left[1-\left(\frac{K}{K+1}\right)^r\right]K^{\nu}a_K+\sum_{n=0}^{K-1}\left[\left(\frac{n}{K}\right)^r-\left(\frac{n}{K+1}\right)^r\right] n^{\nu} a_n\right\}-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_{\nu}(P)}{(P+1)^{\nu}}\sum_{n=0}^{P-1}\left[1-\left(\frac{n}{P}\right)^r\right] n^{\nu} a_n \ .$$

Отсюда получаем стартовое представление (его первый вид), в котором $P>N+1$:

$$M_P(1)-M_N(1)=\frac{1}{P^r}M_P(8)+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]M_K(8)-\frac{1}{(N+1)^r}M_N(8)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_{\nu}(N)}{(N+1)^{\nu}}\sum_{n=0}^{N} n^{\nu} a_n-\frac{1}{(N+1)^r}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_{\nu}(N)}{(N+1)^{\nu}}\sum_{n=0}^{N} n^{\nu} n^r a_n+$$

$$
+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[1-\left(\frac{K}{K+1}\right)^{r}\right]a_K\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{K}{K+1}\right)^{\nu}d_{\nu}(K)+
$$

$$
+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_{\nu}(K)}{(K+1)^{\nu}}\sum_{n=0}^{K-1}n^{\nu}n^{r}a_n-
$$

$$
-\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_{\nu}(P)}{(P+1)^{\nu}}\sum_{n=0}^{P-1}n^{\nu}a_n+\frac{1}{P^r}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_{\nu}(P)}{(P+1)^{\nu}}\sum_{n=0}^{P-1}n^{\nu}n^{r}a_n\ . \tag{23}
$$

Шаг 2. По определению

$$
\forall N\in Z_+\ \ Z_N^r(1):=\sum_{n=0}^{N}\left[1-\left(\frac{n}{N+1}\right)^{r}\right]a_n \tag{24}
$$

суть средние Зигмунда положительного вещественного порядка $r>0$ ряда (1), а

$$
\forall N\in Z_+\ \ Z_N^r(8):=\sum_{n=0}^{N}\left[1-\left(\frac{n}{N+1}\right)^{r}\right]n^r a_n \tag{25}
$$

суть средние Зигмунда положительного вещественного порядка $r>0$ координатного ряда (8). Средние Фейера (3) ряда (1) и средние Фейера (4) координатного ряда (2) получается соответственно из средних Зигмунда (24) ряда (1) и средних Зигмунда (25) координатного ряда (8) при $r=1$: $\forall N\in Z_+$ $\sigma_N(1)=Z_N^1(1)$ и $\sigma_N(2)=Z_N^1(2)$.

Для средних Зигмунда натурального порядка $r\in Z_1$ у двойной последовательности $\left(d_{\nu}(N)\right)_{(N,\nu)\in Z_+\times Z_1}$ столбец r-й состоит из единиц: $\forall N\in Z_+$ $d_r(N)=1$, а остальные столбцы состоят из нулей: $\forall N\in Z_+$ $\forall \nu\in Z_1\setminus\{r\}$ $d_{\nu}(N)=0$. Поэтому представление (23) с учётом определений (24) и (25) принимает вид

$$
Z_P^r(1)-Z_N^r(1)=\frac{1}{P^r}Z_P^r(8)+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]Z_K^r(8)-\frac{1}{(N+1)^r}Z_N^r(8)+
$$

$$
+\frac{1}{(N+1)^r}\sum_{n=0}^{N}n^r a_n-\frac{1}{(N+1)^r}\frac{1}{(N+1)^r}\sum_{n=0}^{N}n^r n^r a_n+
$$

$$
+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[1-\left(\frac{K}{K+1}\right)^{r}\right]a_K\left(\frac{K}{K+1}\right)^{r}+
$$

$$
+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]\frac{1}{(K+1)^r}\sum_{n=0}^{K-1}n^r n^r a_n-
$$

$$
-\frac{1}{(P+1)^r}\sum_{n=0}^{P-1}n^r a_n+\frac{1}{P^r}\frac{1}{(P+1)^r}\sum_{n=0}^{P-1}n^r n^r a_n=
$$

$$
=\frac{1}{P^r}Z_P^r(8)+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]Z_K^r(8)-\frac{1}{(N+1)^r}Z_N^r(8)+
$$

$$
+\frac{1}{(N+1)^r}\sum_{n=0}^{N}\left[1-\left(\frac{n}{N+1}\right)^{r}\right]n^r a_n+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[1-\left(\frac{K}{K+1}\right)^{r}\right]a_K\left(\frac{K}{K+1}\right)^{r}+
$$

$$
+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]\sum_{n=0}^{K-1}\left(\frac{n}{K+1}\right)^{r}n^r a_n-\frac{1}{(P+1)^r}\sum_{n=0}^{P-1}\left[1-\left(\frac{n}{P}\right)^{r}\right]n^r a_n\overset{(25)}{=:}
$$

$$
\overset{(25)}{=:}\frac{1}{P^r}Z_P^r(8)+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]Z_K^r(8)+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[1-\left(\frac{K}{K+1}\right)^{r}\right]a_K\left(\frac{K}{K+1}\right)^{r}+
$$

$$
+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]\sum_{n=0}^{K-1}\left(\frac{n}{K+1}\right)^{r}n^r a_n-\frac{1}{(P+1)^r}Z_{P-1}^r(8). \tag{26}
$$

Для предпоследней компоненты правой части (26) имеем

$$\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]\sum_{n=0}^{K-1}\left(\frac{n}{K+1}\right)^r n^r a_n =$$

$$=\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]\left\{-\sum_{n=0}^{K}\left[1-\left(\frac{n}{K+1}\right)^r\right]n^r a_n-\left(\frac{K}{K+1}\right)^r K^r a_K+\sum_{n=0}^{K}n^r a_n\right\}\overset{(25)}{=:}$$

$$\overset{(25)}{=:}\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]\left[-Z_K^r(8)-\left(\frac{K}{K+1}\right)^r K^r a_K+\sum_{n=0}^{K}n^r a_n\right]=$$

$$=-\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]Z_K^r(8)-\sum_{K=N+1}^{P-1}\frac{1}{K^r}\left(\frac{K}{K+1}\right)^r K^r a_K+$$

$$+\sum_{K=N+1}^{P-1}\frac{1}{(K+1)^r}\left(\frac{K}{K+1}\right)^r K^r a_K+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]\sum_{n=0}^{K}n^r a_n=$$

$$=-\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]Z_K^r(8)-\sum_{K=N+1}^{P-1}\left(\frac{K}{K+1}\right)^r a_K+$$

$$+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left(\frac{K}{K+1}\right)^{2r} a_K+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]\sum_{n=0}^{K}n^r a_n=$$

$$=-\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]Z_K^r(8)-$$

$$-\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[1-\left(\frac{K}{K+1}\right)^r\right]a_K\left(\frac{K}{K+1}\right)^r+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]\sum_{n=0}^{K}n^r a_n\,. \tag{27}$$

Подстановка (27) в (26) приводит к

$$Z_P^r(1)-Z_N^r(1)=\frac{1}{P^r}Z_P^r(8)+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]\sum_{n=0}^{K}n^r a_n-\frac{1}{(P+1)^r}Z_{P-1}^r(8)\,. \tag{28}$$

Из определения (25), помня, что индекс суммирования «немой», по методу Абеля получаем

$$Z_N^r(8)=\sum_{n=0}^{N}n^r a_n-\frac{1}{(N+1)^r}\sum_{n=1}^{N}n^r n^r a_n=$$

$$=\sum_{m=0}^{N}m^r a_m-\frac{1}{(N+1)^r}\sum_{n=1}^{N}n^r\left(\sum_{m=0}^{n}m^r a_m-\sum_{m=0}^{n-1}m^r a_m\right)=$$

$$=\sum_{m=0}^{N}m^r a_m-\frac{1}{(N+1)^r}\left[\sum_{n=0}^{N}n^r\sum_{m=0}^{n}m^r a_m-\sum_{n=0}^{N-1}(n+1)^r\sum_{m=0}^{n}m^r a_m\right]=$$

$$=\sum_{m=0}^{N}m^r a_m-\frac{1}{(N+1)^r}\left\{N^r\sum_{m=0}^{N}m^r a_m+\sum_{n=0}^{N-1}\left[n^r-(n+1)^r\right]\sum_{m=0}^{n}m^r a_m\right\}=$$

$$=\sum_{m=0}^{N}m^r a_m-\left(\frac{N}{N+1}\right)^r\sum_{m=0}^{N}m^r a_m+\frac{1}{(N+1)^r}\sum_{n=0}^{N-1}\left[(n+1)^r-n^r\right]\sum_{m=0}^{n}m^r a_m=$$

$$=\frac{1}{(N+1)^r}\left[(N+1)^r-N^r\right]\sum_{m=0}^{N}m^r a_m+\frac{1}{(N+1)^r}\sum_{n=0}^{N-1}\left[(n+1)^r-n^r\right]\sum_{m=0}^{n}m^r a_m=$$

$$=\frac{1}{(N+1)^r}\sum_{n=0}^{N}\left[(n+1)^r-n^r\right]\sum_{m=0}^{n}m^r a_m\,.$$

Отсюда имеем

$$(N+1)^r\ Z_N^r(8)=\sum\nolimits_{n=0}^{N}\left[(n+1)^r-n^r\right]\sum\nolimits_{m=0}^{n}m^r a_m=$$
$$=\left[(N+1)^r-N^r\right]\sum\nolimits_{m=0}^{N}m^r a_m+\sum\nolimits_{n=0}^{N-1}\left[(n+1)^r-n^r\right]\sum\nolimits_{m=0}^{n}m^r a_m=$$
$$=\left[(N+1)^r-N^r\right]\sum\nolimits_{m=0}^{N}m^r a_m+N^r\ Z_{N-1}^r(8).$$

Стало быть,

$$\forall K\in Z_+\ \ \sum_{n=0}^{K}n^r a_n=\frac{(K+1)^r\ Z_K^r(8)-K^r\ Z_{K-1}^r(8)}{(K+1)^r-K^r}. \tag{29}$$

Подставляем (29) в (28) и результат преобразуем по методу Абеля:

$$Z_P^r(1)-Z_N^r(1)=\frac{1}{P^r}Z_P^r(8)+$$
$$+\sum_{K=N+1}^{P-1}\frac{(K+1)^r-K^r}{K^r(K+1)^r}\frac{(K+1)^r\ Z_K^r(8)-K^r\ Z_{K-1}^r(8)}{(K+1)^r-K^r}-\frac{1}{(P+1)^r}Z_{P-1}^r(8)=$$
$$=\frac{1}{P^r}Z_P^r(8)+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}Z_K^r(8)-\frac{1}{(K+1)^r}Z_{K-1}^r(8)\right]-\frac{1}{(P+1)^r}Z_{P-1}^r(8)=$$
$$=\frac{1}{P^r}Z_P^r(8)+\sum_{K=N+1}^{P-1}\frac{1}{K^r}Z_K^r(8)-\sum_{K=N}^{P-2}\frac{1}{(K+2)^r}Z_K^r(8)-\frac{1}{(P+1)^r}Z_{P-1}^r(8)=$$
$$=\frac{1}{P^r}Z_P^r(8)+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+2)^r}\right]Z_K^r(8)-\frac{1}{(N+2)^r}Z_N^r(8).$$

Таким образом, из первого стартового представления (23) в специальном случае средних Зигмунда натурального порядка $r=1,2,3,\ldots$ имеем известное [10, с. 363; 11, с. 30] представление для разности Коши $(P>N+1)$:

$$Z_P^r(1)-Z_N^r(1)=\frac{1}{P^r}Z_P^r(8)+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+2)^r}\right]Z_K^r(8)-\frac{1}{(N+2)^r}Z_N^r(8).$$

Шаг 3. Работаем с четвёртой и предпоследней восьмой компонентами правой части стартового представления первого вида (23).

По методу Абеля имеем

$$\sum_{n=0}^{N}n^{\nu}a_n=\sum_{n=1}^{N}n^{\nu}a_n=\sum_{n=1}^{N}n^{\nu-r}n^r a_n=\sum_{n=1}^{N}n^{\nu-r}\left(\sum_{m=0}^{n}m^r a_m-\sum_{m=0}^{n-1}m^r a_m\right)=$$
$$=\sum_{n=1}^{N}n^{\nu-r}\sum_{m=0}^{n}m^r a_m-\sum_{n=0}^{N-1}(n+1)^{\nu-r}\sum_{m=0}^{n}m^r a_m=$$
$$=N^{\nu-r}\sum_{m=0}^{N}m^r a_m-\sum_{n=1}^{N-1}\left[(n+1)^{\nu-r}-n^{\nu-r}\right]\sum_{m=0}^{n}m^r a_m-(0+1)^{\nu-r}\sum_{m=0}^{0}m^r a_m=$$
$$=N^{\nu-r}\sum_{m=0}^{N}m^r a_m-\sum_{n=1}^{N-1}\left[(n+1)^{\nu-r}-n^{\nu-r}\right]\sum_{m=0}^{n}m^r a_m\ .$$

В последнюю компоненту правой части предыдущего равенства подставляем соотношения (29) и полученный результат преобразуем по методу Абеля:

$$\sum_{n=1}^{N} n^{\nu} a_n \overset{(29)}{=} N^{\nu-r}\sum_{m=0}^{N} m^r a_m - \sum_{n=1}^{N-1}\left[(n+1)^{\nu-r} - n^{\nu-r}\right]\frac{(n+1)^r\, Z_n^r(8) - n^r\, Z_{n-1}^r(8)}{(n+1)^r - n^r} =$$

$$= N^{\nu-r}\sum_{m=0}^{N} m^r a_m - \sum_{n=1}^{N-1}\frac{(n+1)^{\nu-r} - n^{\nu-r}}{(n+1)^r - n^r}(n+1)^r\, Z_n^r(8) +$$

$$+\sum_{n=0}^{N-2}\frac{(n+2)^{\nu-r} - (n+1)^{\nu-r}}{(n+2)^r - (n+1)^r}(n+1)^r\, Z_n^r(8) =$$

$$= N^{\nu-r}\sum_{m=0}^{N} m^r a_m - \frac{N^{\nu-r} - (N-1)^{\nu-r}}{N^r - (N-1)^r} N^r\, Z_{N-1}^r(8) +$$

$$+\sum_{n=1}^{N-2}\left[\frac{(n+2)^{\nu-r} - (n+1)^{\nu-r}}{(n+2)^r - (n+1)^r} - \frac{(n+1)^{\nu-r} - n^{\nu-r}}{(n+1)^r - n^r}\right](n+1)^r\, Z_n^r(8) +$$

$$+\frac{(0+2)^{\nu-r} - (0+1)^{\nu-r}}{(0+2)^r - (0+1)^r}(0+1)^r\, Z_0^r(8) \overset{(16)}{=:} N^{\nu-r} s_N(8) -$$

$$-\frac{N^{\nu-r} - (N-1)^{\nu-r}}{N^r - (N-1)^r} N^r\, Z_{N-1}^r(8) + \sum_{n=1}^{N-2}\left[\left.\frac{(u+1)^{\nu-r} - u^{\nu-r}}{(u+1)^r - u^r}\right|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^r\, Z_n^r(8),$$

где 1) частичная сумма порядка 0 координатного ряда (8) $s_0(8) \overset{(16)}{:=} \sum_{m=0}^{0} m^r a_m = 0$, 2) по определению двойная подстановка $h(u)\Big|_{u=n}^{u=n+1} := h(n+1) - h(u)$, 3) среднее Зигмунда порядка 0 координатного ряда (8) $Z_0^r(8) \overset{(25)}{:=} \sum_{n=0}^{0}\left[1 - \left(\frac{n}{0+1}\right)^r\right] n^r a_n = 0$.

Таким образом, двукратным применением преобразования Абеля мы получили следующие соотношения:

$$\forall N \in Z_1 \ \sum_{n=1}^{N} n^{\nu} a_n = N^{\nu-r} s_N(8) -$$

$$-\frac{N^{\nu-r} - (N-1)^{\nu-r}}{N^r - (N-1)^r} N^r\, Z_{N-1}^r(8) + \sum_{n=1}^{N-2}\left[\left.\frac{(u+1)^{\nu-r} - u^{\nu-r}}{(u+1)^r - u^r}\right|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^r\, Z_n^r(8), \qquad (30)$$

где средние Зигмунда отрицательного порядка здесь и ниже по определению суть нули.

С помощью соотношений (30) для четвёртой компоненты правой части стартового представления первого вида (23) имеем

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^{\nu}}\sum_{n=0}^{N} n^{\nu} a_n = \sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^{\nu}}\sum_{n=1}^{N} n^{\nu} a_n \overset{(30)}{=}$$

$$\overset{(30)}{=} \sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^{\nu}}\left\{N^{\nu-r} s_N(8) - \frac{N^{\nu-r} - (N-1)^{\nu-r}}{N^r - (N-1)^r} N^r\, Z_{N-1}^r(8) +\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{N-2}\left[\left.\frac{(u+1)^{\nu-r} - u^{\nu-r}}{(u+1)^r - u^r}\right|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^r\, Z_n^r(8)\right\} = \frac{1}{N^r} s_N(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{N}{N+1}\right)^{\nu} d_\nu(N) -$$

$$-\frac{N^r}{N^r - (N-1)^r} Z_{N-1}^r(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{N^{\nu-r} - (N-1)^{\nu-r}}{(N+1)^{\nu}} d_\nu(N) +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^{\nu}}\sum_{n=1}^{N-2}\left[\left.\frac{(u+1)^{\nu-r} - u^{\nu-r}}{(u+1)^r - u^r}\right|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^r\, Z_n^r(8). \qquad (31)$$

Аналогично предыдущему для предпоследней восьмой компоненты правой части стартового представления первого вида (23) получаем

$$-\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_\nu(P)}{(P+1)^\nu}\sum_{n=0}^{P-1}n^\nu a_n=-\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_\nu(P)}{(P+1)^\nu}\sum_{n=1}^{P-1}n^\nu a_n\overset{(30)}{=}$$

$$\overset{(30)}{=}-\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_\nu(P)}{(P+1)^\nu}\left\{(P-1)^{\nu-r}s_{P-1}(8)-\frac{(P-1)^{\nu-r}-(P-2)^{\nu-r}}{(P-1)^r-(P-2)^r}(P-1)^r\,Z_{P-2}^r(8)+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{P-3}\left[\left.\frac{(u+1)^{\nu-r}-u^{\nu-r}}{(u+1)^r-u^r}\right|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^r\,Z_n^r(8)\right\}=$$

$$=-\frac{1}{(P-1)^r}\,s_{P-1}(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{P-1}{P+1}\right)^\nu d_\nu(P)+$$

$$+\frac{(P-1)^r}{(P-1)^r-(P-2)^r}\,Z_{P-2}^r(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{(P-1)^{\nu-r}-(P-2)^{\nu-r}}{(P+1)^\nu}\,d_\nu(P)-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_\nu(P)}{(P+1)^\nu}\sum_{n=1}^{P-3}\left[\left.\frac{(u+1)^{\nu-r}-u^{\nu-r}}{(u+1)^r-u^r}\right|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^r\,Z_n^r(8).\qquad(32)$$

Шаг 4. Сейчас работаем с пятой и последней девятой компонентами правой части стартового представления первого вида (23).

Также по методу Абеля имеем

$$\sum_{n=0}^{N}n^\nu\cdot n^r a_n=\sum_{n=1}^{N}n^\nu\cdot n^r a_n=\sum_{n=1}^{N}n^\nu\cdot\left(\sum_{m=0}^{n}m^r a_m-\sum_{n=0}^{n-1}m^r a_m\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{N}n^\nu\sum_{m=0}^{n}m^r a_m-\sum_{n=0}^{N-1}(n+1)^\nu\sum_{m=0}^{n}m^r a_m=$$

$$=N^\nu\sum_{m=0}^{N}m^r a_m-\sum_{n=1}^{N-1}\left[(n+1)^\nu-n^\nu\right]\sum_{m=0}^{n}m^r a_m-(0+1)^\nu\sum_{m=0}^{0}m^r a_m=$$

$$=N^\nu\sum_{m=0}^{N}m^r a_m-\sum_{n=1}^{N-1}\left[(n+1)^\nu-n^\nu\right]\sum_{m=0}^{n}m^r a_m.$$

Подставляем соотношения (29) в последнюю компоненту правой части предыдущего равенства и полученный результат преобразуем по методу Абеля:

$$\sum_{n=0}^{N}n^\nu\cdot n^r a_n\overset{(29)}{=}N^\nu\sum_{m=0}^{N}m^r a_m-\sum_{n=1}^{N-1}\left[(n+1)^\nu-n^\nu\right]\frac{(n+1)^r\,Z_n^r(8)-n^r\,Z_{n-1}^r(8)}{(n+1)^r-n^r}=$$

$$=N^\nu\sum_{m=0}^{N}m^r a_m-\sum_{n=1}^{N-1}\frac{(n+1)^\nu-n^\nu}{(n+1)^r-n^r}(n+1)^r\,Z_n^r(8)+$$

$$+\sum_{n=0}^{N-2}\frac{(n+2)^\nu-(n+1)^\nu}{(n+2)^r-(n+1)^r}(n+1)^r\,Z_n^r(8)=$$

$$=N^\nu\sum_{m=0}^{N}m^r a_m-\frac{N^\nu-(N-1)^\nu}{N^r-(N-1)^r}N^r\,Z_{N-1}^r(8)+$$

$$+\sum_{n=1}^{N-2}\left[\frac{(n+2)^\nu-(n+1)^\nu}{(n+2)^r-(n+1)^r}-\frac{(n+1)^\nu-n^\nu}{(n+1)^r-n^r}\right](n+1)^r\,Z_n^r(8)+$$

$$+\frac{(0+2)^{\nu}-(0+1)^{\nu}}{(0+2)^{r}-(0+1)^{r}}(0+1)^{r}\,Z_0^r(8)\overset{(16)}{=:}$$

$$\overset{(16)}{=:}N^{\nu}s_N(8)-\frac{N^{\nu}-(N-1)^{\nu}}{N^{r}-(N-1)^{r}}N^{r}\,Z_{N-1}^r(8)+\sum_{n=1}^{N-2}\left[\frac{(u+1)^{\nu}-u^{\nu}}{(u+1)^{r}-u^{r}}\Bigg|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^{r}\,Z_n^r(8).$$

Стало быть, по схеме предыдущего шага 3 двукратным применением преобразования Абеля мы получили следующие соотношения:

$$\forall N\in Z_+\ \ \sum\nolimits_{n=0}^{N}n^{\nu}\cdot n^{r}a_n\ =N^{\nu}s_N(8)-$$
$$-\frac{N^{\nu}-(N-1)^{\nu}}{N^{r}-(N-1)^{r}}N^{r}\,Z_{N-1}^r(8)+\sum_{n=1}^{N-2}\left[\frac{(u+1)^{\nu}-u^{\nu}}{(u+1)^{r}-u^{r}}\Bigg|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^{r}\,Z_n^r(8). \qquad (33)$$

Nota bene, соотношения (33) справедливы $\forall N\in Z_+$, а соотношения (30) справедливы $\forall N\in Z_1$. Последнее ограничение позволяет избежать в правой части (30) нулей в отрицательной степени.

Для пятой компоненты правой части стартового представления первого вида (23) с помощью соотношений (33) получаем

$$-\frac{1}{(N+1)^{r}}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_{\nu}(N)}{(N+1)^{\nu}}\sum_{n=0}^{N}n^{\nu}\cdot n^{r}a_n\overset{(33)}{=}-\frac{1}{(N+1)^{r}}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_{\nu}(N)}{(N+1)^{\nu}}\Bigg\{N^{\nu}s_N(8)-$$
$$-\frac{N^{\nu}-(N-1)^{\nu}}{N^{r}-(N-1)^{r}}N^{r}\,Z_{N-1}^r(8)+\sum_{n=1}^{N-2}\left[\frac{(u+1)^{\nu}-u^{\nu}}{(u+1)^{r}-u^{r}}\Bigg|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^{r}\,Z_n^r(8)\Bigg\}=$$
$$=-\frac{1}{(N+1)^{r}}\,s_N(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{N}{N+1}\right)^{\nu}d_{\nu}(N)+$$
$$+\frac{1}{(N+1)^{r}}\frac{N^{r}}{N^{r}-(N-1)^{r}}Z_{N-1}^r(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{N^{\nu}-(N-1)^{\nu}}{(N+1)^{\nu}}d_{\nu}(N)-$$
$$-\frac{1}{(N+1)^{r}}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_{\nu}(N)}{(N+1)^{\nu}}\sum_{n=1}^{N-2}\left[\frac{(u+1)^{\nu}-u^{\nu}}{(u+1)^{r}-u^{r}}\Bigg|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^{r}\,Z_n^r(8). \qquad (34)$$

Аналогично предыдущему для последней девятой компоненты правой части стартового представления первого вида (23) получаем

$$\frac{1}{P^{r}}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_{\nu}(P)}{(P+1)^{\nu}}\sum_{n=0}^{P-1}n^{\nu}n^{r}a_n\overset{(33)}{=}\frac{1}{P^{r}}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_{\nu}(P)}{(P+1)^{\nu}}\Bigg\{(P-1)^{\nu}s_{P-1}(8)-$$
$$-\frac{(P-1)^{\nu}-(P-2)^{\nu}}{(P-1)^{r}-(P-2)^{r}}(P-1)^{r}\,Z_{P-2}^r(8)+\sum_{n=1}^{P-3}\left[\frac{(u+1)^{\nu}-u^{\nu}}{(u+1)^{r}-u^{r}}\Bigg|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^{r}\,Z_n^r(8)\Bigg\}=$$
$$=\frac{1}{P^{r}}\,s_{P-1}(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{P-1}{P+1}\right)^{\nu}d_{\nu}(P)-$$
$$-\frac{1}{P^{r}}\frac{(P-1)^{r}}{(P-1)^{r}-(P-2)^{r}}Z_{P-2}^r(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{(P-1)^{\nu}-(P-2)^{\nu}}{(P+1)^{\nu}}d_{\nu}(P)+$$
$$+\frac{1}{P^{r}}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_{\nu}(P)}{(P+1)^{\nu}}\sum_{n=1}^{P-3}\left[\frac{(u+1)^{\nu}-u^{\nu}}{(u+1)^{r}-u^{r}}\Bigg|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^{r}\,Z_n^r(8). \qquad (35)$$

Шаг 5. Преобразуем по методу Абеля шестую компоненту правой части стартового представления первого вида (23):

$$\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[1-\left(\frac{K}{K+1}\right)^r\right]a_K\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{K}{K+1}\right)^\nu d_\nu(K)\overset{\text{Nota bene}}{=}$$

$$\overset{\text{Nota bene}}{=}\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[1-\left(\frac{K}{K+1}\right)^r\right]\frac{1}{K^r}\left(\sum_{n=0}^{K}n^r a_n-\sum_{n=0}^{K-1}n^r a_n\right)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{K}{K+1}\right)^\nu d_\nu(K)=$$

$$=\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]\left(\sum_{n=0}^{K}n^r a_n-\sum_{n=0}^{K-1}n^r a_n\right)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{K}{K+1}\right)^\nu d_\nu(K)\overset{(16)}{=:}$$

$$\overset{(16)}{=:}\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]s_K(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{K}{K+1}\right)^\nu d_\nu(K)-$$

$$-\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]s_{K-1}(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{K}{K+1}\right)^\nu d_\nu(K). \qquad (36)$$

Шаг 6. Подставляем соотношения (33) в оставшуюся седьмую компоненту правой части стартового представления первого вида (23):

$$\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_\nu(K)}{(K+1)^\nu}\sum_{n=0}^{K-1}n^\nu\cdot n^r a_n\overset{(33)}{=}$$

$$\overset{(33)}{=}\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_\nu(K)}{(K+1)^\nu}\Bigg\{(K-1)^\nu s_{K-1}(8)-$$

$$-\frac{(K-1)^\nu-(K-2)^\nu}{(K-1)^r-(K-2)^r}(K-1)^r Z_{K-2}^r(8)+\sum_{n=1}^{K-3}\left[\left.\frac{(u+1)^\nu-u^\nu}{(u+1)^r-u^r}\right|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^r Z_n^r(8)\Bigg\}=$$

$$=\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]s_{K-1}(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{K-1}{K+1}\right)^\nu d_\nu(K)-$$

$$-\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]\frac{(K-1)^r Z_{K-2}^r(8)}{(K-1)^r-(K-2)^r}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{(K-1)^\nu-(K-2)^\nu}{(K+1)^\nu}d_\nu(K)+$$

$$+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_\nu(K)}{(K+1)^\nu}\sum_{n=1}^{K-3}\left[\left.\frac{(u+1)^\nu-u^\nu}{(u+1)^r-u^r}\right|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^r Z_n^r(8). \qquad (37)$$

Шаг 7. Стартовое представление первого вида (23) после подстановки в него последовательно соотношений (31), (34), (36), (37), (32) и (35) примет второй вид $(P>N+1)$:

$$M_P(1)-M_N(1)=\frac{1}{P^r}M_P(8)+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]M_K(8)-\frac{1}{(N+1)^r}M_N(8)+$$

$$+\frac{1}{N^r}s_N(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{N}{N+1}\right)^\nu d_\nu(N)-\frac{N^r}{N^r-(N-1)^r}Z_{N-1}^r(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{N^{\nu-r}-(N-1)^{\nu-r}}{(N+1)^\nu}d_\nu(N)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu}\sum_{n=1}^{N-2}\left[\left.\frac{(u+1)^{\nu-r}-u^{\nu-r}}{(u+1)^r-u^r}\right|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^r Z_n^r(8)-$$

$$-\frac{1}{(N+1)^r}s_N(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{N}{N+1}\right)^\nu d_\nu(N)+$$

$$+\frac{1}{(N+1)^r}\frac{N^r}{N^r-(N-1)^r}Z_{N-1}^r(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{N^\nu-(N-1)^\nu}{(N+1)^\nu}d_\nu(N)-$$

$$-\frac{1}{(N+1)^r}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu}\sum_{n=1}^{N-2}\left[\left.\frac{(u+1)^\nu-u^\nu}{(u+1)^r-u^r}\right|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^r Z_n^r(8)+$$

$$+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]s_K(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{K}{K+1}\right)^\nu d_\nu(K)-$$

$$-\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]s_{K-1}(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{K}{K+1}\right)^\nu d_\nu(K)+$$

$$+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]s_{K-1}(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{K-1}{K+1}\right)^\nu d_\nu(K)-$$

$$-\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]\frac{(K-1)^r Z_{K-2}^r(8)}{(K-1)^r-(K-2)^r}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{(K-1)^\nu-(K-2)^\nu}{(K+1)^\nu}d_\nu(K)+$$

$$+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_\nu(K)}{(K+1)^\nu}\sum_{n=1}^{K-3}\left[\left.\frac{(u+1)^\nu-u^\nu}{(u+1)^r-u^r}\right|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^r Z_n^r(8)-$$

$$-\frac{1}{(P-1)^r}s_{P-1}(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{P-1}{P+1}\right)^\nu d_\nu(P)+$$

$$+\frac{(P-1)^r}{(P-1)^r-(P-2)^r}Z_{P-2}^r(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{(P-1)^{\nu-r}-(P-2)^{\nu-r}}{(P+1)^\nu}d_\nu(P)-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_\nu(P)}{(P+1)^\nu}\sum_{n=1}^{P-3}\left[\left.\frac{(u+1)^{\nu-r}-u^{\nu-r}}{(u+1)^r-u^r}\right|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^r Z_n^r(8)+$$

$$+\frac{1}{P^r}s_{P-1}(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{P-1}{P+1}\right)^\nu d_\nu(P)-$$

$$-\frac{1}{P^r}\frac{(P-1)^r}{(P-1)^r-(P-2)^r}Z_{P-2}^r(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{(P-1)^\nu-(P-2)^\nu}{(P+1)^\nu}d_\nu(P)+$$

$$+\frac{1}{P^r}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_\nu(P)}{(P+1)^\nu}\sum_{n=1}^{P-3}\left[\left.\frac{(u+1)^\nu-u^\nu}{(u+1)^r-u^r}\right|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^r Z_n^r(8). \tag{38}$$

Шаг 8. Работаем с компонентами правой части (38), которые содержат частичные суммы (16) координатного ряда (8):

$$\frac{1}{N^r}s_N(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{N}{N+1}\right)^\nu d_\nu(N)-\frac{1}{(N+1)^r}s_N(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{N}{N+1}\right)^\nu d_\nu(N)+$$

$$+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]s_K(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{K}{K+1}\right)^\nu d_\nu(K)-$$

$$-\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]s_{K-1}(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{K}{K+1}\right)^\nu d_\nu(K)+$$

$$+\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]s_{K-1}(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{K-1}{K+1}\right)^\nu d_\nu(K)-$$

$$-\frac{1}{(P-1)^r}s_{P-1}(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{P-1}{P+1}\right)^\nu d_\nu(P)+\frac{1}{P^r}s_{P-1}(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{P-1}{P+1}\right)^\nu d_\nu(P)=$$

$$=\sum_{K=N}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]s_K(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{K}{K+1}\right)^{\nu}d_\nu(K)-$$
$$-\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]s_{K-1}(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{K^\nu-(K-1)^\nu}{(K+1)^\nu}d_\nu(K)-$$
$$-\left[\frac{1}{(P-1)^r}-\frac{1}{P^r}\right]s_{P-1}(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{P-1}{P+1}\right)^{\nu}d_\nu(P). \tag{39}$$

Преобразуем правую часть (39):

$$\sum_{K=N}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]s_K(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left[1-1+\left(\frac{K}{K+1}\right)^{\nu}\right]d_\nu(K)-$$
$$-\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]s_{K-1}(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{K^\nu-(K-1)^\nu}{(K+1)^\nu}d_\nu(K)-$$
$$-\left[\frac{1}{(P-1)^r}-\frac{1}{P^r}\right]s_{P-1}(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left[1-1+\left(\frac{P-1}{P+1}\right)^{\nu}\right]d_\nu(P)=$$
$$=\sum_{K=N}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]s_K(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}d_\nu(K)-$$
$$-\sum_{K=N}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]s_K(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left[1-\left(\frac{K}{K+1}\right)^{\nu}\right]d_\nu(K)-$$
$$-\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]s_{K-1}(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{K^\nu-(K-1)^\nu}{(K+1)^\nu}d_\nu(K)-$$
$$-\left[\frac{1}{(P-1)^r}-\frac{1}{P^r}\right]s_{P-1}(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}d_\nu(P)+$$
$$+\left[\frac{1}{(P-1)^r}-\frac{1}{P^r}\right]s_{P-1}(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left[1-\left(\frac{P-1}{P+1}\right)^{\nu}\right]d_\nu(P). \tag{40}$$

Стремимся выделить $\forall K\in Z_+$ разности $1-\sum_{\nu=1}^{+\infty}d_\nu(K)$. Тогда правая часть (40) примет следующий вид:

$$-\sum_{K=N}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]s_K(8)\left[1-\sum_{\nu=1}^{+\infty}d_\nu(K)\right]+$$
$$+\sum_{K=N}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]s_K(8)+$$
$$-\sum_{K=N}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]s_K(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left[1-\left(\frac{K}{K+1}\right)^{\nu}\right]d_\nu(K)-$$
$$-\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]s_{K-1}(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{K^\nu-(K-1)^\nu}{(K+1)^\nu}d_\nu(K)-$$
$$+\left[\frac{1}{(P-1)^r}-\frac{1}{P^r}\right]s_{P-1}(8)\left[1-\sum_{\nu=1}^{+\infty}d_\nu(P)\right]+$$
$$-\left[\frac{1}{(P-1)^r}-\frac{1}{P^r}\right]s_{P-1}(8)+$$
$$+\left[\frac{1}{(P-1)^r}-\frac{1}{P^r}\right]s_{P-1}(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left[1-\left(\frac{P-1}{P+1}\right)^{\nu}\right]d_\nu(P). \tag{41}$$

Шаг 9. Второго вида стартовое представление (38) после подстановки в него соотношений (41) примет последний третий уже рабочий вид $\left(P > N+1\right)$:

$$
\begin{aligned}
M_P(1) - M_N(1) = {} & \frac{1}{P^r} M_P(8) + \sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r}\right] M_K(8) - \frac{1}{(N+1)^r} M_N(8) - \\
& - \frac{N^r}{N^r - (N-1)^r} Z_{N-1}^r(8) \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{N^{\nu-r} - (N-1)^{\nu-r}}{(N+1)^\nu} d_\nu(N) + \\
& + \frac{(P-1)^r}{(P-1)^r - (P-2)^r} Z_{P-2}^r(8) \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(P-1)^{\nu-r} - (P-2)^{\nu-r}}{(P+1)^\nu} d_\nu(P) + \\
& + \frac{1}{(N+1)^r} \frac{N^r}{N^r - (N-1)^r} Z_{N-1}^r(8) \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{N^\nu - (N-1)^\nu}{(N+1)^\nu} d_\nu(N) - \\
& - \frac{1}{P^r} \frac{(P-1)^r}{(P-1)^r - (P-2)^r} Z_{P-2}^r(8) \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(P-1)^\nu - (P-2)^\nu}{(P+1)^\nu} d_\nu(P) - \\
& - \sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r}\right] \frac{(K-1)^r Z_{K-2}^r(8)}{(K-1)^r - (K-2)^r} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(K-1)^\nu - (K-2)^\nu}{(K+1)^\nu} d_\nu(K) + \\
& + \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu} \sum_{n=1}^{N-2}\left[\left.\frac{(u+1)^{\nu-r} - u^{\nu-r}}{(u+1)^r - u^r}\right|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^r Z_n^r(8) - \\
& - \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{d_\nu(P)}{(P+1)^\nu} \sum_{n=1}^{P-3}\left[\left.\frac{(u+1)^{\nu-r} - u^{\nu-r}}{(u+1)^r - u^r}\right|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^r Z_n^r(8) + \\
& - \frac{1}{(N+1)^r} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu} \sum_{n=1}^{N-2}\left[\left.\frac{(u+1)^\nu - u^\nu}{(u+1)^r - u^r}\right|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^r Z_n^r(8) + \\
& + \frac{1}{P^r} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{d_\nu(P)}{(P+1)^\nu} \sum_{n=1}^{P-3}\left[\left.\frac{(u+1)^\nu - u^\nu}{(u+1)^r - u^r}\right|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^r Z_n^r(8) + \\
& + \sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r}\right] \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{d_\nu(K)}{(K+1)^\nu} \sum_{n=1}^{K-3}\left[\left.\frac{(u+1)^\nu - u^\nu}{(u+1)^r - u^r}\right|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^r Z_n^r(8) - \\
& - \sum_{K=N}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r}\right] s_K(8)\left[1 - \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(K)\right] + \\
& + \left[\frac{1}{(P-1)^r} - \frac{1}{P^r}\right] s_{P-1}(8)\left[1 - \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(P)\right] + \\
& + \sum_{K=N}^{P-2}\left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r}\right] s_K(8) + \\
& - \sum_{K=N}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r}\right] s_K(8) \sum_{\nu=1}^{+\infty}\left[1 - \left(\frac{K}{K+1}\right)^\nu\right] d_\nu(K) - \\
& + \left[\frac{1}{(P-1)^r} - \frac{1}{P^r}\right] s_{P-1}(8) \sum_{\nu=1}^{+\infty}\left[1 - \left(\frac{P-1}{P+1}\right)^\nu\right] d_\nu(P) - \\
& - \sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r}\right] s_{K-1}(8) \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{K^\nu - (K-1)^\nu}{(K+1)^\nu} d_\nu(K).
\end{aligned}
\tag{42}
$$

Шаг 10. Для нормы первых трёх компонент правой части (42) в силу посылки (13) теоремы 3 имеем

$$\left\| \frac{1}{P^r} M_P(8) + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] M_K(8) - \frac{1}{(N+1)^r} M_N(8) \right\|_{\mathbf{B}} \le$$

$$\le A_7 \left\{ \frac{1}{P^r} + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] + \frac{1}{(N+1)^r} \right\} = \frac{2A_7}{(N+1)^r} . \tag{43}$$

Шаг 11. Четвёртую компоненту правой части (42) разбиваем на две:

$$-\frac{N^r}{N^r-(N-1)^r} Z_{N-1}^r(8) \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{N^{\nu-r}-(N-1)^{\nu-r}}{(N+1)^\nu} d_\nu(N) =$$

$$= \frac{N^r}{N^r-(N-1)^r} Z_{N-1}^r(8) \sum_{\nu=1}^{r-1} \left[\frac{1}{(N-1)^{r-\nu}} - \frac{1}{N^{r-\nu}} \right] \frac{1}{(N+1)^\nu} d_\nu(N) -$$

$$- \frac{N^r}{N^r-(N-1)^r} Z_{N-1}^r(8) \sum_{\nu=r+1}^{+\infty} \left[N^{\nu-r} - (N-1)^{\nu-r} \right] \frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu} . \tag{44}$$

Из формулы Ньютона—Лейбница

$$N^{\nu-r} - (N-1)^{\nu-r} = (\nu - r) \int_{N-1}^{N} t^{\nu-r-1} dt \quad (\nu \ne r)$$

получаем две оценки сверху:

$$\forall \nu \in [1, r-1] \cap Z_1 \quad \frac{1}{(N-1)^{r-\nu}} - \frac{1}{N^{r-\nu}} \le \frac{r-\nu}{(N-1)^{r-\nu+1}} , \tag{45}$$

$$\forall \nu \in [r+1, +\infty) \cap Z_1 \quad N^{\nu-r} - (N-1)^{\nu-r} \le (\nu - r) N^{\nu-r-1} , \tag{46}$$

а из формулы Ньютона—Лейбница

$$N^\nu - (N-1)^\nu = \nu \int_{N-1}^{N} t^{\nu-1} dt \quad (\nu \ne 0)$$

получаем двусторонние оценки

$$\forall \nu \in Z_1 \quad \nu (N-1)^{\nu-1} \le N^\nu - (N-1)^\nu \le \nu N^{\nu-1} . \tag{47}$$

Для средних Зигмунда натурального порядка $r \in Z_1$ у двойной последовательности $\left(d_\nu(N)\right)_{(N,\nu)\in Z_+\times Z_1}$ столбец r-й состоит из единиц: $\forall N \in Z_+ \quad d_r(N) = 1$, а остальные столбцы состоят из нулей: $\forall N \in Z_+$ $\forall \nu \in Z_1 \setminus \{r\} \quad d_\nu(N) = 0$. Поэтому условие (9) выполняется с постоянной $A_3 = r$, условия (10) выполняются с постоянной $A_4 = 0$: $\forall N \in Z_+ \quad \forall \nu \in [1, r-1] \cap Z_1 \quad |d_\nu(N)| \le \dfrac{0}{(N+1)^{r-\nu}}$, условие (11) выполняется с постоянной $A_5 = 0$, ибо $\forall N \in Z_+$ разность $1 - \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(N) = 0$.

Итак, средние Зигмунда натурального порядка $r = 1, 2, 3, \ldots$ удовлетворяют условиям (9), (10) и (11) теоремы 3.

Для нормы первой компоненты правой части (44) в силу левого неравенства (47), посылки (13), оценки сверху (45) и условия (10) имеем оценку

$$\forall N \in Z_2 \quad \left\| \frac{N^r}{N^r-(N-1)^r} Z_{N-1}^r(8) \sum_{\nu=1}^{r-1} \left[\frac{1}{(N-1)^{r-\nu}} - \frac{1}{N^{r-\nu}} \right] \frac{1}{(N+1)^\nu} d_\nu(N) \right\|_{\mathbf{B}} \le$$

$$\le \frac{N^r}{r(N-1)^{r-1}} A_7 \sum_{\nu=1}^{r-1} \frac{r-\nu}{(N-1)^{r-\nu+1}} \frac{1}{(N+1)^\nu} \frac{A_4}{(N+1)^{r-\nu}} =$$

$$= A_4 A_7 \frac{N^r}{r(N-1)^r (N+1)^r} \sum_{\nu=1}^{r-1} \frac{r-\nu}{(N-1)^{r-\nu}} \le$$

$$\le A_4 A_7 \frac{N^r}{r(N-1)^r (N+1)^r} (r-1) \sum_{\nu=1}^{r-1} \frac{1}{(N-1)^{r-\nu}} \le$$

$$\le A_4 A_7 \frac{N^r}{r(N-1)^r (N+1)^r} (r-1)^2 =$$

$$= A_4 A_7 \left(1 - \frac{1}{r}\right)(r-1)\left(1 + \frac{1}{N-1}\right)^r \frac{1}{(N+1)^r} \le \frac{2^r (r-1) A_4 A_7}{(N+1)^r} . \qquad (48)$$

Аналогично для нормы второй (последней) компоненты правой части (44) в силу левого неравенства (47), посылки (13), оценки сверху (46) и условия (9) получаем оценку

$$\forall N \in Z_2 \quad \left\| -\frac{N^r}{N^r - (N-1)^r} Z_{N-1}^r(8) \sum_{\nu=r+1}^{+\infty} \left[N^{\nu-r} - (N-1)^{\nu-r}\right] \frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu} \right\|_{\mathbf{B}} \le$$

$$\le \frac{N^r}{r(N-1)^{r-1}} A_7 \sum_{\nu=r+1}^{+\infty} (\nu - r) N^{\nu-r-1} \frac{|d_\nu(N)|}{(N+1)^\nu} =$$

$$= \frac{N^r}{r(N-1)^{r-1}(N+1)^{r+1}} A_7 \sum_{\nu=r+1}^{+\infty} (\nu - r)\left(\frac{N}{N+1}\right)^{\nu-r-1} |d_\nu(N)| \le$$

$$\le \frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{N-1}\right)^{r-1} \frac{N}{N+1} \frac{A_7}{(N+1)^r} \sum_{\nu=r+1}^{+\infty} \nu |d_\nu(N)| \overset{(9)}{\le} \frac{2^{r-1} A_3 A_7}{r(N+1)^r} . \qquad (49)$$

Из (44), (48) и (49) для нормы четвёртой компоненты правой части (42) имеем оценку

$$\forall N \in Z_2 \quad \left\| -\frac{N^r}{N^r - (N-1)^r} Z_{N-1}^r(8) \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{N^{\nu-r} - (N-1)^{\nu-r}}{(N+1)^\nu} d_\nu(N) \right\|_{\mathbf{B}} \le$$

$$\le 2^r \left[\frac{1}{2r} A_3 + (r-1) A_4\right] A_7 \frac{1}{(N+1)^r} . \qquad (50)$$

Для нормы пятой компоненты правой части (42) аналогично предыдущему получаем оценку $\forall P \in Z_3 := \{3, 4, 5, ...\}$

$$\left\| \frac{(P-1)^r}{(P-1)^r - (P-2)^r} Z_{P-2}^r(8) \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(P-1)^{\nu-r} - (P-2)^{\nu-r}}{(P+1)^\nu} d_\nu(P) \right\|_{\mathbf{B}} \le$$

$$\le \frac{(P-1)^r}{r(P-2)^{r-1}} A_7 \sum_{\nu=1}^{r-1} \frac{r-\nu}{(P-2)^{r-\nu+1}} \frac{1}{(P+1)^\nu} \frac{A_4}{(P+1)^{r-\nu}} +$$

$$+ \frac{(P-1)^r}{r(P-2)^{r-1}(P+1)^{r+1}} A_7 \sum_{\nu=r+1}^{+\infty} (\nu - r)\left(\frac{P-1}{P+1}\right)^{\nu-r-1} |d_\nu(P)| \le$$

$$\le A_4 A_7 \frac{(P-1)^r}{r(P-2)^r (P+1)^r} (r-1) \sum_{\nu=1}^{r-1} \frac{1}{(P-2)^{r-\nu}} +$$

$$+ \frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{P-2}\right)^{r-1} \frac{P-1}{P+1} \frac{A_7}{(P+1)^r} \sum_{\nu=r+1}^{+\infty} \nu |d_\nu(P)| \overset{(9)}{\le}$$

$$\le A_4 A_7 \left(1 - \frac{1}{r}\right)(r-1)\left(1 + \frac{1}{P-2}\right)^r \frac{1}{(P+1)^r} + \frac{2^{r-1} A_3 A_7}{r(P+1)^r} \le$$

$$\le 2^r \left[\frac{1}{2r} A_3 + (r-1) A_4\right] A_7 \frac{1}{(P+1)^r} . \qquad (51)$$

Шаг 12. Для нормы шестой компоненты правой части (42) в силу последовательно левого и правого неравенства (47), посылки (13) и условия (9) имеем оценку

$$\forall N \in Z_2 \quad \left\| \frac{1}{(N+1)^r} \frac{N^r}{N^r-(N-1)^r} Z_{N-1}^r(8) \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{N^\nu-(N-1)^\nu}{(N+1)^\nu} d_\nu(N) \right\|_{\mathbf{B}} \le$$

$$\le \frac{1}{(N+1)^r} \frac{N^r}{r(N-1)^{r-1}} A_7 \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{\nu N^{\nu-1}}{(N+1)^\nu} |d_\nu(N)| =$$

$$= \frac{1}{(N+1)^r} \frac{1}{r}\left(1+\frac{1}{N-1}\right)^{r-1} \frac{N}{N+1} A_7 \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left(\frac{N}{N+1}\right)^{\nu-1} \nu |d_\nu(N)| \le$$

$$\le \frac{1}{(N+1)^r} \frac{2^{r-1}}{r} A_7 \sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu |d_\nu(N)| \overset{(9)}{\le} \frac{2^{r-1} A_3 A_7}{r(N+1)^r} . \tag{52}$$

Для нормы седьмой компоненты правой части (42) аналогично предыдущему получаем оценку

$$\forall P \in Z_3 \quad \left\| -\frac{1}{P^r} \frac{(P-1)^r}{(P-1)^r-(P-2)^r} Z_{P-2}^r(8) \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(P-1)^\nu-(P-2)^\nu}{(P+1)^\nu} d_\nu(P) \right\|_{\mathbf{B}} \le$$

$$\le \frac{1}{P^r} \frac{(P-1)^r}{r(P-2)^{r-1}} A_7 \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{\nu(P-1)^{\nu-1}}{(P+1)^\nu} |d_\nu(P)| =$$

$$= \frac{1}{P^r} \frac{1}{r}\left(1+\frac{1}{P-2}\right)^{r-1} \frac{P-1}{P+1} A_7 \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left(\frac{P-1}{P+1}\right)^{\nu-1} \nu |d_\nu(P)| \le$$

$$\le \frac{1}{P^r} \frac{2^{r-1}}{r} A_7 \sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu |d_\nu(P)| \overset{(9)}{\le} \frac{2^{r-1} A_3 A_7}{rP^r} . \tag{53}$$

Шаг 13. Для нормы восьмой компоненты правой части (42) в силу последовательно левого и правого неравенства (47), посылки (13) и условия (9) имеем оценку $(P > N+1)$ $\forall N \in Z_2$

$$\left\| -\sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r}\right] \frac{(K-1)^r Z_{K-2}^r(8)}{(K-1)^r-(K-2)^r} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(K-1)^\nu-(K-2)^\nu}{(K+1)^\nu} d_\nu(K) \right\|_{\mathbf{B}} \le$$

$$\le \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r}\right] \frac{(K-1)^r}{r(K-2)^{r-1}} A_7 \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{\nu(K-1)^{\nu-1}}{(K+1)^\nu} |d_\nu(K)| =$$

$$= \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r}\right] \frac{1}{r}\left(1+\frac{1}{K-2}\right)^{r-1} \frac{K-1}{K+1} A_7 \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left(\frac{K-1}{K+1}\right)^{\nu-1} \nu |d_\nu(K)| \le$$

$$\le \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r}\right] \frac{2^{r-1}}{r} A_7 \sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu |d_\nu(K)| \overset{(9)}{\le}$$

$$\le \frac{2^{r-1}}{r} A_3 A_7 \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r}\right] = \frac{2^{r-1}}{r} A_3 A_7 \left[\frac{1}{(N+1)^r} - \frac{1}{P^r}\right]. \tag{54}$$

Шаг 14. Девятую компоненту правой части (42) разбиваем на две:

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu} \sum_{n=1}^{N-2} \left[\left. \frac{(u+1)^{\nu-r} - u^{\nu-r}}{(u+1)^r - u^r} \right|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(8) =$$

$$= -\sum_{\nu=1}^{r-1} \frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu} \sum_{n=1}^{N-2} \left\{ \left[\frac{1}{u^{r-\nu}} - \frac{1}{(u+1)^{r-\nu}}\right] \left. \frac{1}{(u+1)^r - u^r} \right|_{u=n}^{u=n+1} \right\} (n+1)^r Z_n^r(8) +$$

$$+ \sum_{\nu=r+1}^{+\infty} \frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu} \sum_{n=1}^{N-2} \left[\left. \frac{(u+1)^{\nu-r} - u^{\nu-r}}{(u+1)^r - u^r} \right|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(8). \tag{55}$$

По формуле Ньютона—Лейбница двойная подстановка

$$\left[\frac{1}{u^{r-\nu}}-\frac{1}{(u+1)^{r-\nu}}\right]\frac{1}{(u+1)^{r}-u^{r}}\Bigg|_{u=n}^{u=n+1}=\int\limits_{n}^{n+1}\left\{\left[\frac{1}{u^{r-\nu}}-\frac{1}{(u+1)^{r-\nu}}\right]\frac{1}{(u+1)^{r}-u^{r}}\right\}'du\,. \tag{56}$$

Производная

$$\begin{aligned}\left\{\left[\frac{1}{u^{r-\nu}}-\frac{1}{(u+1)^{r-\nu}}\right]\frac{1}{(u+1)^{r}-u^{r}}\right\}'&=\left[-\frac{r-\nu}{u^{r-\nu+1}}+\frac{r-\nu}{(u+1)^{r-\nu+1}}\right]\frac{1}{(u+1)^{r}-u^{r}}+\\&+\left[\frac{1}{u^{r-\nu}}-\frac{1}{(u+1)^{r-\nu}}\right]\frac{-r\left[(u+1)^{r-1}-u^{r-1}\right]}{\left[(u+1)^{r}-u^{r}\right]^{2}}=\\&=-(r-\nu)\left[\frac{1}{u^{r-\nu+1}}-\frac{1}{(u+1)^{r-\nu+1}}\right]\frac{1}{(u+1)^{r}-u^{r}}-\\&-r\left[\frac{1}{u^{r-\nu}}-\frac{1}{(u+1)^{r-\nu}}\right]\frac{(u+1)^{r-1}-u^{r-1}}{\left[(u+1)^{r}-u^{r}\right]^{2}}<0\,.\end{aligned} \tag{57}$$

Из $(u+1)^{\nu}-u^{\nu}=\nu\int_{u}^{u+1}t^{\nu-1}dt\ \ (\nu\neq 0)$ получаем двусторонние оценки

$$\forall\nu\in Z_1\ \ \nu u^{\nu-1}\le (u+1)^{\nu}-u^{\nu}\le \nu(u+1)^{\nu-1}, \tag{58}$$

где в случае $\nu=1\ \ u\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$; последнее условие исключает появление в (58) нулей в нулевой степени. Для модуля отрицательной по знаку производной (57) с помощью оценки сверху (45) и двусторонних оценок (58) получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned}&\left|\left\{\left[\frac{1}{u^{r-\nu}}-\frac{1}{(u+1)^{r-\nu}}\right]\frac{1}{(u+1)^{r}-u^{r}}\right\}'\right|\le\\&\le(r-\nu)\frac{r-\nu+1}{u^{r-\nu+2}}\frac{1}{ru^{r-1}}+r\frac{r-\nu}{u^{r-\nu+1}}\frac{(r-1)(u+1)^{r-2}}{\left(ru^{r-1}\right)^{2}}=\frac{(r-\nu)(r-\nu+1)}{r}\frac{1}{u^{2r-\nu+1}}+\\&+\frac{(r-\nu)(r-1)}{r}\frac{(u+1)^{r-2}}{u^{3r-\nu-1}}=\frac{r-\nu}{r}\left[\frac{r-\nu+1}{u^{2r-\nu+1}}+\left(\frac{u+1}{u}\right)^{r-2}\frac{r-1}{u^{2r-\nu+1}}\right]=\\&=\frac{r-\nu}{r}\left[\frac{r-\nu+1}{u^{2r-\nu+1}}+\left(1+\frac{1}{u}\right)^{r-2}\frac{r-1}{u^{2r-\nu+1}}\right]\le\frac{r-\nu}{r}\left(\frac{r-\nu+1}{u^{2r-\nu+1}}+2^{r-2}\frac{r-1}{u^{2r-\nu+1}}\right)=\\&=\frac{(r-\nu)\left[r-\nu+1+2^{r-2}(r-1)\right]}{ru^{2r-\nu+1}}.\end{aligned} \tag{59}$$

Из формулы Ньютона—Лейбница (56) с помощью неравенства (59) имеем следующую оценку модуля двойной подстановки:

$$\begin{aligned}&\left|\left[\frac{1}{u^{r-\nu}}-\frac{1}{(u+1)^{r-\nu}}\right]\frac{1}{(u+1)^{r}-u^{r}}\Bigg|_{u=n}^{u=n+1}\right|\le\int\limits_{n}^{n+1}\frac{(r-\nu)\left[r-\nu+1+2^{r-2}(r-1)\right]}{ru^{2r-\nu+1}}du\le\\&\le\frac{(r-\nu)\left[r-\nu+1+2^{r-2}(r-1)\right]}{rn^{2r-\nu+1}}.\end{aligned} \tag{60}$$

Для нормы первой компоненты правой части (55) в силу условия (10), оценки (60) и посылки (13) получаем оценку $\forall N \in Z_3$

$$\left\| -\sum_{\nu=1}^{r-1} \frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu} \sum_{n=1}^{N-2} \left\{ \left[\frac{1}{u^{r-\nu}} - \frac{1}{(u+1)^{r-\nu}} \right] \frac{1}{(u+1)^r - u^r} \Bigg|_{u=n}^{u=n+1} \right\} (n+1)^r \, Z_n^r(8) \right\|_{\mathbf{B}} \le$$

$$\le \sum_{\nu=1}^{r-1} \frac{1}{(N+1)^\nu} \, \frac{A_4}{(N+1)^{r-\nu}} \sum_{n=1}^{N-2} \frac{(r-\nu)\left[r-\nu+1+2^{r-2}(r-1)\right]}{r n^{2r-\nu+1}} (n+1)^r \, A_7 =$$

$$= \frac{A_4 A_7}{r(N+1)^r} \sum_{\nu=1}^{r-1} (r-\nu)\left[r-\nu+1+2^{r-2}(r-1)\right] \sum_{n=1}^{N-2} \frac{1}{n^{r-\nu+1}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^r \le$$

$$\le \frac{2^r A_4 A_7}{r(N+1)^r} \sum_{\nu=1}^{r-1} (r-\nu)\left[r-\nu+1+2^{r-2}(r-1)\right] \sum_{n=1}^{N-2} \frac{1}{n^{r-\nu+1}} \,. \tag{61}$$

Оцениваем сверху последнюю сумму в правой части (61):

$$\sum_{n=1}^{N-2} \frac{1}{n^{r-\nu+1}} = 1 + \sum_{n=2}^{N-2} \frac{1}{n^{r-\nu+1}} \le 1 + \int_1^{N-2} \frac{dt}{t^{r-\nu+1}} = 1 - \frac{1}{r-\nu} \frac{1}{t^{r-\nu}} \Bigg|_1^{N-2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{r-\nu} \left[\frac{1}{(N-2)^{r-\nu}} - 1 \right] = 1 + \frac{1}{r-\nu} - \frac{1}{r-\nu} \frac{1}{(N-2)^{r-\nu}} \le \frac{r-\nu+1}{r-\nu} \,. \tag{62}$$

Подстановка неравенства (62) в неравенство (61) приводит к оценке $\forall N \in Z_3$

$$\left\| -\sum_{\nu=1}^{r-1} \frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu} \sum_{n=1}^{N-2} \left\{ \left[\frac{1}{u^{r-\nu}} - \frac{1}{(u+1)^{r-\nu}} \right] \frac{1}{(u+1)^r - u^r} \Bigg|_{u=n}^{u=n+1} \right\} (n+1)^r \, Z_n^r(8) \right\|_{\mathbf{B}} \le$$

$$\le \frac{2^r A_4 A_7}{r(N+1)^r} \sum_{\nu=1}^{r-1} (r-\nu)\left[r-\nu+1+2^{r-2}(r-1)\right] \frac{r-\nu+1}{r-\nu} =$$

$$= \frac{2^r A_4 A_7}{(N+1)^r} \sum_{\nu=1}^{r-1} \left[r-\nu+1+2^{r-2}(r-1)\right] \left(1 - \frac{\nu-1}{r}\right) \le$$

$$\le \frac{2^r A_4 A_7}{(N+1)^r} \sum_{\nu=1}^{r-1} \left[r+2^{r-2}(r-1)\right] = \frac{2^r (r-1)\left[r+2^{r-2}(r-1)\right] A_4 A_7}{(N+1)^r} \,. \tag{63}$$

Аналогично предыдущему оцениваем сверху норму второй компоненты правой части (55). По формуле Ньютона—Лейбница двойная подстановка

$$\frac{(u+1)^{\nu-r} - u^{\nu-r}}{(u+1)^r - u^r} \Bigg|_{u=n}^{u=n+1} = \int_n^{n+1} \left[\frac{(u+1)^{\nu-r} - u^{\nu-r}}{(u+1)^r - u^r} \right]' du \,. \tag{64}$$

Модуль производной

$$\left[\frac{(u+1)^{\nu-r} - u^{\nu-r}}{(u+1)^r - u^r} \right]' =$$

$$= \frac{(\nu-r)\left[(u+1)^{\nu-r-1} - u^{\nu-r-1}\right]\left[(u+1)^r - u^r\right] - \left[(u+1)^{\nu-r} - u^{\nu-r}\right] r \left[(u+1)^{r-1} - u^{r-1}\right]}{\left[(u+1)^r - u^r\right]^2}$$

оцениваем сверху с помощью двусторонней оценки (58):

$$\left|\left[\frac{(u+1)^{\nu-r}-u^{\nu-r}}{(u+1)^{r}-u^{r}}\right]'\right| \le$$

$$\le \frac{(\nu-r)(\nu-r-1)(u+1)^{\nu-r-2}\, r(u+1)^{r-1}+(\nu-r)(u+1)^{\nu-r-1}\, r(r-1)(u+1)^{r-2}}{\left(ru^{r-1}\right)^{2}} =$$

$$= \frac{(\nu-r)(\nu-2)(u+1)^{\nu-3}}{ru^{2r-2}}\,. \tag{65}$$

Из формулы Ньютона—Лейбница (64) с помощью неравенства (65) имеем следующую оценку модуля двойной подстановки:

$$\left|\left.\frac{(u+1)^{\nu-r}-u^{\nu-r}}{(u+1)^{r}-u^{r}}\right|_{u=n}^{u=n+1}\right| \le \int\limits_{n}^{n+1}\frac{(\nu-r)(\nu-2)(u+1)^{\nu-3}}{ru^{2r-2}}\,du =$$

$$= \frac{(\nu-r)(\nu-2)}{r}\int\limits_{n}^{n+1}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{r-1}\frac{(u+1)^{\nu-r-2}}{u^{r-1}}\,du \le$$

$$\le \frac{2^{r-1}(\nu-r)(\nu-2)}{r}\int\limits_{n}^{n+1}\frac{(u+1)^{\nu-r-2}}{u^{r-1}}\,du \overset{\text{Nota bene}}{\le}$$

$$\overset{\text{Nota bene}}{\le} \frac{2^{r-1}(\nu-r)(\nu-2)}{r}\int\limits_{n}^{n+1}\frac{(u+1)^{\nu-r-2}}{u^{r-1}}\,\frac{u+1}{u}\,du =$$

$$= \frac{2^{r-1}(\nu-r)(\nu-2)}{r}\int\limits_{n}^{n+1}\frac{(u+1)^{\nu-r-1}}{u^{r}}\,du \le \frac{2^{r-1}(\nu-r)(\nu-2)}{r}\,\frac{(n+2)^{\nu-r-1}}{n^{r}}\,. \tag{66}$$

Норму второй компоненты правой части (55) оцениваем сверху с помощью последовательно неравенства (66), посылки (13) и условия (9):

$$\forall N \in Z_3 \quad \left\|\sum_{\nu=r+1}^{+\infty}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^{\nu}}\sum_{n=1}^{N-2}\left[\left.\frac{(u+1)^{\nu-r}-u^{\nu-r}}{(u+1)^{r}-u^{r}}\right|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^{r}\, Z_n^{r}(8)\right\|_{\mathbf{B}} \le$$

$$\le \sum_{\nu=r+1}^{+\infty}\frac{\left|d_\nu(N)\right|}{(N+1)^{\nu}}\sum_{n=1}^{N-2}\frac{2^{r-1}(\nu-r)(\nu-2)}{r}\,\frac{(n+2)^{\nu-r-1}}{n^{r}}\,(n+1)^{r}\,A_7 =$$

$$= \frac{2^{r-1}A_7}{r}\sum_{\nu=r+1}^{+\infty}\frac{(\nu-r)(\nu-2)\left|d_\nu(N)\right|}{(N+1)^{\nu}}\sum_{n=1}^{N-2}(n+2)^{\nu-r-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{r} \le$$

$$\le \frac{2^{2r-1}A_7}{r}\sum_{\nu=r+1}^{+\infty}\frac{(\nu-r)(\nu-2)\left|d_\nu(N)\right|}{(N+1)^{\nu}}\sum_{n=1}^{N-2}(n+2)^{\nu-r-1} \le$$

$$\le \frac{2^{2r-1}A_7}{r}\sum_{\nu=r+1}^{+\infty}\frac{(\nu-r)(\nu-2)\left|d_\nu(N)\right|}{(N+1)^{\nu}}\int\limits_{1}^{N-1}(t+2)^{\nu-r-1}\,dt =$$

$$= \frac{2^{2r-1}A_7}{r}\sum_{\nu=r+1}^{+\infty}\frac{(\nu-r)(\nu-2)\left|d_\nu(N)\right|}{(N+1)^{\nu}}\left.\frac{(t+2)^{\nu-r}}{\nu-r}\right|_{1}^{N-1} =$$

$$= \frac{2^{2r-1}A_7}{r}\sum_{\nu=r+1}^{+\infty}\frac{(\nu-2)\left|d_\nu(N)\right|}{(N+1)^{\nu}}\left[(N+1)^{\nu-r}-(1+2)^{\nu-r}\right] \le$$

$$\le \frac{2^{2r-1}A_7}{r(N+1)^{r}}\sum_{\nu=r+1}^{+\infty}\nu\left|d_\nu(N)\right| \overset{(9)}{\le} \frac{2^{2r-1}A_3A_7}{r(N+1)^{r}}\,. \tag{67}$$

Из (55), (63) и (67) для нормы девятой компоненты правой части (42) получаем оценку

$$\forall N \in Z_3 \quad \left\| \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu} \sum_{n=1}^{N-2} \left[\frac{(u+1)^{\nu-r} - u^{\nu-r}}{(u+1)^r - u^r} \Bigg|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r \; Z_n^r(8) \right\|_{\mathbf{B}} \le$$

$$\le \frac{2^r \left\{ 2^{r-1} r^{-1} A_3 + (r-1)\left[r + 2^{r-2}(r-1) \right] A_4 \right\} A_7}{(N+1)^r} . \tag{68}$$

Для нормы десятой компоненты правой части (42) аналогично предыдущему получаем оценку $\forall P \in Z_4 := \{4, 5, 6, ...\}$

$$\left\| -\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{d_\nu(P)}{(P+1)^\nu} \sum_{n=1}^{P-3} \left[\frac{(u+1)^{\nu-r} - u^{\nu-r}}{(u+1)^r - u^r} \Bigg|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r \; Z_n^r(8) \right\|_{\mathbf{B}} \le$$

$$\le \left\| \sum_{\nu=1}^{r-1} \frac{d_\nu(P)}{(P+1)^\nu} \sum_{n=1}^{P-3} \left\{ \left[\frac{1}{u^{r-\nu}} - \frac{1}{(u+1)^{r-\nu}} \right] \frac{1}{(u+1)^r - u^r} \Bigg|_{u=n}^{u=n+1} \right\} (n+1)^r \; Z_n^r(8) \right\|_{\mathbf{B}} +$$

$$+ \left\| -\sum_{\nu=r+1}^{+\infty} \frac{d_\nu(P)}{(P+1)^\nu} \sum_{n=1}^{P-3} \left[\frac{(u+1)^{\nu-r} - u^{\nu-r}}{(u+1)^r - u^r} \Bigg|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r \; Z_n^r(8) \right\|_{\mathbf{B}} \le$$

$$\le \frac{2^r (r-1)\left[r + 2^{r-2}(r-1) \right] A_4 A_7}{P^r} + \frac{2^{2r-1} A_3 A_7}{r P^r} =$$

$$= \frac{2^r \left\{ 2^{r-1} r^{-1} A_3 + (r-1)\left[r + 2^{r-2}(r-1) \right] A_4 \right\} A_7}{P^r} . \tag{69}$$

Шаг 15. Оцениваем норму одиннадцатой компоненты правой части (42). По формуле Ньютона—Лейбница двойная подстановка

$$\frac{(u+1)^\nu - u^\nu}{(u+1)^r - u^r} \Bigg|_{u=n}^{u=n+1} = \int_n^{n+1} \left[\frac{(u+1)^\nu - u^\nu}{(u+1)^r - u^r} \right]' du . \tag{70}$$

Производная

$$\left[\frac{(u+1)^\nu - u^\nu}{(u+1)^r - u^r} \right]' =$$

$$= \frac{\nu \left[(u+1)^{\nu-1} - u^{\nu-1} \right] \left[(u+1)^r - u^r \right] - \left[(u+1)^\nu - u^\nu \right] r \left[(u+1)^{r-1} - u^{r-1} \right]}{\left[(u+1)^r - u^r \right]^2} .$$

Для модуля предыдущей производной с помощью двусторонней оценки (58) получаем оценку сверху

$$\left| \left[\frac{(u+1)^\nu - u^\nu}{(u+1)^r - u^r} \right]' \right| \le \frac{\nu(\nu-1)(u+1)^{\nu-2} r (u+1)^{r-1} + \nu (u+1)^{\nu-1} r(r-1)(u+1)^{r-2}}{\left(r u^{r-1} \right)^2} =$$

$$= \frac{\nu r (\nu + r - 2)(u+1)^{\nu+r-3}}{r^2 u^{2r-2}} =$$

$$= \frac{\nu(\nu + r - 2)}{r} \left(1 + \frac{1}{u} \right)^{r-1} \frac{(u+1)^{\nu-2}}{u^{r-1}} \le \frac{2^{r-1} \nu (\nu + r - 2)}{r} \frac{(u+1)^{\nu-2}}{u^{r-1}} . \tag{71}$$

Из формулы Ньютона—Лейбница (70) с помощью неравенства (71) имеем следующую оценку сверху модуля двойной подстановки:

$$\left|\left.\frac{(u+1)^{\nu}-u^{\nu}}{(u+1)^{r}-u^{r}}\right|_{u=n}^{u=n+1}\right| \le \int_{n}^{n+1}\frac{2^{r-1}\nu(\nu+r-2)}{r}\,\frac{(u+1)^{\nu-2}}{u^{r-1}}\,du \le$$

$$\le \frac{2^{r-1}\nu(\nu+r-2)}{r}\int_{n}^{n+1}\frac{(u+1)^{\nu-2}}{u^{r-1}}\,\frac{u+1}{u}\,du \le \frac{2^{r-1}\nu(\nu+r-2)}{r}\,\frac{(n+2)^{\nu-1}}{n^{r}}\,. \tag{72}$$

Тогда в силу оценки сверху (72) и посылки (13) норма

$$\left\|\sum_{n=1}^{N-2}\left[\left.\frac{(u+1)^{\nu}-u^{\nu}}{(u+1)^{r}-u^{r}}\right|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^{r}\,Z_n^r(8)\right\|_{\mathbf{B}} \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{N-2}\frac{2^{r-1}\nu(\nu+r-2)}{r}\,\frac{(n+2)^{\nu-1}}{n^{r}}\,(n+1)^{r}A_7 =$$

$$= \frac{2^{r-1}A_7\nu(\nu+r-2)}{r}\sum_{n=1}^{N-2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{r}(n+2)^{\nu-1} \le \frac{2^{2r-1}A_7\nu(\nu+r-2)}{r}\int_{1}^{N-1}(t+2)^{\nu-1}\,dt =$$

$$= \frac{2^{2r-1}A_7\nu(\nu+r-2)}{r}\left.\frac{(t+2)^{\nu}}{\nu}\right|_{1}^{N-1} \le \frac{2^{2r-1}A_7(\nu+r-2)}{r}(N+1)^{\nu}\,. \tag{73}$$

Из оценки (73), очевидных неравенств

$$\forall\nu\in Z_1\quad \forall r\in Z_1\quad \nu+r-2\le r\nu \tag{74}$$

и условий (9) и (13) для нормы одиннадцатой компоненты правой части (42) получаем оценку сверху

$$\forall N\in Z_3\quad \left\|-\frac{1}{(N+1)^{r}}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_{\nu}(N)}{(N+1)^{\nu}}\sum_{n=1}^{N-2}\left[\left.\frac{(u+1)^{\nu}-u^{\nu}}{(u+1)^{r}-u^{r}}\right|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^{r}\,Z_n^r(8)\right\|_{\mathbf{B}} \overset{(13),(73)}{\le}$$

$$\overset{(13),(73)}{\le} \frac{2^{2r-1}A_7}{r(N+1)^{r}}\sum_{\nu=1}^{+\infty}(\nu+r-2)\left|d_{\nu}(N)\right| \overset{(74)}{\le} \frac{2^{2r-1}A_7}{r(N+1)^{r}}\sum_{\nu=1}^{+\infty}r\nu\left|d_{\nu}(N)\right| \overset{(9)}{\le} \frac{2^{2r-1}A_3A_7}{(N+1)^{r}}\,. \tag{75}$$

Аналогично предыдущему для нормы двенадцатой компоненты правой части (42) имеем

$$\forall P\in Z_4\quad \left\|\frac{1}{P^{r}}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_{\nu}(P)}{(P+1)^{\nu}}\sum_{n=1}^{P-3}\left[\left.\frac{(u+1)^{\nu}-u^{\nu}}{(u+1)^{r}-u^{r}}\right|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^{r}\,Z_n^r(8)\right\|_{\mathbf{B}} \overset{(13),(73)}{\le}$$

$$\overset{(13),(73)}{\le} \frac{2^{2r-1}A_7}{rP^{r}}\sum_{\nu=1}^{+\infty}(\nu+r-2)\left(\frac{P}{P+1}\right)^{\nu}\left|d_{\nu}(P)\right| \overset{(74)}{\le}$$

$$\overset{(74)}{\le} \frac{2^{2r-1}A_7}{rP^{r}}\sum_{\nu=1}^{+\infty}r\nu\left|d_{\nu}(P)\right| \overset{(9)}{\le} \frac{2^{2r-1}A_3A_7}{P^{r}}\,. \tag{76}$$

Шаг 16. Для нормы тринадцатой компоненты правой части (42) в силу оценки сверху (73), неравенств (74) и условий (9) и (13) получаем $\forall P\in Z_5 := \{5,6,7,\dots\}$

$$\left\|\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^{r}}-\frac{1}{(K+1)^{r}}\right]\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_{\nu}(K)}{(K+1)^{\nu}}\sum_{n=1}^{K-3}\left[\left.\frac{(u+1)^{\nu}-u^{\nu}}{(u+1)^{r}-u^{r}}\right|_{u=n}^{u=n+1}\right](n+1)^{r}\,Z_n^r(8)\right\|_{\mathbf{B}} \le$$

$$\overset{(13),(73)}{\le} \frac{2^{2r-1}A_7}{r}\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^{r}}-\frac{1}{(K+1)^{r}}\right]\sum_{\nu=1}^{+\infty}(\nu+r-2)\left(\frac{K}{K+1}\right)^{\nu}\left|d_{\nu}(K)\right| \overset{(74)}{\le}$$

$$\overset{(74)}{\le} \frac{2^{2r-1}A_7}{r}\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]\sum_{\nu=1}^{+\infty} r\nu\left|d_\nu(K)\right| \overset{(9)}{\le}$$

$$\overset{(9)}{\le} 2^{2r-1}A_3A_7\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right] = 2^{2r-1}A_3A_7\left[\frac{1}{(N+1)^r}-\frac{1}{P^r}\right]. \tag{77}$$

Шаг 17. Для нормы четырнадцатой компоненты правой части (42) в силу условия (11) получаем оценку сверху $\left(P > N+1\right)$

$$\left\|-\sum_{K=N}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]s_K(8)\left[1-\sum_{\nu=1}^{+\infty}d_\nu(K)\right]\right\|_{\mathbf{B}} \le$$

$$\le A_5\sum_{K=N}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right] = A_5\left(\frac{1}{N^r}-\frac{1}{P^r}\right). \tag{78}$$

В силу предыдущего очевидна следующая оценка сверху нормы пятнадцатой компоненты правой части (42) $\left(P > N+1\right)$:

$$\left\|\left[\frac{1}{(P-1)^r}-\frac{1}{P^r}\right]s_{P-1}(8)\left[1-\sum_{\nu=1}^{+\infty}d_\nu(P)\right]\right\|_{\mathbf{B}} \overset{(11)}{\le} A_5\left[\frac{1}{(P-1)^r}-\frac{1}{P^r}\right]. \tag{79}$$

Шаг 18. Для нормы шестнадцатой компоненты правой части (42) согласно правому неравенству (58) имеем:

$$\left\|\sum_{K=N+1}^{P-2}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]s_K(8)\right\|_{\mathbf{B}} = \left\|\sum_{K=N+1}^{P-2}\frac{(K+1)^r-K^r}{K^r(K+1)^r}s_K(8)\right\|_{\mathbf{B}} \overset{(58)}{\le}$$

$$\overset{(58)}{\le} \sum_{K=N+1}^{P-2}\frac{r(K+1)^{r-1}}{K^r(K+1)^r}\left\|s_K(8)\right\|_{\mathbf{B}} = r\sum_{K=N+1}^{P-2}\frac{1}{K^r(K+1)}\left\|s_K(8)\right\|_{\mathbf{B}} \le$$

$$\le r\sum_{K=N+1}^{P-2}\frac{1}{K^{r+1}}\left\|s_K(8)\right\|_{\mathbf{B}}. \tag{80}$$

В силу свойства (17)

$$\forall N\in Z_1\ \exists N_{\beta=\frac{1}{2},\,\varepsilon=\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}}\in Z_+\ \ \forall K\in Z_1\left[K\ge N_{\beta=\frac{1}{2},\,\varepsilon=\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}} \Rightarrow \frac{\left\|s_K(8)\right\|_{\mathbf{B}}}{K^{\frac{1}{2}}}\le\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}\right]. \tag{81}$$

Тогда для $P > N_{\beta=\frac{1}{2},\,\varepsilon=\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}}+2$

$$r\sum_{K=N+1}^{P-2}\frac{1}{K^{r+1}}\left\|s_K(8)\right\|_{\mathbf{B}} = r\sum_{K=N+1}^{P-2}\frac{1}{K^{r+1-\frac{1}{2}}}\frac{\left\|s_K(8)\right\|_{\mathbf{B}}}{K^{\frac{1}{2}}} \overset{(81)}{\le} r\sum_{K=N+1}^{P-2}\frac{1}{K^{r+\frac{1}{2}}}\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{r}{N^{\frac{1}{2}}}\sum_{K=N+1}^{P-2}\frac{1}{K^{r+\frac{1}{2}}} \le \frac{r}{N^{\frac{1}{2}}}\int_N^{P-2}\frac{dt}{t^{r+\frac{1}{2}}} = \frac{r}{N^{\frac{1}{2}}}\left(-\frac{1}{r-\frac{1}{2}}\frac{1}{t^{r-\frac{1}{2}}}\Bigg|_N^{P-2}\right) =$$

$$= \frac{r}{N^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{r-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{N^{r-\frac{1}{2}}}-\frac{1}{(P-2)^{r-\frac{1}{2}}}\right] = \frac{2r}{2r-1}\frac{1}{N^r}-\frac{2r}{2r-1}\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}(P-2)^{r-\frac{1}{2}}}. \tag{82}$$

Из (80) и (82) для нормы шестнадцатой компоненты правой части (42) для всех достаточно больших номеров получаем следующую оценку сверху $\left(P > N_{\beta=\frac{1}{2},\,\varepsilon=\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}} + 2\right)$:

$$\left\| \sum_{K=N+1}^{P-2} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_K(8) \right\|_{\mathbf{B}} \le \frac{2r}{2r-1} \frac{1}{N^r} - \frac{2r}{2r-1} \frac{1}{N^{\frac{1}{2}} (P-2)^{r-\frac{1}{2}}} . \tag{83}$$

Шаг 19. Так как неравенство Я. Бернулли

$$\forall \nu \in Z_1 \ \ \forall x \in [-1, +\infty) \ \ (1+x)^{\nu} \ge 1 + \nu x \tag{84}$$

влечёт

$$\forall K \in Z_+ \ \ \forall \nu \in Z_1 \ \ 1 - \left(\frac{K}{K+1}\right)^{\nu} = 1 - \left(1 - \frac{1}{K+1}\right)^{\nu} \le 1 - \left(1 - \frac{\nu}{K+1}\right) = \frac{\nu}{K+1}, \tag{85}$$

то для нормы семнадцатой компоненты правой части (42) для всех достаточно больших номеров имеем следующую оценку сверху $\left(P > N_{\beta=\frac{1}{2},\,\varepsilon=\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}}\right)$:

$$\begin{aligned}
&\left\| -\sum_{K=N}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_K(8) \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{K}{K+1}\right)^{\nu} \right] d_{\nu}(K) \right\|_{\mathbf{B}} \overset{(85)}{\le} \\
&\overset{(85)}{\le} \sum_{K=N}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \| s_K(8) \|_{\mathbf{B}} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{\nu}{K+1} |d_{\nu}(K)| = \\
&= \sum_{K=N}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \frac{\| s_K(8) \|_{\mathbf{B}}}{K+1} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu |d_{\nu}(K)| \overset{(9)}{\le} \\
&\overset{(9)}{\le} A_3 \sum_{K=N}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \frac{\| s_K(8) \|_{\mathbf{B}}}{K+1} = A_3 \sum_{K=N}^{P-1} \frac{(K+1)^r - K^r}{K^r (K+1)^r} \frac{\| s_K(8) \|_{\mathbf{B}}}{K+1} \overset{(58)}{\le} \\
&\overset{(58)}{\le} A_3 \sum_{K=N}^{P-1} \frac{r(K+1)^{r-1}}{K^r (K+1)^r} \frac{\| s_K(8) \|_{\mathbf{B}}}{K+1} = rA_3 \sum_{K=N}^{P-1} \frac{1}{K^r (K+1)^2} \| s_K(8) \|_{\mathbf{B}} \le \\
&\le rA_3 \sum_{K=N}^{P-1} \frac{1}{K^{r+2-\frac{1}{2}}} \frac{\| s_K(8) \|_{\mathbf{B}}}{K^{\frac{1}{2}}} \overset{(81)}{\le} rA_3 \sum_{K=N}^{P-1} \frac{1}{K^{r+\frac{3}{2}}} \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}} \le \\
&\le \frac{rA_3}{N^{\frac{1}{2}}} \int_{N-1}^{P-1} \frac{dt}{t^{r+\frac{3}{2}}} = \frac{rA_3}{N^{\frac{1}{2}}} \left(-\frac{1}{r+\frac{1}{2}} \frac{1}{t^{r+\frac{1}{2}}} \Bigg|_{N-1}^{P-1} \right) = \\
&= \frac{rA_3}{N^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{r+\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{(N-1)^{r+\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(P-1)^{r+\frac{1}{2}}} \right] \le \frac{2rA_3}{2r+1} \frac{1}{(N-1)^{r+1}} - \frac{2rA_3}{2r+1} \frac{1}{N^{\frac{1}{2}} (P-1)^{r+\frac{1}{2}}} .
\end{aligned} \tag{86}$$

Из неравенства Я. Бернулли (84) получаем

$$\forall P \in Z_+ \ \ \forall \nu \in Z_1 \ \ 1 - \left(\frac{P-1}{P+1}\right)^{\nu} = 1 - \left(1 - \frac{2}{P+1}\right)^{\nu} \le 1 - \left(1 - \frac{2\nu}{P+1}\right) = \frac{2\nu}{P+1} . \tag{87}$$

Для нормы предпоследней восемнадцатой компоненты правой части (42) для $P > N_{\beta=\frac{1}{2},\varepsilon=\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}}$ имеем

$$
\begin{aligned}
&\left\| \left[\frac{1}{(P-1)^r} - \frac{1}{P^r}\right] s_{P-1}(8) \sum_{\nu=1}^{+\infty}\left[1-\left(\frac{P-1}{P+1}\right)^{\nu}\right] d_{\nu}(P)\right\|_{\mathbf{B}} \overset{(87)}{\le} \\
&\overset{(87)}{\le} \left[\frac{1}{(P-1)^r} - \frac{1}{P^r}\right] \left\| s_{P-1}(8)\right\|_{\mathbf{B}} \sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{2\nu}{P+1}\left|d_{\nu}(P)\right| \le \\
&\le 2\left[\frac{1}{(P-1)^r} - \frac{1}{P^r}\right] \frac{\left\| s_{P-1}(8)\right\|_{\mathbf{B}}}{P-1} \sum_{\nu=1}^{+\infty}\nu\left|d_{\nu}(P)\right| \overset{(9)}{\le} \\
&\overset{(9)}{\le} 2A_3\,\frac{P^r-(P-1)^r}{(P-1)^r P^r}\,\frac{\left\| s_{P-1}(8)\right\|_{\mathbf{B}}}{P-1} \overset{(58)}{\le} 2A_3\,\frac{rP^{r-1}}{(P-1)^r P^r}\,\frac{\left\| s_{P-1}(8)\right\|_{\mathbf{B}}}{P-1} = \\
&= 2rA_3\,\frac{1}{(P-1)^{r+1}P}\left\| s_{P-1}(8)\right\|_{\mathbf{B}} \le 2rA_3\,\frac{1}{(P-1)^{r+\frac{3}{2}}}\,\frac{\left\| s_{P-1}(8)\right\|_{\mathbf{B}}}{(P-1)^{\frac{1}{2}}} \overset{(81)}{\le} \\
&\overset{(81)}{\le} 2rA_3\,\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}(P-1)^{r+\frac{3}{2}}}\,.
\end{aligned}
\tag{88}
$$

Шаг 20. Для нормы последней девятнадцатой компоненты правой части (42) для $P > N_{\beta=\frac{1}{2},\varepsilon=\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}}+1$

получаем

$$
\begin{aligned}
&\left\| -\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right] s_{K-1}(8)\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{K^{\nu}-(K-1)^{\nu}}{(K+1)^{\nu}}\,d_{\nu}(K)\right\|_{\mathbf{B}} \overset{(58)}{\le} \\
&\overset{(58)}{\le} \sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]\left\| s_{K-1}(8)\right\|_{\mathbf{B}}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{\nu K^{\nu-1}}{(K+1)^{\nu}}\left|d_{\nu}(K)\right| = \\
&= \sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]\frac{\left\| s_{K-1}(8)\right\|_{\mathbf{B}}}{K+1}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\nu\left(\frac{K}{K+1}\right)^{\nu-1}\left|d_{\nu}(K)\right| \le \\
&\le \sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]\frac{\left\| s_{K-1}(8)\right\|_{\mathbf{B}}}{K+1}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\nu\left|d_{\nu}(K)\right| \overset{(9)}{\le} \\
&\overset{(9)}{\le} A_3\sum_{K=N+1}^{P-1}\left[\frac{1}{K^r}-\frac{1}{(K+1)^r}\right]\frac{\left\| s_{K-1}(8)\right\|_{\mathbf{B}}}{K+1} = A_3\sum_{K=N+1}^{P-1}\frac{(K+1)^r-K^r}{K^r(K+1)^r}\,\frac{\left\| s_{K-1}(8)\right\|_{\mathbf{B}}}{K+1} \overset{(58)}{\le} \\
&\overset{(58)}{\le} A_3\sum_{K=N+1}^{P-1}\frac{r(K+1)^{r-1}}{K^r(K+1)^r}\,\frac{\left\| s_{K-1}(8)\right\|_{\mathbf{B}}}{K+1} = rA_3\sum_{K=N+1}^{P-1}\frac{1}{K^r(K+1)^2}\left\| s_{K-1}(8)\right\|_{\mathbf{B}} \le \\
&\le rA_3\sum_{K=N+1}^{P-1}\frac{1}{(K-1)^{r+2-\frac{1}{2}}}\,\frac{\left\| s_{K-1}(8)\right\|_{\mathbf{B}}}{(K-1)^{\frac{1}{2}}} = rA_3\sum_{K=N}^{P-2}\frac{1}{K^{r+\frac{3}{2}}}\,\frac{\left\| s_{K}(8)\right\|_{\mathbf{B}}}{K^{\frac{1}{2}}} \overset{(81)}{\le} \\
&\overset{(81)}{\le} rA_3\sum_{K=N}^{P-2}\frac{1}{K^{r+\frac{3}{2}}}\,\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}} = \frac{rA_3}{N^{\frac{1}{2}}}\sum_{K=N}^{P-2}\frac{1}{K^{r+\frac{3}{2}}} \le \frac{rA_3}{N^{\frac{1}{2}}}\int_{N-1}^{P-2}\frac{dt}{t^{r+\frac{3}{2}}} = \\
&= \frac{rA_3}{N^{\frac{1}{2}}}\left(-\frac{1}{r+\frac{1}{2}}\,\frac{1}{t^{r+\frac{1}{2}}}\Bigg|_{N-1}^{P-2}\right) = \frac{rA_3}{N^{\frac{1}{2}}}\,\frac{1}{r+\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{(N-1)^{r+\frac{1}{2}}}-\frac{1}{(P-2)^{r+\frac{1}{2}}}\right] \le \\
&\le \frac{2rA_3}{2r+1}\,\frac{1}{(N-1)^{r+1}} - \frac{2rA_3}{2r+1}\,\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}(P-2)^{r+\frac{1}{2}}}\,.
\end{aligned}
\tag{89}
$$

Шаг 21. Из рабочего представления (42) с учётом оценок сверху (43), (50)–(54), (68), (69), (75)–(79), (83), (86), (88) и (89) для нормы разности Коши, где $P > N_{\beta=\frac{1}{2},\,\varepsilon=\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}} + 2$, имеем

$$
\begin{aligned}
\| M_P(1) - M_N(1) \|_{\mathbf{B}} \le{}& \frac{2A_7}{(N+1)^r} + 2^r \left[\frac{1}{2r} A_3 + (r-1) A_4 \right] A_7 \frac{1}{(N+1)^r} + \\
&+ 2^r \left[\frac{1}{2r} A_3 + (r-1) A_4 \right] A_7 \frac{1}{(P+1)^r} + \frac{2^{r-1} A_3 A_7}{r(N+1)^r} + \frac{2^{r-1} A_3 A_7}{r P^r} + \\
&+ \frac{2^{r-1}}{r} A_3 A_7 \left[\frac{1}{(N+1)^r} - \frac{1}{P^r} \right] + \frac{2^r \left\{ 2^{r-1} r^{-1} A_3 + (r-1)\left[r + 2^{r-2}(r-1) \right] A_4 \right\} A_7}{(N+1)^r} + \\
&+ \frac{2^r \left\{ 2^{r-1} r^{-1} A_3 + (r-1)\left[r + 2^{r-2}(r-1) \right] A_4 \right\} A_7}{P^r} + \frac{2^{2r-1} A_3 A_7}{(N+1)^r} + \frac{2^{2r-1} A_3 A_7}{P^r} + \\
&+ 2^{2r-1} A_3 A_7 \left[\frac{1}{(N+1)^r} - \frac{1}{P^r} \right] + A_5 \left(\frac{1}{N^r} - \frac{1}{P^r} \right) + A_5 \left[\frac{1}{(P-1)^r} - \frac{1}{P^r} \right] + \\
&+ \frac{2r}{2r-1} \frac{1}{N^r} - \frac{2r}{2r-1} \frac{1}{N^{\frac{1}{2}} (P-2)^{r-\frac{1}{2}}} + \frac{2rA_3}{2r+1} \frac{1}{(N-1)^{r+1}} - \frac{2rA_3}{2r+1} \frac{1}{N^{\frac{1}{2}} (P-1)^{r+\frac{1}{2}}} + \\
&+ 2rA_3 \frac{1}{N^{\frac{1}{2}} (P-1)^{r+\frac{3}{2}}} + \frac{2rA_3}{2r+1} \frac{1}{(N-1)^{r+1}} - \frac{2rA_3}{2r+1} \frac{1}{N^{\frac{1}{2}} (P-2)^{r+\frac{1}{2}}} .
\end{aligned} \tag{90}
$$

Так как пространство $\mathbf{B}$ банахово, т. е. полное относительно своей нормы $\| \circ \|_{\mathbf{B}}$, то из (90) предельным переходом по $P \to +\infty$ получаем

$$
\begin{aligned}
\| s - M_N(1) \|_{\mathbf{B}} \le{}& \frac{2A_7}{(N+1)^r} + 2^r \left[\frac{1}{2r} A_3 + (r-1) A_4 \right] A_7 \frac{1}{(N+1)^r} + \frac{2^{r-1} A_3 A_7}{r(N+1)^r} + \\
&+ \frac{2^{r-1} A_3 A_7}{r(N+1)^r} + \frac{2^r \left\{ 2^{r-1} r^{-1} A_3 + (r-1)\left[r + 2^{r-2}(r-1) \right] A_4 \right\} A_7}{(N+1)^r} + \frac{2^{2r-1} A_3 A_7}{(N+1)^r} + \\
&+ \frac{2^{2r-1} A_3 A_7}{(N+1)^r} + \frac{A_5}{N^r} + \frac{2r}{2r-1} \frac{1}{N^r} + \frac{2rA_3}{2r+1} \frac{1}{(N-1)^{r+1}} + \frac{2rA_3}{2r+1} \frac{1}{(N-1)^{r+1}} .
\end{aligned}
$$

Отсюда, ввиду неравенств

$$
\forall N \in Z_1 \quad \frac{1}{N^r} = \left[\frac{N+1}{N(N+1)} \right]^r = \left[\left(1 + \frac{1}{N} \right) \frac{1}{N+1} \right]^r \le \left(2 \frac{1}{N+1} \right)^r = 2^r \frac{1}{(N+1)^r} ,
$$

$$
\forall N \in Z_2 \quad \frac{1}{(N-1)^{r+1}} \le \frac{1}{(N-1)^r} = \left[\frac{N+1}{(N-1)(N+1)} \right]^r = \left[\left(1 + \frac{2}{N-1} \right) \frac{1}{N+1} \right]^r \le
$$

$$
\le \left(3 \frac{1}{N+1} \right)^r = 3^r \frac{1}{(N+1)^r} ,
$$

имеем скорость (14) с константой (15) для всех номеров, начиная с $N_{\beta=\frac{1}{2},\,\varepsilon=\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}} + 2$.

Доказательство теоремы 3 закончено.

4. Доказательство теоремы 4. *Шаг 1*. Для N-о среднего Зигмунда (24) натурального порядка N-о матричного среднего (6) ряда (1) имеем следующее представление через N-е матричное среднее (6) того же ряда (1):

$$\forall N \in Z_+ \ \ Z_N^r\left[M_N(1)\right] := \sum_{n=0}^{N}\left[1-\left(\frac{n}{N+1}\right)^r\right]\cdot\left[1-\sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(N)\left(\frac{n}{N+1}\right)^\nu\right] a_n \overset{(6)}{=}$$

$$\overset{(6)}{=} M_N(1) - \frac{1}{(N+1)^r}\sum_{n=0}^{N}\left[1-\sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(N)\left(\frac{n}{N+1}\right)^\nu\right] n^r a_n\ , \tag{91}$$

которое с учётом определения (7) N-о матричного среднего координатного ряда (8) примет вид

$$\forall N \in Z_+ \ \ Z_N^r\left[M_N(1)\right] = M_N(1) - \frac{1}{(N+1)^r} M_N(8). \tag{92}$$

Из (92) получаем стартовые для доказательства (19) тождества

$$\forall N \in Z_+ \ \ M_N(8) = (N+1)^r\left\{M_N(1) - Z_{N+1}^r\left[M_N(1)\right]\right\}. \tag{93}$$

Шаг 2. В силу определения (6)

$$\forall N \in Z_+ \ \ s - M_N(1) = s - a_0 - \sum_{n=1}^{N}\left[1-\sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(N)\left(\frac{n}{N+1}\right)^\nu\right] a_n\ .$$

Тогда согласно определению (24)

$$\forall N \in Z_+ \ \ Z_N^r\left[s - M_N(1)\right] := \left[1-\left(\frac{0}{N+1}\right)^r\right](s-a_0) -$$

$$-\sum_{n=1}^{N}\left[1-\left(\frac{n}{N+1}\right)^r\right]\left[1-\sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(N)\left(\frac{n}{N+1}\right)^\nu\right] a_n = s - \left[1-\left(\frac{0}{N+1}\right)^r\right] a_0 -$$

$$-\sum_{n=1}^{N}\left[1-\left(\frac{n}{N+1}\right)^r\right]\left[1-\sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(N)\left(\frac{n}{N+1}\right)^\nu\right] a_n \overset{(91)}{=} s - Z_N^r\left[M_N(1)\right]. \tag{94}$$

Шаг 3. Стартовые для доказательства (19) тождества (93) на основании (94) принимают вид

$$\forall N \in Z_+ \ \ M_N(8) \overset{(93)}{=} (N+1)^r\left\{M_N(1) - s + s - Z_N^r\left[M_N(1)\right]\right\} \overset{(94)}{=}$$

$$\overset{(94)}{=} (N+1)^r\left\{M_N(1) - s + Z_N^r\left[s - M_N(1)\right]\right\}. \tag{95}$$

Так как банахово пространство **B** дополнительно обладает ещё зигмундовской структурой, то из (95) имеем

$$\forall N \in Z_+ \ \ \left\| M_N(8)\right\|_{\mathbf{B}} \le (N+1)^r\left\{\left\| M_N(1) - s\right\|_{\mathbf{B}} + A_8 \left\| s - M_N(1)\right\|_{\mathbf{B}}\right\}. \tag{96}$$

Если матричные средние (6) ряда (1) сходятся к элементу s со скоростью (14), то из предыдущих неравенств (96) получаем

$$\forall N \in Z_+ \ \ \left\| M_N(8)\right\|_{\mathbf{B}} \le (N+1)^r\left[\frac{A_8}{(N+1)^r} + A_9\,\frac{A_8}{(N+1)^r}\right] = A_8\left(1 + A_9\right),$$

т. е. получаем оценку (19).

Доказательство теоремы 4 закончено.

5. Заключение. В данной работе теоремы 1 и 2 Д. Алексича для средних Фейера σ_N распространены на матричные средние M_N.

И. Йо применил теоремы 1 и 2 Д. Алексича [12, с. 252, (26), с. 253; 13, с. 170, лемма 1] к установлению структурной характеристики функций, входящих в класс насыщения средних Зигмунда рядов Фурье 1) по функциям Уолша в нумерации Пэли [12, с. 251, теорема 4 (средние Фейера), с. 252—253, теорема 4' (средние Зигмунда натурального порядка $r \geq 1$)], 2) по многочленам Эрмита [13, с. 176, теорема 2 (средние Зигмунда дробного порядка $r = 0{,}5$)]. Молодым исследователям предлагается применить теоремы 3 и 4 к изучению феномена насыщения рядов Фурье—Эрмита, рядов Фурье—Уолша, обобщения последних рядов Фурье—Н. Я. Виленкина; в [14] и [15] найдутся нужные им литературные отсылки.

Список цитируемых источников

1. *Бруй, И. Н.* О классе насыщения средних Зигмунда рядов по многочленам Фабера / И. Н. Бруй // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2 : Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. — 2018. — Т. 8, № 2. — С. 6—18.

2. *Харди, Г.* Расходящиеся ряды / Г. Харди ; пер. с англ. Д. А. Райкова ; с предисл. и обзор. ст. С. Б. Стечкина. — М. : ИИЛ, 1951. — 504 с. — Перевод изд.: Divergent Series / G. H. Hardy. — Oxford, 1949.

3. *Alexits, G.* On the order of approximation by the Cesàro means of Fourier series / G. Alexits // Approximation theory : (Selected papers) / G. Alexits. — Budapest : Akadémiai kiadó, 1983. — P. 41—50.

4. *Sz. Nagy, B. v.* Approximation der Funktionen durch die arithmetischen Mittel ihrer Fourierschen Reihen / Béla v. Sz. Nagy // Acta scientiarum mathematicarum (Szeged). — 1946—1948. — Vol. 11. — P. 71—84.

5. *Стечкин, С. Б.* Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций / С. Б. Стечкин // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1953. — Т. 17, № 5. — С. 461—472.

6. *Alexits, G.* Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction périodique par les sommes de Fejér / G. Alexits // Approximation theory: (Selected papers) / G. Alexits. — Budapest : Académiai Kiadó, 1983. — P. 59—70.

7. *Rogosinski, W.* Über die Abschnitte trigonometrischer Reihen / W. Rogosinski // Mathematische Annalen. — 1926. — 95. Band. — S. 110—134.

8. *Бернштейн, С. Н.* Об одном методе суммирования тригонометрических рядов / С. Н. Бернштейн // Собрание сочинений / С. Н. Бернштейн. — М. : Изд-во АН СССР, 1952. — Т. I : Конструктивная теория функций [1905—1930]. — С. 523—525.

9. *Жук, В. В.* Аппроксимация периодических функций / В. В. Жук. — Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1982. — 368 с.

10. *Králik, D.* Über die approximationstheoretische Charakterisierung gewisser Funktionenklassen mit Hilfe der Rieszschen Mittel von Fourierreihen / D. Králik // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1969. — Vol. 20, № 3—4. — P. 361—373.

11. *Бруй, И. Н.* О классе насыщения метода Рисса суммирования рядов Фабера / И. Н. Бруй ; ред. журн. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук». — Минск, 1989. — 60 с. — Деп. в ВИНИТИ АН СССР 16.08.1989. — № 5514-В89.

12. *Joó, I.* On some problems of M. Horváth (saturation theorems for Walsh — Fourier expansions) / I. Joó // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. — 1988. — Tomus 31. — P. 243—260 (1989).

13. *Joó, I.* Saturation theorems for Hermite — Fourier series / I. Joó // Acta Math. Hungar. — 1991. — Vol. 57, № 1—2. — P. 169—179.

14. *Бруй, И. Н.* Ряды Уолша—Пэли и пространства Рисса / И. Н. Бруй // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2 : Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. — 2014. — № 2 (173). — С. 11—19.

15. *Бруй, И. Н.* Мультипликативные ряды и пространства Рисса / И. Н. Бруй // Технологии, экономика и право: актуальные проблемы и инновации : материалы Междунар. науч.-практ. конф., 20 нояб. 2014 г., г. Барановичи, Респ. Беларусь / редкол.: А. В. Никишова (гл. ред.), А. К. Гавриленя (отв. ред.) [и др.]. — Барановичи : РИО БарГУ, 2014. — С. 7—16.

УДК 378.16

О. Л. Бушейко
Учреждение образования «Барановичский государственный университет», Барановичи

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОНЛАЙН-ТЕСТИРОВАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Введение. В настоящее время в системе образования для объективной оценки знаний обучающихся необходима правильно подобранная форма контроля знаний. Одной из таких форм является тестирование. Использование тестовых заданий различных видов позволяет более адекватно соответствовать требованиям государственного образовательного стандарта.

С ростом популярности Интернета все более востребованным способом контроля знаний становится онлайн-тестирование. Появилось огромное количество сайтов, позволяющих быстро и качественно создать онлайн-тесты.

Целью работы являлся анализ сервисов по созданию онлайн-тестов и выбор наиболее оптимальной системы онлайн-тестирования. Для реализации поставленной цели применялись такие приемы исследований, как анализ, синтез и обобщение. В качестве материалов исследования выступали электронные сервисы по созданию онлайн-тестов.

Основная часть. Контроль знаний учащихся является одним из основных элементов оценки качества образования, важнейшим компонентом педагогической системы. Целью контроля является определение каче-