Заключение. Основная образовательная ценность информационных технологий в том, что они позволяют создать более яркую мультисенсорную интерактивную среду обучения с неограниченными потенциальными возможностями, оказывающимися в распоряжении и преподавателя, и студента.

Использование информационных технологий в системе контроля знаний обеспечивает такие преимущества, как скорость обработки результатов, технологичность, объективность, массовость, а также существенное снижение времени, затрачиваемое преподавателем при индивидуальном контроле. Приложение Plickers позволяет реализовать непрерывный мониторинг знаний обучающихся [1].

Список цитируемых источников

1. Практическое пособие для преподавателей «Интернет-сервис Plickers, как средство автоматического контроля знаний обучающихся на занятии». [Электронный ресурс]. 03.10.2020. — Режим доступа: https://kopilkaurokov.ru/informatika/planirovanie/prakticheskoe_posobie_dlia_prepodavatelei_internet_servis_plickers_kak_sredstvo . — Дата доступа: 03.10.2020.
2. Использование технологии Plickers на уроках английского языка [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://videouroki.net/razrabotki/ispol-zovaniie-tiekhnologhii-plickers-na-urokakh-anghliiskogho-iazyka.html . — Дата доступа: 03.10.2020.
3. Опрос за 30 секунд: Что такое Plickers и как использовать его на уроке. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://www.teachaholic.pro/opros-za-30-sekund-chto-takoe-plickers-i-kak-ispolzovat-ego-na-uroke/ . — Дата доступа: 04.10.2020.

УДК 517.968

А. П. Гринько
Учреждение образования «Барановичский государственный университет», Барановичи, Республика Беларусь

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ ОПЕРАТОРОВ ЛОКАЛИЗОВАННОГО ДРОБНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Введение. В работе рассматриваются операторы локализованного дробного интегрирования и дифференцирования порядка α (см. [1; 2]). Доказывается, что оператор локализованного дробного интегрирования в точке x при порядке интегрирования α стремящемся к нулю стремится к единичному оператору, а оператор локализованного дробного дифференцирования при α стремящемся к единице стремится к разности производных в точках x и $x-\varepsilon$.

Основная часть. Рассмотрим оператор локализованного дробного интегрирования $\left(D^{\alpha,-\varepsilon}\varphi\right)(x)=$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x}\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{\alpha}}\,dt.$$

Оператор локализованного дробного дифференцирования $\left(I^{\alpha,-\varepsilon}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x}(x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt$ порядка $\alpha>0$ в пространстве суммируемых функций $L_1(R)$ на действительной оси [3]. Предельные случаи операторов локального дробного интегродифференцирования для $\alpha\to 0,1$ демонстрирует следующая лемма.

Лемма. Пусть $\alpha, \varepsilon>0$. Тогда

$$\lim_{\alpha\to 0} I^{\alpha,-\varepsilon}\varphi(x)\underset{L_1(R)}{=}\varphi(x),\ \text{для}\ \varphi(x)\in L_1(R), \tag{1}$$

$$\lim_{\alpha\to 1_-} D^{\alpha,-\varepsilon}\varphi(x)\underset{L_1(R)}{=}\varphi'(x),\ \ \lim_{\alpha\to 1_+} D^{\alpha,-\varepsilon}\varphi(x)\underset{L_1(R)}{=}\varphi'(x)-\varphi'(x-\varepsilon),\ \text{для}\ \varphi'(x)\in L_1(R), \tag{2}$$

где равенство понимается по норме пространства $L_1(R)$.

Доказательство. Пусть $\alpha_n\to 0$ и $\alpha_n\geq\alpha_k$. Покажем, что $I^{\alpha_n,-\varepsilon}\varphi(x)$ — фундаментальная последовательность. Т. е. для $\forall\varepsilon>0$, достаточно малых $\alpha_n>0$, $\exists L\in N$, такой, что для $k,n>L$ $\left\|I^{\alpha_n,-\varepsilon}\varphi(x)-I^{\alpha_k,-\varepsilon}\varphi(x)\right\|_{L_1(R)}<\varepsilon$:

$$\left\|I^{\alpha_n,-\varepsilon}\varphi-I^{\alpha_k,-\varepsilon}\varphi\right\|_{L_1(R)}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\int\limits_{t-\varepsilon}^{t}\varphi(\tau)\left(\frac{(t-\tau)^{\alpha_n-1}}{\Gamma(\alpha_n)}-\frac{(t-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}\right)d\tau\right|dt\leq$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\varphi(\tau)\right|d\tau\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon}\left|\frac{(t-\tau)^{\alpha_n-1}}{\Gamma(\alpha_n)}-\frac{(t-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}\right|dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\varphi(\tau)\right|\left(\frac{\varepsilon^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)}-\frac{\varepsilon^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)}\right)d\tau=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\varphi(\tau)\right|\left(\frac{\varepsilon^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_n+1)}-\frac{\varepsilon^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)}+\frac{\varepsilon^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)}-\frac{\varepsilon^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_n+1)}\right)d\tau\le$$

$$\le\left(\frac{\ln(\varepsilon)\varepsilon^{\alpha_k}(\alpha_k-\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_n+1)}+\varepsilon^{\alpha_k}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_k+1)}-\frac{1}{\Gamma(\alpha_n+1)}\right)\right)\|\varphi\|_{L_1(R)}\le\left(\frac{\ln(\varepsilon)\varepsilon^{\alpha_k}(\alpha_k-\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_n+1)}\right)\|\varphi\|_{L_1(R)}.$$

Поскольку $\dfrac{\varepsilon^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)}$ $\left(\dfrac{\varepsilon^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)}<\dfrac{\varepsilon^{\alpha_k}}{\alpha_k^{\alpha_k+\frac{1}{2}}e^{-\alpha_k}\sqrt{2\pi}}<\dfrac{(e\varepsilon)^{\alpha_k}}{\alpha_k^{\alpha_k+\frac{1}{2}}}=\dfrac{(e\varepsilon)^{\alpha_k}}{\alpha_k^{\alpha_k}}\dfrac{1}{\alpha_k^{\frac{1}{2}}}\right)$ — монотонно возрастающая функция для $\alpha_k\in[0;1],\varepsilon\in[0;0,1]$ не большая единицы см., например [4], то выбирая номер L такой, что $\alpha_k<\dfrac{\varepsilon}{\ln(\varepsilon)\|\varphi\|_{L_1(R)}}$ окончательно получаем $\left\|I^{\alpha_n,-\varepsilon}\varphi-I^{\alpha_k,-\varepsilon}\varphi\right\|_{L_1(R)}\le\ln(\varepsilon)\alpha_k\|\varphi\|_{L_1(R)}\le\varepsilon.$

Поскольку $L_1(R)$ — полно, следовательно оператор $\lim\limits_{\alpha\to 0}I^{\alpha,-\varepsilon}$ ограничен в $L_1(R)$. Докажем, что равенство (1) выполняется для всюду плотного в $L_1(R)$ множества. Пусть $\varphi(x)=(x-x_0)^{\nu}, \nu\in N, x\ne x_0$, тогда выбирая такое малое ε > 0, что $x-x_0>\varepsilon$, для $x>x_0$ и $x_0-x>\varepsilon$, для $x<x_0$, что гарантирует $-1<\dfrac{\varepsilon}{x-x_0}<1$, можем записать:

$$\lim_{\alpha\to 0}I^{\alpha,-\varepsilon}\varphi(x)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x-\varepsilon}^{x}\frac{(\tau-x_0)^{\nu}}{(x-\tau)^{1-\alpha}}d\tau=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\varepsilon^{\alpha-1+1}}{\Gamma(\alpha)}(x-x_0)^{\nu}\int_0^1 s^{\alpha-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{x-x_0}s\right)^{\nu}ds=$$

$$=(x-x_0)^{\nu}\lim_{\alpha\to 0}\varepsilon^{\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\,{}_2F_1\left(-\nu,\alpha;\alpha+1;\frac{\varepsilon}{x-x_0}\right)=(x-x_0)^{\nu}.$$

В случае $x=x_0$, имеем: $\lim\limits_{\alpha\to 0}I^{\alpha,-\varepsilon}\varphi(x)=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{-1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0}\dfrac{(x_0-\tau)^{\nu}}{(x_0-\tau)^{1-\alpha}}d\tau=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{-\varepsilon^{\nu-\alpha}}{\Gamma(\alpha)(\nu-\alpha)}=0=(x_0-x_0)^{\nu}.$

Так как множество многочленов всюду плотно в пространстве $L_1(R)$ из теоремы Банаха следует, что равенство (1) имеет место для произвольной $\varphi(x)\in L_1(R)$.

Докажем равенства (2). Интегрируя по частям и используя (1) можем записать:

$$\lim_{\alpha\to 1_-}D^{\alpha,-\varepsilon}\varphi(x)\underset{L_1(R)}{=}\lim_{\alpha\to 1_-}\frac{d}{dx}\left(\left.\frac{-(x-t)^{1-\alpha}\varphi(t)}{\Gamma(2-\alpha)}\right|_{x-\varepsilon}^{x}+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_{x-\varepsilon}^{x}(x-t)^{1-\alpha}\varphi'(t)dt\right)\underset{L_1(R)}{=}$$

$$\underset{L_1(R)}{=}\lim_{\alpha\to 1_-}\frac{d}{dx}\left(\frac{\varepsilon^{1-\alpha}\varphi(x-\varepsilon)}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_{x-\varepsilon}^{x}(x-t)^{1-\alpha}\varphi'(t)dt\right)\underset{L_1(R)}{=}\varphi'(x-\varepsilon)+\lim_{\alpha\to 1_-}\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\times$$

$$\times\int_{x-\varepsilon}^{x}(x-t)^{1-\alpha}\varphi'(t)dt\underset{L_1(R)}{=}\varphi'(x-\varepsilon)+\lim_{\alpha\to 1_-}(x-t)^{1-\alpha}\varphi'(t)\Big|_{x-\varepsilon}^{x}+\lim_{\alpha\to 1_-}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{x-\varepsilon}^{x}(x-t)^{(1-\alpha)-1}\varphi'(t)dt\underset{L_1(R)}{=}\varphi'(x),$$

$$\lim_{\alpha\to 1_+}D^{\alpha,-\varepsilon}\varphi(x)\underset{L_1(R)}{=}\lim_{\alpha\to 1_+}\frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})}\left(\frac{d}{dx}\right)^2\int_{x-\varepsilon}^{x}(x-t)^{-\{\alpha\}}\varphi(t)dt\underset{L_1(R)}{=}\varphi'(x)-\varphi'(x-\varepsilon).$$

Заключение. Предельные случаи показывают, что операторы локализованного дробного интегрирования являются обобщениями обычных интегралов и производных.

Список цитируемых источников

1. *Grinko, A. P.* Generalized Abel type integral equations with localized fractional integrals and derivatives. / A. P. Grinko // Integral Transforms and Special Functions. — 2018. — Vol. 29, № 6. — 489—504 p.
2. *Grinko, A. P.* Localized derivatives in spaces of functions representable by localized fractional integrals / A. P. Grinko // Integral Transforms and Special Functions. — 2019. — Vol. 30, № 10. — 817—832 p.
3. *Самко, С.Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск, 1987. — 687 с.
4. *Попов, А. Ю.* Двусторонние оценки гамма-функции на действительной полуоси / А. Ю. Попов // Чебышев. сб. — 2017. — Т. 18, вып. 2. — С. 205—221.

УДК 621

Я. В. Дедович
Учреждение образования «Барановичский государственный университет», Барановичи, Республика Беларусь

ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИЙ УРОВНЯ В ПЛОСКОСТИ

Введение. В процессе изучения дисциплины «Инженерная графика» раздела «Начертательная геометрия» важнейшей темой является построение линий уровня в плоскости, так как решение позиционных и метрических задач основано на построении линий уровня, т.е. горизонтали и фронтали.

По многолетнему опыту работы выработалась определенная система подхода к этой теме. Этот подход можно разбить на следующие этапы:

1) теоретическая часть: признак принадлежности прямой к плоскости; определение горизонтали и фронтали;

2) практическая часть: построение горизонталей и фронталей в плоскостях, заданных различными способами; построение недостающих проекций точек с помощью горизонталей и фронталей; построение недостающих проекций геометрических фигур, принадлежащих плоскости; построение наиболее рационального положения горизонтали и фронтали в плоскости.

Основная часть. К практическим задачам можно приступать только тогда, когда студенты четко представляют и правильно демонстрируют положение прямых в пространстве. Демонстрируют студенты с помощью карандаша, располагая его относительно уровня стола и доски по заданному условию: прямая общего положения, проецирующие прямые, горизонтальные, фронтальные и профильные прямые и т.д.

По моему мнению, такое упражнение помогает ориентации в пространстве.

Добиться правильного построения студентами горизонтали и фронтали практические задачи выстраиваю в следующем порядке:

1) определение положения плоскостей относительно плоскостей проекций и установить принадлежность точек к заданным плоскостям:

2) в заданных плоскостях провести горизонталь, отстоящую от горизонтальной плоскости проекций на какое-то расстояние, например, на 15 мм; и фронталь, отстоящую от фронтальной плоскости проекций на 20 мм;

3) построение недостающих проекций точек, прямых, геометрических фигур, принадлежащих этой плоскости.

В задачах на определение принадлежности точек к плоскостям, следует обратить внимание на точки, принадлежащие следу плоскости.

Если точка, принадлежит фронтальному следу плоскости, то ее фронтальная проекция принадлежит проекции фронтального следа, а горизонтальная — принадлежит оси X.

Если точка принадлежит горизонтальному следу плоскости, то ее горизонтальная проекция принадлежит горизонтальной проекции следа, а фронтальная — принадлежит оси X .

Если проекции точки A принадлежат обоим проекциям следов заданной плоскости, то такая точка плоскости не принадлежит (рисунок 1).

В задачах из пункта 2 нужно особое место уделить построению линий уровня в плоскостях, заданных следами. внимание студентов обращаем на следующее:

– при построении горизонтали построение сводится к построению в этой плоскости прямой, параллельной горизонтальному следу плоскости;

– при построении фронтали — строим прямую параллельную фронтальному следу плоскости (*см.* рисунок 1, рисунок 2).
