

## СТАТЫЧНЫ І ДЫНАМІЧНЫ АНАЛІЗ КАЧЭННЯ КОЛА ПА ПЛОСКАСЦІ З ПЕРАМЕННЫМ КАЭФІЦЫЕНТАМ ТРЭННЯ СЛІЗГАННЯ

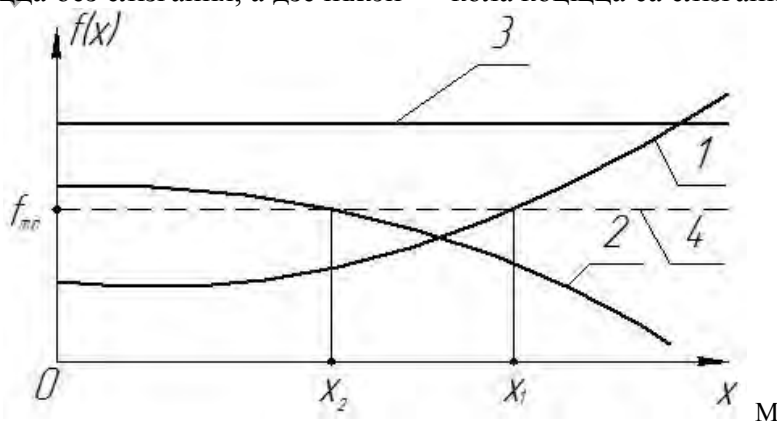
к.т.н. Русан С. І., студ. Стэцкі Я.С.

УА “Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт”

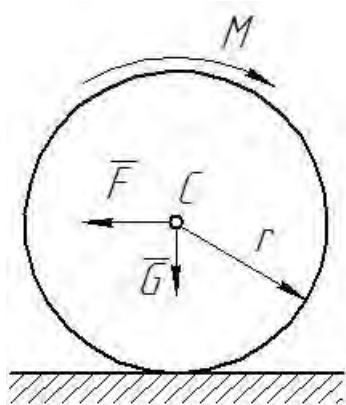
**Уводзіны.** Даследаванне руху аб’екта выконваецца на падставе гіпотэз і ўраўненняў, выкладзеных у курсе тэарэтычнай механікі. Мэта аналізу — паглыбленае вывучэнне руху аднаго з найбольш распаўсюджаных аб’ектаў тэхнікі — кола (альбо любога цыліндрычнага цела з кругавой накіравальнай). Кінематычны аналіз яго качэння выкананы ў работах [1,2]. Асаблівасць разглядаемай тут задачы заключаецца ва ўліку зменнасці механічнай характарыстыкі паверхні качэння — яе *шурпатасці*. Апошняя апісваецца пераменным каэфіцыентам трэння слізгання  $f(x)$ . На рысунку 1 прадстаўлены тры графікі функцыі  $f(x)$ : 1 —  $f(x)$  узрастае; 2 —  $f(x)$  змяншаецца; 3 —  $f(x)$  застаецца нязменнай. Пункцірнай лініяй 4 паказана мінімальнае значэнне каэфіцыента трэння  $f_{\min}$ , неабходнае для качэння кола без слізгання. Велічыня  $f_{\min}$  не залежыць ад механічных уласцівасцей паверхні качэння; яе вызначэнне прыведзена ніжэй.

**Пастаноўка задачы. Набліжаны якасны аналіз качэння.** Кола ў агульным выпадку пераменнай уздоўж радыуса таўшчыні  $h = f(\rho)$  (ці ступеньчатае) масы  $m$  коціцца па гарызантальнай шурпатай плоскасці пад дзеяннем пары сіл з момантам  $M$ . Да восі кола прыкладзена сіла  $F$ , што мадэліруе карыснае супраціўленне (рыс.2). Зададзены каэфіцыент трэння слізгання  $f(x)$  і трэння качэння  $\delta = const$ . Патрэбна вызначыць неабходную для качэння без слізгання сілу шчаплення  $F_{шч}$  і характар руху кола.

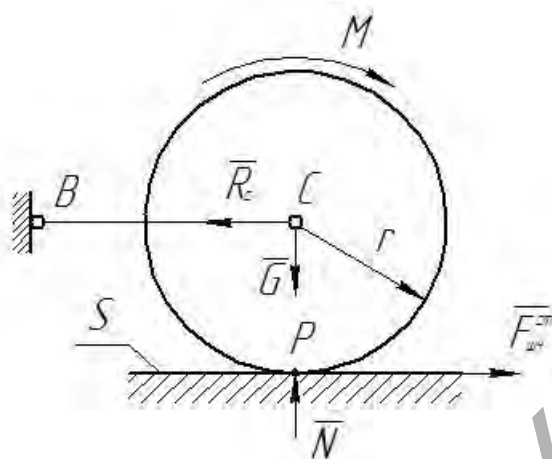
Наяўнасць графікаў 1 — 4 (рыс.1) дазваляе скласці папярэднюю ўяву аб характары руху кола. На ўчастках шляху, для якіх розніца  $\Delta f(x) = f(x) - f_{\min} > 0$ , кола коціцца без слізгання, а пры  $\Delta f(x) < 0$  — са слізганнем. Так, калі  $f(x)$  змяншаецца паводле графіка 1, то на ўчастку шляху  $x < x_1$  кола рухаецца са слізганнем; пры  $x > x_1$  яго качэнне працягваецца без слізгання. Пры змяненні каэфіцыента  $f(x)$  паводле графіка 2 качэнне без слізгання мае месца на ўчастку шляху  $x < x_2$ ; далей кола рухаецца са слізганнем. Графіку 3 на ўсім шляху адпавядае качэнне без слізгання. Характар качэння можна вызначыць па рысунку 1 візуальна без вылічэння  $\Delta f(x)$ : на тым участку, дзе графік функцыі  $f(x)$  знаходзіцца вышэй пункцірнай лініі  $f_{\min}$ , качэнне адбываецца без слізгання, а дзе ніжэй — кола коціцца са слізганнем.



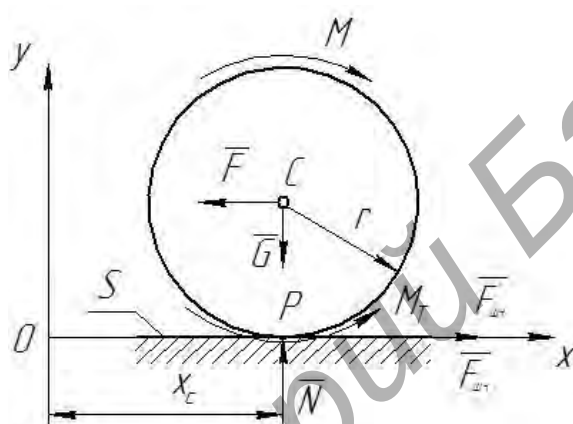
Мал. 1. Графікі змянення каэфіцыента трэння  $f(x)$



Мал. 2. Кола на шурпатай плоскасці



Мал. 3. Кола ў раўнавазе



Мал. 4. Паскоранае качэнне кола

**Статычная і дынамічная сілы шчаплення.** Калі на кола дзейнічае момант  $M$ , то яно можа знаходзіцца на шурпатай паверхні ў раўнавазе, можа каціцца па ёй без слізгання раўнамерна ці паскорана толькі пры пэўных значэннях сілы шчаплення. Разгледзім прыватныя выпадкі.

*Кола не рухаецца.* Каб забяспечыць такі стан кола, замацуем яго цэнтр з дапамогай стрыжня  $BC$  (рыс.3). Рэактыўную сілу, што ўзнікае ў плоскасці кантакта кола з паверхняй  $S$  будзем называць *статычнай сілай шчаплення* і абазначым літарай  $F_{шч}^{ст}$ . Для яе вызначэння складаем умову раўнавагі:  $\sum M_C(\vec{F}_i) = F_{шч}^{ст} \cdot r - M = 0$ . Адсюль  $F_{шч}^{ст} = M/r$ . Далей выкарыстоўваем ураўненні дынамікі плоскага руху цэла (захоўваем агульнапрынятыя ў курсе тэарэтычнай механікі абазначэнні):

$$m\ddot{x}_C = \sum X_i, \quad m\ddot{y}_C = \sum Y_i, \quad I_z\ddot{\phi} = \sum M_C(F_i) \quad (1)$$

*Кола коціцца без слізгання раўнамерна.* Пры такім руху паскарэнне цэнтра кола  $a_C = \ddot{x}_C$  і яго вуглавое паскарэнне  $\varepsilon = \ddot{\phi}$  роўны нулю. Гэта дазваляе запісаць першае і трэцяе ўраўненні ў выглядзе:  $\sum X_i = 0$ ;  $\sum M_P(\vec{F}_i) = 0$ . Улічваючы момант трэння  $M_T$  і сілу супраціўлення  $F$  паводле рысунка 4 атрымліваем:

$$F'_{шч} - F = 0; \quad M - M_T - F \cdot r = 0 \quad (2)$$

З другога ўраўнення (2) знаходзім неабходную для раўнамернага качэння кола сілу супраціўлення:  $F = (M - M_T)/r$ . Затым з першага ўраўнення (2) вызначаем:  $F'_{шч} = F = (M - M_T)/r$ . Як бачым, патрэбная для раўнамернага качэння без слізгання сіла  $F'_{шч}$  пры  $M_T = 0$  не адрозніваецца ад  $F_{шч}^{ст}$ ; яе таксама будзем называць *статычнай*. Варта звярнуць увагу, што наяўнасць моманта трэння качэння вядзе да змяншэння неабходнай для раўнамернага качэння сілы  $F'_{шч}$ .

Кола коціцца без слізгання паскорана, г. зн. знаходзіцца ў пераходным рэжыме руху. Адапаведную сілу шчаплення назавём *дынамічнай* і абазначым літарай  $F_{шч}$ . Для яе вызначэння выкарыстаем першае і другое ўраўненні сістэмы (1) з правымі часткамі, адапаведнымі рысунку 4:

$$m\ddot{x}_C = F_{шч} - F; \quad I_Z\ddot{\phi} = M - M_T - F_{шч} \cdot r \quad (3)$$

Далей улічваем, што тут пры качэнні без слізгання  $x_C = \varphi r$ ,  $\ddot{x}_C = \ddot{\phi}r$ . Гэта дазваляе выключыць з сістэмы (3)  $\ddot{x}_C$ ,  $\ddot{\phi}$  і з атрыманага алгебраічнага ўраўнення вызначыць дынамічную сілу шчаплення; пры  $I_Z = mi_Z^2$  яна роўна:

$$F_{шч} = \left( \frac{M - M_T}{i_Z^2} \right) / \left( 1 - \frac{r^2}{i_Z^2} \right), \quad \text{дзе } i_Z \text{ — радыус інерцыі кола. Для параўнання велічыні } F_{шч} \text{ са}$$

значэннямі  $F'_{шч}$  (ці  $F_{шч}^{ст}$ ) апошняю формулу прывядзем да выгляду  $F_{шч} = \left[ \frac{r^2}{r^2 + i_Z^2} \right] \cdot$

$\left[ \frac{M - M_T}{r} \right]$  ці карацей:  $F_{шч} = \gamma F'_{шч}$ . Тут велічыня  $\gamma = r^2 / (r^2 + i_Z^2) < 1$ ; назавем яе *каэфіцыентам змяншэння статычнай сілы шчаплення*. Значыць, каб знайсці дынамічную сілу шчаплення, неабходна адапаведную статычную сілу памножыць на каэфіцыент змяншэння  $\gamma$ . Каб мець уяву, наколькі істотна ўплывае паскораны рух кола на сілу шчаплення, вылічым каэфіцыент  $\gamma$  для кола пастаяннай таўшчыні. Для яго радыус інерцыі  $i_Z^2 = r^2/2$ . Тады  $\gamma = \frac{r^2}{r^2 + \frac{r^2}{2}} = \frac{2}{3}$ .

Ведаючы для качэння без слізгання сілу  $F_{шч}$ , можам знайсці адапаведны ёй мінімальны каэфіцыент трэння слізгання  $f_{min}$  з формулы  $F_{шч} = f_{min}N$ . Рэакцыю плоскасці  $N$  вызначаем з другога ўраўнення (1) пры  $\ddot{y}_C = 0$ :  $m\ddot{y}_C = G - N$ . Атрымліваем:  $N = G = mg$ . Графік велічыні  $f_{min}$  паказаны на рысунку 1.

*Кола коціцца са слізганнем.* Такі працэс качэння мае месца на ўчастках шляху, дзе графік змянення каэфіцыента  $f(x)$  знаходзіцца ніжэй графіка  $f_{min}$  (рыс.1). У гэтым выпадку сіла шчаплення пераходзіць у сілу трэння, г. зн.  $F_{шч} = F_T = f(x)G \neq const$ . З першай формулы (3) знаходзім паскарэнне цэнтра мас кола:  $a_c = \ddot{x}_C = (F_T - F)/m \neq 0$ . Як бачым, на ўчастку шляху, дзе кола коціцца са слізганнем, паскарэнне цэнтра мас не можа быць роўным нулю; і таму *раўнамерны рух яго не магчымы*.

**Заклучэнне.** У даследаванні выкладзена метадыка рашэння прыкладной задачы качэння кола, што засталася па-за ўвагай аўтараў падручнікаў па тэарэтычнай механіцы. Знаёмства з ёй назапашвае і ўзбагачае досвед рашэння нетыповых праблем. Атрыманы вынік у выглядзе формулы для вылічэння сілы шчаплення кола з плоскасцю качэння дазваляе прагназаваць магчымасць качэння кола і характар яго руху. Даследаванне зацікавіць дапытлівых студэнтаў і спецыялістаў у галіне транспартных машын і тэхналагічнага абсталявання.

## ЛІТАРАТУРА

1. Русан С.І., Стэцкі Я.С. Альтэрнатыўны аналіз скорасцей пунктаў кола пры качэнні па плоскасці са слізганнем/С.І. Русан, Я.С. Стэцкі//Технологии, экономика и право: актуальные проблемы и инновации: материалы Междунар. науч.-практ. конф., Барановичи, 20 ноября 2014 г. — Барановичи: РИО БарГУ, 2014. — с.39 — 41.
2. Русан С.І., Наліўка А.І. Выкарыстанне палёў у даследаванні паскарэнняў кола пры качэнні па плоскасці са слізганнем/С.І. Русан, А.І. Наліўка// Технологии, экономика и право: актуальные проблемы и инновации: материалы Междунар. науч.-практ. конф., Барановичи, 20 ноября 2014 г. — Барановичи: РИО БарГУ, 2014. — с.36 — 39.

E-mail: [stetskiy93@mail.ru](mailto:stetskiy93@mail.ru)

Поступила в редакцию 11.11.2015