

ПРЫМЯНЕННЕ МЕТАДУ ЖУКОЎСКАГА ДА ВЫЗНАЧЭННЯ РЭАКЦЫЙ ЗНЕСНІХ СУВ'ЯЗЕЙ

Русан С.І., Заяц В.Р., Талачынец І.М.

Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт, Баранавічы

Агульныя заўвагі. Навукова-метадычнае даследаванне мае на мэце ўдасканаленне вучэбнага працэсу па тэарэтычнай механіцы і тэорыі механізмаў і машын. Пад знешнімі сувязямі будзем разумець целы, якія злучаюць механічную сістэму з нерухомай асновай, інакш – кінематычныя пары, утвораныя звеннямі механізма са стойкай. Графааналітычны метада Жукоўскага выкарыстоўваецца ў сілавым аналізе плоскіх механізмаў для праверкі рэзультатаў, атрыманых аналітычным метадам. Такая праверка выконваецца на завяршальнай стадыі разлікаў. Але памылка можа быць зроблена і на пачатку сілавога аналізу механізма. Тады працяг разліку не прадуктыўны. Таму пажадана графааналітычную праверку весці адначасова з аналітычным разлікам. Аднак існуючая практыка прымянення метаду Жукоўскага, прыстасаванага для вызначэння толькі знешніх сіл, не дазваляе яе выконваць. Ніжэй паказана, што згаданы метада аднолькава прыгодны як для вызначэння знешніх (прыведзеных ці ўраўнаважвальных), так і ўнутраных сіл узаемадзеяння звенняў ў кінематычных парах.

Сутнасць метаду Жукоўскага. У аснову метаду пакладзены графічны аб'ект, называемы “рычагом Жукоўскага” (ці “жорсткім рычагам”). Метада Жукоўскага прымяняецца як для рашэння задач статыкі, так і задач дынамікі. У першым выпадку ён грунтуецца на агульным ураўненні статыкі, у другім – на агульным ураўненні дынамікі. Кожнае з іх можна запісаць у выглядзе:

$$\sum \delta A_i = 0, \quad (1)$$

дзе δA_i – магчымая работа сілы F_i , што прыкладзена да звяна механізма. Як вядома з фізікі, для выканання работы выкарыстоўваецца рычаг. Ён уяўляе сабою цела ў выглядзе стрыжня, якое мае пункт апоры. Да рычага прыкладваюцца сілы, што выконваюць работу. У метада Жукоўскага ў якасці ўмоўнага рычага выкарыстоўваецца павернуты на 90° план скорасцей усіх пунктаў механізма, у якіх прыкладзены сілы. Апорай такога разгалінаванага “рычага” служыць полюс плана скорасцей. Для вылічэння моманту сілы F_i , прыкладзенай у якім-небудзь пункце M_i звяна механізма, яе пераносяць паралельна на “рычаг” і прыкладваюць да канца вектара скорасці v_i гэтага ж пункта. Пасля пабудовы “рычага” і пераноса на яго ўсіх сіл, што дзейнічаюць на механізм, сутнасць метаду Жукоўскага можна сфармуляваць наступным чынам: *раўнавазе плоскага рычажнага механізма адпавядае раўнавага пабудаванага для яго “жорсткага рычага”*. Інакш, больш канкрэтна – сума момантаў усіх сіл, перанесеных на “рычаг”, адносна яго пункта апоры роўна нулю:

$$\sum M_p(\vec{F}_i) = 0, \quad (2)$$

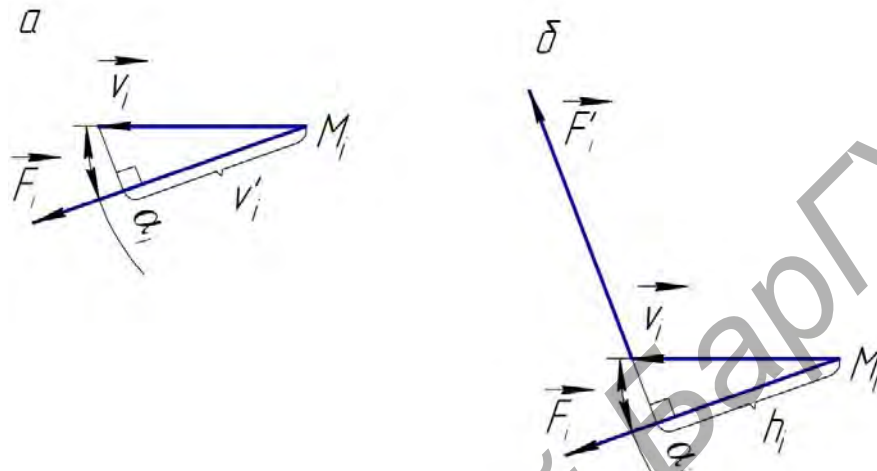
дзе p – пункт апоры “рычага” (полюс плана скорасцей). Як бачым, вучоны здзяйсніў геніяльны пераход ад складанага механізма да прастога рычага ў якасці мадэлі.

Каб глыбей зразумець і творча прымяняць на практыцы метада Жукоўскага, студэнтам неабходна цвёрда засвоіць трансфармацыю ўраўнення (1) ва ўраўненне (2). Кожнае складаемае першага з іх, як вядома з курса тэарэтычнай механікі, уяўляе сабою магчымую работу F_i і вылічваецца па формуле: $\delta A_i = \vec{F}_i \delta \vec{r}_i$, дзе $\delta \vec{r}_i$ – магчымае перамяшчэнне пункта M_i , у якім прыкладзена сіла F_i . Спецыфіка сувязей у вивучаемых механізмах дазваляе ў апошняй формуле замяніць магчымае перамяшчэнне $\delta \vec{r}_i$ на сапраўднае $d\vec{r}_i$ і запісаць яе ў выглядзе: $dA_i = \vec{F}_i d\vec{r}_i$. Замест роўнасці (1) атрымліваем: $\sum \vec{F}_i d\vec{r}_i = 0$. Прадыферэнцыруем яе па часе (пры $F_i = \text{const}$): $\sum \vec{F}_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum \vec{F}_i \vec{v}_i = \sum F_i v_i \cos \alpha_i = 0$, альбо

$$\sum F_i v_i^t = 0. \quad (3)$$

Тут $v_i^t = v_i \cos \alpha_i$ – праекцыя скорасці v_i на напрамак сілы F_i . Цяпер у роўнасці (3) кожнае складаемае, у адрозненне ад (1), уяўляе не работу сілы F_i , а яе магучасць. На рысунку 1,а паказаны множнікі, што ўтвараюць складаемае сумы (3). Яго формула асацыіруецца з момантам

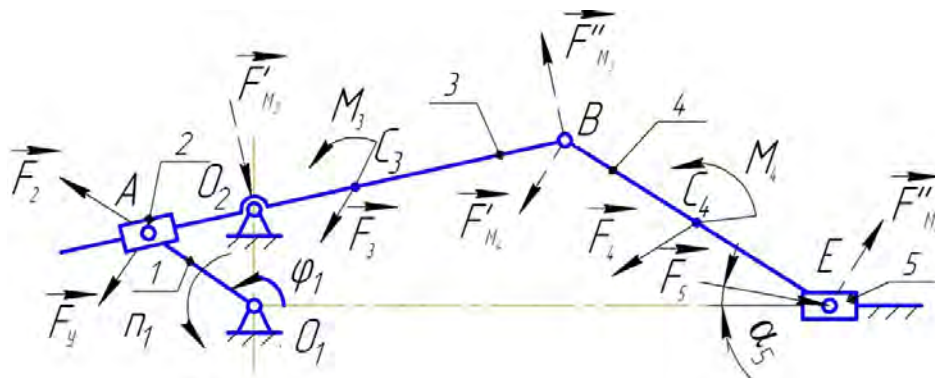
сілы F_i ; $F_i h_i$. Каб адрэзак v_i' на рысунку 1,а мог выконваць ролю пляча h_i , сілу F_i неабходна перанесці ў палажэнне F_i' (рыс. 1, б), г.зн. павярнуць яе на 90° і прыкласці да канца вектара \vec{v}_i' . Адрэзак $h_i = v_i' = v_i \cos \alpha_i$ можна разглядаць як рычаг, замацаваны шарнірна ў пункце M_i . Калі цяпер рысункі віды 1,б для ўсіх сіл, прыкладзеных да звенняў механізма, аб'яднаць, сумясціўшы іх цэнтры M_i , то атрымаем схему разгалінаванага “рычага Жукоўскага”. Агульны центр будзе плюсам плана скорасцей p , а складаемае сумы (3) прадстаўляецца ў выглядзе: $F_i v_i' = M_p(\vec{F}_i')$. Сама ж роўнасць (3) пераходзіць у $\sum M_p(\vec{F}_i') = 0$, дзе $F_i' = F_i$. Такім чынам, мы здыйснілі пераход ад роўнасці (1) да (2) – ураўнення раўнавагі “рычага Жукоўскага”.



Рысунк.1 - Паходжанне “рычага Жукоўскага”: а – скорасць v_i і сіла F_i , прыкладзеная да пункта M_i ; б – перамяшчэнне вектара сілы і вызначэнне яе пляча h_i .

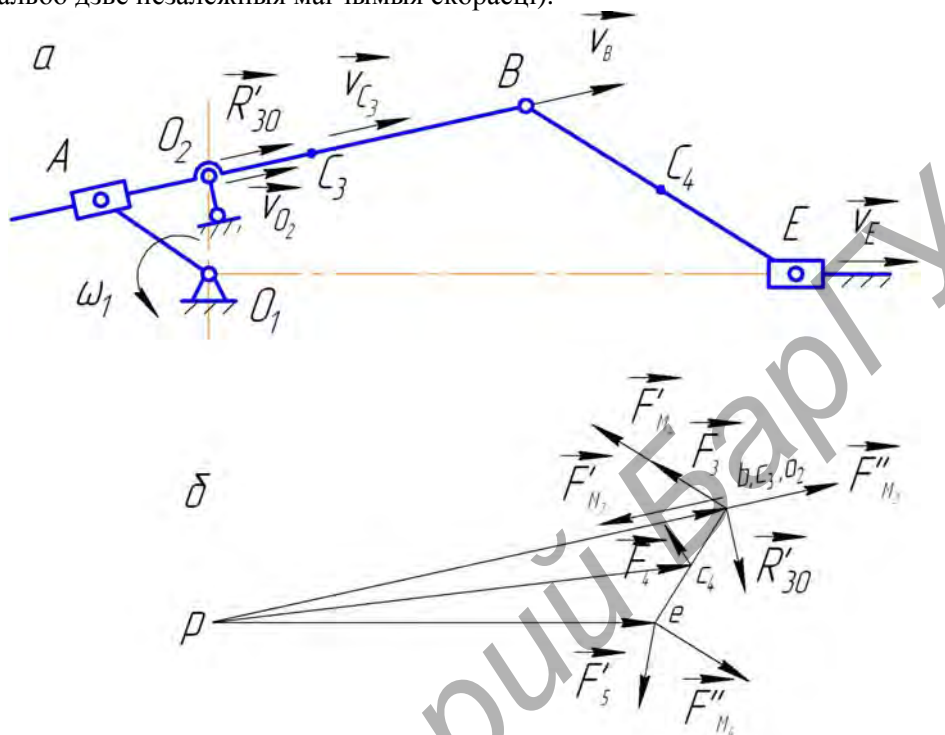
Асаблівасці пабудовы “жорсткага рычага” ў сілавым аналізе знешніх кінематычных пар. Як адзначалася, ў падручніках па тэарэтычнай механіцы і тэорыі механізмаў і машын не разглядаецца магчымасць прымянення метаду Жукоўскага да вызначэння рэакцый у кінематычных парах. З курса тэарэтычнай механікі вядома, што агульныя ўраўненні статыкі і дынамікі, пакладзеныя ў аснову гэтага метаду, і атрыманае з іх ураўненне (3), прынцыпова дазваляюць выконваць такое даследаванне. Паўстае пытанне: як рэалізаваць такую магчымасць? Уявім плоскі рычажны механізм з адной ступенню свабоды і знешнімі кінематычнымі парамі другога класа. Шукаемая рэактыўная сіла ў такіх парах прадстаўляецца дзвюма невядомымі. Напрыклад, у вярчальнай кінематычнай пары – кампанентамі рэакцыі ці яе модулем і напрамкам (вуглом). Далей улічваем, што для механізма можна скласці толькі адно ўраўненне раўнавагі (2) і знайсці з яго адну невядомую сілу. Таму пераўтвараем адну даследуемую аднарухому вярчальную пару ў дзве дзвюхвярчальныя. Цяпер кожная з іх будзе ўтрымліваць адну кампаненту рэакцыі, якая можа быць знойдзена з аднаго ўраўнення раўнавагі (2).

Прыклад вызначэння рэакцыі. На рысунку 2 прадстаўлены механізм, для якога вызначаны ўсе знешнія сілавыя ўздзеянні і знойдзена ўраўнаважвальная сіла F_5 . Моменты сіл інерцыі M_3, M_4 заменены парамі сіл $F_{M_3}^I, F_{M_3}^{II}$ і $F_{M_4}^I, F_{M_4}^{II}$. Сілы цяжару на рысунку аб'яднаны з сіламі інерцыі; іх раўнадзейныя абазначаны літарамі $F_2 + F_3$.

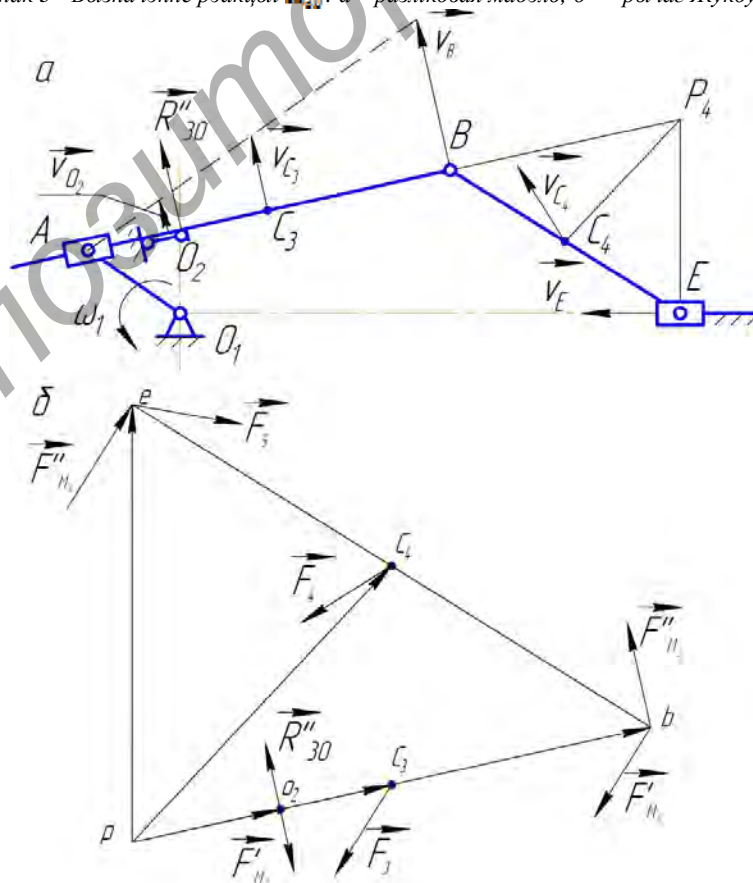


Рысунк.2 - Кінематычная схема механізма і сілавыя фактары

Знойдем рэакцыю сувязі O_2 . Каб рашыць задачу метадам кінэстатыкі, трэба спачатку знайсці рэакцыі ў кінематычнай пары B . І калі пры гэтым будзе зроблена памылка, то яна прайдзе і ў значэнне рэакцыі ў апоры O_2 . Каб вызначыць гэтую рэакцыю непасрэдна, без аналізу сумежных пар, выкарыстаем “жорсткі рычаг”. Прадставім рэакцыю ў выглядзе сумы: $\vec{R}_{30} = \vec{R}'_{30} + \vec{R}''_{30}$. Складаемыя сумы і пераўтвораная пара O_2 паказаны на рысунках 3, а; 4, а. На кожным з іх механізм мае дзве ступені свабоды і адпаведна два незалежныя магчымыя перамяшчэнні (альбо дзве незалежныя магчымыя скорасці).



Рысунак 3 - Вызначэнне рэакцыі R'_{30} : а – разліковая мадэль; б – “рычаг Жукоўскага”



Рысунак 4 - Вызначэнне рэакцыі R''_{30} : а – разліковая мадэль; б – “рычаг Жукоўскага”

Вызначаем рэакцыю R_{30}^i . У якасці незалежных магчымых скорасцей прымаем v_{O_2} і ω_1 (рыс. 3,а). Паколькі сіла R_{30}^i прыкладзена да часткі механізма, рух якой вызначаецца скорасцю v_{O_2} , то прымаем $v_{O_2} \neq 0$, $\omega_1 = 0$. Рухомая частка механізма ўключае звенні 3, 4, 5. Будзем для яе план скорасцей (рыс. 2, б), на якім скорасць v_{O_2} прымаем адвольна; пры гэтым $v_B = v_C = v_{O_2}$. Пераносім на яго і паварочваем на 90° усе сілы, прыкладзеныя да рухомай часткі механізма. Складаем ураўненне раўнавагі (2) атрыманага “рычага” (нулявыя моманты прапускаем): $M_p(\vec{F}_{M_4}^i) + M_p(\vec{F}_3^i) - M_p(\vec{R}_{30}^i) + M_p(\vec{F}_4^i) - M_p(\vec{F}_5^i) - M_p(\vec{F}_{M_4}^{ii}) = 0$. Паколькі тут $M_p(\vec{R}_{30}^i) = -R_{30}^i \cdot pb$, то $R_{30}^i = \frac{1}{pb} [M_p(\vec{F}_{M_4}^i) + M_p(\vec{F}_3^i) + M_p(\vec{F}_4^i) - M_p(\vec{F}_5^i) - M_p(\vec{F}_{M_4}^{ii})]$. Аналагічна вызначаем рэакцыю R_{30}^{ii} . Адпаведная ей разліковая мадэль паказана на рысунку 4,а, дзе v_{O_2} , ω_1 – незалежныя магчымых скорасці. Стрыжань OO_2 левым шарнірам прымацаваны да стойкі, а правым злучаны са звяном 3. Прымаем $v_{O_2} \neq 0$, $\omega_1 = 0$. Будзем для рухомай часткі механізма павернуты на 90° план скорасцей. Пераносім на яго (ужо без павароту) усе сілы, прыкладзеныя да гэтай часткі, і складаем ўраўненне (2). З яго вызначаем R_{30}^{ii} . Поўную рэакцыю знаходзім па формуле: $R_{30} = \sqrt{(R_{30}^i)^2 + (R_{30}^{ii})^2}$.

Заклучэнне. Апісаная вышэй методыка пашырэння метаду Жукоўскага адкрывае магчымасць яго выкарыстання для кантролю аналітычных разлікаў на ўсіх этапах сілавога аналізу. Акрамя таго, і гэта вельмі істотна, яна дазваляе аператыўна выкарыстоўваць эфектыўны метады ў якасці асноўнага ў працэсе праектавання механізмаў на стадыі пошуку аптымальнага варыянта яго кінематычнай схемы. Методыка можа выкарыстоўвацца як ў вучэбным працэсе, так і ў інжынернай практыцы.

РЕЗЮМЕ

Рассматривается вопрос усовершенствования силового анализа плоских механизмов с низшими кинематическими парами. Показано, что графоаналитический метод Жуковского, обычно применяемый для определения внешних сил можно применять и для определения внутренних сил, можно применять и для определения внутренних сил взаимодействия, возникающих в кинематических парах.

ЛІТАРАТУРА

1. Артоболовский И.И. Теория механизмов и машин. – Москва: «Наука», 1988. 639 с.
2. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Часть 1. – Москва: «Высшая школа», 1963. – 431с.
3. Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки: сб. науч. тр. – Гомель: БелГУТ, 2009. – 242 с.

SUMMARY

The question of improvement of the power analysis of flat mechanisms with the lowest kinematic couples is considered. It is shown that the graphic-analytical method of Zhukovsky which is usually applied to determination of external forces, it is possible to apply and to determination of internal forces of the interaction arising in kinematic couples.

Поступила в редакцию 10.12.2012