УДК 517.518.456

И. Н. Бруй
Учреждение образования «Барановичский государственный университет», Барановичи, Республика Беларусь

СИЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС ПРИБЛИЖЕНИЯ СРЕДНИМИ ЗИГМУНДА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

1. Введение. В обозначениях мы следуем двухтомнику Р. Эдвардса [1; 2]. Операторы присваивания « := » и « =: » означают, что выражению, которое стоит со стороны знака двоеточия « : », присвоено обозначение, которое стоит со стороны знака равенства « = ». В банаховом пространстве $\mathbf{C}(T)$ всех непрерывных на вещественной прямой R и периодических с периодом 2π функций с равномерной нормой на отрезке длины периода $\| f \|_{\mathbf{C}(T)} := \max_{-\pi \le x \le \pi} | f(x) |$ средние Фейера тригонометрических рядов Фурье осуществляют сильный процесс приближения.

Цель настоящей работы – доказать, что средние Зигмунда тригонометрических рядов Фурье осуществляют сильный процесс приближения в банаховом пространстве $\mathbf{C}(T)$.

2. Матричные средние. С помощью комплексной двойной последовательности $\left(d_\nu(N)\right)_{(N,\nu)\in Z_+\times Z_1}$, где номер строки N принимает неотрицательные целые значения $Z_+ := \{0,1,2,...\}$, а номер столбца ν принимает натуральные значения $Z_1 := \{1,2,3,...\}$:

$$\left(d_\nu(N)\right)_{(N,\nu)\in Z_+\times Z_1} := \begin{pmatrix} d_1(0) & d_2(0) & d_3(0) & ... \\ d_1(1) & d_2(1) & d_3(1) & ... \\ d_1(2) & d_2(2) & d_3(2) & ... \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}_{Z_+\times Z_1}, \tag{1}$$

образуем матричные средние

$$\forall N \in Z_+ \;\; M_N f(x) := \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(N) \left|\frac{n}{N+1}\right|^\nu\right) \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt\right] \cdot e^{inx} \tag{2}$$

тригонометрического ряда Фурье функции $f \in \mathbf{L}^1(T)$.

Когда все $d_\nu(N) = 0$, то матричные средние (2) суть частичные суммы

$$\forall N \in Z_+ \;\; s_N f(x) := \sum_{n=-N}^{N} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt\right] \cdot e^{inx} .$$

Если при натуральном $r = 1, 2, 3, ...$ члены двойной последовательности (1) таковы, что в r-том столбце единицы: $\forall N \in Z_+ \;\; d_r(N) = 1$, а в остальных столбцах нули: $\forall N \in Z_+ \;\; \forall \nu \in Z_1 \setminus \{r\} \;\; d_\nu(N) = 0$, то матричные средние (2) суть средние А. Зигмунда

$$\forall N \in Z_+ \;\; Z_N^r f(x) := \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \left|\frac{n}{N+1}\right|^\nu\right) \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt\right] \cdot e^{inx} \tag{3}$$

порядка r тригонометрического ряда Фурье функции $f \in \mathbf{L}^1(T)$.

При $r = 1$ средние А. Зигмунда (3) называют средними Л. Фейера и обозначают $\forall N \in Z_+$ $\sigma_N f(x) := Z_N^1 f(x)$.

Элементы матрицы (1) для средних С. Н. Бернштейна и для средних В. Рогозинского выписаны в [3, с. 7].

3. Сильный процесс приближения матричными средними тригонометрических рядов Фурье. Следуя монографии П. Л. Бутцера и Р. Й. Несселя [4, с. 434, определение 12.0.1] введём понятие “strong approximation process on $\mathbf{C}(T)$ ”.

Репозиторий БарГУ

Определение. *Матричные средние (2) тригонометрических рядов Фурье функций* $f \in \mathbf{L}^1(T)$ *назовём сильным процессом приближения в банаховом пространстве* $\mathbf{C}(T)$, *если для любой функции* $f \in \mathbf{C}(T)$, *во-первых, выполняются неравенства*

$$\forall N \in Z_+ \quad \|M_N f(x)\|_{\mathbf{C}(T)} \le A_1 \cdot \|f(x)\|_{\mathbf{C}(T)}, \tag{4}$$

где постоянная A_1 *не зависит от номера* N *и функции* $f(x)$, *и, во-вторых, имеет место равномерная сходимость матричных средних (2) к функции* $f(x)$ *на отрезке длины периода:*

$$\lim_{N\to+\infty} \|f(x) - M_N f(x)\|_{\mathbf{C}(T)} = 0. \tag{5}$$

Нюанс. Предельное равенство (5) с помощью логических символов может быть записано следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \in Z_+ \;\; \forall N \in Z_+ \;\; \left[N \ge N_\varepsilon \Rightarrow \|f(x) - M_N f(x)\|_{\mathbf{C}(T)} \le \varepsilon\right].$$

Тогда в силу неравенства $\big|\,\|f\| - \|g\|\,\big| \le \|f - g\|$, геометрический смысл которого – длина любой стороны треугольника больше модуля разности длин двух других сторон этого треугольника, для всех достаточно больших номеров N справедливо двойное неравенство $\|f(x)\|_{\mathbf{C}(T)} - \varepsilon \le \|M_N f(x)\|_{\mathbf{C}(T)} \le \|f(x)\|_{\mathbf{C}(T)} + \varepsilon$. Поэтому из (5) в силу принципа равномерной ограниченности [4, с. 18, утверждение 0.7.2; 5, с. 265, теорема (9.5)] следует выполнение неравенства (4) лишь для всех достаточно больших номеров N.

4. Средние Зигмунда. В случае средних Л. Фейера $\forall N \in Z_+ \;\; \sigma_N f(x) := Z_N^1 f(x)$ имеем, во-первых, неравенство (4) с постоянной $A_1 = 1$ [1, с. 120, (6.4.9)], и, во вторых, предельное равенство (5) [1, с. 108, теорема 6.1.1, $k = 0$] в форме

$$\lim_{N\to+\infty} \|f(x) - \sigma_N f(x)\|_{\mathbf{C}(T)} = 0. \tag{6}$$

Для средних А. Зигмунда (3) натурального порядка $r = 1, 2, 3, \ldots$ неравенство (4) с постоянной $A_1 = 2r - 1$ имеется в [6, с. 19–24; 7, с. 236; 8, с. 233, лемма 4.3].

Цель настоящей работы – доказать для средних А. Зигмунда $Z_N^{r\ge2} f(x)$ порядка $r = 2, 3, 4, \ldots$ предельное равенство (5).

Воспользуемся частным случаем неравенств автора [3, с. 7–8, теорема 1] для натуральных $N \ge 3$:

$$\|f(x) - Z_N^{r\ge2} f(x)\|_{\mathbf{C}(T)} \le \left[\left|1 - \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(N)\right| + \frac{\sup_{N\in Z_+} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu |d_\nu(N)|}{N+1}\right] \|f(x) - s_N f(x)\|_{\mathbf{C}(T)} +$$

$$+ \frac{2^{r-1} \sup_{N\in Z_+} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu |d_\nu(N)|}{r} \|f(x) - \sigma_{N-1} f(x)\|_{\mathbf{C}(T)} +$$

$$+ \left(\sum_{\nu=1}^{r-1} + \sum_{\nu=r+1}^{+\infty}\right) \frac{|d_\nu(N)|}{(N+1)^\nu} \left[\left|\frac{2^\nu - 1}{2^r - 1} - 1\right| \|f(x) - \sigma_0 f(x)\|_{\mathbf{C}(T)} + \frac{2^{2r-2}}{r} \nu(\nu + r - 2) \sum_{n=1}^{N-2} (n+2)^{\nu-1} \|f(x) - \sigma_n f(x)\|_{\mathbf{C}(T)}\right].$$

Так как $\forall N \in Z_+ \;\; d_r(N) = 1$ и $\forall \nu \in Z_1 \setminus \{r\} \;\; d_\nu(N) = 0$, то предыдущие неравенства принимают вид

$$\|f(x) - Z_N^{r\ge2} f(x)\|_{\mathbf{C}(T)} \le \frac{r}{N+1} \|f(x) - s_N f(x)\|_{\mathbf{C}(T)} +$$

$$+ 2^{r-1} \|f(x) - \sigma_{N-1} f(x)\|_{\mathbf{C}(T)} + \frac{2^{2r-1}(r-1)}{(N+1)^r} \sum_{n=1}^{N-2} (n+2)^{r-1} \|f(x) - \sigma_n f(x)\|_{\mathbf{C}(T)}. \tag{7}$$

В силу очевидных неравенств

$$\sum_{n=1}^{N-2} (n+2)^{r-1} \le \int_3^{N+1} x^{r-1} dx = \left.\frac{x^r}{r}\right|_3^{N+1} \le \frac{(N+1)^r}{r}$$

для последней компоненты правой части неравенств (7) получаем оценки

$$\frac{2^{2r-1}(r-1)}{(N+1)^r} \sum_{n=1}^{N-2} (n+2)^{r-1} \|f(x) - \sigma_n f(x)\|_{\mathbf{C}(T)} \le 2^{2r-1} \max_{1\le n\le N-2} \|f(x) - \sigma_n f(x)\|_{\mathbf{C}(T)}. \tag{8}$$

Репозиторий БарГУ

Поскольку для функции $f \in \mathbf{C}(T)$ равномерно по x выполняется [1, с. 213, упражнение 10.3] соотношение $f(x) - s_N f(x) = o_x(\ln N)$, $N \to +\infty$, то $\|f(x) - s_N f(x)\|_{\mathbf{C}(T)} = o(\ln N)$, $N \to +\infty$. Тогда для первой компоненты правой части неравенств (7) имеем

$$\frac{r}{N+1}\|f(x) - s_N f(x)\|_{\mathbf{C}(T)} = o\left(\frac{\ln N}{N}\right), \ N \to +\infty. \tag{9}$$

Из (7) – (9) получаем

$$\left\|f(x) - Z_N^{r \ge 2} f(x)\right\|_{\mathbf{C}(T)} = o\left(\frac{\ln N}{N}\right) + 2^{r-1} \ \|f(x) - \sigma_{N-1} f(x)\|_{\mathbf{C}(T)} + 2^{2r-1} \max_{1 \le n \le N-2} \|f(x) - \sigma_n f(x)\|_{\mathbf{C}(T)}.$$

Отсюда в силу (6) имеем $\lim_{N \to +\infty} \left\|f(x) - Z_N^{r \ge 2} f(x)\right\|_{\mathbf{C}(T)} = 0$, т. е. имеем предельное равенство (5).

5. Заключение. Известный факт — средние Фейера тригонометрических рядов Фурье осуществляют сильный процесс приближения в банаховом пространстве $\mathbf{C}(T)$ — распространён выше на их обобщение: средние Зигмунда тригонометрических рядов Фурье.

Список цитируемых источников

1. *Эдвардс, Р.* Ряды Фурье в современном изложении : в 2 т. / Р. Эдвардс. — М. : Мир, 1985. — Т. 1. — 264 с.
2. *Эдвардс, Р.* Ряды Фурье в современном изложении : в 2 т. / Р. Эдвардс. — М. : Мир, 1985. — Т. 2. — 400 с.
3. *Бруй, И. Н.* К суммируемости со скоростью средними С. Н. Бернштейна тригонометрических рядов Фурье / И. Н. Бруй // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. — 2022. — Т. 12, № 2. — С. 6—2.
4. *Butzer, P. L.* Fourier Analysis and Approximation / P. L. Butzer, R. J. Nessel. — Basel; Stuttgart : Birkhäuser, 1971. — Vol. 1. — XVI+533 pp.
5. *Зигмунд, А.* Тригонометрические ряды : в 2 т. / А. Зигмунд. — М. : Мир, 1965. — Т. I. — 615 с.
6. *Бруй, И. Н.* О классе насыщения метода Рисса суммирования рядов Фабера / И. Н. Бруй ; Ред. ж. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.». — Минск, 1989. — 60 с. — Деп. в ВИНИТИ АН СССР 16.08.1989. — № 5514-В89.
7. *Жук, В. В.* Аппроксимация периодических функций / В. В. Жук. — Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1982. — 368 с.
8. *Bruj, I.* The concept of Faber derivative in saturation theory / I. Bruj, J. Müller // Jean Journal on Approximation. — 2011. — Vol. 3, № 2. — P. 227—239.

УДК: 510.63

Д. В. Гордич, Е. И. Дулько, Ю. П. Нерода
Учреждение образования «Барановичский государственный университет»,
Барановичи, Республика Беларусь

КАЛЬКУЛЯТОР ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

Введение. Логика — это наука о корректных рассуждениях. Она учит нас строить правильные выводы и аргументы, что является основой любого научного исследования. Как и любая наука, логика требует точности и внимания к деталям. В частности, при работе с таблицами истинности, которые являются ключевым инструментом в изучении логики, точность крайне важна. Но чертить эти таблицы и заполнять их вручную иногда занимает слишком много времени. Именно поэтому мы создали «Калькулятор таблицы истинности».

Калькулятор таблицы истинности — это проверка наших знаний как в дискретной математике, так и в программировании. Этот инструмент позволяет нам сосредоточиться на самой задаче, а не на рутинных вычислениях. Благодаря этому калькулятору мы можем не волноваться по поводу точности заполнения таблиц, достаточно только понимать условие задачи, а дальше, вводя нужные выражения, получать ответ. В этой программе достаточно простой интерфейс, разобраться с которым не составит большого труда. Таким образом, «Калькулятор таблицы истинности» становится мощным помощником в изучении логики и дискретной математики.

Основная часть. Калькулятор разработан в среде Visual Studio с поддержкой проектов Windows Forms и .NET на языке C++. Разработан пользовательский элемент управления, который собран с помощью многих функций макета, доступных в конструкторе Windows Forms. Этот элемент управления реализует пользовательский интерфейс для простого калькулятора, который способен понимать любую логическую функцию, рассчитывать и строить таблицу истинности. Интерфейс программы состоит из кнопок ввода логических операций, переменных и скобок. Вид калькулятора изображен на рисунке 1.

Репозиторий БарГУ