

## РАСПРАЦОЎКА АЛГАРЫТМУ АНАЛІТЫЧНАГА МЕТАДУ КІНЕМАТЫЧНАГА АНАЛІЗУ ЧАТЫРОХЗВЕННАГА МЕХАНІЗМА ЛАНЦУЖНАГА АГРЭГАТА

У. А. Патапаў<sup>1</sup>, С. І. Русан<sup>2</sup>, Л. А. Сівачэнка<sup>3</sup>, С. У. Болатоў<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Старшы выкладчык кафедры тэхнічнага забеспячэння сельскагаспадарчай вытворчасці і аграноміі

Баранавіцкага дзяржаўнага ўніверсітэта, г. Баранавічы, Рэспубліка Беларусь, e-mail: vladimir-potapov-1990@mail.ru

<sup>2</sup> К. т. н., дацэнт, Баранавіцкага дзяржаўнага ўніверсітэта г. Баранавічы, Рэспубліка Беларусь, e-mail: rusan33@mail.ru

<sup>3</sup> Д. т. н., прафесар, прафесар кафедры транспартныя і тэхналагічныя машыны

Беларуска-Расійскага ўніверсітэта, г. Магілёў, Рэспубліка Беларусь, e-mail: 228011@mail.ru

<sup>4</sup> К. т. н., дацэнт, дэкан электратэхнічнага факультэта Беларуска-Расійскага ўніверсітэта,

г. Магілёў, Рэспубліка Беларусь, e-mail: s.v.bolotov@mail.ru

### Рэферат

У артыкуле распрацаваны алгарытм аналітычнага метаду кінематычнага аналізу чатырохзвеннага механізма, які дазваляе з высокай дакладнасцю вызначыць значэнні скорасці і паскарэння яго звенняў у любы момант часу. Чатырохзвеннікі знаходзяць шырокае распаўсюджанне як самастойныя механізмы, так і ў складзе механічных сістэм. Даследуемы тут варыянт механізма плануецца выкарыстаць у якасці прываднага ў ланцужных агрэгатах.

**Ключавыя словы:** чатырохзвенны механізм, аналітычны метада, кінематычны аналіз, скорасць, паскарэнне, ланцужны агрэгат.

### DEVELOPMENT OF AN ALGORITHM FOR THE ANALYTICAL METHOD FOR THE KINEMATIC ANALYSIS OF A FOUR-LINK MECHANISM OF A CHAIN UNIT

V. A. Potapov, S. I. Rusan, L. A. Sivachenko, S. V. Bolotov

### Abstract

The algorithm of the analytical method for the kinematic analysis of a four-link mechanism is developed in the article, which makes it possible to determine with high accuracy the values of the speed and acceleration of its links at any time. Four-links mechanisms are widely used both as independent mechanisms and as part of mechanical systems. The variant of the mechanism studied here is planned to be used as a drive in chain units.

**Keywords:** four-link mechanism, analytical method, kinematic analysis, speed, acceleration, chain unit.

### Уступ

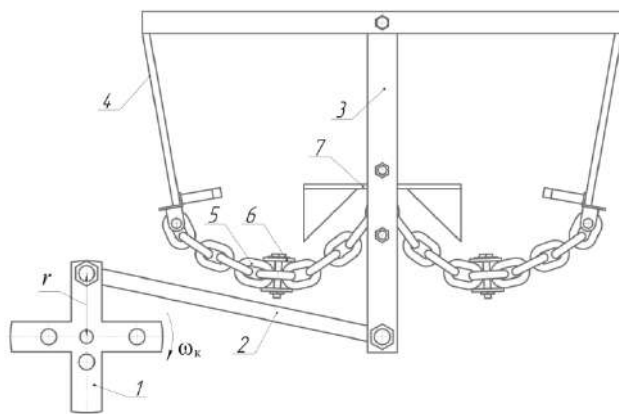
Чатырохзвенныя механізмы, інакш – чатырохзвеннікі, шырока выкарыстоўваюцца ў разнастайных аб'ектах тэхнікі. Таму з'яўляюцца прадметам вывучэння ў падручніках і дапаможніках па тэорыі механізмаў і машын [1–10]. Рух іх звенняў пераважна даследуецца распрацаванымі ў мінулым графічнымі метадамі, недахоп якіх агульнавядомы. У наш час імклівага прагрэсу вылічальнай тэхнікі адкрываецца магчымасць пераходу да больш дакладных аналітычных метадаў вывучэння руху механізмаў, у тым ліку і чатырохзвеннікаў. У прыведзеным тут матэрыяле выкладзена спроба распрацаваць сродкамі тэарэтычнай механікі, аналітычнай геаметрыі і дыферэнцыяльнага вылічэння адпаведны алгарытм. Дадзенае даследаванне ў пэўнай ступені накіравана на рашэнне прыкладной задачы, а менавіта – распрацоўцы алгарытму кінематычнага аналізу чатырохзвеннага механізма ланцужнага агрэгата, што выкарыстоўваецца ў тэхналогіі здрабнення дыскрэтных матэрыялаў.

### Функцыяванне прываднага механізма ў ланцужным агрэгате

Апісаны ніжэй чатырохзвеннік з'яўляецца прывадным механізмам у ланцужным агрэгате. Яго схема і рабочыя элементы прадстаўлены на рысунку 1.

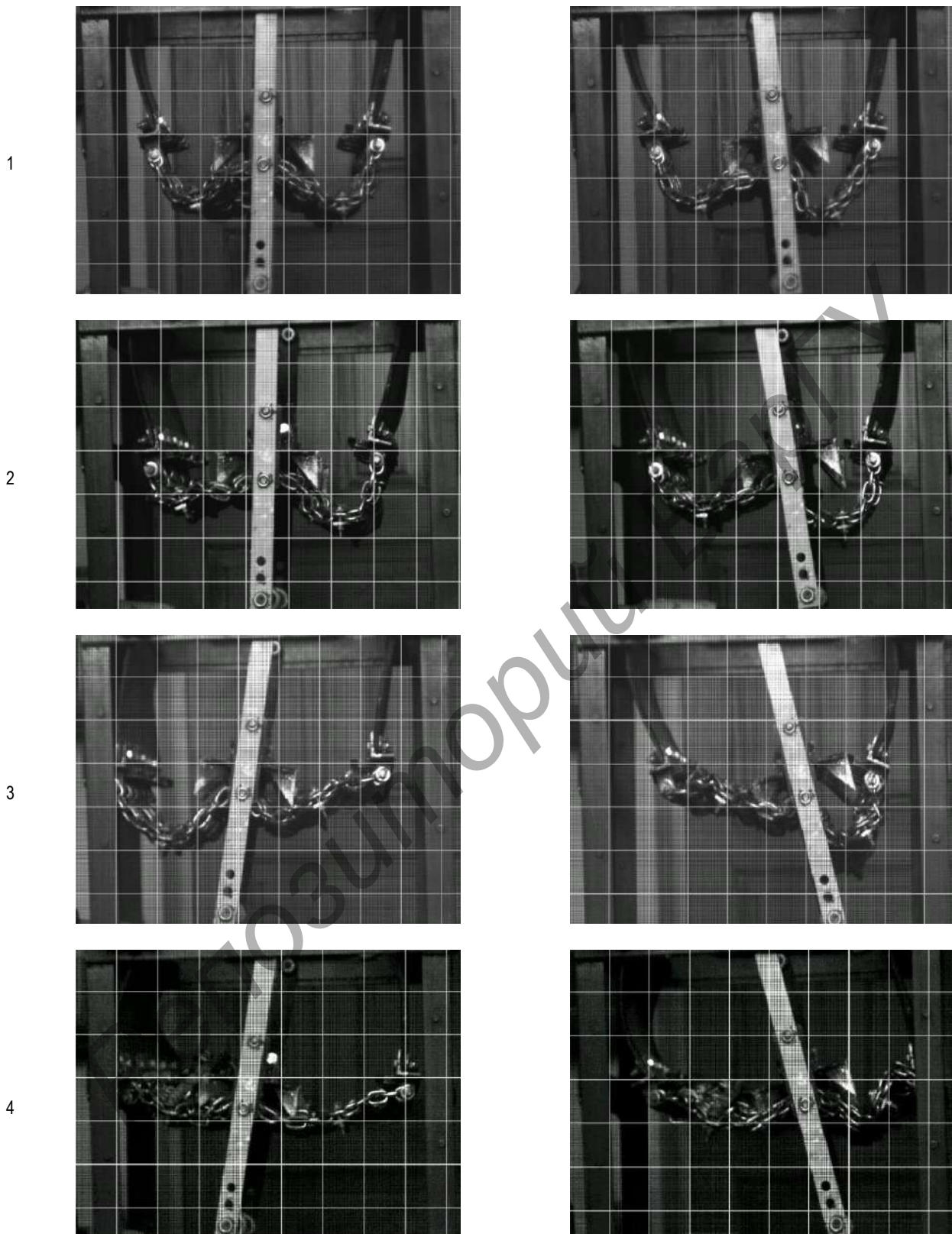
На падставе раней праведзеных даследаванняў якасці перапрацоўкі мелу было ўстаноўлена, што з павелічэннем даўжыні крывашыпа  $r$  і яго вуглавой скорасці  $\omega_k$  (вар'іруемыя параметры) павялічваецца значэнне ступені драбнення і спажыванай магутнасці [11]. Для вывучэння руху была праведзена хуткасная відэаздымка прываднага механізма і рабочых элементаў ланцужнага агрэгата, якая дазволіла візуальна ацаніць формы ненагружаных рабочых элементаў у залежнасці ад вар'іраваных параметраў у крайніх становішчах маятнікавых рычагоў. На рысунку 2 паказаны вынікі

хуткаснай відэаздымкі выходных звенняў – каромысла і рабочыя элементы (ланцужныя палотны, штанга, гнуткія сценкі і здымныя планкі) – пры розных значэннях  $r$  і  $\omega_k$ .



- 1 – крывашып; 2 – шатун; 3 – два каромысла (на рысунку сумяшчаюцца, інакш маятнікавыя рычагі); 4 – гнуткія сценкі; 5 – ланцужныя палотны; 6 – здымныя планкі; 7 – штанга;  $r$  – даўжыня крывашыпа;  $\omega_k$  – вуглавая скорасць крывашыпа

**Рысунк 1** – Прывадны механізм і рабочыя элементы ланцужнага агрэгата

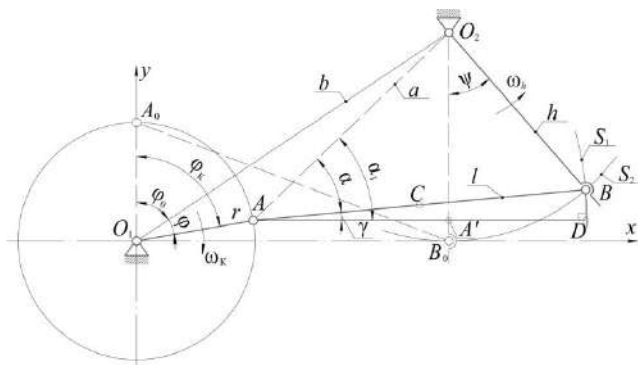


**Рисунак 2** – Вынікі хуткаснай відээздымкі пры розных значэннях даўжыні крывашыпа  $r$  і яго вуглавой скорасці  $\omega_k$  (першы рад:  $r = 30$  мм,  $\omega_k = 31,4$  рад / с; другі рад:  $r = 30$  мм,  $\omega_k = 62,8$  рад / с; трэці рад:  $r = 75$  мм,  $\omega_k = 31,4$  рад / с; чацвёрты рад:  $r = 75$  мм,  $\omega_k = 62,8$  рад / с)

Як бачым, змена ўваходных геаметрычных і кінематычных параметраў прываднога механізма значна ўплывае на характар руху рабочых элементаў, а ў канчатковым выніку і на выходныя тэхналагічныя і энергетычныя параметры ланцужага апрагата [11]. Атрыманы ніжэй алгарытм аналітычнага метаду кінематычнага аналізу прываднога механізма дазволіць дакладна вызначыць абсалютныя і адносныя значэнні скорасці і паскарэння выходных звянняў і адпаведна ацаніць уплыў зададзеных геаметрычных і кінематычных параметраў на іх значэнне.

**Распрацоўка алгарытму аналітычнага метаду кінематычнага аналізу чатырохзвеннага механізма**

Пры распрацоўцы алгарытму прыем наступную схему прываднога механізма (рысунк 3).



Рысунк 3 – Схема чатырохзвенніка  $O_1A_0B_0O_2$ ; ілюстрацыя да вызначэння вуглоў (5)

Ён прадстаўлены ў выглядзе чатырохзвенніка, які складаецца з рухомага звяння – крывашыпа  $O_1A$ , шатуна  $AB$ , маятнікавага рычага  $O_2B$ , і нерухомага –  $O_1O_2$ . Нерухомае звяно ў тэорыі механізмаў і машын называюць стойкай, а маятнікавы рычаг – каромыслам. Абазначым даўжыні звянняў  $O_1A$ ,  $AB$ ,  $O_2B$ ,  $O_1O_2$  адпаведна літарамі  $r$ ,  $l$ ,  $h$  і  $b$ . Пачатак каардынат сумяшчаем з восьсю вярчэння крывашыпа  $O_1$ . Каардынатную вось  $O_1x$  накіроўваем управа па датычнай да траекторыі шарніра  $B$ , а вось  $O_1y$  – уверх перпендыкулярна да  $O_1x$ . Становішча крывашыпа ў адвольны момант часу  $t$  будзем вызначаць вуглом  $\varphi_\kappa$ , які адлічваецца ад восі  $O_1y$  па стрэлцы гадзінніка, а яго вугал павароту адносна стойкі  $O_1O_2$  абазначым праз  $\varphi$ . Пачатковае становішча механізма (пры  $\varphi_\kappa = 0$ ) на рысунку 3 паказана пункцірам  $O_1A_0B_0O_2$ . Вуглавое перамяшчэнне каромысла адносна яго пачатковага становішча абазначым літарай  $\psi$ . Далей будзем лічыць, што крывашып верціцца з пастаяннай вуглавой скорасцю  $\omega_\kappa$ . У даследаванні неабходна пры зададзеных геаметрычных параметрах механізма і  $\omega_\kappa$  вызначыць кінематычныя характарыстыкі руху яго звянняў. Для гэтага спачатку знойдзем ураўненні іх руху, гэта значыць вуглы павароту і каардынаты цэнтра мас шатуна як функцыі часу  $t$ . Ураўненне руху крывашыпа са становішча  $O_1A_0$  прадставім формулай

$$\varphi_\kappa = \varphi_0 + \varphi,$$

дзе  $\varphi = \omega_\kappa(t - t_0)$ ,  $t_0 = \varphi_0 / \omega_\kappa$ . Каардынаты шарніра  $A$  у адвольны момант часу вызначаюцца па формулах:

$$x_A = r \sin \varphi_\kappa; y_A = r \cos \varphi_\kappa.$$

Шатун будзем лічыць аднародным стрыжнем пастаяннага сцяжэння. Яго цэнтр мас знаходзіцца пасярэдзіне даўжыні  $l$  у пунце  $C$ . Шатун выконвае плоскапаралельны рух, які апісваецца трыма ўраўненнямі: каардынатамі  $x_C$ ,  $y_C$  пункта  $C$  і вуглом павароту  $\gamma$  адносна нерухомай восі  $O_1x$ . На рысунку 3 лінія  $AD$  паралельна да восі  $O_1x$ . Як відаць, вугал  $\gamma = \alpha_1 - \alpha$ . Знаходзім вуглы  $\alpha$  і  $\alpha_1$ . У трохвугольніку  $ABO_2$  невядома старана  $a = AO_2$ . Вызначаем яе па тэарэме косінусаў з трохвугольніка  $AO_1O_2$ :

$a^2 = r^2 + b^2 - 2rb \cos \varphi$ , дзе  $\varphi = \varphi_\kappa - \varphi_0$ . Паводле той жа тэарэмы ў трохвугольніку  $ABO_2$   $h^2 = a^2 + l^2 - 2al \cos \alpha$ , адкуль  $\cos \alpha = (a^2 + l^2 - h^2) / 2al = f_1$  і  $\alpha = \arccos f_1$ . У прамавугольным трохвугольніку  $AA'O_2$   $\operatorname{tg} \alpha_1 = A'O_2 / AA' = \Delta y / \Delta x = f_2$ , дзе  $\Delta x = x_{O_2} - x_A$ ,  $\Delta y = y_{O_2} - y_A$  ( $x_{O_2}, y_{O_2}$  – каардынаты восі  $O_2$ ). Адсюль  $\alpha_1 = \operatorname{arctg} f_2$ .

Такім чынам,

$$\gamma = \operatorname{arctg} f_2 - \arccos f_1. \quad (1)$$

Як відаць з рысунка 3,

$$x_C = x_A + l(\cos \gamma) / 2; y_C = y_A + l(\sin \gamma) / 2. \quad (2)$$

Сістэма ўраўненняў (1), (2) апісвае плоскапаралельны рух шатуна.

Становішча пункта  $B$  у адвольны момант часу  $t$  можна вызначыць графічна шляхам засечак дугамі  $S_1, S_2$  радыусаў  $l$  і  $h$  з цэнтраў  $A$  і  $O_2$ . Для аналітычнага вызначэння яго каардынат запішам сістэму ўраўненняў дзвюх адпаведных дугам  $S_1, S_2$  акружнасцей у параметрычнай форме:

$$x_B = x_A + l \cos \gamma; y_B = y_A + l \sin \gamma; \quad (3)$$

$$x_B = x_{O_2} + h \sin \psi; y_B = y_{O_2} - h \cos \psi. \quad (4)$$

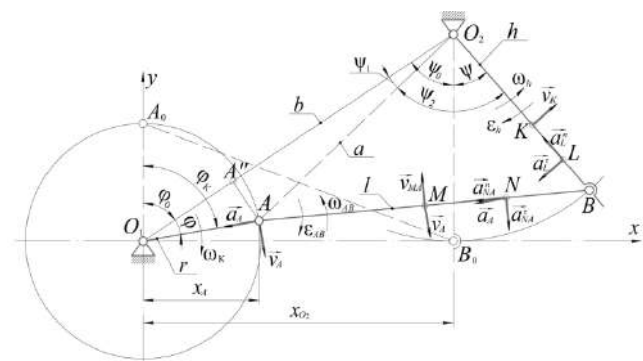
З сістэмы (3), (4) выключаем  $x_B, y_B$ ; атрымліваем:  $x_A + l \cos \gamma = x_{O_2} + h \sin \psi; y_A + l \sin \gamma = y_{O_2} - h \cos \psi$ . Адсюль:

$$\sin \psi = (l \cos \gamma - \Delta x) / h = f_3; \cos \psi = (\Delta y - l \sin \gamma) / h = f_4$$

$$\psi = \arcsin f_3; \psi = \arccos f_4. \quad (5)$$

Кожная з формул (5) апісвае вярчальны рух маятнікавага рычага  $O_2B$ . Для кантролю разлікаў выкарыстоўваецца вядомая з трыганаметрыі залежнасць:  $\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = 1$ .

Каб павысіць пэўнасць даследавання руху выходнага звяна  $O_2B$  з рабочым органам (на рысунку ён не паказаны), пажадана на стадыі распрацоўкі алгарытму ўраўнення (5) прадубліраваць у іншым варыянце. Разгледзім вуглы пры цэнтры  $O_2$  на рысунку 4.



Рысунк 4 – Ілюстрацыя да вываду формулы (6) і кінематычныя характарыстыкі руху звянняў

Відавочна, вугал  $\psi = \psi_1 + \psi_2 - \psi_0$ . Знойдзем складаемыя  $\psi_1, \psi_2, \psi_0$ . Праводзім адрэзак  $AA''$ , перпендыкулярны да лініі  $O_1O_2$ . У трохвугольніку  $AA''O_2$   $\operatorname{tg} \psi_1 = AA'' / A''O_2$ ,

дзе  $AA'' = r \sin \varphi$ ,  $A''O_2 = b - r \cos \varphi$ . Тады  $tg \psi_1 = (r \sin \varphi) / (b - r \cos \varphi) = f_5$ . З трохвугольніка  $AO_2B$  вызначаем:  $l^2 = a^2 + h^2 - 2ah \cos \psi_2$ , адкуль  $\cos \psi_2 = (a^2 + h^2 - l^2) / 2ah = f_6$ . Пастаянны вугал  $\psi_0$  у трохвугольніку  $O_1O_2B_0$  знаходзім па формуле  $\psi_0 = \arctg(x_{O_2} / h)$ .

Ураўненне руху каромысла прымае від:

$$\psi = \arctg f_5 + \arccos f_6 - \arctg(x_{O_2} / h). \quad (6)$$

Знойдзем вуглавую скорасць  $\omega_{AB}$  шатуна  $AB$ . Ураўненню вярчальнай часткі яго руху (1) адпавядае дзвюхкампанентная формула вуглавой скорасці

$$\omega_{AB} = \omega_{AB1} - \omega_{AB2}. \quad (7)$$

Тут, паводле формулы (1),

$$\begin{aligned} \omega_{AB1} &= \frac{d(\arctg f_2)}{dt} = \frac{d(\arctg f_2)}{df_2} \cdot \frac{df_2}{dt} = \\ &= (1 + f_2^2)^{-1} \frac{[\Delta x \cdot d(\Delta y) / dt - \Delta y \cdot d(\Delta x) / dt]}{(\Delta x)^2} = \\ &= \frac{(\Delta x)^2 [(x_{O_2} - r \sin \varphi_K) r \sin \varphi_K \omega_K - (y_{O_2} - r \cos \varphi_K)(-r \cos \varphi_K \omega_K)]}{a^2 (\Delta x)^2}, \end{aligned}$$

ці

$$\omega_{AB1} = \frac{r \omega_K (x_{O_2} \sin \varphi_K + y_{O_2} \cos \varphi_K - r)}{a^2}. \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \omega_{AB2} &= \frac{d(\arccos f_1)}{dt} = \frac{d(\arccos f_1)}{df_1} \cdot \frac{df_1}{dt} = \\ &= -(1 - f_1^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{[2al \cdot d(q^2) / dt - q^2 2l \cdot d(a) / dt]}{4a^2 l^2}, \end{aligned}$$

дзе  $q^2 = a^2 + l^2 - h^2$ .

Далей будзем улічваць, што тут

$$(1 - f_1^2)^{-\frac{1}{2}} = 2al(4a^2 l^2 - q^4)^{-\frac{1}{2}};$$

$$d(q^2) / dt = d(a^2) / dt = 2rb \sin \varphi \omega_K;$$

$$d(a) / dt = d(\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \varphi}) / dt = rb \sin \varphi \omega_K / a.$$

Атрымліваем:

$$\omega_{AB2} = \frac{rb \omega_K \sin \varphi (q^2 - 2a^2)}{a^2 \sqrt{4a^2 l^2 - q^4}}. \quad (9)$$

Падстаўляем (8) і (9) у (7); знаходзім:

$$\omega_{AB} = r \omega_K \left\{ \left[ \frac{(x_{O_2} \sin \varphi_K + y_{O_2} \cos \varphi_K - r)}{a^2} \right] - \left[ \frac{b \sin \varphi (q^2 - 2a^2)}{a^2 \sqrt{4a^2 l^2 - q^4}} \right] \right\}. \quad (10)$$

Лінейную скорасць  $V_M$  любога пункта  $M$  шатуна (рысунк 4) вылічваем па формуле  $\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}$ , дзе  $V_A = \omega_K r$ ,  $V_{MA} = \omega_{AB} \cdot AM$ ,  $\vec{V}_{MA} \perp AM$ .

Пераходзім да вызначэння вуглавога паскарэння  $\varepsilon_{AB}$  шатуна  $AB$ . Сыходзім з формулы (7)

$$\varepsilon_{AB} = d\omega_{AB} / dt = d\omega_{AB1} / dt - d\omega_{AB2} / dt, \quad \text{ці}$$

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_{AB1} - \varepsilon_{AB2}. \quad (11)$$

Каб вызначыць  $\varepsilon_{AB1}$ , формулу (8) запішам у выглядзе:

$$\omega_{AB1} = r \omega_K (p / k), \quad \text{дзе } p = (x_{O_2} \sin \varphi_K + y_{O_2} \cos \varphi_K - r)$$

;  $k = a^2$ . Тады  $\varepsilon_{AB1} = r \omega_K d(p / k) / dt$ , ці

$$\varepsilon_{AB1} = \frac{r \omega_K (kp' - pk')}{k^2}. \quad (12)$$

Тут  $p' = dp / dt = \omega_K (x_{O_2} \cos \varphi_K - y_{O_2} \sin \varphi_K)$ ;

$$k' = d(a^2) / dt = 2rb \omega_K \sin \varphi.$$

Формулу (9) прадстаўляем у выглядзе:

$$\omega_{AB2} = br \omega_K [(u / v) \cdot (s / w)], \quad \text{дзе } u = \sin \varphi; v = a^2;$$

$s = q^2 - 2a^2$ ;  $w = \sqrt{4a^2 l^2 - q^4}$ . Знаходзім:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{AB2} &= d(\omega_{AB2}) / dt = br \omega_K [(u / v)(s / w)' + (u / v)'(s / w)] = \\ &= br \omega_K \left\{ [(u / v)(ws' - w's) / w^2] + [(vu' - uv') / v^2] / (s / w) \right\}, \end{aligned}$$

альбо

$$\varepsilon_{AB2} = br \omega_K \left\{ [u(ws' - w's) / vw^2] + s(vu' - uv') / vw^2 \right\}. \quad (13)$$

У формуле (13)  $u' = \cos \varphi \cdot \omega_K$ ;  $v' = 2rb \sin \varphi \omega_K$ ;

$$s' = -2rb \sin \varphi \omega_K;$$

$$\begin{aligned} w' &= (8l^2 rb \sin \varphi \omega_K - 4q^2 rb \sin \varphi \omega_K) / 2\sqrt{4a^2 l^2 - q^4} = \\ &= 2rb \omega_K \sin \varphi (2l^2 - q^2) / \sqrt{4a^2 l^2 - q^4}. \end{aligned}$$

Па формуле (11) знаходзім:

$$\varepsilon_{AB} = r \omega_K^2 \left\{ (kp'' - pk'') / k^2 - b \left\{ \frac{[u(ws'' - w''s) / vw^2]}{+ s(vu'' - uv'')} / wv^2 \right\} \right\}. \quad (14)$$

Тут множнікі, абазначаныя двума штрыхамі ('), адрозніваюцца ад выкарыстаных у формулах (12) і (13) адсутнасцю  $\omega_K$  – у формуле (14)  $\omega_K$  вынесена за дужкі. Паскарэнне адвольнага пункта  $N$  шатуна вылічваецца па формуле

$$\vec{a}_N = \vec{a}_A + \vec{a}_{NA}^n + \vec{a}_{NA}^t, \quad (15)$$

дзе  $a_A = r \omega_K^2$ ,  $a_{NA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AN$ ,  $a_{NA}^t = \varepsilon_{AB} \cdot AN$ ,  $\vec{a}_{NA}^n \parallel AN$ ,  $\vec{a}_{NA}^t \perp AN$ .

Напрамкі вектароў, падсумаваных у формуле (15), паказаны на рысунку 4.

Для вызначэння вуглавой скорасці  $\omega_h$  каромысла скарыстаемся ўраўненнем яго руху (6), паводле якога  $\psi = \psi_1 + \psi_2 - \psi_0$ .

Знаходзім:  $\omega_h = d\psi_1 / dt + d\psi_2 / dt + d\psi_0 / dt$ . Паколькі  $d\psi_0 / dt = 0$ , то

$$\omega_h = \omega_{h1} + \omega_{h2}. \quad (16)$$

Тут

$$\omega_{h1} = \frac{d\psi_1}{dt} = \frac{d(\arctg f_5)}{dt} = \frac{d(\arctg f_5)}{df_5} \cdot \frac{df_5}{dt} =$$

$$= (1 + f_5^2)^{-1} \left[ \frac{(b - r \cos \varphi) r \cos \varphi \omega_K - (r \sin \varphi) r \sin \varphi \omega_K}{(b - r \cos \varphi)^2} \right]$$

дзе  $(1 + f_5^2)^{-1} = (b - r \cos \varphi)^2 / [(b - r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2]$ .

Канчаткова атрымлівае:

$$\omega_{h1} = \frac{r\omega_K(b \cos \varphi - r)}{a^2}.$$

Далей знаходзім:

$$\omega_{h2} = \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{d(\arccos f_6)}{dt} = \frac{d(\arccos f_6)}{df_6} \cdot \frac{df_6}{dt} =$$

$$= -(1 - f_6^2)^{-\frac{1}{2}} \left[ \frac{2ah \cdot d(q_1^2) / dt - q_1^2 2h \cdot d(a) / dt}{4a^2 h^2} \right]$$

дзе  $q_1^2 = a^2 + h^2 - l^2$ .

$$d(q_1^2) / dt = d(a^2) / dt = 2rbs \sin \varphi \omega_K;$$

$$d(a) / dt = d(\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \varphi}) / dt = rbs \sin \varphi \omega_K / a.$$

Атрымліваем:

$$\omega_{h2} = \frac{rb\omega_K \sin \varphi (q_1^2 - 2a^2)}{a^2 \sqrt{4a^2 h^2 - q_1^4}}. \quad (17)$$

Такім чынам, паводле формулы (16) вуглавая скорасць каромысла роўна:

$$\omega_h = r\omega_K \left\{ \left[ \frac{b \cos \varphi - r}{a^2} \right] + \left[ \frac{bs \sin \varphi (q_1^2 - 2a^2)}{a^2 \sqrt{4a^2 h^2 - q_1^4}} \right] \right\}. \quad (18)$$

Скорасць  $v_K$  адвольнага пункта  $K$ , у тым ліку і рабочага органа, роўна:  $v_K = \omega_h \cdot O_2K$ ; вектар  $\vec{v}_K \perp O_2K$ .

Шляхам дыферэнцыравання роўнасці (16) знаходзім вуглавое паскарэнне каромысла ў выглядзе сумы:

$$\varepsilon_h = \varepsilon_{h1} + \varepsilon_{h2}. \quad (19)$$

Тут

$$\varepsilon_{h1} = \frac{d\omega_{h1}}{dt} = r\omega_K \frac{d[(b \cos \varphi - r) / a^2]}{dt} =$$

$$= r\omega_K \frac{[a^2(-b \sin \varphi \omega_K) - (b \cos \varphi - r) \cdot 2br \sin \varphi \omega_K]}{a^4},$$

ці

$$\varepsilon_{h1} = \frac{-br\omega_K^2 \sin \varphi [a^2 + 2r(b \cos \varphi - r)]}{a^4}. \quad (20)$$

Для вызначэння  $\varepsilon_{h2}$  структуру формулы (17) прадставім у выглядзе:  $\omega_{h2} = br\omega_K [(u_1 / v_1) \cdot (s_1 / w_1)]$ , дзе  $u_1 = \sin \varphi$ ;

$$v_1 = a^2; s_1 = q_1^2 - 2a^2; w_1 = \sqrt{4a^2 h^2 - q_1^4}. \text{ Знаходзім:}$$

$$\varepsilon_{h2} = d(\omega_{h2}) / dt = br\omega_K [(u_1 / v_1)(s_1 / w_1)' + (u_1 / v_1)'(s_1 / w_1)] =$$

$$= br\omega_K \left\{ [(u_1 / v_1)(w_1 s_1' - w_1' s_1) / w_1^2] + [(v_1 u_1' - u_1 v_1') / v_1^2] (s_1 / w_1) \right\},$$

альбо

$$\varepsilon_{h2} = br\omega_K \left\{ [u_1(w_1 s_1' - w_1' s_1) / v_1 w_1^2] + s_1(v_1 u_1' - u_1 v_1') / w_1 v_1^2 \right\}. \quad (21)$$

У формуле (21)  $u_1' = \cos \varphi \cdot \omega_K$ ;  $v_1' = 2rbs \sin \varphi \omega_K$ ;  
 $s_1' = -2rbs \sin \varphi \omega_K$ ;

$$w_1' = (8h^2 rbs \sin \varphi \omega_K - 4q_1^2 rbs \sin \varphi \omega_K) / 2\sqrt{4a^2 h^2 - q_1^4} =$$

$$= 2rb\omega_K \sin \varphi (2h^2 - q_1^2) / \sqrt{4a^2 h^2 - q_1^4}$$

Падстаўляем (20) і (21) у (19); атрымліваем вуглавое паскарэнне каромысла:

$$\varepsilon_h = br\omega_K^2 \left\{ -\left\{ \sin \varphi [a^2 + 2r(b \cos \varphi - r)] / a^4 \right\} + \left\{ [u_1(w_1 s_1' - w_1' s_1) / v_1 w_1^2 + s_1(v_1 u_1' - u_1 v_1') / w_1 v_1^2] \right\} \right\}. \quad (22)$$

Тут, як і вышэй у формуле (14), множнікі, абазначаныя (\*), адрозніваюцца ад адпаведных множнікаў з (') адсутнасцю скорасці  $\omega_K$ .

Паскарэнне адвольнага пункта  $L$  каромысла роўна

$$\vec{a}_L = \vec{a}_L^n + \vec{a}_L^t,$$

дзе  $\vec{a}_L^n = \omega_h^2 \cdot O_2L$ ,  $\vec{a}_L^t = \varepsilon_h \cdot O_2L$ ,  $\vec{a}_L^n \parallel O_2L$ ,  $\vec{a}_L^t \perp O_2L$ .

Каб прыдаць формулам для вылічэння кінематычных характарыстык руху звенняў абагульнены выгляд, прыйдзем да адносных геаметрычных параметраў  $\rho = r / l$  і  $\lambda = h / l$ . Тады формулы (10), (14), (18), (22) прымуць выгляд:

$$\omega_{AB} = \rho\omega_K \left[ \frac{2 \sin \varphi \sqrt{\lambda^2 - \eta^2} \sqrt{1 - \rho^2} - 2\eta \eta_1 \sin \varphi - 2\rho \sqrt{\lambda^2 - \eta^2} + 2\lambda^2 \eta_1 \sin \varphi + 2\lambda}{2\sqrt{\lambda^2 - \eta^2}} \times \frac{\cos \varphi \sqrt{\lambda^2 - \eta^2}}{(\lambda^2 - 2\eta + 1)} \right],$$

$$\varepsilon_{AB} = \rho\omega_K^2 \left\{ (k_1 \rho_1' - \rho_1 k_1') / k_1^2 - b_1 \left[ [u_2(w_2 s_2' - w_2' s_2) / v_2 w_2^2] + s_2(v_2 u_2' - u_2 v_2') / w_2 v_2^2 \right] \right\},$$

$$\omega_h = -\rho\omega_K \left[ \frac{2\rho \sqrt{\lambda^2 - \eta^2} + 2\eta_1 \sin \varphi - 2\eta \eta_1 \sin \varphi + 2\eta_1 \sqrt{\lambda^2 - \eta^2} \left( 2 \sin \left( \frac{\varphi}{2} \right)^2 - 1 \right)}{2\sqrt{\lambda^2 - \eta^2} (\lambda^2 - 2\eta + 1)} \right],$$

$$\varepsilon_h = \eta_1 \rho \omega_K^2 \left\{ -\left\{ \sin \varphi [a_1^2 + 2\rho(\eta_1 \cos \varphi - \rho)] / a_1^4 \right\} + \left\{ [u_3(w_3 s_3' - w_3' s_3) / v_3 w_3^2 + s_3(v_3 u_3' - u_3 v_3') / w_3 v_3^2] \right\} \right\},$$

дзе  $\eta = \eta_1 \rho \cos \varphi$ ;  $\eta_1 = \sqrt{\lambda^2 - \rho^2 + 1}$ ;

$$k_1 = \left( \sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta} \right)^2; \rho_1 = \sqrt{1 - \rho^2} \sin \varphi_K + \lambda \cos \varphi_K - \rho;$$

$$k_1' = 2\rho \eta_1 \sin \varphi; \rho_1' = \sqrt{1 - \rho^2} \cos \varphi_K - \lambda \sin \varphi_K; u_2 = \sin \varphi;$$

$$w_2 = \sqrt{4 \left( \sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta} \right)^2 - \left( \sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta + 1 - \lambda^2} \right)^4};$$

$$s_2 = \left( \sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta + 1 - \lambda^2} \right)^2 - 2 \left( \sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta} \right)^2;$$

$$v_2 = \left( \sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta} \right)^2; u'_2 = \cos \varphi;$$

$$w'_2 = \frac{2\rho\eta_1 \sin \varphi \left[ 2 - \left( \sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta + 1 - \lambda^2} \right)^2 \right]}{\sqrt{4 \left( \sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta} \right)^2 - \left( \sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta + 1 - \lambda^2} \right)^4}};$$

$$s'_2 = -2\rho\eta_1 \sin \varphi; v'_2 = 2\rho\eta_1 \sin \varphi;$$

$$a_1 = \sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta}; u_3 = \sin \varphi;$$

$$w_3 = \sqrt{4 \left( \sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta} \right)^2 \lambda^2 - \left( \sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta + \lambda^2 - 1} \right)^4};$$

$$s_3 = \left( \sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta + \lambda^2 - 1} \right)^2 - 2 \left( \sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta} \right)^2;$$

$$v_3 = \left( \sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta} \right)^2; u'_3 = \cos \varphi;$$

$$w'_3 = \frac{2\rho\eta_1 \sin \varphi \left[ 2\lambda^2 - \left( \sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta + \lambda^2 - 1} \right)^2 \right]}{\sqrt{4 \left( \sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta} \right)^2 \lambda^2 - \left( \sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta + \lambda^2 - 1} \right)^4}};$$

$$s'_3 = -2\rho\eta_1 \sin \varphi; v'_3 = 2\rho\eta_1 \sin \varphi.$$

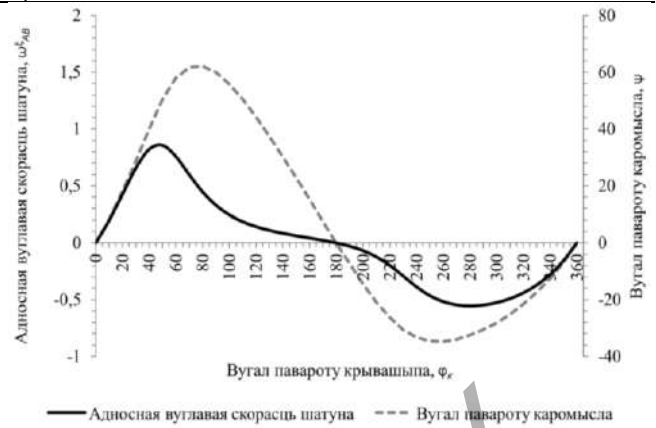
У канструкцыі ланцужнага агрэгата, як адзначалася раней, даўжыня крывашыпа  $r$  з'яўляецца вар'іруемым параметрам. Згодна з праведзенымі раней даследаваннямі асіметрыі ваганняў выходнага звяна прываднага механізму ланцужнага агрэгата устаноўлена, што з павелічэннем адноснага геаметрычнага параметра  $\rho$  у дыяпазоне ад 0,1 да 0,5 пры  $\lambda = 2/3$  вуглы ваганняў (паварота) каромысла істотна ўзрастаюць і павялічваецца асіметрыя ваганняў маятнікавага рычага (каромысла) [12].

Такім чынам, узнікае неабходнасць прааналізаваць углы змены адноснага геаметрычнага параметру  $\rho$  на кінематычныя характарыстыкі чатырохзвеннага механізма. Для гэтага пабудуем графікі ў адносных кінематычных характарыстыках:  $\omega_{AB}^\xi = \omega_{AB} / \omega_K$ ;  $\omega_h^\xi = \omega_h / \omega_K$ ;  $\varepsilon_{AB}^\xi = \varepsilon_{AB} / \omega_K^2$ ;  $\varepsilon_h^\xi = \varepsilon_h / \omega_K^2$ .

Разлік і пабудову графікаў правядзем пры значэннях  $\rho = 0,1$  і  $0,5$ ;  $\lambda = 2/3$ .



Рысунк 5 – Графік змянення адноснай вуглавой скорасці шатуна  $\omega_{AB}^\xi$  у залежнасці ад вугла павароту крывашыпа  $\varphi_k$  (пры  $\rho = 0,1$ )



Рысунк 6 – Графік змянення адноснай вуглавой скорасці шатуна  $\omega_{AB}^\xi$  у залежнасці ад вугла павароту крывашыпа  $\varphi_k$  (пры  $\rho = 0,5$ )



Рысунк 7 – Графік змянення адноснай вуглавой скорасці каромысла  $\omega_h^\xi$  у залежнасці ад вугла павароту крывашыпа  $\varphi_k$  (пры  $\rho = 0,1$ )



Рысунк 8 – Графік змянення адноснай вуглавой скорасці каромысла  $\omega_h^\xi$  у залежнасці ад вугла павароту крывашыпа  $\varphi_k$  (пры  $\rho = 0,5$ )



— Адноснае вуглавое паскарэнне шатуна — — — Вугал павароту каромысла

**Рысунак 9** – Графік змянення адноснага вуглавога паскарэння шатуна  $\varepsilon_{AB}^{\xi}$  у залежнасці ад вугла павароту крывашыпа  $\varphi_k$  (пры  $\rho = 0,1$ )



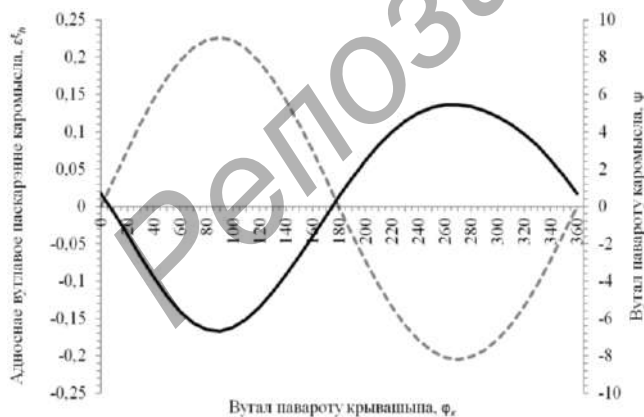
— Адноснае вуглавое паскарэнне каромысла — — — Вугал павароту каромысла

**Рысунак 12** – Графік змянення адноснага вуглавога паскарэння каромысла  $\varepsilon_h^{\xi}$  у залежнасці ад вугла павароту крывашыпа  $\varphi_k$  (пры  $\rho = 0,5$ )



— Адноснае вуглавое паскарэнне шатуна — — — Вугал павароту каромысла

**Рысунак 10** – Графік змянення адноснага вуглавога паскарэння шатуна  $\varepsilon_{AB}^{\xi}$  у залежнасці ад вугла павароту крывашыпа  $\varphi_k$  (пры  $\rho = 0,5$ )



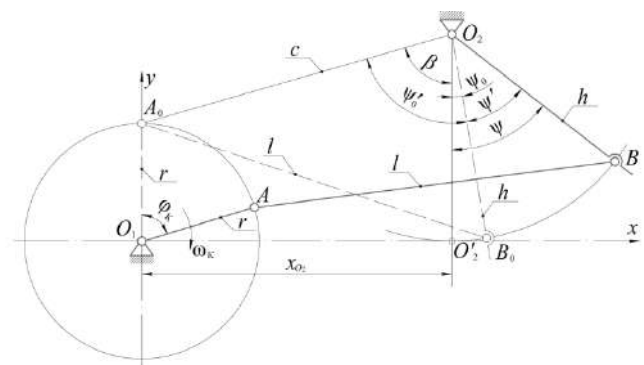
— Адноснае вуглавое паскарэнне каромысла — — — Вугал павароту каромысла

**Рысунак 11** – Графік змянення адноснага вуглавога паскарэння каромысла  $\varepsilon_h^{\xi}$  у залежнасці ад вугла павароту крывашыпа  $\varphi_k$  (пры  $\rho = 0,1$ )

Атрыманыя ў разліках адносная кінематычныя характарыстыкі руху звенняў і пабудаваныя графікі іх змяненняў дазваляюць уявіць велічыню характарыстык у параўнанні з вядомымі характарыстамі руху крывашыпа  $\omega_k$  і  $\omega_k^2 = a_A / r$  ( $a_A$  – паскарэнне пункта А). З атрыманых графікаў відаць, што пры павелічэнні параметра  $\rho$  значна ўзрастае як асіметрыя перамяшчэнняў звенняў, так і кінематычныя характарыстыкі іх руху. Так, пры  $\rho = 0,1$  каэфіцыент асіметрыі  $\eta$  вугла  $\psi_h$  роўны  $\eta = 0,9$ , а пры  $\rho = 0,5$   $\eta = 0,56$ ; пры гэтым абсалютнае значэнне амплітуднага вугла ўзрастае ў 6,88 разоў. Найбольшая вуглавая скорасць  $\omega_h$  узрасла ад 0,151 да 1,145 (у 7,58 разоў).

Вышэй пры даследаванні чатырохзвенніка меркавалася, што яго рух пачынаецца са становішча, у якім каромысел паралельны да крывашыпа (рысункі 3, 4). Аднак у працэсе даследавання вывучэння тэхналагічных характарыстык ланцужнага арграта даводзіцца вар'іраваць геаметрычнымі параметрамі механізма, у прыватнасці, велічыней  $\rho$ . Пры гэтым, каб у пачатковым становішчы механізма захоўваць паралельнасць згаданых яго звенняў, даводзіцца перасоўваць (змяняць каардынату  $x_{O_2}$ ) вось вярчэння каромысла.

На практыцы пры правядзенні доследаў гэтая аперацыя стварае пэўныя нязручнасці. Каб іх пазбегнуць, разгледзім варыянт разліковай схемы механізма, пры якім каромысел у пачатковым становішчы не паралельны да крывашыпа (рысункі 13).



**Рысунак 13** – Ілюстрацыя да вызначэння вугла павароту  $\psi$  каромысла

У гэтым варыянце схемы механізма да трох яго незалежных геаметрычных параметраў  $r, l, h$  дадаецца чварты –  $x_{O_2}$ . Цяпер у пачатковым становішчы механізма  $O_1A_0B_0O_2$  каромысел  $O_2B_0$  утварае з вертыкаллю  $O_2O'_2$  (а, значыць, і з крывашыпам) вугла  $\psi_0$ .

Як відаць на рысунку 13,  $\psi_0 = \psi'_0 - \beta$ , дзе

$\beta = \arctg(x_{O_2} / (h - r))$ . Вугал  $\psi'_0$  знаходзім з трохвугольніка

$A_0B_0O_2$ , у якім старана  $A_0O_2 = c = \sqrt{x_{O_2}^2 + (h - r)^2}$ . Паводле

тэарэмы косінусаў  $l^2 = c^2 + h^2 - 2ch \cos \psi'_0$ , адкуль

$\cos \psi'_0 = (c^2 + h^2 - l^2) / 2ch = f_7$  і  $\psi'_0 = \arccos f_7$ .

Цяпер ураўненне руху каромысла прымае від:

$$\psi = \psi_0 + \psi' \quad (23)$$

дзе  $\psi'$  – вугал павароту каромысла, што адпавядае каардынаце  $\Phi_K$  і вылічваецца па формуле (6). Як бачым, новае ўраўненне руху (23) каромысла адрозніваецца ад папярэдняга (6) толькі пастаянным складнікам  $\psi_0$ . Алгарытм вылічэння  $\omega_h$ ,  $\epsilon_h$  па формуле (23) не змяняецца.

#### Заклучэнне

У артыкуле выкладзена распрацоўка сродкамі тэарэтычнай механікі, аналітычнай геаметрыі і дыферэнцыяльнага вылічэння аналітычнага метаду кінематычнага аналізу чатырохзвеннага механізма. Аналітычны алгарытм значна спрашчае пошук аптымальнага варыянту руху выходнага звяна з рабочым органам. Вынікі работы могуць быць выкарыстаны не толькі пры праектаванні ланцужных агрэгатаў, але і пры праектаванні машын разнастайнага прызначэння, у склад якіх уваходзяць чатырохзвеннікі.

#### Спіс цытаваных крыніц

1. Артоболевский, И. И. Теория механизмов и машин : учеб. для втузов / И. И. Артоболевский. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1988. – 640 с.
2. Теория механизмов и механика машин: учеб. для втузов / К. Ф. Фролов [и др.] ; под. ред. К. В. Фролова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 1998. – 496 с.
3. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин : учеб. пособие для инж.-техн. спец. вузов / В. К. Акулич [и др.] ; под общ. ред. Г. Н. Девойно. – Минск : Вышэйшая школа, 1986. – 285 с.
4. Кожевников, С. Н. Теория механизмов и машин: учеб. пособие для машин. спец. вузов / С. Н. Кожевников. – 3-е изд., исправ. и доп. – М. : Машиностроение, 1969. – 584 с.
5. Краснов, А. А. Теория механизмов и машин. Кинематический анализ плоских механизмов с низшими кинематическими параметрами: учеб. пособие / А. А. Краснов. – Иваново, 2005. – 153 с.
6. Лачуга, Ю. Ф. Теория механизмов и машин. Кинематика, динамика и расчет: учеб. пособие для вузов / Ю. Ф. Лачуга, А. Н. Воскресенский, М. Ю. Чернов. – М. : Колос-с, 2007. – 304 с.
7. Прикладная механика : теория механизмов и машин : учеб. пособие / А. Д. Бардовский [и др.]. – М. : Изд. Дом МИСиС, 2015. – 96 с.
8. Тимофеев, Г. А. Теория механизмов и машин : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / Г. А. Тимофеев. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2019. – 368 с.
9. Fundamentals of Machine Theory and Mechanisms / Antonio Simon Mata [et al.]. – Malaga : University of Malaga, 2016. – Volume 40. – 409 p.
10. Uicker, John. J. Theory of machines and mechanisms / John. J. Uicker, Gordon.R. Pennock, Joseph. E. Shigley. – New York ; Oxford : Oxford Univ. Press, 2017. – 5th edition. – 977 p.
11. Потапов, В. А. Исследование влияния режимов работы целного агрегата на показатели процесса измельчения мела в технологии производства извести / В. А. Потапов, Л. А. Сиваченко, В. А. Дремук // Вестн. БарГУ. Сер. Технические науки. – 2021. – Вып. 9. – С. 37–43.
12. Патапаў, У. А. Даследаванне асіметрыі ваганняў выхаднага звяна прываднага механізма ланцужнага агрэгата / У. А. Патапаў, С. І. Русан, Л. А. Сівачэнка // Механіка. Даследаванні і інавацыі. – 2021. – Вып. 14. – С. 167–173.

#### References

1. Artobolevskij, I. I. Teoriya mekhanizmov i mashin : ucheb. dlya vtuzov / I. I. Artobolevskij. – 4-e izd., pererab. i dop. – M. : Nauka, 1988. – 640 s.
2. Teoriya mekhanizmov i mekhanika mashin: ucheb. dlya vtuzov / K. F. Frolov [i dr.]; pod. red. K. V. Frolova. – 2-e izd., pererab. i dop. – M. : Vysshaya shkola, 1998. – 496 s.
3. Kursovoe proektirovanie po teorii mekhanizmov i mashin : ucheb. posobie dlya inzh.-tekhn. spec. vuzov / V. K. Akulich [i dr.]; pod obshch. red. G. N. Devojno. – Minsk : Vyshejschaya shkola, 1986. – 285 s.
4. Kozhevnikov, S. N. Teoriya mekhanizmov i mashin: ucheb. posobie dlya mashin. spec. vuzov / S. N. Kozhevnikov. – 3-e izd., isprav. i dop. – M. : Mashinostroenie, 1969. – 584 s.
5. Krasnov, A. A. Teoriya mekhanizmov i mashin. Kinematicheskij analiz ploskih mekhanizmov s nizshimi kinematicheskimi parami: ucheb. posobie / A. A. Krasnov. – Ivanovo, 2005. – 153 s.
6. Lachuga, Yu. F. Teoriya mekhanizmov i mashin. Kinematika, dinamika i raschet: ucheb. posobie dlya vuzov / Yu. F. Lachuga, A. N. Voskresenskij, M. Yu. Chernov. – M. : Kolos-s, 2007. – 304 s.
7. Prikladnaya mekhanika : teoriya mekhanizmov i mashin : ucheb. posobie / A. D. Bardovskij [i dr.]. – M. : Izd. Dom MISiS, 2015. – 96 s.
8. Timofeev, G. A. Teoriya mekhanizmov i mashin : uchebnik i praktikum dlya prikladnogo bakalavriata / G. A. Timofeev. – 3-e izd., pererab. i dop. – M. : Yurajt, 2019. – 368 s.
9. Fundamentals of Machine Theory and Mechanisms / Antonio Simon Mata [et al.]. – Malaga : University of Malaga, 2016. – Volume 40. – 409 p.
10. Uicker, John. J. Theory of machines and mechanisms / John. J. Uicker, Gordon.R. Pennock, Joseph. E. Shigley. – New York ; Oxford : Oxford Univ. Press, 2017. – 5th edition. – 977 p.
11. Potapov, V. A. Issledovanie vliyaniya rezhimov raboty celnogo agregata na pokazateli processa izmel'cheniya mela v tekhnologii proizvodstva izvesti / V. A. Potapov, L. A. Sivachenko, V. A. Dremuk // Vestn. BarGU. Ser. Tekhnicheskie nauki. – 2021. – Vyp. 9. – S. 37–43.
12. Patapaŭ, U. A. Dasledavanne asimetriy vagannyaŭ vyhadnaga zvyanu pryvadnaga mekhanizma lancuzhnaga agregata / U. A. Patapaŭ, S. I. Rusan, L. A. Sivachenka // Mekhanika. Dasledavanni i inavacyi. – 2021. – Vyp. 14. – S. 167–173.

Материал поступил в редакцию 06.05.2022