Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Барановичский государственный университет»
Студенческое научное общество БарГУ

СОДРУЖЕСТВО НАУК. БАРАНОВИЧИ-2016

Материалы XII Международной
научно-практической конференции
молодых исследователей

(Барановичи, 19—20 мая 2016 года)

В трёх частях

Часть 2

Барановичи
БарГУ
2016

УДК 001(082)

В части 2 сборника материалов XII Международной научно-практической конференции молодых исследователей «Содружество наук. Барановичи-2016» представлены результаты исследований в области физики и математики, а также рассмотрены актуальные проблемы в области информационных систем и технологий в образовании, науке и технике. Особое внимание уделено современным тенденциям в технологиях и материалах машиностроительного и сельскохозяйственного производств, а также экономическим аспектам развития предприятия, региона.

Сборник адресован научным работникам, аспирантам, магистрантам и студентам инженерных и экономических специальностей учреждений высшего образования.

Рецензент

кандидат технических наук, заведующий лабораторией механофизики гетерогенных систем Государственного научного учреждения «Физико-технический институт Национальной академии наук» А. М. Милюкова

Научное издание

СОДРУЖЕСТВО НАУК.
БАРАНОВИЧИ-2016

Материалы XII Международной
научно-практической конференции
молодых исследователей

(Барановичи, 19—20 мая 2016 года)

На русском, белорусском, английском языках

В трёх частях

Часть 2

Ответственный за выпуск Е. Г. Хохол
Технический редактор А. Ю. Сидоренко
Компьютерная вёрстка С. М. Глушак
Корректор Н. Н. Колодко

Подписано в печать 04.10.2016. Формат 60 × 84 $^{1}/_{8}$. Бумага ксероксная.
Отпечатано на копировально-множительной технике. Усл. печ. л. 28,00. Уч.-изд. л. 25,10. Тираж 9 экз. Заказ 681.

Учреждение образования «Барановичский государственный университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя № 1/424 от 09.09.2016.
Ул. Войкова, 21, 225404 г. Барановичи. Тел. 8 (0163) 45 46 28, e-mail: rio@barsu.by .

ISBN 978-985-498-736-1 (ч. 2)
ISBN 978-985-498-734-7

УДК 517.95

О. А. Гацкевич, А. И. Басик
Учреждение образования «Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина, Брест

УСЛОВИЕ РЕГУЛЯРИЗУЕМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА—ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ КОСОСИММЕТРИЧЕСКИХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В $\mathbf{R}^3$

Введение. В работе рассматривается класс эллиптических систем четырёх дифференциальных уравнений первого порядка с тремя переменными кососимметрического типа. Для систем этого класса доказывается критерий, позволяющий в явном виде описать условие регуляризуемости Я. Б. Лопатинского произвольной краевой задачи Римана—Гильберта в терминах матрицы граничного оператора и нормального вектора к граничной поверхности. Это условие обеспечивает нетеровость задачи в широком классе банаховых пространств [1]. Подобный критерий был ранее получен В. И. Шевченко для системы Моисила—Теодореску [2] (*см.* также [3]), а также А. Т. Уссом для трехмерных аналогов системы Коши-Римана [4]. Для сравнения отметим, что для четырёхмерных аналогов системы Коши—Римана [5] и псевдосимметрических эллиптических систем в $\mathbf{R}^4$ [6] такого критерия не существует.

Постановка задачи. Пусть в ограниченной односвязной области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, границей которой является поверхность Ляпунова $\partial\Omega$, задана эллиптическая система четырех дифференциальных уравнений первого порядка с действительными коэффициентами

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial U}{\partial x_3} = 0\,, \tag{1}$$

где $U = (U_1, U_2, U_3, U_4)^T$ — неизвестная вектор-функция;

A_1, A_2 и A_3 — кососимметрические матрицы размера 4×4, имеющие вид

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & a_k & b_k & c_k \\ -a_k & 0 & c_k & -b_k \\ -b_k & -c_k & 0 & a_k \\ -c_k & b_k & -a_k & 0 \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Эллиптичность системы (1) означает, что для каждого ненулевого вектора $\xi \in \mathrm{R}^3$ характеристическая матрица системы (1) $A(\xi) := A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3$ является невырожденной. Обозначим $a(\xi) = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3$, $b(\xi) = b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + b_3\xi_3$, $c(\xi) = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3$.

Поскольку $\det A(\xi) = (a^2(\xi) + b^2(\xi) + c^2(\xi))^2$, то эллиптичность системы (1) равносильна условию положительной определённости квадратичной формы $a^2(\xi) + b^2(\xi) + c^2(\xi)$, что и будем предполагать выполненным.

Задача Римана—Гильберта для системы (1) состоит в отыскании решения этой системы, непрерывно дифференцируемого в Ω и непрерывного по Гельдеру на $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, удовлетворяющего на $\partial\Omega$ граничным условиям

$$B(y)U(y) = f(y) \quad (y \in \partial\Omega), \tag{2}$$

где B — заданная непрерывная по Гельдеру на $\partial\Omega$ матрица-функция размера 2×4;

f — заданная непрерывная по Гельдеру на $\partial\Omega$ двухкомпонентная вектор-функция.

Условие регуляризуемости. Задача (1), (2) называется регуляризуемой, если для неё выполнено условие Я. Б. Лопатинского. Это условие представляет собой дополнительное ограничение на матрицу граничного оператора и состоит в том, что ранг матрицы

$$B(y)\cdot\int_\gamma A^{-1}(\lambda\nu(y) + \tau(y))\,d\lambda \tag{3}$$

является максимальным в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом ненулевом касательном к $\partial\Omega$ в точке y векторе $\tau = \tau(y)$. Здесь через $\nu = \nu(y)$ обозначен единичный вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке y, и интегрирование в (3) ведётся по простому замкнутому контуру γ, лежащему в верхней комплексной λ-полуплоскости
и охватывающему корень $\alpha + i\beta$ $(\beta > 0)$ уравнения $\det A(\lambda\nu(y) + \tau(y)) = 0$.

Через Λ_{jk} обозначим минор матрицы $B(y)$, составленный из её *j*-го и *k*-го столбцов (*j, k* = 1, 2, 3, 4) и рассмотрим векторное поле $L = (L_1, L_2, L_3)$, где $L_1 = a_1(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + b_1(\Lambda_{13} - \Lambda_{24}) + c_1(\Lambda_{23} + \Lambda_{14})$, $L_2 = a_2(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + b_2(\Lambda_{13} - \Lambda_{24}) + c_2(\Lambda_{23} + \Lambda_{14})$, $L_2 = a_2(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) +$ $L_3 = a_3(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + b_3(\Lambda_{13} - \Lambda_{24}) + c_3(\Lambda_{23} + \Lambda_{14})$.

Теорема 1. *Задача* (1), (2) *регуляризуема тогда и только тогда, когда в каждой точке* $y \in \partial\Omega$ *выполняется неравенство*

$$\langle \nu(y); L(y) \rangle \neq 0 \tag{4}$$

(здесь через $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ обозначено стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^3$).

Доказательство. Пусть H_{jk} — минор матрицы Я. Б. Лопатинского (3), составленный из её *j*-го и *k*-го столбцов (*j, k* = 1, 2, 3, 4). Непосредственные вычисления показывают, что $H_{12} = H_{34}$, $H_{13} = -H_{24}$, $H_{14} = H_{23}$, и с точностью до ненулевого множителя $H_{12} = a(\xi)(a(\xi)(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + b(\xi)(\Lambda_{13} - \Lambda_{24}) + c(\xi)(\Lambda_{23} + \Lambda_{14}))$, $H_{13} = b(\xi)(a(\xi)(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + b(\xi)(\Lambda_{13} - \Lambda_{24}) + c(\xi)(\Lambda_{23} + \Lambda_{14}))$, $H_{14} = c(\xi)(a(\xi)(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + b(\xi)(\Lambda_{13} - \Lambda_{24}) + c(\xi)(\Lambda_{23} + \Lambda_{14}))$, где $\xi = (\alpha + i\beta)\nu(y) + \tau(y)$.

Условие максимальности ранга матрицы Я. Б. Лопатинского (3) равносильно тому, что в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом единичном касательном векторе $\tau(y)$ к $\partial\Omega$ в точке y выполняется неравенство $|H_{12}|^2 + |H_{13}|^2 + |H_{14}|^2 \neq 0$. Заметим, что

$$\begin{aligned} |H_{12}|^2 + |H_{13}|^2 + |H_{14}|^2 &= (|a(\xi)|^2 + |b(\xi)|^2 + |c(\xi)|^2)\,|a(\xi)(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + b(\xi)(\Lambda_{13} - \Lambda_{24}) + c(\xi)(\Lambda_{23} + \Lambda_{14})|^2 = \\ &= (|a(\xi)|^2 + |b(\xi)|^2 + |c(\xi)|^2)\,|\langle \tau; L \rangle + \alpha\langle \upsilon; L \rangle + i\beta\langle \upsilon; L \rangle|^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Докажем необходимость выполнения неравенства (4). Предположим, что в некоторой точке $y_0 \in \partial\Omega$ $\langle \nu(y_0); L(y_0) \rangle = 0$, т. е. вектор $L(y_0)$ лежит в касательной плоскости $T_{y_0}\partial\Omega$ к поверхности $\partial\Omega$ в точке y_0. Поэтому найдётся единичный вектор $\tilde{\tau} \in T_{y_0}\partial\Omega$ ортогональный $L(y_0)$. Положив в формуле (5) $\tau = \tilde{\tau}$ и $y = y_0$, получим $|H_{12}|^2 + |H_{13}|^2 + |H_{14}|^2 = 0$, что противоречит максимальности ранга матрицы (3).

Обратно, пусть выполняется условие (4), однако $|H_{12}|^2 + |H_{13}|^2 + |H_{14}|^2 = 0$ в некоторой точке y_0 и при некотором единичном векторе τ, тогда из формулы (5) следует, что $a(\xi) = 0$, $b(\xi) = 0$ и $c(\xi) = 0$, где $\xi = (\alpha + i\beta)\nu(y_0) + \tau$. Последнее противоречит эллиптичности системы (1). Теорема доказана.

Заключение. В работе в терминах матрицы граничного оператора и нормального вектора к граничной поверхности доказывается условие, обеспечивающее нетеровость произвольной краевой задачи Римана—Гильберта для эллиптических кососимметрических систем в $\mathbf{R}^3$.

Список цитируемых источников

1. Агранович М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, вып. 5. С. 3—120 ; Лопатинский Я. Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям // Укр. мат. журн. 1953. Т. 5. С. 123—151.
2. Шевченко В. И. Гомотопическая классификация задач Римана—Гильберта для голоморфного вектора // Респ. межвед. сб. «Матем. физика». Киев, 1975. Вып. 17. С. 184—186.
3. Полунин В. А., Солдатов А. П. Об условии Шапиро-Лопатинского в задаче Римана—Гильберта для эллиптической системы первого порядка //Научные ведомости сб. «Матем. физика». Белгород, 2010. № 17(88), Вып. 20. С. 91—99.
4. Усс А. Т. Краевая задача Римана—Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши-Римана // Докл. НАН Беларуси. 2003. Т. 47, № 6. С. 10—15.
5. Усс А. Т. Гомотопическая классификация четырехмерных аналогов системы Коши-Римана с действительными коэффициентами // Докл. НАН Беларуси. 2003. Т. 47, № 4. С. 5—9.
6. Виноградов В. С. Граничная задача для псевдосимметрических систем // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С. 161—163.