Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования «Барановичский государственный университет»

МАТЕМАТИКА

Практикум
для студентов инженерных специальностей

В 2 частях
Часть 2

Барановичи
БарГУ
2018

УДК 514.12, 512.64,517.1, 517.2, 517.3, 517.91
ББК 22.1
М11

Составители:
Е. Н. Кирюхова, Ю. В. Сергеева

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет», О. Н. Поддубная;
кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой информационных систем и технологий учреждения образования «Барановичский государственный университет» О. И. Наранович

М11 Математика : практикум для студентов инженер. специальностей : в 2 ч. / сост. Е. Н. Кирюхова, Ю. В. Сергеева ; М-во образования Респ. Беларусь, Баранович. гос. ун-т. — Барановичи : БарГУ, 2018. — Ч. 2. — 76 с.
ISBN 978-985-498-795-8.

Изложены основные понятия, теоремы и формулы, необходимые для решения задач, примеры решения типовых задач, задачи для аудиторной работы и самостоятельного решения, вопросы для самоконтроля по темам, изучаемым на I курсе инженерных специальностей по дисциплине «Математика».
Для студентов I курса инженерных специальностей.

УДК 514.12, 512.64, 517.1, 517.2, 517.3, 517.91
ББК 22.1

ISBN 978-985-498-795-8

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в связи с возросшей ролью математики в современной науке и технике будущие инженеры нуждаются в серьезной математической подготовке, которая давала бы им возможность математическими методами исследовать широкий круг новых проблем, использовать теоретические достижения на практике, применять современные информационные технологии. Стремительное развитие и внедрение новых технологий, их конкуренция на мировом рынке, прогресс средств вычислительной техники, а также научно-технический прогресс в целом предъявляют повышенные требования к качеству подготовки специалистов и, в частности, к их математическому образованию.

Математизация знаний — важнейшее направление процесса развития прикладных исследований. Она обеспечивает четкость и непротиворечивость предпосылок, логическую строгость умозаключений и выводов; позволяет за счет абстракции упорядочить теоретические конструкции и получить новые, не лежащие на поверхности научные результаты. Знания, полученные при изучении математики, необходимы студентам для дальнейшего изучения таких дисциплин, как физика, химия, инженерная графика, теоретическая механика, а также других специальных дисциплин инженерного профиля.

Для студентов инженерных специальностей наиболее важен практический аспект математики, т. е. возможность грамотно построить математическую модель, произвести необходимые вычисления, обнаружить и исследовать соотношения между данными, полученными в результате исследования объектов, поэтому в учебном процессе отводится особая роль практическим занятиям и самостоятельной работе студентов. В этой связи практикум может быть активно использован как на практических занятиях, так и во внеаудиторной самостоятельной работе студентов I курса инженерных специальностей.

Данное учебное издание является продолжением «Математика : практикум для студентов инженерных специальностей. Часть 1». В основной части практикума изучение курса математики разбито на пять тем. В каждой теме приведены краткие теоретические сведения: основные определения, теоремы, формулы, необходимые для решения практических задач. По каждой теме приведено достаточно примеров решения практических задач. Для проведения практических занятий предложены разных уровней сложности задания для аудиторной работы. Для осуществления контроля и самоконтроля знаний по изучаемой теме предложены четыре варианта заданий. Большинство задач снабжено ответами. В конце каждой темы вынесены вопросы для самоконтроля.

Авторы выражают глубокую благодарность доценту кафедры высшей математики Белорусского государственного экономического университета кандидату физико-математических наук О. Н. Поддубной за ценные советы и замечания.

9 ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Основные теоретические сведения

При рассмотрении функций нескольких переменных ограничимся подробным описанием функций двух переменных.

Если каждой упорядоченной паре независимых друг от друга чисел (x, y) из некоторого множества D по какому-либо правилу ставится в соответствие единственное число $z \in R$, то говорят, что задана ***функция двух переменных*** $z = f(x, y)$, определенная на множестве D (область определения функции) со значениями в R (область значений функции). Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ областью определения $D = D(f)$ является некоторое множество точек на плоскости Oxy, а областью значений $R = E(f)$ — промежуток на оси Oz. Поэтому функцию двух переменных $z = f(x, y)$ можно рассматривать как функцию точки $M(x, y)$ координатной плоскости Oxy.

Графиком функции двух переменных $z = f(x, y)$ является поверхность в трехмерном пространстве, состоящая из точек $(x, y, f(x, y))$, где пары (x, y) принадлежат области определения функции $D(f)$.

Множество всех точек $M(x, y)$ плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, называется ***δ-окрестностью точки*** $M_0(x_0, y_0)$.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, кроме, быть может, самой этой точки. Число A называется ***пределом*** функции $f(x, y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое что для всех $x \neq x_0$ и $y \neq y_0$ и удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ выполняется неравенство $|f(x,y)-A|<\varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ или $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A$.

Функция $z=f(x,y)$ (или $z=f(M)$) называется ***непрерывной*** в точке $M_0(x_0,y_0)$, если она: 1) определена в этой точке и в некоторой ее окрестности; 2) имеет предел $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$; 3) этот предел равен значению функции $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$, т. е. $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$. Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в этой области. Точки, в которых не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности функции в точке, называются ***точками разрыва*** этой функции.

Пусть в некоторой области D задана функция $z=f(x,y)$. Возьмем произвольную точку $M(x,y)\in D$ и зададим приращение Δx для переменной x, сохраняя значение y неизменным. Тогда величина $\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$ называется ***частным приращением функции*** z ***по*** x. Тогда предел (если он существует) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$ называется ***частной производной*** функции $z=f(x,y)$ по переменной x и обозначается $\frac{\partial z}{\partial x}$; z'_x; $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$; $f'_x(x,y)$.

Аналогично определяется ***частное приращение функции*** z ***по*** y**:** $\Delta_y z=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$. Тогда ***частная производная*** функции $z=f(x,y)$ по переменной y $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$ и обозначается $\frac{\partial z}{\partial y}$; z'_y; $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$; $f'_y(x,y)$.

Для функции $z = f\left(x, y\right)$ выражение $\Delta z = f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) - f\left(x, y\right)$ называется ***полным приращением функции***.

Геометрический смысл частной производной: частная производная функции $z = f\left(x, y\right)$ по переменной x в точке $M_0(x_0, y_0)$ равна тангенсу угла между осью Ox и касательной, проведенной в точке $N_0\left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right)$ к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$, т. е. угловому коэффициенту касательной, проведённой в точке $\left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right)$ к кривой, заданной уравнением $z = f\left(x, y\right)$.

Функция $z = f\left(x, y\right)$ называется дифференцируемой в точке $M(x, y)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде $\Delta z = \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$, где α_1 и α_2 — бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ соответственно. Главная часть приращения функции Δz в точке $M(x, y)$, линейная относительно Δx и Δy, называется ***полным дифференциалом*** функции $z = f\left(x, y\right)$ и обозначается $dz = \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}dy.$

Полный дифференциал часто используется для приближённых вычислений значений функции, так как $\Delta z \approx dz$, то получим приближенную формулу

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y.$$

Если функция $z = f\left(x, y\right)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то ***производная функции по направлению вектора*** $\vec{s}$

имеет вид: $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial \vec{s}} = \dfrac{\partial z(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial z(M_0)}{\partial y}\cos\beta$, где $\cos\alpha = \dfrac{x_s}{|\vec{s}|}$, $\cos\beta = \dfrac{y_s}{|\vec{s}|}$ — направляющие косинусы вектора $\vec{s}$, $|\vec{s}| = \sqrt{x_s^2 + y_s^2}$ — модуль вектора $\vec{s}$.

Градиент дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ — это вектор, указывающий направление наискорейшего возрастания функции $z = f(x, y)$ в данной точке, а по величине (модулю) равный скорости роста этой функции в этом направлении. Координатами градиента являются частные производные $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial y}$ функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
Обозначение:

$$\overrightarrow{gradz(M_0)} = \left(\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}\right) = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}\vec{j}\,.$$

Касательной плоскостью к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (точка касания) называется плоскость, проходящая через точку N_0 и содержащая в себе все касательные, проведённые в точке N_0 ко всевозможным кривым, проведённым на поверхности через точку N_0.

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ — функция, дифференцируемая в точке $M_0(x_0, y_0)$, то касательная плоскость в точке $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ существует, ее уравнение имеет вид: $z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

Нормалью к поверхности в точке N_0 называется прямая, проходящая через точку N_0 перпендикулярно касательной плоскости, проведенной к этой поверхности в точке N_0.

Уравнение нормали к поверхности в точке N_0 имеет вид: $\frac{x-x_0}{f'_x(x_0 y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$.

Производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ называются ***частными производными первого порядка*** и являются функциями двух переменных. Производные этих функций называются ***частными производными второго порядка*** и обозначаются:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y);\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y);\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y);\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y).$$

Продолжая дифференцировать по каждой переменной полученные результаты, получим частные производные более высоких порядков.

Частные производные второго и более высокого порядка, взятые по различным переменным, например, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial y}$ и т. д., называются ***смешанными производными.***

Если частные производные второго и более высокого порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой (теорема Шварца). В частности, если функция $f\left(x,y\right)$ и ее частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)$ определены и непрерывны в точке $M(x,y)$ и ее окрестности, то верно соотношение $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

Примеры решения практических задач

Пример 9.1. Найти область определения функции двух переменных $z = \dfrac{y-3}{x^2+y^2}$. Изобразить ее на координатной плоскости Oxy.

Решение. Областью определения функции является множество точек плоскости, для которых выполняется $x^2+y^2 \neq 0$, а значит, множество всех точек плоскости Oxy, кроме точки $O(0, 0)$. Изобразим область определения функции $D(z) = \left\{(x, y) \middle| x^2+y^2 \neq 0\right\}$ (рис. 9.1).

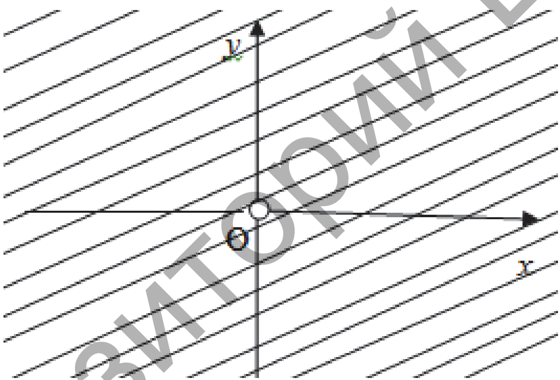

Рисунок 9.1 — Область определения функции

Пример 9.2. Найти область определения функции $z = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-5}}$ и изобразить её на чертеже.

Решение. Подкоренное выражение должно быть неотрицательным: $x^2+y^2-5 \geq 0$; учитывая, что знаменатель не может обращаться в ноль, неравенство становится строгим: $x^2+y^2-5>0$ или $x^2+y^2>5$.

Определим область, которую задаёт неравенство $x^2+y^2-5>0$. Сначала чертим линию, которую задаёт соответствующее равенство. Уравнение $x^2+y^2=5$ определяет окружность с центром в начале координат радиуса $\sqrt{5}$, которая делит координатную плоскость на две части — «внутренность» и «внешность» круга. Так как неравенство у нас *строгое*, то сама окружность не войдёт в область определения, поэтому её нужно провести пунктирной линией.

Теперь берём *произвольную* точку плоскости, не принадлежащую окружности $x^2+y^2=5$, и подставляем её координаты в неравенство $x^2+y^2>5$. Например, точка $O(0,0)$: $0^2+0^2>5$, $0>5$ — неверное неравенство, таким образом, точка $O(0,0)$ не удовлетворяет неравенству $x^2+y^2>5$. Более того, данному неравенству не удовлетворяет и любая точка, лежащая внутри круга, стало быть, искомая область определения — внешняя его часть (рис. 9.2).

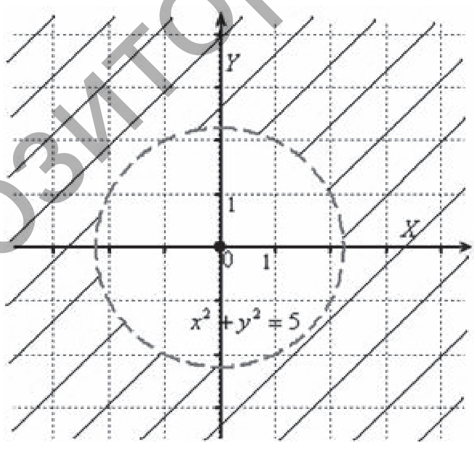

Рисунок 9.2 — Область определения функции

Пример 9.3. Найти предел функции $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\sin(x-y+1)}{x-y+1}$.

Решение. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\sin(x-y+1)}{x-y+1}=\begin{bmatrix}\text{Замена}\\ x-y+1=\alpha\end{bmatrix}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$

Пример 9.4. Найти предел функции $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

Решение.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{\left(x^2+y^2+1-1\right)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)=2\,.$$

Пример 9.5. Найти предел функции $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

Решение. Предложенная функция терпит разрыв в начале координат, и предел может как существовать, так и не существовать.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\begin{bmatrix}\text{Замена}\\ y=kx\end{bmatrix}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2kx}{x^2+k^2x^2}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{kx^3}{x^2\left(1+k^2\right)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{xk}{1+k^2}=\frac{0}{1+k^2}=0.$$

Пример 9.6. Найти частные производные функции $u=x^{y^2z}$.

Решение. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^2zx^{y^2z-1};\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^{y^2z}\ln x\cdot 2yz;\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial u}{\partial z}=x^{y^2z}\ln x\cdot y^2.$

Пример 9.7. Найти полный дифференциал функции $z = \dfrac{y}{x^2 - y^2}$.

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-2yx}{(x^2 - y^2)^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{(x^2 - y^2) - y(-2y)}{(x^2 - y^2)^2} =$

$= \dfrac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}$; $dz = -\dfrac{2xy}{(x^2 - y^2)}dx + \dfrac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}dy.$

Пример 9.8. Вычислить приближенно $\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02}$.

Решение. Рассмотрим функцию трех переменных $u(x, y, z) = \sqrt{x^y + \ln z}$ при $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$.

Тогда $\Delta x = 1,04 - 1 = 0,04$, $\Delta y = 1,99 - 2 = -0,01$, $\Delta z = 1,02 - 1 = 0,02$.

Найдем значение функции $u = \sqrt{x^y + \ln z}$ при $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$.

$u(1, 2, 1)) = \sqrt{1^2 + \ln 1} = 1.$

Находим частные производные в точке $(1, 2, 1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,2,1) = \left.\frac{y \cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}}\right|_{(1,2,1)} = \frac{2 \cdot 1^{2-1}}{2\sqrt{1^2 + \ln 1}} = 1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,2,1) = \left.\frac{x^y \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}}\right|_{(1,2,1)} = \frac{1^2 \ln 1}{2\sqrt{1^2 + \ln 1}} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(1,2,1) = \left.\frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y + \ln z}}\right|_{(1,2,1)} = \frac{\frac{1}{1}}{2\sqrt{1^2 + \ln 1}} = \frac{1}{2}.$$

Воспользуемся формулой $f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \approx f(x, y, z) +$ $+ \dfrac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\Delta z.$

В нашем случае

$$\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02} \approx 1 + 1 \cdot 0,04 - 0 \cdot 0,01 + \frac{1}{2} \cdot 0,02 = 1 + 0,04 + 0,01 = 1,05.$$

Пример 9.9. Вычислить производную функции $z = x^2 + y^2 x$ в точке $A(1, 2)$ по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, если $B(3, 0)$.

Решение. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (3-1, 0-2) = = (2, -2)$.

Модуль вектора равен $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Частные производные первого порядка функции z: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2yx.$

Значения частных производных в точке $A(1, 2)$: $\frac{\partial z}{\partial x}(A) = 6$; $\frac{\partial z}{\partial y}(A) = 4.$

Вычисляем направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\cos\alpha = \frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\beta = \frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Окончательно получаем значение производной функции $z = x^2 + y^2 x$ в точке $A(1, 2)$ по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$: $\frac{\partial z}{\partial \overrightarrow{AB}} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$

Пример 9.10. Вычислить градиент функции $z = \frac{y-3}{x^2 + y^2}$ в точке $M_0(2, 2)$.

Решение. Градиент функции найдем по формуле $\overrightarrow{gradz(M_0)} = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}\vec{j}.$

Найдем частные производные функции $z = \frac{y-3}{x^2 + y^2}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y-3}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot 2x=-\frac{2x(y-3)}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1(x^2+y^2)-2y(y-3)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^2+y^2-2y^2+6y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^2-y^2+6y}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

В точке $M_0(2,2)$ частные производные принимают значения $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)=-\frac{2\cdot 2(2-3)}{\left(2^2+2^2\right)^2}=\frac{4}{64}=\frac{1}{16}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)=\frac{2^2-2^2+6\cdot 2}{\left(2^2+2^2\right)^2}=\frac{12}{64}=\frac{3}{16}$.

Следовательно, $\overrightarrow{gradz(M_0)}=\frac{1}{16}\vec{i}+\frac{3}{16}\vec{j}=\left(\frac{1}{16};\frac{3}{16}\right)$.

Пример 9.11. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x^2-2xy+y^2-x+2y$ в точке $M(1,1,1)$.

Решение. Частные производные функции $z=x^2-2xy+y^2-x+2y$ имеют вид: $\frac{\partial z}{\partial x}=2x-2y-1$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-2x+2y+2$.

В точке $M(1,1,1)$ частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x}(M)=-1$; $\frac{\partial z}{\partial y}(M)=2$.

Уравнение касательной плоскости:

$$z-1=-(x-1)+2(y-1)\Leftrightarrow x-2y+z=0.$$

Уравнение нормали: $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}$.

Пример 9.12. Найти частные производные второго порядка функции $z=x^3-xy^2+x+y+y^4$.

Решение. Последовательно дифференцируя, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-y^2+1,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2xy+1+4y^3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-2y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-2x\,.$$

Пример 9.13. Проверить, удовлетворяет ли функция двух переменных $z=\operatorname{tg}^3(2x-3y)$ уравнению $3\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

Решение. Найдем частные производные функции $z=\operatorname{tg}^3(2x-3y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3\operatorname{tg}^2(2x-3y)\cdot\frac{1}{\cos^2(2x-3y)}\cdot 2;\ \frac{\partial z}{\partial y}=3\operatorname{tg}^2(2x-3y)\cdot\frac{1}{\cos^2(2x-3y)}\cdot(-3).$$

Подставим частные производные в дифференциальное уравнение $3\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

Получим:

$$3\cdot\left(3\operatorname{tg}^2(2x-3y)\cdot\frac{1}{\cos^2(2x-3y)}\cdot 2\right)+$$

$$+2\cdot\left(3\operatorname{tg}^2(2x-3y)\cdot\frac{1}{\cos^2(2x-3y)}\cdot(-3)\right)=0.$$

$$18\operatorname{tg}^2(2x-3y)\cdot\frac{1}{\cos^2(2x-3y)}-18\operatorname{tg}^2(2x-3y)\cdot\frac{1}{\cos^2(2x-3y)}=0$$

$\Leftrightarrow$ 0=0 $\Rightarrow$ удовлетворяет.

Задания для аудиторной работы

9.1. Найти область определения функции и изобразить её на чертеже:

а) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$;

б) $z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-4}}+\ln(y+x)$;

в) $z=\arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$;

г) $z = 3x - \dfrac{2}{\sqrt{x^2 - y^2}}$;

е) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y}}$.

д) $z = \ln\left(y - x^2 + 2x\right)$;

9.2. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\left(2xy - \dfrac{8x+7}{y-3}\right)$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ y\to 0}}\left(\dfrac{\sin 6xy}{5y}\right)$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to 0}}\left(\dfrac{\mathrm{tg} 4y}{\sin 8xy}\right)$;

г) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{4 - \sqrt{xy+16}}$;

д) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2x}{x-y}$;

е) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

9.3. Найти частные производные первого порядка функций:

а) $z = x^3 + 3x^2y - y^3$;

б) $z = x^3y - 2y^3x + x\ln y + 2x$;

в) $z = x\sqrt{y} - \dfrac{y}{x}$;

г) $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$;

д) $z = \sin(x+y) - \cos\left(x^2 + y^3\right)$;

е) $z = \left(x^3 + y^3 - xy^2\right)^3$;

ж) $u = xy^2 - xz^3y + x\sqrt{z} - z\sqrt{y}$;

з) $z = xy\ln(x+y)$.

9.4. Найти полный дифференциал первого порядка для функций:

а) $z = xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4$;

б) $z = \mathrm{tg}\ln\left(x^3y^4\right)$;

в) $z = \dfrac{\left(x^2 + y\right)^2}{xy}$;

г) $z = e^{\mathrm{arctg}\frac{x}{y}}$.

9.5. Найти приближенное значение выражения с помощью дифференциала: а) $\sin 28^0 \cdot \cos 61^0$; б) $(1{,}07)^{3{,}97}$; в) $2{,}04^8 e^{0{,}02}$.

9.6. Найти частные производные второго порядка функций:

а) $z = x^3 - 4x^2 y + 5y^2$; б) $z = \ln\left(x^3 - y^3\right)$; в) $z = y\cos x + x\sin y$.

9.7. Найти $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}$, если $z = 2x^6 y^2 - xy^3 + 5x^2 y^2 + 7y^3 x + 4x$.

9.8. Найти производную функции $z = x^2 - 2xy + y^2$ в точке $M(-1, 2)$ по направлению вектора $\vec{s} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$.

9.9. Найти производную функции $z = 4x - x^2 y + y^2 x$ в точке $A(1,1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, где $B(5,-2)$.

9.10. Для данных функций а) $u = xy + yz^2 + 3x^2 z$, б) $u = x^2 e^{xy} - y^3 x^4 - zy$, в) $u = (xy)^z$ найти градиент функции в точке $M(1,1,2)$.

9.11. Найти направление быстрейшего возрастания функции $z = y\ln x + 3y^2$ в точке (1, 2) и вычислить значение производной в этом направлении.

9.12. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = \dfrac{x}{y}$, где $x = e^{2t}$, $y = \sin^2 t$.

9.13. Найти производные функций *y*, заданных неявно:

а) $e^x - x^3 - y^3 = 3$; в) $x^3 y + \ln y - x = 0$.

б) $x^2 + y^2 - \sin y = 5x$;

9.14. Найти изменение объема цилиндра с высотой 30 см и радиусом основания 10 см при увеличении их на 3 и 2 мм соответственно.

9.15. Написать уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к следующим поверхностям в указанных точках:

а) к параболоиду вращения $z = x^2 + y^2$ в точке (1, –1, 2);

б) к конусу $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{8} = 0$ в точке (4, 3, 4).

Задания для самостоятельной работы

1. Найти область определения функции и изобразить её на чертеже:

1) $z=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$;

2) $z=\ln(-x-y)$;

3) $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$;

4) $z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\ln(x-y)$.

2. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функций двух переменных:

1) $z=x^3\sin y-2y\cos x+2x-y$;

2) $z=x^3\sqrt{y}-e^x y+x-9y-3$;

3) $z=x^3y+y\ln x+2\sqrt{x}-y+4$;

4) $z=3x^3y+2y-9y\cos x-3x$.

3. Найти производную $\dfrac{dz}{dt}$ сложной функции z:

1) $z=e^{3x}\sin y$ при $x=\sqrt{t+3}$, $y=\ln^2 t$;

2) $z=x^5y^2$ при $x=t^3$, $y=\ln t$;

3) $z=x^3\cos^2 y$ при $x=2t^2$, $y=\sqrt{t}$;

4) $z=e^x\sin y$ при $x=\sin 4t$, $y=(t+2)^3$.

4. Построить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в указанной точке:

1) $x^2+y^2+z^2+6z-4x+8=0$ в точке $M_0=(2, 1, -1)$;

2) $x^2+z^2-4y^2=-2xy$ в точке $M_0=(-2, 1, 2)$;

3) $x^2+y^2+z^2-xy+3z=7$ в точке $M_0=(1, 2, 1)$;

4) $x^2+y^2+z^2+6y+4x=8$ в точке $M_0=(-1, 1, 2)$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется *n*-мерным евклидовым пространством E^n?
2. Что называется функцией нескольких переменных?
3. Что называется функцией двух переменных и ее областью определения?
4. Что называется пределом функции двух переменных в точке?
5. Как определяются частные производные? Сформулируйте правила нахождения частных производных функции нескольких переменных.
6. Когда функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в данной точке? Что называется полным дифференциалом этой функции в данной точке?
7. Напишите формулы для нахождения $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ сложной функции $z = F(u, v)$, где $u = \phi(x, y), v = \psi(x, y)$.
8. Запишите формулы дифференцирования неявной функции $F(x, y) = 0$ и $F(x, y, z) = 0$.
9. Сформулируйте определение частных производных высших порядков.
10. Какая плоскость называется касательной к поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$?
11. Запишите уравнение касательной плоскости, проведенной в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ для поверхности *S*, задаваемой равенством $z = f(x, y)$.
12. Запишите уравнение касательной плоскости, проведенной в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ для поверхности *S*, задаваемой уравнением $F(x, y, z) = 0$.
13. Что называется нормалью к поверхности?
14. Запишите каноническое уравнение нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.
15. Запишите формулу для вычисления производной по направлению, определяемому вектором $\vec{s}$.
16. Что называется градиентом функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$?

10 ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Основные теоретические сведения

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется ***точкой максимума (точкой минимума)*** функции $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$, что для всех точек $M(x, y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ $\left(f(x_0, y_0) \leq f(x, y)\right)$. Точки максимума и минимума функции называются ***точками экстремума***. Значение функции $f(x_0, y_0)$ в точке максимума (минимума) называется ***максимумом (минимумом)*** функции $z = f(x, y)$.

Необходимое условие экстремума: если функция $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0,\quad f'_y(x_0, y_0) = 0$, либо хотя бы одна из них не существует. Эту точку $M_0(x_0, y_0)$ будем называть ***стационарной точкой.***

Достаточное условие экстремума: пусть $M_0(x_0, y_0)$ — стационарная точка функции $z = f(x, y)$ и $A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0)$, $B = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0)$, $C = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0)$, $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$, тогда:

1) если $\Delta > 0$, то функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0, y_0)$: максимум при $A < 0$ (или $C < 0$) и минимум при $A > 0$ (или $C > 0$);

2) если $\Delta < 0$, то экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$ нет;

3) если $\Delta = 0$, то экстремум может быть, а может и не быть (требуется дополнительное исследование).

Условным экстремумом функции $z = f(x, y)$ называется максимум или минимум этой функции, достигнутый при условии, что её аргументы связаны соотношением $\varphi(x, y) = 0$, которое называется **уравнением связи.**

Чтобы найти условный экстремум функции $z = f(x, y)$ при наличии соотношения $\varphi(x, y) = 0$, воспользуемся **методом множителей Лагранжа**.

Для этого составляем *функцию Лагранжа:* $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, где λ — множитель (коэффициент) Лагранжа.

Необходимые условия экстремума задаются системой уравнений, из которой определяются стационарные точки:

$$\begin{cases} L'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = 0, \\ L'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = 0, \\ L'_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0) = 0. \end{cases}$$

Пусть $M_0(x_0, y_0), \lambda_0$ — решение этой системы. Наличие экстремума в этой точке и его тип определяет знак определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix}.$$

Достаточные условия условного экстремума: если $\Delta(M_0, \lambda_0) > 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ — точка условного максимума, а при $\Delta(M_0, \lambda_0) < 0$ — условного минимума.

Дифференцируемая функция в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$ достигает своего наибольшего (наименьшего) значения либо в стационарной точке, лежащей внутри области $\overline{D}$, либо на границе этой области.

Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области, нужно: 1) найти стационарные точки, расположенные внутри данной области, и вычислить значения функции в этих точках; 2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на линиях, образующих границу области; 3) из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Примеры решения практических задач

Пример 10.1. Исследовать на экстремум функцию $z = 3x^2 + xy + 2y^2 - x - 4y$.

Решение. Найдём частные производные первого порядка:

$$z'_x = 6x + y - 1, z'_y = x + 4y - 4,$$

решим систему $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + y - 1 = 0, \\ x + 4y - 4 = 0. \end{cases}$

Таким образом, $M_0(0,1)$ — стационарная точка.

Вычислим частные производные второго порядка в точке $M_0(0,1)$: $f''_{xx} = 6, f''_{xy} = 1, f''_{yy} = 4$, а значит, $A = f''_{xx}(M_0) = 6$, $f''_{xy}(M_0) = 1, f''_{yy}(M_0) = 4$.

Таким образом, $AC - B^2 = 23 > 0$, следовательно, в точке $M_0(0,1)$ есть экстремум, и так как $A > 0$, то это — минимум. Осталось его найти: $z_{\min} = z(M_0) = z(0,1) = -2$.

Пример 10.2. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение. Найдём частные производные первого порядка и решим систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$

Её решением являются пары (0, 0) и (1, 1), т. е. на экстремум надо проверить точки $O(0,0)$ и $M(1,1)$.

Частные производные второго порядка имеют вид:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x\,,\ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3\,,\ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y\,,$$

$$\Delta = AC - B^2 = 36xy - 9\,.$$

Вычислим $\Delta = AC - B^2 = 36xy - 9$ в точках $O(0,0)$ и $M(1,1)$:

$\Delta(O) = 36 \cdot 0 \cdot 0 - 9 = -9 < 0$, значит, экстремума в точке $O(0,0)$ нет;

$\Delta(M) = 36 \cdot 1 \cdot 1 - 9 = 27 > 0$, при этом $A(M) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$, следовательно, точка $M(1,1)$ — точка минимума.

Значит, $z_{\min} = z(M) = z(1,1) = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -1$.

Пример 10.3. Найти экстремум функции $z = xy$ при условии $2x + 3y - 5 = 0$.

Решение. Составляем функцию Лагранжа $L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$.

Из системы $\begin{cases} y + 2\lambda = 0, \\ x + 3\lambda = 0, \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$ получаем $\lambda = -\frac{5}{12};\ x = \frac{5}{4};\ y = \frac{5}{6}.$

Находим $L''_{xx} = 0, L''_{yy} = 0, L''_{xy} = 1, L''_{yx} = 1, \varphi'_x = 2, \varphi'_y = 3$.

Составляем определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 12 > 0$.

Таким образом, функция имеет максимум в точке $M_0\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right)$ и $z_{\max} = z\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right) = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{24}.$

Пример 10.4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в замкнутой области, заданной системой неравенств $x \geq 1,\ \ y \geq -1,\ \ x + y \leq 1$.

Решение. Строим область, заданную системой неравенств $x \geq 1,\ \ y \geq -1,\ \ x + y \leq 1$ (рис. 10.1).

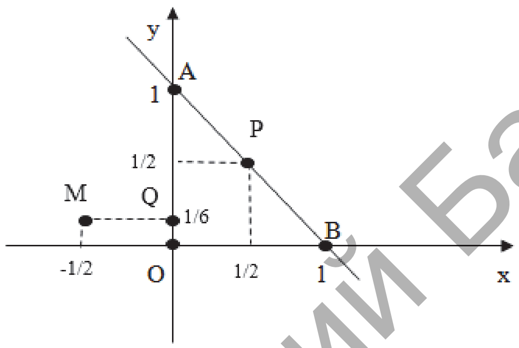

Рисунок 10.1 — Область *D*

Точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения, могут находиться как внутри области, так и на ее границе (треугольник *OAB*).

Если функция принимает наибольшее (наименьшее) значение во внутренней точке области, то в этой точке частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 1,\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = 6y - 1$ равны нулю.

Решив систему уравнений $\begin{cases} 2x + 1 = 0, \\ 6y - 1 = 0, \end{cases}$ находим точку $M\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$, в которой обе частные производные равны нулю. Точка *M* не принадлежит заданной области, следовательно, если функция *z* принимает наибольшее (наименьшее) значение, то это может быть только в точке, принадлежащей границе области.

Перейдем к исследованию функции на границе области (треугольника OAB).

На отрезке OA имеем $x=0$, поэтому на этом отрезке $z=3y^2-y$ и $0\le y\le 1$ $\Rightarrow z'=6y-1=0\Rightarrow y=\dfrac{1}{6}\in[0;1]$. Внутри отрезка $0\le y\le 1$ имеется лишь одна критическая точка $y=\dfrac{1}{6}$, соответствующей точкой отрезка OA является точка $Q=\left(0,\dfrac{1}{6}\right)$. Итак, из всех значений функции z на отрезке OA наибольшее и наименьшее находятся среди ее значений в точках O, Q и A:

$$z(Q)=z\left(\frac{1}{6}\right)=3\left(\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{6};\quad z(O)=z(0)=3(0)^2-0=0;$$

$$z(A)=z(1)=3(1)^2-1=2.$$

На отрезке OB имеем $y=0$, поэтому на этом отрезке $z=x^2+x$ и $0\le x\le 1$ $\Rightarrow z'=2x+1=0\Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}\notin[0;1]$. Внутри отрезка $0\le x\le 1$ нет критических точек, значит, из всех значений функции z на отрезке OB наибольшее и наименьшее находятся среди ее значений на концах отрезка O и B: $z(B)=z(1)=1^2+1=2$.

На отрезке AB имеем $y=1-x$, поэтому на этом отрезке функция $z=x^2+3(1-x)^2+x-(1-x)=x^2+3-6x+3x^2+x-1+x=$ $4x^2-4x+2$ $(0\le x\le 1)$ представляет собой функцию одной переменной x; ее наибольшее и наименьшее значения находятся среди ее значений в критических точках и на концах отрезка.

Находим производную: $z'=8x-4$. Решаем уравнение $z'=0$ или $8x-4=0$ и находим $x=\dfrac{1}{2}$. Внутри отрезка $0\le x\le 1$

имеется лишь одна критическая точка $x=\frac{1}{2}$, соответствующей точкой отрезка AB является точка $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Итак, из всех значений функции z на отрезке AB наибольшее и наименьшее находятся среди ее значений в точках A, P и B:

$$z(P)=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{2}+2=1-2+2=1.$$

Следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+3y^2+x-y$ в данной замкнутой области находятся среди ее значений в точках O, A, Q, B, P.

Наибольшее и наименьшее из них равны $z(A)=z(B)=2$ и $z(Q)=-\frac{1}{6}$.

Задания для аудиторной работы

10.1. Исследовать на экстремум функции двух переменных:

а) $z=x^3+y^3-3xy$;

б) $z=(x-1)^2+2y^2$;

в) $z=x^2+xy+y^2-2x-y$;

г) $z=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$;

д) $z=3xy-x^2-y^2-10x+5y$;

е) $z=x^3+3xy^2-15x-12y$;

ж) $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.

10.2. Найти экстремум функции $z=x^2-y^2$ при условии, что $y=2x-6$.

10.3. Найти экстремумы функции $z=x+2y$ при условии, что $x^2+y^2=5$.

10.4. Найти экстремумы функции $z = 3x + 4y + 10$ при условии, что $x^2 + y^2 = 1$.

10.5. Найти экстремумы функции $z = 4x^2 - 10y^2$ при условии, что $x + 5y - 16 = 0$.

10.6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в области, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = -3$.

10.7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5$ в области, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$.

10.8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 y(4 - x - y)$ в области, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

Задания для самостоятельной работы

1. Найти локальный экстремум функции двух переменных:

1) $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$;

2) $z = x^2 - 2y^2 - 4x + 14y$;

3) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$;

4) $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ в области $D: x - y + 1 = 0, y = 0, x = 3$;

2) $z = 3x + y - xy$ в области $D: y = x, y = 4, x = 0$;

3) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в области $D: y = 2, x = 1, y = 0, x = 0$;

4) $z = xy - x - 2y$ в области $D: y = x, y = 0, x = 3$.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение экстремума функции нескольких переменных.

2. Сформулируйте необходимое и достаточное условия экстремума функции двух переменных.

3. Что называется условным экстремумом функции $z = f(x,\ y)$?

4. Сформулируйте необходимое и достаточное условия условного экстремума функции двух переменных.

5. Опишите процедуру исследования функции на условный экстремум.

6. Опишите процедуру нахождения наибольшего и наименьшего значения функции в замкнутой области.

11 НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Основные теоретические сведения

Функция $F(x)$, определённая в промежутке $[a\,,\,b]$ называется ***первообразной*** данной функции $f(x)$, если для любого $x \in [a\,,\,b]$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Для заданной функции $f(x)$ её первообразная определяется неоднозначно. Если $F'(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то выражение $F(x)+C$, где C — произвольное число, задаёт все возможные первообразные для функции $f(x)$.

Неопределённым интегралом от функции $f(x)$ называется множество всех её первообразных: $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, где $C = \text{const}$. При этом функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, выражение $f(x)dx$ — подынтегральным выражением, переменная x — переменной интегрирования, а C — постоянной интегрирования. Процесс нахождения для функции $f(x)$ всех её первообразных называется её интегрированием.

Свойства неопределенного интеграла:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = \left(F(x)\right)' = f(x)$, т. е. производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции. Следовательно, дифференцирование и вычисление неопределенного интеграла — взаимно обратные операции;

2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

3) $\int dF(x) = F(x) + C$;

4) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, $k = \text{const}$;

5) $\int\left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Таблица неопределенных интегралов основных функций:

1. $\int dx = x + C$;
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$;
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$;
5. $\int e^x dx = e^x + C$;
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$;
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$;
10. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + C,\ a \neq 0$;
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$;
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$;
13. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left| \dfrac{x-a}{x+a} \right| + C$;
14. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left| \dfrac{x+a}{x-a} \right| + C.$

Основные методы интегрирования:

1) непосредственное (табличное);

2) метод подведения функции под знак дифференциала:

$$\int f(g(x)) g`(x) dx = \int f(g(x)) dg(x) = \int f(t) dt;$$

3) метод подстановки (замена переменной).

Пусть $x=\varphi(t)$, где t — переменная, а функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную.

Тогда

$$f(x)=f(\varphi(t)),\ dx=\varphi'(t)dt \text{ и } \int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \text{ —}$$

формула замены переменной в неопределенном интеграле;

4) интегрирование по частям.

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции, тогда $\int udv=uv-\int vdu$ — *формула интегрирования по частям для неопределённого интеграла*;

5) универсальная тригонометрическая подстановка.

Интеграл, рационально зависящий от $\sin x$ и $\cos x$, т. е. интеграл вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$, можно свести к интегралу от рациональной функции относительно новой переменной с помощью универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,$ тогда

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};\ \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Примеры решения практических задач

Пример 11.1. Найти неопределенный интеграл $\int\left(5\sin x-\frac{3}{x^2+9}+\frac{1}{x^2-9}\right)dx.$

Решение.

$$\int\left(5\sin x-\frac{3}{x^2+9}+\frac{1}{x^2-9}\right)dx=5\int\sin xdx-3\int\frac{dx}{x^2+9}+\int\frac{dx}{x^2-9}=$$

$$=-5\cos x-\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C,\ C=\text{const}.$$

Пример 11.2. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{1+x}dx$ и проверить результат дифференцированием.

Решение. Представим подынтегральную функцию в виде степенной: $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$. Так как $\left(1+x\right)' = 1 \Rightarrow d\left(1+x\right) = dx$, то используем метод подведения под знак дифференциала:

$$\int \sqrt{1+x}dx = \int (1+x)^{\frac{1}{2}} dx = \int (1+x)^{\frac{1}{2}} d\left(1+x\right) = \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x} + C, \ C = \text{const} .$$

Проверим полученный результат дифференцированием:

$$\left(\frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x} + C\right)' = \left(\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right)' + C' = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\left(1+x\right)^{\frac{3}{2}-1} + 0 =$$

$$= (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x}.$$

Пример 11.3. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{\cos xdx}{\sin^2 x}$ и проверить результат дифференцированием.

Решение. Так как $(\sin x)' = \cos x$, $d(\sin x) = \cos xdx$, то, используя метод подведения под знак дифференциала, получим:

$$\int \frac{\cos xdx}{\sin^2 x} = \int \frac{d\left(\sin x\right)}{\sin^2 x} = \int \left(\sin x\right)^{-2} d(\sin x) = \frac{(\sin x)^{-2+1}}{-2+1} + C =$$

$$= \frac{(\sin x)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{\sin x} + C, \ C = \text{const} .$$

Проверим полученный результат дифференцированием:

$$\left(-\frac{1}{\sin x}+C\right)'=\left(-\sin^{-1}x\right)'=-1\cdot(-1)(\sin x)^{-1-1}\cdot\left(\sin x\right)'=$$

$$=\sin^{-2}x\cdot\cos x=\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

Пример 11.4. Найти неопределенный интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x+6}(1+\sqrt[3]{x+6})}$.

Решение. Подынтегральная функция содержит два множителя, ни один из которых не является производной другого. Введем новую переменную: $t=\sqrt[6]{x+6}\Rightarrow x+6=t^6$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x+6}(1+\sqrt[3]{x+6})}=\begin{vmatrix}x+6=t^6;\, t=\sqrt[6]{x+6};\\ x=t^6-6;\, dx=6t^5dt\end{vmatrix}=$$

$$=\int\frac{6t^5dt}{t^3(1+t^2)}=6\int\frac{t^2dt}{t^2+1}=6\int\frac{(t^2+1-1)dt}{t^2+1}=6\left(\int dt-\int\frac{dt}{t^2+1}\right)$$

$$=6\left(t-\operatorname{arctgt}\right)+C=6\left(\sqrt[6]{x+6}-\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+6}\right)+C,\ C=\mathrm{const}.$$

Пример 11.5. Найти интегралы методом интегрирования по частям: а) $\int x\sin 2x dx$; б) $\int \ln x dx$; в) $\int x\cdot\arcsin x\cdot dx$.

Решение. $\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx$.

а) $\int x\sin 2x dx=\begin{vmatrix}u=x & dv=\sin 2x dx\\ du=dx & v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{vmatrix}=-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2x dx=$

$=-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$, $C=\mathrm{const}$;

б) $\int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x;\ dv = dx; \\ du = \dfrac{dx}{x};\ v = x \end{array} \right| = x\ln x - \int x\dfrac{dx}{x} = x\ln x - \int dx =$

$= x\ln x - x + C$, $C = \text{const}$;

в) $\int x \cdot \arcsin x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x;\ dv = x dx; \\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}};\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \dfrac{x^2}{2}\arcsin x -$

$$-\int \frac{x^2 dx}{2\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} x = \sin t;\ dx = \cos t dt \\ \sqrt{1-x^2} = \cos t \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\int \sin^2 t dt =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{4}\int (1-\cos 2t)dt = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{4}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right) + C = \frac{x^2}{2}\arcsin x -$$

$$-\frac{t}{4} + \frac{\sin t \cos t}{4} + C = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{\arcsin x}{4} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C,\ C = \text{const}.$$

Пример 11.6. Найти интеграл $\int \dfrac{x+1}{x(x-1)}dx$.

Решение. Используем метод разложения на простейшие дроби. Знаменатель имеет два различных действительных корня, разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей:

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)} = \frac{(A+B)x - A}{x(x-1)}.$$

Приравняем числители и учтем, что коэффициенты при одинаковых степенях x, стоящие слева и справа, должны совпадать: $x + 1 = (A+B)x - A$.

Сравниваем коэффициенты при степенях x, получим систему:

$x^1:\quad A + B = 1;$

$x^0:\quad -A = 1.$

Получаем, что $A = -1$, $B = 2$.

Значит, $\dfrac{x+1}{x(x-1)} = \dfrac{-1}{x} + \dfrac{2}{x-1}$.

Следовательно, получим:

$$\int \frac{x+1}{x(x-1)}dx = \int\left(\frac{-1}{x}+\frac{2}{x-1}\right)dx = \int\frac{-1dx}{x}+\int\frac{2dx}{x-1} = -\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{x-1} =$$

$$= -\ln|x| + 2\ln|x-1| + C = -\ln|x| + \ln|x-1|^2 + C = \ln\frac{(x-1)^2}{|x|} + C,\ C = \text{const}.$$

Пример 11.7. Найти интеграл $\int \frac{x^3}{(x-1)(x+3)}dx.$

Решение. Подынтегральная дробь неправильна, поэтому выделяем целую часть делением «на уголок»:

$$\begin{array}{l|l}
x^3 & x^2 + 2x - 3 \\ \cline{2-2}
x^3 + 2x^2 - 3x & x - 2 \\ \cline{1-1}
\quad -2x^2 + 3x & \\
\quad -2x^2 - 4x + 6 & \\ \cline{1-1}
\qquad 7x - 6 &
\end{array}.$$

Получаем: $\dfrac{x^3}{(x-1)(x+3)} = \dfrac{x^3}{x^2+2x-3} = x-2+\dfrac{7x-6}{(x-1)(x+3)}$.

Правильную дробь представляем в виде

$$\frac{7x-6}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}.$$

Приводим сумму слева к общему знаменателю:

$$\frac{7x-6}{(x-1)(x+3)} = \frac{\overbrace{A}^{x+3}}{x-1} + \frac{\overbrace{B}^{x-1}}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{(A+B)x+(3A-B)}{(x-1)(x+3)}.$$

Равенство числителей: $A(x+3)+B(x-1) = 7x-6$.

Если сравнивать коэффициенты при степенях x, получим систему:

$x^1: \quad A+B=7;$

$x^0: \quad 3A-B=-6; \Rightarrow 4A=1 \Rightarrow A=1/4 \Rightarrow B=7-A=27/4.$

Итак, $\int \frac{x^3}{(x-1)(x+3)}dx = \int\left(x-2+\frac{1}{4(x-1)}+\frac{27}{4(x+3)}\right)dx = \int xdx +$ $+2\int dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{27}{4}\int\frac{dx}{x+3} = \frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{27}{4}\ln|x+3|+C$, $C=\mathrm{const}$.

Пример 11.8. Найти интеграл: а) $\int\frac{dx}{\sin x}$; б) $\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

Решение. Применим универсальную тригонометрическую подстановку:

$$\text{а) } \int\frac{dx}{\sin x} = \left[\begin{array}{l} t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}, \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \end{array}\right] = \int\frac{2\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C,\ C=\mathrm{const};$$

$$\text{б) } \int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x} = \left[\begin{array}{l} t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}, dx=\frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right] = \int\frac{2\frac{dt}{1+t^2}}{8-4\frac{2t}{1+t^2}+7\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$=\int\frac{2dt}{8+8t^2-8t+7-7t^2} = \int\frac{2dt}{t^2-8t+15} = \int\frac{2d(t-4)}{(t-4)^2-1} = \frac{2}{2}\ln\left|\frac{t-4-1}{t-4+1}\right| =$$

$$=\ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right|+C = \ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-5}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+C,\ C=\mathrm{const}.$$

Задания для аудиторной работы

11.1. Найти неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования:

а) $\int\left(3x^3+4x^2-5\right)dx$;

б) $\int\left(4\sin x+2\mathrm{tg}x\right)dx$;

в) $\int\left(e^x+2^x\right)dx$;

г) $\int\frac{2dx}{\sin^2 x}\int(5x+2)^2\,dx$;

д) $\int\left(x^2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$;

е) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)dx$;

ж) $\int\left(\sqrt[3]{x}-2\sqrt[5]{x^2}\right)dx$;

з) $\int\frac{x^3-2x^2+x-1}{x^2}dx$;

и) $\int\frac{2-\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$;

к) $\int\left(\frac{3}{1+x^2}+\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$;

л) $\int\frac{dx}{x^2+16}$;

м) $\int\frac{dx}{x^2-9}$;

н) $\int\frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$;

о) $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)dx$.

11.2. Найти интегралы методом подстановки или подведением под дифференциал:

а) $\int x\sin(x^2-2)dx$;

б) $\int\frac{x^4dx}{1+x^5}$;

в) $\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{3+\sin x}}$;

г) $\int e^{\cos x}\sin xdx$;

д) $\int\frac{x^2dx}{(2x^3-1)^2}$;

е) $\int\frac{\ln^5(x-7)dx}{x-7}$;

ж) $\int\frac{\mathrm{arctg}2x}{1+4x^2}dx$;

з) $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx.$

11.3. Найти неопределенные интегралы методом интегрирования по частям:

а) $\int(x+2)\cdot e^{3x}dx$;

б) $\int(3x+1)\cdot\cos 2xdx$;

в) $\int 2x^3 \ln x dx$;

г) $\int \ln(x+1)dx$;

д) $\int e^{2x} \sin x dx$;

е) $\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx$;

ж) $\int \frac{x}{e^x} dx$.

11.4. Найти неопределенные интегралы от рациональных функций:

а) $\int \frac{xdx}{x+2}$;

б) $\int \frac{dx}{x^2+2}$;

в) $\int \frac{dx}{x^2-2}$;

г) $\int \frac{(x+4)dx}{x+6}$;

д) $\int \frac{2x^3-x^2+3x-4}{x+2}dx$;

е) $\int \frac{4x-3dx}{x^2-6x+8}$;

ж) $\int \frac{2xdx}{x^2-2x+3}$;

з) $\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}dx$;

и) $\int \frac{3x-1}{x(x+2)}dx$;

к) $\int \frac{(x+1)dx}{x^2(x+3)}$;

л) $\int \frac{dx}{x^3-2x^2+x}$.

11.5. Найти неопределенные интегралы от иррациональных функций:

а) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

б) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$;

в) $\int \frac{\sqrt{x+4}dx}{\sqrt{x+4}-\sqrt[3]{x+4}}$;

г) $\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}dx}{\sqrt{2x}}$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+16}}$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-4x+x^2}}$;

ж) $\int \sqrt{x^2-3x+6}dx$;

з) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3x-1}}$.

11.6. Найти неопределенные интегралы от тригонометрических функций:

а) $\int \sin 4x \cos 6x dx$;

б) $\int \cos 2x \cos 7x dx$;

в) $\int \cos^4 2x \cdot \sin 2x dx$;

г) $\int \cos^3 3x \sin^2 3x dx$;

д) $\int \cos^3 4x \sin^3 4x dx$;

е) $\int \frac{\sin\ x dx}{\sqrt[4]{\cos\ x}}$;

ж) $\int \sin^2 3x dx$;

з) $\int \cos^5 x dx$;

и) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$;

к) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$;

л) $\int \frac{dx}{3-2\sin\ x+\cos\ x}$;

м) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Найти неопределенные интегралы:

1. а) $\int \frac{3+\sqrt{x}-2x}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int \sin(2-3x) dx$; в) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}$;

г) $\int (x+1) L^{2x} dx$; д) $\int \frac{2x}{(x-1)(x+3)} dx$.

2. а) $\int \frac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{2x} dx$; б) $\int \cos(3+2x) dx$; в) $\int \frac{\ln^5(x-7)}{x-7} dx$;

г) $\int (x-7)\sin 2x dx$; д) $\int \frac{3x+2}{(x+1)(x-3)} dx$.

3. а) $\int \frac{3\sqrt{x}+4x^2-5}{2x^2} dx$; б) $\int \sin(4-2x) dx$; в) $\int \frac{x^2}{7+3x^3} dx$;

г) $\int (x+2)\cos 3x dx$; д) $\int \frac{2x}{(x-1)(x+3)} dx$.

4. а) $\int \frac{2\sqrt{x}-x^2+3}{\sqrt[3]{x}} dx$; б) $\int \cos(3x-7) dx$; в) $\int \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x}$;

г) $\int (x-4)\ln x dx$; д) $\int \frac{2x+2}{x^2+4x+20} dx$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая функция называется первообразной для функции $f(x)$?
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.
4. Напишите таблицу основных интегралов.
5. Напишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле.
6. Напишите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла.
7. Изложите методы нахождения интегралов вида $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$.
8. Изложите методы нахождения интегралов вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$
9. Изложите методы нахождения интегралов вида $I_{n,m} = \int \sin^n x \cos^m x dx$, где n и m — натуральные числа.
10. Какая тригонометрическая подстановка называется универсальной?
11. Изложите методы нахождения интегралов вида $\int \mathrm{tg}^n x dx$, $\int \mathrm{ctg}^n x dx$ $(n \in N, n > 1)$.
12. Изложите методы нахождения интегралов вида $\int R(x, \sqrt[k]{x}, \sqrt[m]{x}, ...)dx$, где подынтегральная функция рациональна относительно переменной интегрирования x и различных радикалов из x.

12 ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Основные теоретические сведения

Пусть функция $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция. Тогда, если

1) функция $x = \varphi(t)$ строго монотонна на отрезке $[\alpha, \beta]$ и дифференцируема на этом отрезке, $\varphi'(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$;

2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ является отрезок $[a, b]$. ***Теорема Ньютона—Лейбница:*** если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$ на этом отрезке, то определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ равен приращению первообразной $F(x)$ на этом отрезке, т. е. $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$;

3) $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$, то справедлива ***формула замены переменной*** в определенном интеграле

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))d\varphi(t).$$

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$, то справедлива ***формула интегрирования по частям*** в определенном интеграле $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$.

Свойства определённого интеграла:

1) $\int\limits_a^b Cf(x)dx = C\int\limits_a^b f(x)dx, C = \text{const};$

2) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$

3) если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и точка c принадлежит этому отрезку, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$

4) ***теорема об интегрировании неравенств:*** если в любой точке $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$ и функции $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы по отрезку $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx;$

5) ***теоремы об оценке интеграла:*** если на отрезке $[a,b]$ функция удовлетворяет неравенству $m \le f(x) \le M$, то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a);$

6) если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx;$

7) ***теорема о среднем:*** если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует точка $c \in [a,b]$ такая, что $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a);$

8) пусть $f(x)$ — интегрируемая на отрезке $[-a,a]$ функция, тогда: если $f(x)$ — четная функция, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$; если $f(x)$ — нечетная функция, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

Геометрический смысл определённого интеграла: если $f(x) > 0$ на отрезке $[a,b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции *ABCD*, ограниченной снизу отрезком $[a, b]$ оси *Ox*, слева и справа — прямыми $x = a$ и $x = b$, сверху — графиком функции $y = f(x)$ (рис. 12.1).

В декартовой прямоугольной системе координат площадь S плоской фигуры *ABCD*, ограниченной непрерывными кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$, где $f_1(x) \le f_2(x)$ при $a \le x \le b$ (рис. 12.2), вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx .$$

Несобственные интегралы по неограниченному промежутку (несобственные интегралы первого рода): пусть функция $f(x)$ определена на полуоси $[a, +\infty)$ и интегрируема по любому отрезку $[a, b]$, принадлежащему этой полуоси. Предел интеграла $\int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ называется несобственным интегралом функции *f*(*x*) от *a* до $+\infty$ и обозначается $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, т. е. $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$.

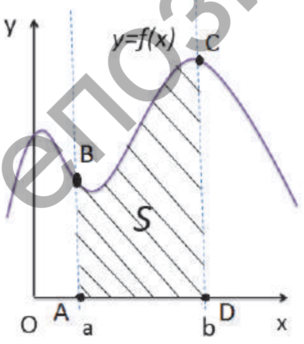

Рисунок 12.1 — Криволинейная трапеция *ABCD*

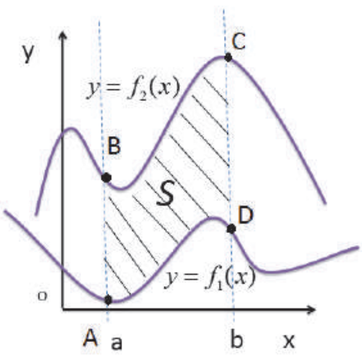

Рисунок 12.2 — Криволинейная трапеция *ABCD*

Если этот предел существует и конечен, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется сходящимся; если предел не существует или бесконечен, интеграл называется расходящимся. Аналогично интегралу с бесконечным верхним пределом интегрирования определяется интеграл в пределах от $-\infty$ до $\boldsymbol{b}$: $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx,$ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx + \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)dx$.

Несобственные интегралы от неограниченной функции (несобственные интегралы второго рода): пусть функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ определена на полуинтервале $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$, интегрируема по любому отрезку $[a+\varepsilon, b]\,(0<\varepsilon<b-a)$ и имеет бесконечный предел при $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}+0 : \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}+0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \infty$. Несобственным интегралом от $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ по отрезку $[a, b]$ называется предел $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$. Если этот предел конечен, говорят, что интеграл сходится; если предел не существует или бесконечен, говорят, что интеграл расходится. Аналогично, если функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ определена на полуинтервале $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$, интегрируема по любому отрезку $[a, b-\varepsilon]\,(0<\varepsilon<b-a)$ и имеет бесконечный предел при $x \to b-0 : \lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$, то несобственным интегралом от $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ по отрезку $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$ называется предел $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$. Пусть функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ определена на отрезке $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$, имеет бесконечный предел при стремлении аргумента к какой-либо внутренней точке $\boldsymbol{c}$ этого отрезка: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$ и интегрируема по любому отрезку, не содержащему точку $\boldsymbol{c}$. Несобственным интегралом от $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ по отрезку $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$ называется $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim\limits_{\eta\to+0}\int\limits_{c+\eta}^{b} f(x)dx$.

Примеры решения практических задач

Пример 12.1. Вычислить определенные интегралы: а) $\int_1^2 (3x^2+2x)dx$; б) $\int_1^2 \sqrt[3]{5-x}dx$.

Решение. Воспользуемся формулой Ньютона—Лейбница:

а) $\int_1^2 (3x^2+2x)dx = \left(x^3+x^2\right)\Big|_1^2 = 8+4-1-1=10;$

б) представим подынтегральную функцию в виде степенной $\sqrt[3]{5-x} = (5-x)^{\frac{1}{3}}$:

$$\int_1^2 \sqrt[3]{5-x}dx = \int_1^2 (5-x)^{\frac{1}{3}}dx = \begin{bmatrix} (5-x)' = -1, \\ d(5-x) = (-1)d(5-x) \end{bmatrix} =$$

$$= \int_1^2 (5-x)^{\frac{1}{3}}(-1)d(5-x) = (-1)\frac{(5-x)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\Bigg|_1^2 = -\frac{(5-x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Bigg|_1^2 =$$

$$= -\frac{3}{4}\left[(5-2)^{\frac{4}{3}} - (5-1)^{\frac{4}{3}}\right] = -\frac{3}{4}\left[3^{\frac{4}{3}} - 4^{\frac{4}{3}}\right] = -\frac{3}{4}\left(3\sqrt[3]{3} - 4\sqrt[3]{4}\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\left(4\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{3}\right).$$

Пример 12.2. Вычислить интеграл $\int_0^2 |1-x|dx$.

Решение. Так как по определению модуля $|1-x| = \begin{cases} 1-x, & x \le 1, \\ x-1, & x > 1, \end{cases}$ то интеграл разобьем на сумму двух интегралов:

$$\int_0^2 |1-x|dx = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 1.$$

Пример 12.3. Вычислить $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Решение. Вводим замену $x = t^2$. Тогда при $x = 0$ имеем $t = 0$, а при $x = 4$ получим $t = 2$:

$$\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x} \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{bmatrix} = \int\limits_0^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int\limits_0^2 \frac{tdt}{1+t} = 2\int\limits_0^2 \frac{\left((1+t)-1\right)dt}{1+t} =$$

$$= 2\int\limits_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = 2\left(t - \ln|1+t|\right)\Big|_0^2 = 2\left((2-\ln 3)-(0-\ln 1)\right) = 4 - 2\ln 3.$$

Пример 12.4. Вычислить интеграл $\int\limits_1^e x \ln x dx$.

Решение. Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int\limits_1^e x \ln x dx = \begin{bmatrix} u = \ln x; & dv = xdx; \\ du = \frac{dx}{x}; & v = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int\limits_1^e xdx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^e = \frac{e^2+1}{4}.$$

Пример 12.5. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{1+x^6}$.

Решение.

$$\int\limits_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{1+x^6} = 2\int\limits_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^6} = \frac{2}{3}\int\limits_0^1 \frac{d\left(x^3\right)}{1+\left(x^3\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{3} \operatorname{arctg}(x) \Big|_0^1 = \frac{2}{3}\left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Пример 12.6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$.

Решение. Построим криволинейную трапецию, ограниченную линиями $y = x^2 + 2$ (парабола), $y = 0$ (ось абсцисс), $x = -2$, $x = 1$ (прямые) (рис. 12.3).

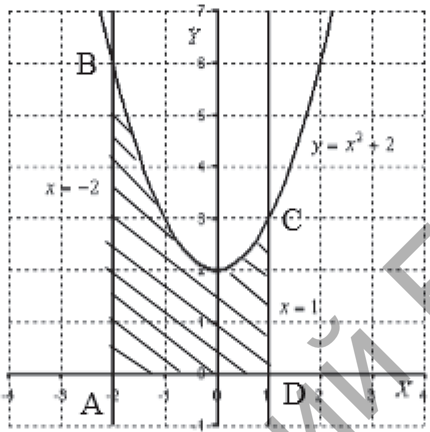

Рисунок 12.3 — Криволинейная трапеция *ABCD*

На отрезке $[-2, 1]$ график функции $y = x^2 + 2$ расположен над осью *Ox*, поэтому $S = \int_{-2}^{1} \left(x^2 + 2\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Big|_{-2}^{1} = \left(\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1\right) -$ $- \left(\frac{(-2)^3}{3} + 2 \cdot (-2)\right) = \frac{1}{3} + 2 + \frac{8}{3} + 4 = 9$ (ед^2).

Пример 12.7. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = -x$.

Решение. Найдем точки пересечения параболы $y = 2x - x^2$ и прямой $y = -x$. Для этого решим уравнение $2x - x^2 = -x \Leftrightarrow$. $\Leftrightarrow 3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(3 - x) = 0$. Получаем: $x_1 = 0, x_2 = 3$. Значит, нижний предел интегрирования $a = 0$, верхний предел интегрирования $b = 3$.

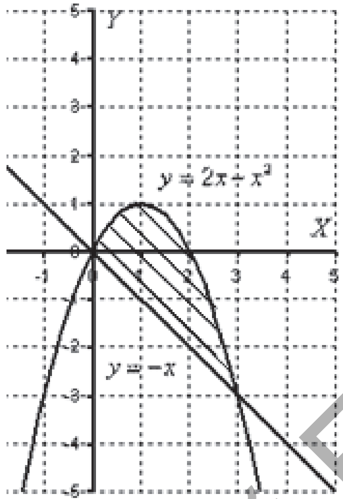

Рисунок 12.4 — Криволинейная трапеция

Фигура ограничена параболой $y = 2x - x^2$ сверху и прямой $y = -x$ снизу (рис. 12.4). На отрезке $[0,3]$ выполняется неравенство $2x - x^2 \geq -x$, тогда

$$S = \int_0^3 \left(2x - x^2 - (-x)\right)dx = \int_0^3 \left(3x - x^2\right)dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \left(\frac{3 \cdot 3^2}{2} - \frac{3^3}{3}\right) - (0 - 0) = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ (ед}^2\text{)}.$$

Пример 12.8. Исследовать на сходимость несобственные интегралы: а) $\int\limits_0^{+\infty} \sin x dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^0 e^{2x} dx$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}$; г) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$; д) $\int\limits_{-1}^0 \frac{\arccos x dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Решение.

а) $\int\limits_0^{+\infty} \sin x dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_0^b \sin x dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \cos x \Big|_0^b = \lim\limits_{b\to+\infty} (\cos b - \cos 0) =$

$= \lim\limits_{b\to+\infty} \cos b - 1$. Так как предел $\lim\limits_{b\to+\infty} \cos b$ не существует, то несобственный интеграл расходится;

б) $\int\limits_{-\infty}^0 e^{2x} dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \left(\int\limits_a^0 e^{2x} dx \right) = \lim\limits_{a\to-\infty} \left(\frac{1}{2} e^{2x} \Big|_a^0 \right) = \frac{1}{2}\left(e^0 - \lim\limits_{a\to-\infty} e^a\right) = \frac{1}{2}$,

значит, несобственный интеграл сходится;

в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+8} = \int\limits_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x+2)^2+4} + \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)^2+4} =$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^0 \frac{dx}{(x+2)^2+4} + \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^b \frac{dx}{(x+2)^2+4} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2} \right) \Bigg|_a^0 + \lim_{b\to-\infty} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2} \right) \Bigg|_0^b =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{a\to-\infty} \left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{a+2}{2} \right) + \frac{1}{2} \lim_{b\to-\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{b+2}{2} - \operatorname{arctg} 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2},$$

следовательно, интеграл сходится;

г) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_\varepsilon^2 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} - \frac{2}{\sqrt{x}} \Bigg|_\varepsilon^2 = \infty$, значит, интеграл расходится;

д) $\int\limits_{-1}^0 \frac{\arccos x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{-1+\varepsilon}^0 \frac{\arccos x dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{-1+\varepsilon}^0 (-\arccos x d(\arccos x)) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} - \frac{\arccos^2 x}{2} \Bigg|_{-1+\varepsilon}^0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{4} - \pi^2 \right) = \frac{3\pi^2}{8},$$

следовательно, интеграл сходится.

Задания для аудиторной работы

12.1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_1^2 \left(x^2-2x+3\right)dx$;

б) $\int_0^8 \left(x+\sqrt[3]{x}\right)dx$;

в) $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^4}+x^2\right)dx$;

г) $\int_{-3}^2 \frac{dx}{2x+3}$;

д) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2-4}$;

е) $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{t}}{t}dt$;

ж) $\int_0^1 (1+t)^3 dt$;

з) $\int_0^1 e^{2x+1}dx$;

и) $\int_0^{2\pi} (\cos x+\sin x)dx$;

к) $\int_{-1}^4 |x-2|dx$.

12.2. Вычислить определенные интегралы методом замены переменной:

а) $\int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}}$;

б) $\int_0^2 \frac{x^2dx}{\left(x^3+1\right)^4}$;

в) $\int_1^{16} \frac{dx}{x+\sqrt[4]{x}}$;

г) $\int_0^{\ln 4} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$;

д) $\int_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 xdx$;

е) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$;

ж) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos xdx}{\sin^5 x}$;

з) $\int_0^1 \left(e^x+4\right)^2 e^x dx$;

и) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

12.3. Используя интегрирование по частям, вычислить определенные интегралы:

а) $\int_0^1 xe^{3x}dx$;

б) $\int_0^{\pi/3} x\cos x dx$;

в) $\int_0^{\pi/6} (2-x)\sin 3x dx$;

г) $\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx$;

д) $\int_1^{\sqrt[3]{e}} x^2 \ln x\, dx$;

е) $\int_0^1 \arcsin x dx$;

ж) $\int_1^{e^2} \ln^2 x dx$;

з) $\int_0^1 x^2 e^x dx$;

и) $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx$;

к) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{6x dx}{\sin^2 x}$.

12.4. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y=x^2+1,\ x=1, x=4,\ y=0$;

б) $y=\frac{1}{3}x+2,\ y=\frac{1}{9}x^2$;

в) $y=-x^3,\ y=-9x$;

г) $y=x^2-6,\ y=-x^2+5x-6$;

д) $y=\ln x,\ x=e$ и осью O_x;

е) $y=2x-x^2,\ y=-x$;

ж) $y=x^2,\ y=\frac{x^2}{2},\ y=2x$;

з) $y=e^x,\ y=e^{-x},\ y=4$.

12.5. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^5}$;

б) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9}$;

в) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x dx}{x}$;

г) $\int_{e^3}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^4 x}$;

д) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$;

е) $\int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

ж) $\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(9-x)^5}}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить определенный интеграл:

1) $\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

2) $\int_1^{e} \frac{\ln^2 xdx}{x}$;

3) $\int_0^{2} \frac{x^3}{\sqrt{x^4+4}}dx$;

4) $\int_{e^2}^{e^4} \frac{dx}{x(\ln x-1)^2}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $xy=8$, $x+y=9$;

2) $y=x^3$, $y=2-x^2$, $x=0$;

3) $y^2=9x$, $y=3x$;

4) $y=3-2x$, $y=x^2$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение определенного интеграла и укажите его геометрический, физический смысл.
2. Перечислите основные свойства определенного интеграла.
3. Напишите формулу замены переменной в определенном интеграле.
4. Напишите формулу интегрирования по частям в определенном интеграле.
5. Напишите формулы для определения площади плоской фигуры с помощью определенного интеграла.
6. Какие интегралы называют несобственными интегралами первого и второго рода? Какой интеграл называется сходящимся, расходящимся?

13 ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Основные теоретические сведения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Если функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным (ОДУ). Общий вид ОДУ: $F(x, y, y', y''..., y^n) = 0$.

Порядок дифференциального уравнения — это наивысший порядок производной или дифференциала, входящих в уравнение.

Общим решением дифференциального уравнения $F(x, y, y', y''..., y^n) = 0$ называется функция $y = \varphi\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right)$, где $C_1, C_2, ..., C_n = \text{const}$, которая при подстановке в уравнение вместе со своими производными обращает его в тождество.

Если общее решение представлено в неявном виде $\varPhi\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right) = 0$, то оно называется ***общим интегралом***.

Решение дифференциального уравнения, которое получается из общего решения, при фиксированных значениях постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, называется ***частным решением*** дифференциального уравнения.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение, связывающее функцию y, ее производную первого порядка y' и независимую переменную x, т. е. соотношение вида $F(x, y, y') = 0$. При этом уравнение может не содержать в явном виде x и y, но обязательно содержит y'.

Если такое соотношение преобразовать к виду $y' = f(x, y)$, то это дифференциальное уравнение первого порядка будет называться уравнением, ***разрешенным относительно производной.***

Преобразуем такое выражение далее: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$; $dy = f(x, y)dx$; $f(x, y)dx - dy = 0$.

Функцию $f(x,y)$ представим в виде $f(x,y)=-\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, $Q(x,y)\neq 0$; тогда при подстановке в полученное выше уравнение имеем: $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ — это так называемая ***дифференциальная форма*** уравнения первого порядка.

Функция $y=\varphi(x,C)$ называется ***общим решением*** уравнения $F(x,y,y')=0$, если она вместе с производной обращает его в тождество, т. е. $F\left[x,\varphi(x),\varphi'(x)\right]=0$.

Решение, заданное неявно, т. е. в виде $\psi(x,y,C)=0$, называется ***общим интегралом*** дифференциального уравнения первого порядка $F(x,y,y')=0$.

Задачей Коши для дифференциального уравнения первого порядка называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида $y=\varphi(x,C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0)=y_0$.

Дифференциальное уравнение $y'=f(x,y)$ называется ***уравнением с разделяющимися переменными***, если его можно представить в виде $y'=\alpha(x)\beta(y)$. Преобразуем это уравнение: $y'-\alpha(x)\beta(y)=0$; $dy-\alpha(x)\beta(y)dx=0$; $\dfrac{dy}{\beta(y)}-\alpha(x)dx=0$ при $\beta(y)\neq 0$. Перейдем к новым обозначениям: $\alpha(x)=-X(x)$; $\dfrac{1}{\beta(y)}=Y(y)$. Получаем уравнение с разделенными переменными: $X(x)dx+Y(y)dy=0$. Интегрируя обе части равенства $X(x)dx+Y(y)dy=0$, получим общее решение дифференциального уравнения: $\int X(x)dx+\int Y(y)dy=C$, $C=\text{const}$.

Функция $f(x,y)$ называется ***однородной n-го измерения*** относительно своих аргументов x и y, если для любого значения параметра t (кроме нуля) выполняется тождество $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$.

Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$ называется **однородным**, если его правая часть $f(x,y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов, т. е. выполняется равенство $f(tx, ty) = f(x, y)$. Так как параметр t произвольный (кроме нуля), предположим, что $t = \dfrac{1}{x}$. Получаем $f(x,y) = f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$. Правая часть полученного равенства зависит фактически только от одного аргумента $u = \dfrac{y}{x}$, т. е. $f(x, y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) = \varphi(u)$. Исходное дифференциальное уравнение, таким образом, можно записать в виде $y' = \varphi(u)$. Далее заменяем $y = ux$, $y' = u'x + ux'$, $u'x + ux' = \varphi(u)$; $u'x + u = \varphi(u)$; $u' = \dfrac{\varphi(u) - u}{x}$. Получили уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции u:

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ также является однородным, если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однородные функции одинакового измерения.

Дифференциальное уравнение первого порядка называется ***линейным***, если его можно представить в виде $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$, где $p(x)$, $q(x)$ — непрерывные функции.

Для решения уравнения $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

1) представим $y(x)$ в виде произведения двух новых неизвестных функций $u(x)$ и $v(x)$: $y(x) = u(x)v(x)$ — ***подстановка Бернулли***, тогда $y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;

2) подставляем в исходное уравнение: $u'v+uv'+p(x)uv=q(x)$, или $u'v+u(v'+p(x)v)=q(x)$ (*);

3) находим функцию $v(x)$ как частное решение уравнения с разделяющимися переменными $v'+p(x)v=0$:

$$\frac{d\nu}{dx}+p(x)\cdot\nu=0\Rightarrow\frac{d\nu}{dx}=-p(x)\cdot\nu\Rightarrow\int\frac{d\nu}{\nu}=-\int p(x)dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln|\nu|=-\int p(x)dx\Rightarrow\nu=e^{-\int p(x)dx};$$

4) подставляем $v(x)$ в уравнение $u'v=q(x)$ (*).

Получаем $e^{-\int p(x)dx}\cdot u'(x)=q(x)\Rightarrow u'(x)=q(x)e^{\int p(x)dx}$

$\Rightarrow u(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C$, $C=\text{const}$;

5) находим общее решение уравнения $y(x)=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$, $C=\text{const}$.

Данный метод решения называется методом Бернулли.

Уравнение вида $y'+p(x)y=q(x)y^m, m\neq 0, m\neq 1$ называется ***уравнением Бернулли.*** Уравнение Бернулли сводится к линейному подстановкой $z=y^{1-m}$.

Уравнением в полных дифференциалах называется уравнение вида $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, где $P(x,y), Q(x,y)$ — непрерывно дифференцируемы в случае, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, т. е. если существует такая функция $u(x,y)$, что $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y), \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$. ***Необходимым и достаточным условием*** существования такой функции является условие $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение вида $F(x, y, y',..., y^n)=0$.

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$: $y^{(n)}=f(x, y, y',..., y^{(n-1)})$.

Уравнение вида $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = 0$, где $p_i \in R$, $i = 1, 2, ..., n$ называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами.*** Уравнение вида $k^n + p_1 k^{n-1} + ... + p_n = 0$ называется ***характеристическим уравнением Эйлера*** для уравнения $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = 0$.

Как уравнение *n-й* степени, характеристическое уравнение $k^n + p_1 k^{n-1} + ... + p_n = 0$ имеет n корней. Каждому корню характеристического уравнения k_i соответствует решение дифференциального уравнения:

1) каждому действительному корню соответствует решение e^{kx};

2) каждому действительному корню кратности m ставится в соответствие m решений: e^{kx}; $xe^{kx};...;x^{m-1}e^{kx}$;

3) каждой паре комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения ставится в соответствие два решения: $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$;

4) каждой паре m кратных комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения ставится в соответствие $2m$ решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x;\ \ xe^{\alpha x}\cos\beta x;...;x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x;$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x;\ \ xe^{\alpha x}\sin\beta x;...;x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Уравнение вида $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x)$, где правая часть уравнения $f(x)$ имеет специальный вид $f(x) = e^{ax}\left(P_r(x)\cos bx + Q_s(x)\sin bx\right)$, $a_1, ..., a_n - \text{const}$, $P_r(x), Q_s(x)$ — многочлены степеней r и s соответственно, называется ***линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью.***

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x)$ имеет вид: $y = y_0 + y^*$, где y_0 — общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения; y^* — частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Частное решение y^*, соответствующее правой части уравнения $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x)$, находится по формуле $y^* = x^p e^{ax}\left(\widetilde{P}_m(x)\cos bx + \widetilde{Q}_m(x)\sin bx\right)$, где $\widetilde{P}_m(x), \widetilde{Q}_m(x)$ — многочлены степени $m = \max(r, s)$; p — кратность корней вида $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения $k^n + p_1 k^{n-1} + ... + p_n = 0$.

Примеры решения практических задач

Пример 13.1. Найти общее решение уравнения

$$x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0.$$

Решение. Имеем уравнение с разделяющимися переменными. Разделив обе части уравнения на произведение $\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}$ (считая, что $1-x^2 \neq 0,\ 1-y^2 \neq 0$), получим уравнение с разделенными переменными: $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = 0$.

Интегрированием обеих частей уравнения находим общее решение: $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = C$; $-\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} = C$ или $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C$.

Пример 13.2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = x(y-1)$.

Решение. $y' = x\cdot(y-1) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = x\cdot(y-1) \Leftrightarrow \frac{dy}{(y-1)} = x\cdot dx \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int\frac{dy}{(y-1)} = \int x\cdot dx \Rightarrow \ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + C.$$

Представим постоянную C как $\ln\left|C_1\right|$:

$$\ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow \ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + \ln|C_1| \Rightarrow |y-1| = e^{\ln|C_1| + \frac{x^2}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y-1| = |C_1|\, e^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow y-1 = C_1 e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Общее решение уравнения имеет вид $y = C_1 e^{\frac{x^2}{2}} + 1$.

Пример 13.3. Найти общее решение дифференциального уравнения $yy' = \dfrac{-2x}{\cos y}$.

Решение. Представим исходное уравнение в виде $y\cos y \cdot \dfrac{dy}{dx} = -2x$, где $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Далее $y\cos y dy = -2xdx$. Интегрируем обе части уравнения: $\int y\cos y dy = -2\int xdx$.

Интеграл, стоящий в левой части, интегрируем по частям:

$$\int y\cos y dy = \left\{\begin{matrix} u = y; & dv = \cos y dy; \\ du = dy; & v = \sin y \end{matrix}\right\} =$$

$$= y\sin y - \int \sin y dy = y\sin y + \cos y;$$

$$y\sin y + \cos y = -x^2 + C;$$

$$y\sin y + \cos y + x^2 + C = 0.$$

Пример 13.4. Найти решение дифференциального уравнения $\dfrac{y}{y'} = \ln y$ при условии $y(2) = 1$.

Решение. Представим дифференциальное уравнение в виде $\dfrac{ydx}{dy} = \ln y$; $dx = \dfrac{\ln y dy}{y}$.

Интегрируем обе части уравнения: $\int dx = \int \frac{\ln y dy}{y}$;

$x + C = \int \ln y d(\ln y)$; $x + C = \frac{\ln^2 y}{2}$.

При $y(2) = 1$ получаем $2 + C = \frac{\ln^2 1}{2}$; $\Rightarrow$ $2 + C = 0$;

$\Rightarrow$ $C = -2$.

Итого: $2(x-2) = \ln^2 y$ или $y = e^{\pm\sqrt{2x-4}}$ — частное решение.

Пример 13.5. Решить уравнение $y' = \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x} + 1\right)$.

Решение. Имеем однородное дифференциальное уравнение первого порядка.

Введем вспомогательную функцию u: $u = \frac{y}{x}$; $y = ux$; $y' = u'x + u$.

Подставляем в исходное уравнение: $u'x + u = u(\ln u + 1)$; $u'x + u = u\ln u + u$; $u'x = u\ln u$.

Разделяем переменные: $\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x}$; $\int\frac{du}{u\ln u} = \int\frac{dx}{x}$.

Интегрируя, получаем $\ln|\ln u| = \ln|x| + C$; $\ln u = Cx$; $u = e^{Cx}$.

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции y, получаем общее решение: $y = xe^{Cx}$.

Пример 13.6. Решить уравнение $y' - \mathrm{tg}\, x \cdot y = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = 1$.

Решение. Имеем линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Делаем замену $y = uv$, $y' = u'v + uv'$ и подставляем в исходное уравнение: $u'v + v'u - \mathrm{tg}x \cdot uv = \frac{1}{\cos x}$,

$$u'v + u\left(v' - \mathrm{tg}x \cdot v\right) = \frac{1}{\cos x},$$

$$v' - v\cdot \text{tg}x = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = v\cdot \text{tg}x \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \text{tg}x dx \cdot$$

Следовательно, $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} \Rightarrow \ln|v| = -\ln|\cos x| \Rightarrow v = \frac{1}{\cos x}$.

Теперь для $u(x)$ получим $\frac{u'}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}, u(x) = x + C$ и общее решение уравнения $y(x) = \frac{x+C}{\cos x}$.

Для нахождения частного решения, соответствующего начальным условиям задачи Коши, подставим в общее решение $x = 0,\ y = 1 : 1 = \frac{0+C}{\cos 0} \Rightarrow C = 1$.

Решение задачи: $y(x) = \frac{x+1}{\cos x}$.

Пример 13.7. Решить уравнение $xy' + y = xy^2 \ln x$.

Решение. Разделим уравнение на xy^2: $\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y} = \ln x$.

Имеем уравнение Бернулли.

Заменяем $z = \frac{1}{y}$; $z' = -\frac{y'}{y^2}$; $-z' + \frac{1}{x}z = \ln x$; $z' - \frac{1}{x}z = -\ln x$.

Решаем полученное линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции z.

Делаем замену $z = uv,\ z' = u'v + uv'$ и подставляем в исходное уравнение:

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}\cdot uv = -\ln x \Leftrightarrow u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) =$$

$$= -\ln x \Rightarrow v' - \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируем: $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = \ln|x| \Rightarrow v = x$.

Теперь для u получим $u'x = -\ln x \Rightarrow u' = -\frac{\ln x}{x} \Rightarrow u =$ $= -\frac{\ln^2 x}{2} + C$ и общее решение уравнения $z = x \cdot \left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C \right)$.

Произведя обратную подстановку, получаем $\frac{1}{y} = x \cdot \left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C \right)$.

Пример 13.8. Найти общее решение уравнения $\left(\frac{\sin 2x}{y} + x \right) dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2} \right) dy = 0$.

Решение. Убедимся, что это уравнение в полных дифференциалах.

Здесь $P(x, y) = \frac{\sin 2x}{y} + x$; $Q(x, y) = y - \frac{\sin^2 x}{y^2}$; $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\sin 2x}{y^2}$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2 \sin x \cos x}{y^2} = -\frac{\sin 2x}{y^2}$, значит, условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ выполняется.

Ищем функцию $u(x, y)$ такую, что $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin 2x}{y} + x$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = y - \frac{\sin^2 x}{y^2}$.

Из первого уравнения

$$u(x, y) = \int \left(\frac{\sin 2x}{y} + x \right) dx + \varphi(y) = -\frac{\cos 2x}{2y} + \frac{x^2}{2} + \varphi(y) .$$

Дифференцируем эту функцию по y и приравниваем выражению, стоящему во втором уравнении системы:

$$\frac{du}{dy} = \frac{\cos 2x}{2y^2} + \varphi'(y) = y - \frac{\sin^2 x}{y^2} .$$

Так как $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, то

$$\frac{1-2\sin^2 x}{2y^2}+\varphi'(y)=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\Rightarrow\varphi'(y)=y-\frac{1}{2y^2}.$$

Значит, $\varphi(y)=\int\left(y-\frac{1}{2y^2}\right)dy=\frac{y^2}{2}+\frac{1}{y}$.

Следовательно, $u(x,y)=-\frac{\cos 2x}{2y}+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{y}$, общее решение уравнения имеет вид: $-\frac{\cos 2x}{2y}+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{y}=C$.

Пример 13.9. Решить уравнение $y'''=\sin 2x$.

Решение. Трижды интегрируем уравнение:

$$y'''=\sin 2x\Rightarrow y''=\int\sin 2x dx=-\frac{1}{2}\cos 2x+C_1\Rightarrow y'=$$

$$=\int\left(-\frac{1}{2}\cos x+C_1\right)dx==-\frac{1}{4}\sin 2x+C_1x+C_2\Rightarrow y=\frac{1}{8}\cos x+$$

$$+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3.$$

Пример 13.10. Решить уравнение $y''-y'-2y=0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $k^2-k-2=0$; $k_1=-1$; $k_2=2$. Имеем два простых действительных корня, тогда общее решение дифференциального уравнения: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$.

Пример 13.11. Решить уравнение $y''-10y'+25y=0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $k^2-10k+25=0$; $k_1=k_2=5$. Имеем кратный корень, тогда общее решение дифференциального уравнения: $y=C_1e^{5x}+C_2xe^{5x}$.

Пример 13.12. Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 5 = 0$; $D = -16$; $k_1 = -1 + 2i; k_2 = -1 - 2i$. Имеем пару комплексно-сопряженных корней, тогда общее решение: $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Пример 13.13. Решить уравнение $y''' - 7y'' + 6y' = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $k^3 - 7k^2 + 6k = 0$; $k(k^2 - 7k + 6) = 0$; $k_1 = 0; k_2 = 1$; $k_3 = 6$. Общее решение: $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{6x}$.

Пример 13.14. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y = xe^{-x}$.

Решение. Находим сначала общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 2y = 0$.

Характеристическое уравнение: $k^2 - 2 = 0$. Его корни: $k_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

Тогда общее решение однородного уравнения: $y_0 = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}$.

Теперь следует найти частное решение y^* неоднородного уравнения. Правая часть $f(x) = xe^{-x}$, значит, y^* ищем в форме $y^* = (Ax + B)e^{-x}$, так как $k = -1$ не является корнем характеристического уравнения.

Требуется найти неизвестные коэффициенты A и B. Для определения A и B дифференцируем дважды y^* $(y^*)' = Ae^{-x} - (Ax + B)e^{-x}$, $(y^*)'' = -2Ae^{-x} + (Ax + B)e^{-x}$ и подставляем в данное неоднородное уравнение:

$$-2Ae^{-x} + (Ax + B)e^{-x} - 2(Ax + B)e^{-x} = xe^{-x};$$

$$-2A - Ax - B = x \Rightarrow -Ax + (-B - 2A) = x.$$

Значения A и B найдем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях:

при x: $-A=1 \Rightarrow A=-1$;

при x^0: $-2A-B=0 \Rightarrow B=-2A=2$.

Подставляем найденные A и B в $\overline{y}$: $y^*=(x+2)\,e^{-x}=-(x-2)\,e^{-x}$.

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y=y_0+y^*=c_1e^{x\sqrt{2}}+c_2e^{-x\sqrt{2}}-(x-2)\,e^{-x}.$$

Пример 13.15. Решить уравнение $y''-2y'+y=3e^x$.

Решение. Составим характеристическое уравнение для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения: $k^2-2k+1-0$; $k_1=k_2=1$.

Имеем кратный корень, тогда общее решение однородного уравнения: $y_0=C_1e^x+C_2xe^x$.

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения в виде $y^*=Cx^2e^x$.

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов:

$$\left(y^*\right)'=2Cxe^x+Cx^2e^x;$$

$$\left(y^*\right)''=2Ce^x+2Cxe^x+2Cxe^x+Cx^2e^x.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем

$$2Ce^x+4Cxe^x+Cx^2e^x-4Cxe^x-2Cx^2e^x+Cx^2e^x=3e^x.$$

$$2C=3; \qquad C=\frac{3}{2}.$$

Частное решение имеет вид: $y^*=\dfrac{3}{2}x^2e^x$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения: $y=C_1e^x+C_2xe^x+\dfrac{3}{2}x^2e^x$.

Пример 13.16. Решить уравнение $y'' + y = x - \sin 2x.$

Решение. Правую часть дифференциального уравнения представим в виде суммы двух функций: $f_1(x) + f_2(x) = x + (-\sin x).$ Составим и решим характеристическое уравнение: $k^2 + 1 = 0;$ $k_{1,2} = \pm\, i.$ Имеем пару комплексно-сопряженных корней, тогда общее решение однородного дифференциального уравнения: $y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$

Для функции $f_1(x)$ решение ищем в виде $y_1^* = Ax + B$.

Найдем производные:

$\left(y_1^*\right)' = A,\ \left(y_1^*\right)'' = 0$, тогда $Ax + B = x \Rightarrow A = 1,\ \ B = 0$.

Отсюда $y_1^* = x.$

Для функции $f_2(x)$ решение ищем в виде $y_2^* = C\cos 2x + D\sin 2x$.

Тогда $\left(y_2^*\right)' = -2C\sin 2x + 2D\cos 2x$,

$\left(y_2^*\right)'' = -4C\cos 2x - 4D\sin 2x$. Отсюда

$-4C\cos 2x - 4D\sin 2x + C\cos 2x + D\sin 2x = -\sin 2x$;

$-3C\cos 2x - 3D\sin 2x = -\sin 2x \ \Rightarrow\ A = 0; \quad B = \dfrac{1}{3}.$

Значит, $y_2^* = \dfrac{1}{3}\sin 2x.$

Искомое частное решение имеет вид: $y^* = y_1^* + y_2^* = \dfrac{1}{3}\sin 2x + x.$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения: $y = y_0 + y^* = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \dfrac{1}{3}\sin 2x + x$.

Задания для аудиторной работы

13.1. Является ли функция *y(x, C),* где *C* — произвольная постоянная, решением (интегралом) данного дифференциального уравнения:

а) $y = Ce^{x} - e^{-x}, xy'' + 2y' - xy = 0$;

б) $y = Cxe^{2x}, y'' - 4y' + 4y = 0$.

13.2. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

а) $(2+x)dx - ydy = 0$;

б) $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$;

в) $(3+2y)dx - 4xdy = 0$;

г) $x^2dy + (1-y)dx = 0$;

д) $2(xy+y)dx = xdy$;

е) $(xy^2 + x)dx = (y - x^2y)dy$;

ж) $\cos x \sin ydy = \cos y \sin xdx$;

з) $\dfrac{dy}{x-1} = \dfrac{dx}{y-2}$;

и) $xy' - y = y^3$;

к) $xy' = y^2 + 1$;

л) $(1+e^x)y' = ye^x$;

м) $e^{y^2 - x^2} = yy'/x$;

н) $y' = x + y$;

о) $y' = 3x - 2y + 4$;

п) $y' = 3 + 6xy + 9x^2 + y^2$.

13.3. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

а) $xdy = ydx$; $y(2) = 6$;

б) $(x+xy)dy + (y-xy)dx = 0, y(1) = 1$.

13.4. Найти общее решение (общий интеграл) однородного дифференциального уравнения:

а) $y' = x/y + y/x$;

б) $(y' - y/x)\cos\dfrac{y}{x} = \sin\dfrac{y}{x}$;

в) $2x^2y' = x^2 + y^2$;

г) $x^2y' = y(x+y)$;

д) $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$;

е) $(x+2y)dx - xdy = 0$;

ж) $(x-y)ydx - x^2dy = 0$;

з) $(x^2 - 2xy)dy - (xy - y^2)dx = 0$.

13.5. Найти частное решение однородного дифференциального уравнения:

а) $ydx + (\sqrt{xy} - x)dy = 0, y(1) = 1$;

б) $xy' = y(1 + \ln y - \ln x), y(1) = e^2$.

13.6. Решить линейные дифференциальные уравнения:

а) $y' + y\operatorname{tg}x = 1/\cos x$;

б) $x(y' - y) = e^x$;

в) $xy' + y = \sin x$;

г) $xy' + y + xe^{-x^2} = 0$;

д) $(xy' - 1) \cdot \ln x = 2y$;

е) $y' - 2xy = e^{x^2} \cdot \sin 2x$.

13.7. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения:

а) $y' - y/x = x^2, \quad y(1) = 0$;

б) $y' + 2xy = xe^{-x^2}, y(0) = 0$;

в) $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = 3/2$;

г) $\left(x^2 - 1\right)y' - xy = x^3 - x, \quad y\left(\sqrt{2}\right) = 1$.

13.8. Решить уравнения Бернулли:

а) $y' + 2e^x y = 2e^x \sqrt{y}$;

б) $xy' + y = xy^2 \ln x$;

в) $(1 - x^2)y' + xy = 1$;

г) $y' + \dfrac{2}{x}y = x^2 y^2$;

д) $y' + 2y = y^2 e^x$.

13.9. Решить дифференциальные уравнения в полных дифференциалах:

а) $(2x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0$;

б) $(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0$;

в) $\left(\dfrac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0$;

г) $y' = \dfrac{y - 3x^2}{4y - x}$.

13.10. Решить дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка:

а) $y^{IV} = \dfrac{8}{(x-3)^5}$; б) $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$; в) $y'' + \dfrac{y'}{x} = x$;

г) $y^3 y' y'' + 1 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$.

13.11. Решить линейные однородные дифференциальные уравнения:

а) $y'' - 5y' + 6y = 0$;

б) $y'' + 2y' + y = 0$;

в) $y'' - y' - 2y = 0$;

г) $y'' - 4y' + 8y = 0$;

д) $y^{IV} + 4y'' = 0$.

13.12. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям: $y'' + 9y = 0$, $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$, $y(x_0) = -1$, $y'(x_0) = 9$.

13.13. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения:

а) $y'' + 2y' = x^2 + 2x + 1$;

б) $y'' + 10y' + 25y = 40 + 52x - 240x^2 - 200x^3$;

в) $y'' + 9y = 9x^4 + 12x^2 - 27$;

г) $y'' + 5y' = 20e^{5x}$;

д) $y'' - 9y' = 2e^{3x}$;

е) $y'' + 2y' + y = (18x + 8)e^{-x}$;

ж) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$;

з) $y'' + 4y = \cos 2x$;

и) $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$;

к) $y'' + 3y' = e^{x} \sin 3x$;

л) $y'' + y = x - \sin 2x$;

м) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + \sin 2x$.

13.14. Скорость изменения пороговой силы тока выражается формулой $\dfrac{dI}{dt} = -\dfrac{1{,}12}{t^2}$. Установить закон изменения силы тока, если в момент времени $t = 0{,}4$ с соответствующее значение тока равно 3,2 мА.

13.15. Скорость укорочения мышцы описывается при помощи уравнения $\dfrac{dx}{dt} = B(x_0 - x)$, где x — укорочение мышцы в момент времени t, B — постоянная, зависящая от нагрузки, x_0 — полное сокращение мышцы. Установить закон сокращения мышцы, если в момент времени $t = 0$ величина укорочения мышцы равна нулю.

Задания для самостоятельной работы

1. Решить дифференциальные уравнения первого порядка:

1. а) $xdy + (y^2+1)dx = 0$; б) $xyy' = 1 - x^2$; в) $y' = \dfrac{x^3}{y^3} + \dfrac{y}{x}$.

2. а) $(x+2)dy - (y+1)dx = 0$; б) $e^{x+3y}y' = x$; в) $y' = -\dfrac{x+y}{x}$.

3. а) $(x^2+1)dy + x(y+1)dx = 0$; б) $y'\operatorname{tg}x = y$; в) $y' = \dfrac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}}$.

4. а) $(x^2+1)ydy + (y^2+1)dx = 0$; б) $(1+e^x)yy' = e^x$; в) $y' = \dfrac{y}{x} - \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$.

2. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения при заданном условии:

1) $x(y' - y) = e^x$, $y(1) = 0$;

2) $(1-x)(y' + y) = e^{-x}$, $y(0) = 0$;

3) $(1-x^2)y' + xy = 1$, $y(0) = 1$;

4) $y' + 2xy = x \cdot e^{-x^2}$, $y(0) = 0$.

3. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 6y' + 10y = 0$;

2) $y'' - 12y' + 36y = 0$;

3) $y'' + 8y' + 25y = 0$;

4) $y'' + 81y' = 0$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением?

2. Сформулируйте определение дифференциального уравнения первого порядка, его общего и частного решения (интеграла).

3. Сформулируйте задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка и укажите ее геометрический смысл.

4. Сформулируйте определение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными. Изложите метод нахождения его общего и частного решения.

5. Сформулируйте определение однородного дифференциального уравнения первого порядка. Изложите метод нахождения его общего и частного решения.

6. Сформулируйте определение линейного дифференциального уравнения первого порядка. Изложите метод подстановки для нахождения его общего решения.

7. Что называется дифференциальным уравнением второго порядка?

8. Какое уравнение называют линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами?

9. Опишите способ решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Какое уравнение называют характеристическим?

10. Какой вид имеет общее решение линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами при действительных и различных корнях характеристического уравнения?

11. Разъясните правило отыскания частного решения линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами с правой частью вида $f(x)=P(x)e^{mx}$.

12. Разъясните правило отыскания частного решения линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами с правой частью вида $f(x)=a\cos nx+b\sin nx$.

13. Разъясните правило отыскания частного решения линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами с правой частью вида $f(x)=e^{mx}[P_1(x)\cos nx+P_2(x)\sin nx]$.

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

9.3. а) $z'_x = 3x^2y - y^3, z'_y = x^3 - 3y^2x$; з) $z'_x = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3y}}, z'_y = \dfrac{3}{2\sqrt{x+3y}}$;

9.4. а) $dz = (y^3 - 6xy^2)dx + (3xy^2 - 6x^2y - 8y^3)dy$;

9.6. а) $z''_{x^2} = 6x - 8y,\ z''_{y^2} = 10,\ z''_{xy} = -8x$;

9.13. в) $y' = -\dfrac{3x^2y - 1}{x^3 + \dfrac{1}{y}}$.

10.1. г) (0, 0) — точка минимума, $\left(-\dfrac{5}{3}; 0\right)$ — точка максимума.

11.1. а) $\dfrac{3x^4}{4} + \dfrac{4x^3}{3} - 5x + C$; и) $2\mathrm{tg}x - \sin x + C$; к) $3\mathrm{arctg}x + 2\arcsin x + C$;

11.2. а) $\dfrac{1}{2}\cos(x^2 - 2) + C$; б) $\dfrac{1}{5}\ln(1 + x^5) + C$; в) $2\sqrt{3 + \sin x} + C$;
д) $\dfrac{1}{6(1 - 2x^3)} + C$;

11.3. а) $\dfrac{1}{2}(x-1)e^{2x} - \dfrac{1}{4}x^2 + C$; г) $x\ln(x+1) + \ln(x+1) - x + C$;
е) $\dfrac{x^2}{2} \cdot \mathrm{arctg}x + \dfrac{1}{2}\left(x - \mathrm{arctg}x\right) + C$;

11.4. д) $\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + C$; м); $\dfrac{3}{2}\ln\left|x^2 - 4x + 8\right| + \dfrac{5}{2}\mathrm{arctg}\dfrac{x-2}{2} + C$;

11.5. б) $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x} - 3x + C$; г) $3\left(\dfrac{\sqrt{2x}}{3} - \dfrac{\sqrt[6]{32x^5}}{5}\right) + C$; з) $-\arcsin\dfrac{2-3x}{\sqrt{13}x} + C$;

11.6. з) $\sin x - \dfrac{2}{3}\sin^3 + \dfrac{1}{5}\sin^5 x + C$

12.1. д) 20/3; 13.2. д) $\ln 3$;

12.4. а) 24 ед^2; б) 13, 5 ед^2; з) $8\ln 4 - 6$ ед^2;

12.5. а) 1/5.

13.2. б) $(1 + y)(1 - x) = C$; е) $(x^2 - 1)(y^2 + 1) = C$;

13.4. д) $3xy^2 + x^3 = C$; ж) $e^{xy} = Cx$; з) $y^2 = Cxe^{-x/y}$;

13.6. в) $y = \dfrac{1}{x}(C - \cos x)$;

13.7. г) $y=x^2-1$; 13.10. в) $y=\frac{x^4}{12}+C_1\ln|x|+C_2$;

13.11. а) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$; в) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$,

13.12. $y=\cos 3x-3\sin 3x$;

13.13. б) $y=e^{-5x}(C_1+C_2x)-8x^3+4x$; в) $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+x^4-3$; г) $y=C_1+C_2e^{-5x}+\frac{2}{5}e^{5x}$, ж) $y=\left(3x^3+2x^2+C_2x+C_1\right)e^{-x}$, C_1, C_2 = const.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Берман, Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. — М. : Наука, 1985.
2. *Бермант, А. Ф.* Краткий курс математического анализа для втузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. — СПб. : Лань, 2006.
3. *Бугров, Я. С.* Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — М. : Наука, 1984.
4. *Бугров, Я. С.* Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — М. : Наука, 1985.
5. *Гусак, А. А.* Высшая математика : в 2 т. / А. А. Гусак. — Минск : ТетраСистемс, 2003.
6. *Гусак, А. А.* Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. — Минск : ТетраСистемс, 2004.
7. *Кудрявцев, В. А.* Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. — М. : АСТ, 2004.
8. *Ларин, А. А.* Курс высшей математики : в ? ч. [Электронный ресурс] / А. А. Ларин. — Ч. 1—2. — Режим доступа: http://alexlarin.net/lect1.pdf . — Дата доступа: 01.04.2017.
9. *Минорский, В. П.* Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. — М. : Физматлит, 2001.
10. *Пискунов, Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов : в 2 т. / Н. С. Пискунов. — М. : Интеграл-Пресс, 2005.
11. *Письменный, Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике : полный курс / Д. Т. Письменный. — 7-е изд. — М. : Айрис-пресс, 2008. — 608 с.
12. *Рябушко, А. П.* Индивидуальные задания по высшей математике : учеб. пособие : в ? ч. / А. П. Рябушко, В. В. Державец, И. Е. Юруть ; под общ. ред. А. П. Рябушко. — Минск : Выш. шк., 2011. — Ч. 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — 396 с. : ил.
13. *Унсович, А. Н.* Высшая математика : учеб.-метод. комплекс для студентов экон. и инженер.-экон. специальностей : в 2 ч. / А. Н. Унсович. — Барановичи : БарГУ. — 2006. — Ч. 1. — 368 с.
14. *Унсович, А. Н.* Высшая математика : учеб.-метод. комплекс для студентов экон. и инженер.-экон. специальностей : в 2 ч. / А. Н. Унсович. — Барановичи : БарГУ. — 2006. — Ч. 2. — 192 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

0+

Учебное издание

МАТЕМАТИКА

Практикум
для студентов инженерных специальностей

В 2 частях
Часть 2

Составители:
Е. Н. Кирюхова, Ю. В. Сергеева

Ответственный за выпуск С. А. Березнюк
Технический редактор А. Ю. Сидоренко
Компьютерная вёрстка С. М. Глушак
Корректор Н. Н. Колодко

Подписано в печать 30.03.2018. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 4,40. Уч.-изд. л. 2,50. Тираж 70 экз. Заказ 140.

Учреждение образования «Барановичский государственный университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/424 от 09.09.2016.
Ул. Войкова, 21, 225404, г. Барановичи. Тел. 8 (0163) 45 46 28, e-mail: rio@barsu.by .