УДК 517.547.7

И. Н. Бруй
Учреждение образования «Барановичский государственный университет», Барановичи, Республика Беларусь

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ СРЕДНИМИ ЗИГМУНДА ИХ РЯДОВ ПО МНОГОЧЛЕНАМ ФАБЕРА

Введение. В обозначениях мы следуем двухтомнику Р. Эдвардса [1; 2]. Средние Зигмунда натурального порядка $r = 1, 2, 3, \ldots$ комплексного тригонометрического ряда Фурье функции $f(x) \in \mathbf{L}^1(T)$ [3, (12)] определяются следующим образом:

$$\forall N \in Z_+ \quad Z_N^r f(x) := \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \left|\frac{n}{N+1}\right|^r\right) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt\right] \cdot e^{inx} . \qquad (1)$$

Когда порядок $r = 1$, то средние Зигмунда (1) называются средними Фейера и обозначаются $\sigma_N f(x)$.

В банаховом пространстве $\mathbf{C}(T)$ суммируемость со скоростью (summabilty with speed)

$$\max_{-\pi \le x \le +\pi} \left| f(x) - Z_N^r f(x) \right| = O\left(\frac{1}{N^r}\right), \; N \to +\infty ,$$

функции $f(x)$ средними Зигмунда (1) влечёт [3, с. 170, теорема 2] при чётном натуральном порядке $r = 2k$, где $k \in Z_1 := \{1, 2, 3, \ldots\}$, для функции $f(x)$ абсолютную непрерывную дифференцируемость $2k-1$ раз и существенную ограниченность производной $2k$ -ого порядка $f^{(2k)}(x)$: $f^{(2k-1)}(x) \in \mathbf{AC}(T)$ & $f^{(2k)}(x) \in \mathbf{L}^\infty(T)$, а при нечётном натуральном порядке $r = 2k+1$, где $k \in Z_+$, для функции $f^{\sim}(x)$, сопряжённой к функции $f(x)$ [3], абсолютную непрерывную дифференцируемость $2k$ раз и существенную ограниченность производной $(2k+1)$ -ого порядка $\left(f^{\sim}\right)^{(2k+1)}(x)$: $\left(f^{\sim}\right)^{(2k)}(x) \in \mathbf{AC}(T)$ & $\left(f^{\sim}\right)^{(2k+1)}(x) \in \mathbf{L}^\infty(T)$.

Настоящая работа посвящена получению аналогов результата М. Заманского [3, с. 170, теорема 2] для рядов по многочленам Фабера [4, с. 350, (5); 5, с. 53, (5); 6, с. 53, (6.5)].

Приближение функций на замкнутых жордановых областях с кратно-гладкой границей Келлога—Варшавского [7, с. 49, теорема 3.6]. Спрямляемая жорданова кривая $\Gamma_{\text{Rectifiable}}$ называется гладкой (smooth Jordan curve), если 1) её натуральная параметризация $z = z(s)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $\left[0, \left|\Gamma_{\text{Rectifiable}}\right|\right]$, где $\left|\Gamma_{\text{Rectifiable}}\right|$ есть длина кривой $\Gamma_{\text{Rectifiable}}$, 2) всюду на этом отрезке производная $z'(s)$ отлична от нуля и 3) $z'(0+0) = z'\left(\left|\Gamma_{\text{Rectifiable}}\right| - 0\right)$. Как обычно, на концах отрезка $\left[0, \left|\Gamma_{\text{Rectifiable}}\right|\right]$ производная и непрерывность понимаются в одностороннем смысле: в точке 0 — справа, а в точке $\left|\Gamma_{\text{Rectifiable}}\right|$ — слева.

Требования 1) и 2) выражают непрерывность вращения касательной к кривой при движении точки касания по открытой дуге $z\left[\left(0, \left|\Gamma_{\text{Rectifiable}}\right|\right)\right]$, а требования 1), 2) и 3) — непрерывность изменения направления касательной к кривой и при переходе точки касания через точку, соответствующую значениям $s = 0$ и $s = \left|\Gamma_{\text{Rectifiable}}\right|$ натурального параметра.

Обозначим через $\mathbf{A}\left(\Gamma_{\text{Rectifiable}} \cup \operatorname{Int}\Gamma_{\text{Rectifiable}}\right)$ множество всех непрерывных на замкнутой жордановой области $\Gamma_{\text{Rectifiable}} \cup \operatorname{Int}\Gamma_{\text{Rectifiable}}$ и аналитических в жордановой области $\operatorname{Int}\Gamma_{\text{Rectifiable}}$ функций $f(z)$ с равномерной нормой $\left\|f(z)\right\|_{\mathbf{A}(\Gamma_{\text{Rectifiable}} \cup \operatorname{Int}\Gamma_{\text{Rectifiable}})} := \max_{z \in \Gamma_{\text{Rectifiable}} \cup \operatorname{Int}\Gamma_{\text{Rectifiable}}} \left|f(z)\right| = \max_{z \in \Gamma_{\text{Rectifiable}}} \left|f(z)\right|$. Последнее равенство записано на основании принципа максимума модуля аналитической функции. Для того чтобы непрерывная на спрямляемой жордановой кривой $\Gamma_{\text{Rectifiable}}$ функция $f(z)$ была аналитически продолжима с $\Gamma_{\text{Rectifiable}}$ в жорданову область $\operatorname{Int}\Gamma_{\text{Rectifiable}}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось счётное множество следующих условий: $\forall n \in Z_+ \; \oint_{\Gamma_{\text{Rectifiable}}} z^n \, f(z)\, dz = 0$.

Функция Н. Е. Жуковского

$$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \tag{2}$$

конформно и однолистно отображает как внутренность, так и внешность единичной окружности $|z|=1$ в комплексной z-плоскости на внешность отрезка $[-1, 1]$ в комплексной w-плоскости. Обратными к функции Н. Е. Жуковского (2) являются две функции: $z=\Psi(C\setminus[-1, 1], w):=w+\sqrt{w^2-1}$, $\Psi(C\setminus[-1, 1], \infty)=\infty$, и $z=\psi(C\setminus[-1, 1], w):=w-\sqrt{w^2-1}$, $\psi(C\setminus[-1, 1], \infty)=0$. В обоих случаях выбрана та ветвь двузначной функции корня квадратного, для которой $\sqrt{1}=1$.

Для функции $f(z)\in\mathbf{A}\left(\Gamma_{\text{Rectifiable}}\bigcup\operatorname{Int}\Gamma_{\text{Rectifiable}}\right)$ средние Зигмунда натурального порядка $r=1, 2, 3, \ldots$ её ряда по многочленам Фабера для замкнутой жордановой области $\Gamma_{\text{Rectifiable}}\bigcup\operatorname{Int}\Gamma_{\text{Rectifiable}}$ определяются следующим образом:

$$\forall N\in Z_+\ \ Z_N^r f(z):=\sum_{n=0}^{N}\left[1-\left(\frac{n}{N+1}\right)^r\right]\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left[\Psi\left(e^{it}\right)\right]e^{-int}\,dt\right\}\cdot F_n\left(\Gamma_{\text{Rectifiable}}\bigcup\operatorname{Int}\Gamma_{\text{Rectifiable}}, z\right). \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть r есть фиксированное натуральное число: $r=1, 2, 3, \ldots$. И пусть натуральная параметризация $z=z(s)$ гладкой жордановой кривой $\Gamma_{r,\beta}$ абсолютно непрерывно дифференцируема $r-1$ раз и её производная r-ого порядка $z^{(r)}(s)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $0<\beta<1$ и коэффициентом $0<A_1<+\infty$: $\forall s_1\in\left[0,\left|\Gamma_{r,\beta}\right|\right]$ $\forall s_2\in\left[0,\left|\Gamma_{r,\beta}\right|\right]$ $\left|z^{(r)}(s_1)-z^{(r)}(s_2)\right|\le A_1\cdot\left|s_1-s_2\right|^{\beta}$. Тогда в банаховом пространстве $\mathbf{A}\left(\Gamma_{r,\beta}\bigcup\operatorname{Int}\Gamma_{r,\beta}\right)$ суммируемость со скоростью*

$$\max_{z\in\Gamma_{r,\beta}}\left|f(z)-Z_N^r f(z)\right|=O\left(\frac{1}{N^r}\right),\ \ N\to+\infty, \tag{4}$$

функции $f(z)$ средними Зигмунда (3) влечёт ограниченность производной r-ого порядка $f^{(r)}(z)$ в жордановой области $\operatorname{Int}\Gamma_{r,\beta}$: $f^{(r)}(z)\in\mathbf{H}^{\infty}\left(\operatorname{Int}\Gamma_{r,\beta}\right)$.

Ясно, что в (4) многочлены Фабера $F_n\left(\Gamma_{r,\beta}\bigcup\operatorname{Int}\Gamma_{r,\beta}, z\right)$.

Приближение функций на замкнутых жордановых областях с гладкой границей С. Я. Альпера. Если $\forall\delta\in\left(0,\left|\Gamma_{\text{Rectifiable}}\right|\right]$ через

$$\omega\left[z'(s),\delta\right]:=\sup\left\{\left|z'(s_1)-z'(s_2)\right|\ :\ \forall s_1\in\left[0,\left|\Gamma_{\text{Rectifiable}}\right|\right]\ \forall s_2\in\left[0,\left|\Gamma_{\text{Rectifiable}}\right|\right]\ \left|s_1-s_2\right|\le\delta\right\}$$

обозначить модуль непрерывности производной функции $z'(s)$, то по определению $\Gamma_{\text{Al'per}}$ есть такая гладкая жорданова кривая, которая удовлетворяет условию С. Я. Альпера

$$\int_0^{\min\left\{1,\left|\Gamma_{\text{Al'per}}\right|\right\}}\frac{\omega\left[z'(s),\delta\right]}{\delta}\ln\frac{1}{\delta}\,d\delta<+\infty. \tag{5}$$

Условию (5) удовлетворяют единичная окружность $|z|=1$ и её обобщение — эллипс $\left(\frac{\operatorname{Re}z}{a}\right)^2+\left(\frac{\operatorname{Im}z}{b}\right)^2=1$ с полуосями $a>0$ и $b>0$, аналитические жордановы кривые (analytical Jordan curve), кратно-гладкие жордановы кривые Келлога — Варшавского [7, с. 49, теорема 3.6].

Очевидно, что $\Gamma_{r,\beta}\subset\Gamma_{r-1,\beta}\subset\ldots\subset\Gamma_{2,\beta}\subset\Gamma_{1,\beta}\subset\Gamma_{\text{Al'per}}$.

Пусть r есть фиксированное натуральное число: $r = 1, 2, 3, \ldots$. Если функция $f(x) \in \mathbf{C}(T)$ абсолютно непрерывно дифференцируема $r-1$ раз на вещественной прямой R и её производная r-ого порядка $f^{(r)}(x) \in \mathbf{L}^1(T)$, то нулевые комплексные коэффициенты Фурье

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f''(t)\,dt = \ldots = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^{(r)}(t)\,dt = 0$$

и комплексный тригонометрический ряд Фурье этой функции

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt + \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\right)\frac{1}{(i\,n)^r}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,e^{-i\,n\,t}\,dt\right]\cdot e^{i\,n\,x}. \quad (6)$$

А. К. Покало предложил [8] автору исследовать приближение тех функций $f(z) \in \mathbf{A}(\Gamma_{\text{Rectifiable}} \bigcup \operatorname{Int}\Gamma_{\text{Rectifiable}})$, ряды по многочленам Фабера которых имеют структуру, схожую с рядом (6).

Определение 1 [9, с. 46]. *Пусть r есть фиксированное натуральное число: $r = 1, 2, 3, \ldots$. И пусть $\Gamma_{\text{Rectifiable}}$ есть спрямляемая жорданова кривая. Функцию $F^r f(z) \in \mathbf{E}^1(\operatorname{Int}\Gamma_{\text{Rectifiable}})$ назовём производной Фабера r-ого порядка функции $f(z) \in \mathbf{A}(\Gamma_{\text{Rectifiable}} \bigcup \operatorname{Int}\Gamma_{\text{Rectifiable}})$, если, во-первых, нулевой коэффициент Фабера функции $F^r f(z)$ равен нулю: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F^r f\left[\Psi\left(e^{i\,t}\right)\right]dt = 0$, и, во-вторых, для всех натуральных номеров $n = 1, 2, 3, \ldots$ коэффициенты Фабера функций $f(z)$ и $F^r f(z)$ связаны соотношением*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left[\Psi\left(e^{i\,t}\right)\right]e^{-i\,n\,t}\,dt = \frac{1}{(i\,n)^r}\cdot\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F^r f\left[\Psi\left(e^{i\,t}\right)\right]e^{-i\,n\,t}\,dt\right].$$

Следовательно, ряд по многочленам Фабера такой функции $f(z)$ имеет вид

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left[\Psi\left(e^{i\,t}\right)\right]dt + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(i\,n)^r}\cdot\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F^r f\left[\Psi\left(e^{i\,t}\right)\right]e^{-i\,n\,t}\,dt\right\}\cdot F_n\left(\Gamma_{\text{Rectifiable}} \bigcup \operatorname{Int}\Gamma_{\text{Rectifiable}}, z\right), \quad (7)$$

т. е. ряд (7) имеет структуру, подобную ряду (6).

В пространстве $\mathbf{A}(|z| \le 1)$ производные Фабера явно выражаются через обычные производные, и наоборот [10, с. 164].

Теорема 2. *Пусть r есть фиксированное натуральное число: $r = 1, 2, 3, \ldots$. И пусть $\Gamma_{\text{Al'per}}$ есть гладкая жорданова кривая, которая удовлетворяет условию С. Я. Альпера (5). Тогда в банаховом пространстве $\mathbf{A}(\Gamma_{\text{Al'per}} \bigcup \operatorname{Int}\Gamma_{\text{Al'per}})$ суммируемость со скоростью*

$$\max_{z\in\Gamma_{\text{Al'per}}}\left|f(z) - Z_N^r f(z)\right| = O\left(\frac{1}{N^r}\right),\ N \to +\infty, \quad (8)$$

функции $f(z)$ средними Зигмунда (3) влечёт ограниченность производной Фабера r-ого порядка $F^r f(z)$ в жордановой области $\operatorname{Int}\Gamma_{\text{Al'per}}$: $F^r f(z) \in \mathbf{H}^\infty(\operatorname{Int}\Gamma_{\text{Al'per}})$.

В (8) многочлены Фабера $F_n(\Gamma_{\text{Al'per}} \bigcup \operatorname{Int}\Gamma_{\text{Al'per}}, z)$.

Когда порядок $r = 1$, т. е. $Z_N^1 f(z) = \sigma_N f(z)$, то [11, с. 12, теорема 6] $f'(z) \in \mathbf{H}^\infty(\operatorname{Int}\Gamma_{\text{Al'per}}) \Leftrightarrow F^1 f(z) \in \mathbf{H}^\infty(\operatorname{Int}\Gamma_{\text{Al'per}})$.

Заключение. Модельными в теории рядов по многочленам Фабера являются следующие два случая: 1) ряды Тейлора функций $f(z) \in \mathbf{A}(|z| \le 1)$ [4, с. 350, пример 1; 5, с. 26, (17), (18), с. 55, пример 1]; 2) ряды

Фурье по многочленам П. Л. Чебышёва первого рода функций $f(z) \in \mathbf{C}[-1,1]$ [4, с. 353; 5, с. 56, (21); 12, с. 32, пример 3]. Эти два случая являются крайними в следующем смысле. Из результата М. Заманского [3, с. 170, теорема 2] для тригонометрических рядов Фурье следует, что [13, с. 89, теорема 1] класс насыщения средних Зигмунда $Z_N^r f(z)$ в пространстве $\mathbf{A}(|z| \le 1)$ описывается в терминах обычных производных функции $f(z)$, а в пространстве $\mathbf{C}[-1,1]$ [13, с. 91—92, теорема 2] в зависимости от чётности или нечётности натурального порядка r в терминах обычных производных функции $f(z)$ или чебышёвски сопряжённой к ней функции $\left[f(\cos x)\right]^{\sim}\Big|_{x=\arccos z}$.

Результат для $\mathbf{A}(|z| \le 1)$ в теореме 1 обобщён на замкнутые жордановы области с кратно-гладкой границей Келлога—Варшавского $\Gamma_{r,\beta}$. Рассмотрение в теореме 2 более широкого класса замкнутых жордановых области с гладкой границей С. Я. Альпера $\Gamma_{\text{Al'per}} \supset \Gamma_{r,\,\beta}$ потребовало введения понятия производной Фабера.

Список цитируемых источников

1. *Эдвардс, Р.* Ряды Фурье в современном изложении : в 2 т. / Р. Эдвардс. — М. : Мир, 1985. — Т. 1. — 264 с.
2. *Эдвардс, Р.* Ряды Фурье в современном изложении : в 2 т. / Р. Эдвардс. — М. : Мир, 1985. — Т. 2. — 400 с.
3. *Zamansky, M.* Classes de saturation des procédés de sommation des séries de Fourier et applications aux séries trigonométriques / M. Zamansky // Annales scientifiques de l'École normale supérieure. 3 série. — 1950. — T. 67, № 2. — P. 161—198.
4. *Дзядык, В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В. К. Дзядык. — М. : Наука, 1977. — 512 с.
5. *Суетин, П. К.* Ряды по многочленам Фабера / П. К. Суетин. — М. : Наука, 1984. — 336 с.
6. *Гайер, Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной области / Д. Гайер. — М. : Мир, 1986. — 216 с.
7. *Pommerenke, Ch.* Boundary Behaviour of Conformal Maps / Ch. Pommerenke. — Berlin; Heidelberg : Springer, 1992. — IX+300 pp. — (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 299).
8. *Бруй, И. Н.* Асимптотический вид некоторых обобщённых средних ряда Фабера для областей с гладкой границей / И. Н. Бруй, А. К. Покало ; Ред. ж. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.». — Минск, 1974. — 11 с. — Деп. в ВИНИТИ АН СССР 26.11.1974, № 3030-74 Деп.
9. *Бруй, И. Н.* Приближение одного класса регулярных функций обобщёнными средними их рядов по полиномам Фабера / И. Н. Бруй // Весці Акадэміі навук Беларускай ССР. Сер. фіз.-мат. навук. — 1974. — № 5. — С. 45—49.
10. *Bruj, I.* Best Approximation and Saturation on Domains Bounded by Curves of Bounded Rotation / I. Bruj, G. Schmieder // Journal of Approximation Theory. — 1999. — Vol. 100, № 1. — P. 157—182.
11. *Бруй, И. Н.* О классе насыщения средних Зигмунда рядов по многочленам Фабера / И. Н. Бруй // Весн. Гродзен. дзярж. ўн-та імя Янкі Купалы. Сер.2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. — 2018. — Т. 8, № 2. — С. 6—18.
12. *Farag, M.* Approximation of Analytic Functions by Faber Polynomials, the Grunsky Matrix, and a Univalence Criterion / M. Farag. — Stockholm : KTH Royal Institute of Technology, 2022. — 42 p.
13. *Бруй, И. Н.* Структурные характеристики класса насыщения средних Зигмунда рядов по многочленам Фабера / И. Н. Бруй // Техника и технологии: инновации и качество : материалы IV Междунар. науч.-практ. конф., Барановичи, 19 декабря 2017 г. / редкол.: В. В. Климук (гл. ред.), Ю. Е. Горбач (отв. ред.), О. И. Наранович [и др.]. — Барановичи : БарГУ, 2018. — С. 85—104.

УДК 531.19:577.22

В. С. Гришина, Я. Г. Грода

Учреждение образования «Белорусский государственный технологический университет», Минск, Республика Беларусь

МОДЕЛИ И ОСНОВНЫЕ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМ С SRLA ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Введение. В последнее время возрос интерес к системам HCSS-частиц (hard core soft shell), т.е. частиц, состоящих из недеформируемого неорганического ядра, заключенного в мягкую полимерную оболочку. Эти частицы способны самостоятельно собираться в упорядоченные структуры на границах раздела жидкость — жидкость [1]. В работе [2] рассмотрена система с отталкиванием ближайших и притяжением третьих соседей описывающая процесс самосборки HCSS-частиц, где было отмечено качественное соответствие полученных результатов с экспериментальными данными. Двумерный вариант системы с SRLA (Short-range Repulsion Long-range Attraction) взаимодействием первых и третьих соседей представлен в работе [3]. Целью данного исследования является изучение структурных характеристик систем частиц с SRLA-взаимодействием на плоской треугольной решетке: с отталкиванием ближайших и притяжением вторых (модель 1), третьих (модель 2), пятых (модель 3) соседей.

Модели системы частиц с SRLA взаимодействием. Все рассматриваемые модели представляют собой решеточный флюид, состоящий из *N* частиц на треугольной решетке и содержащий *M* решеточных узлов. Частицы, занимающие ближайшие решеточные узлы и узлы, являющиеся соседями второго, третьего или пятого порядка, взаимодействуют друг с другом. На рисунке 1 показана схема расположения соседей на плоской треугольной решетке.