

С. І. Русан, кандыдат тэхнічных навук, дацэнт, А. І. Наліўка
Установа адукацыі «Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт», Баранавічы

ВЫКАРЫСТАННЕ ПАЛЁЎ У ДАСЛЕДАВАННІ ПАСКАРЭННЯЎ КОЛА ПРЫ КАЧЭННІ ПА ПЛОСКАСЦІ СА СЛІЗГАННЕМ

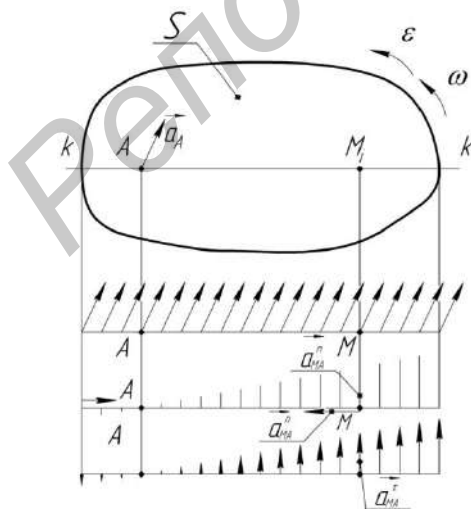
Гаворыцца пра альтэрнатыўны метад аналізу паскарэнняў пунктаў цела, якое выконвае плоскі рух. Метад арыентаваны на фарміраванне доўгатэрміновых ведаў студэнтаў.

Ключавыя словы: тэарэтычная механіка, плоскі рух, паскарэнне пунктаў.

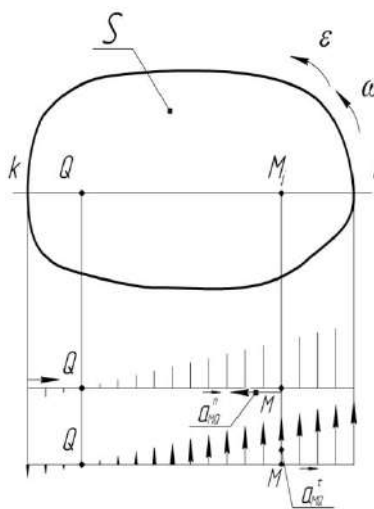
The alternate method of the analysis of accelerations of points of the body making flat driving is stated. The method uphill on formation of long-term knowledge of students.

Key words: theoretical mechanics, flat driving, accelerations of points.

Агульныя заўвагі. Даследаванне выконваецца ў рамках курса тэарэтычнай механікі і мае на мэце паглыбленае вывучэнне руху аднаго з найбольш распаўсюджаных аб'ектаў тэхнікі — кола (ці любога цыліндрычнага цела). Качэнне ў падручніках не выдзяляецца ў асобны раздзел і выкарыстоўваецца зрэдку ў якасці прыкладаў да тэмы «Плоскі рух цела». Пры гэтым слізганне, як правіла, не ўлічваецца. Між тым, яго наяўнасць істотна ўскладняе працэс аналізу кінематычных характарыстык. Даследаванне скорасцей пунктаў кола разглядаецца ў гэтым зборніку ў артыкуле «Альтэрнатыўны аналіз скорасцей пунктаў кола пры качэнні па плоскасці са слізганнем». У ім апісаны нетрадыцыйны палявы кінематычны аналіз як альтэрнатыва звычайнаму дыскрэтнаму аналізу. Выкарыстоўваем ніжэй палявы аналіз для вывучэння паскарэнняў. У агульным выпадку палі паскарэнняў для плоскай фігуры, што ў працэсе вывучэння руху замяняе цела, будуюцца на аснове тых жа залежнасцей, якія выкарыстоўваюцца ў дыскрэтным аналізе. Так, паводле першай мадэлі плоскага руху паскарэнне адвольнага пункта M вызначаецца па формуле $\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^n + \vec{a}_{MA}^\tau$, дзе $\vec{a}_A$ — вядомае паскарэнне полюса A ; $\vec{a} = \omega \vec{l} \wedge \vec{A}$, $\vec{a}_{MA}^\tau = \varepsilon \vec{l} \wedge \vec{A}$ — паскарэнні пункта M адносна полюса. Прыведзенай формуле адпавядае трохкампанентнае (па колькасці складаемых) вектарнае поле, пабудаванае (рысунак 1) для пунктаў лініі $k-k$. Параметр ω вызначаецца з аналізу скорасцей, а ε — з дадатковай умовы, накладзенай на рух якога-небудзь пункта плоскай фігуры. Другая мадэль плоскага руху выкарыстоўваецца ў тых выпадках, калі вядомы імгненныя цэнтры скорасцей (далей — ЦС) і паскарэнняў (далей — ЦП), якія абазначаюцца літарамі P і Q . Паводле гэтай мадэлі паскарэнне вызначаецца па формуле $\vec{a}_M = \vec{a}_{MQ}^n + \vec{a}_{MQ}^\tau$. Адпаведнае двухкампанентнае цэнтральнае поле паказана графічна (рысунак 2). Колькасць кампанентаў на рысунках 1 і 2 можна зменшыць шляхам падсумоўвання цэнтральных палёў. Пры неабходнасці вызначыць паскарэнні многіх пунктаў плоскай фігуры перавага аддаецца другой мадэлі руху. Да таго ж, у гэтым выпадку значна лягчэй кампанаваць поле поўных паскарэнняў, і вынік больш заўважны.



Рысунак 1 — Палі паскарэнняў паводле першай мадэлі руху



Рысунак 2 — Палі паскарэнняў паводле другой мадэлі руху

Методика викарыстання палёў. Прынцыпова яна не адрозніваецца ад плана дзеянняў, рэалізуюмых у методыцы дыскрэтнага аналізу, г. зн. ад викарыстання прыведзеных вышэй формул для паскарэння $\ddot{a}$. Зыходзячы з умовы задачы, выбіраецца першая альбо другая мадэль даследавання. Вызначаецца вуглавое паскарэнне ε . Пры неабходнасці знаходзіцца ЦЦП. Будуюцца кампаненты палёў для ліній, што праходзяць праз полюс A (ці пункт Q) і пункт M . У пункце M адпаведныя яму вектары палёў падсумоўваюцца — атрымліваецца поўнае паскарэнне $\ddot{a}_l$. На канчатковай стадыі даследавання якраз і выяўляецца першага палявога аналізу. Вызначыўшы паскарэнне $\ddot{a}_l$, студэнт бачыць на рысунку, якое паскарэнне ўзнікае па лініі AM (ці QM) у іншых яе пунктах. Такім чынам, у свядомасці навучэнца фарміруецца поўная карціна паскарэнняў пунктаў плоскай фігуры. А геаметрычныя вобразы больш трывалыя і лягчэй успрымаюцца, чым алгебраічныя залежнасці.

Качэнне кола па плоскасці. Пры раўнамерным качэнні кола ($\omega = \text{const}$) без слізгання цэнтральнае поле ўтвараецца толькі нармальнымі паскарэннямі (рысунак 3, а); ЦЦП знаходзіцца ў цэнтры кола. Слізганне па плоскасці ўяўляе сабою паступальны рух, якому адпавядае аднароднае поле (гл. рысунак 3, б). А качэнне са слізганнем апісваецца сукупнасцю двух паказаных на рысунках 3, а, б палёў.

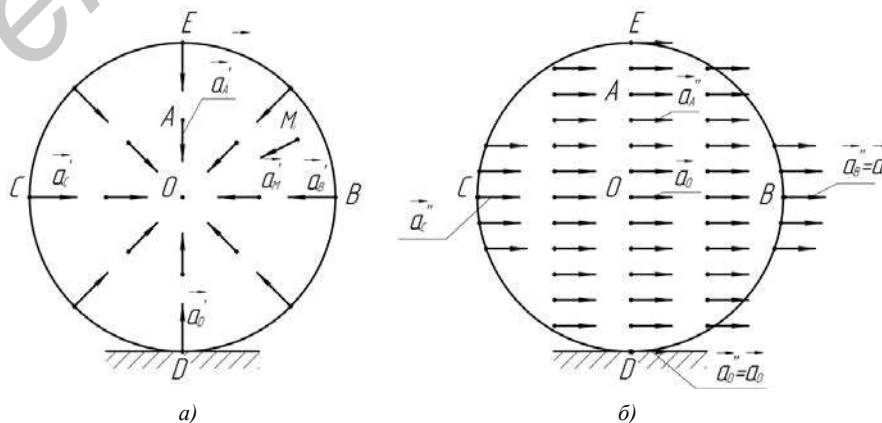
Іх ураўненні можна запісаць у наступным выглядзе: $\ddot{a}'_{Mi} = \rho_i \omega^2$; $\ddot{a}''_{I_s} = \ddot{a}_0 = \text{const}$ ($\rho_s \leq r$). Поле поўных паскарэнняў (на рысунку не паказана) прадставім сумай

$$\ddot{a}_{I_s} = \ddot{a}'_{I_s} + \ddot{a}''_{I_s}. \quad (1)$$

Пры комплексным даследаванні параметры палёў ω, a_0 вызначаюцца з сілавога аналізу, вывучаецца ў раздзеле «Дынаміка». Тут, у кінематыцы, будзем лічыць, што вуглавая скорасць ω зададзена, а паскарэнне паступальнага руху a_0 можна выразіць праз ω з дадатковых умоў руху, напрыклад, з суадносін паскарэнняў якіх-небудзь пунктаў кола A і B , што знаходзяцца на ўзаемна перпендыкулярных дыяметрах кола з каардынатамі $\rho_A = r/2$, $\rho_B = r$ (гл. рысунак 3).

Няхай $\dot{a}_A / \dot{a}_B = k$; адсюль $\dot{a}_A = k \dot{a}_B$. Улічым, што $\ddot{a}_A = \ddot{a}'_A + \ddot{a}''_A$, $\ddot{a}_B = -\ddot{a}'_A + \ddot{a}''_A$, дзе $\dot{a}'_A = \dot{a}''_A = r\omega^2/2$, $\dot{a}'_B = r\omega^2$, $\dot{a}''_A = \dot{a}''_B = \dot{a}_0$; тады атрымліваем: $|\ddot{a}'_A + \ddot{a}''_A| = k(\dot{a}''_A - \dot{a}'_A)$ ці $\sqrt{(\dot{a}''_A)^2 + \dot{a}_0^2} = k(2\dot{a}''_A - \dot{a}_0)$, $(\dot{a}''_A)^2 + \dot{a}_0^2 = (2k\dot{a}''_A)^2 + (k\dot{a}_0)^2 - 4k^2\dot{a}''_A\dot{a}_0$. Карані квадратнага ўраўнення: $\dot{a}_{0(1,2)} = \left[-4\dot{a}''_A \pm \sqrt{(4k^2\dot{a}''_A)^2 + 4(1-k^2)(4k^2-1)(\dot{a}''_A)^2} \right] / 2(1-k^2)$. Пры $k, \delta \in [1, \infty)$, зыходнае ўраўненне пераходзіць у лінейнае; з яго $\dot{a}_0 = 3\dot{a}''_A/4$.

Пераходзім да вызначэння паскарэнняў пунктаў кола па прыведзенай вышэй формуле (1). Вектары $\ddot{a}'_{I_s}$, $\ddot{a}''_{I_s}$ пераносім у пункт I_s . Вуглы α_s паміж імі ўстанаўліваем са складаемых палёў. Так для пункта D $\alpha_D = \pi/2$; таму $\dot{a}_D = \sqrt{(\dot{a}'_D)^2 + (\dot{a}''_D)^2}$, дзе $\dot{a}'_D = r\omega^2$, $\dot{a}''_D = \dot{a}_0$; пры $k, \delta \in [1, \infty)$, $\dot{a}''_D = \dot{a}_0 = 3r\omega^2/8$. Канчаткова $\dot{a}_D = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (3r\omega^2/8)^2} = \sqrt{73}r\omega^2/8$. Для пункта C вугал $\alpha_C = 0$; $\dot{a}_C = \dot{a}'_C + \dot{a}''_C = r\omega^2 + 3r\omega^2/8 = 11r\omega^2/8$.

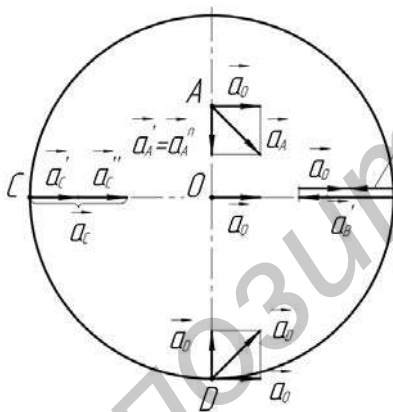


Рысунак 3 — Палі паскарэнняў: цэнтральнае (а); аднароднае (б)

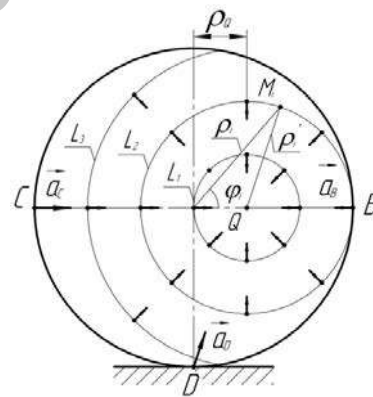
Заўважым, што арыентацыя поля на рысунку 3, б, прынята не адвольна. Пры $k, \delta \neq 1$ (г. зн. пры $\dot{a}_A = \dot{a}_{\tilde{A}}$), яго вектары могуць быць накіраваны толькі ўправа. Каб пераканацца ў гэтым звернемся да рысунка 4, на якім $\dot{a}'_A = 2\dot{a}''_A$. З яго відаць, што, змяніўшы напрамак $\vec{a}_0$ на процілеглы, атрымаем $\dot{a}_A < \dot{a}_{\tilde{A}}$ пры любых значэннях $\dot{a}_0$. Такім чынам, пры $\dot{a}_A = \dot{a}_{\tilde{A}}$ левая арыентацыя аднароднага поля не магчыма.

Аналіз паскарэнняў з дапамогай ЦП. Як адзначалася вышэй, такі аналіз мае істотныя перавагі. Палі паскарэнняў дазваляюць без разлікаў набліжана вызначыць размяшчэнне пункта Q па яго прыкмеце $\vec{a}_Q = \vec{a}'_Q + \vec{a}''_Q = 0$. Гэта роўнасць можа выконвацца толькі на правай палове OB гарызантальнага дыяметра кола, дзе напрамкі вектараў $\vec{a}'_Q$ і $\vec{a}''_Q$ процілеглыя. Перапішам апошнюю роўнасць пры $k, \delta \neq 1$, у выглядзе $\dot{a}'_Q = \dot{a}''_Q$ ці $\rho_Q \omega^2 = 3r\omega^2$; адсюль $\rho_Q = \dot{a}'_Q / \omega^2 = 3r/8$. Наяўнасць ЦП дазваляе перайсці да аднакампанентнага цэнтральнага поля $a_{M_i} = \rho'_i \omega^2$ (рысунак 5). Лініі $L_1, L_2, \dots, L_n$ называюцца *акружнасцямі роўных паскарэнняў* (ці *эквіпаскоранымі акружнасцямі*). Ва ўраўненні поля $\rho'_z = QM_z$ — незалежная пераменная; пры неабходнасці яе можна выразіць праз палярныя каардынаты ρ_z, φ_z па тэарэме косінусаў: $\rho'_z = \sqrt{\rho_z^2 + \rho_Q^2 - 2\rho_z\rho_Q \cos \varphi_z}$. Паскарэнні пунктаў C і D знойдзем па формулах $a_C = \rho'_C \omega^2, a_D = \rho'_D \omega^2$, дзе $\rho'_C = 11r/8, \rho'_D = r\sqrt{73}/8$. Як бачым, вынік супадае з папярэднім.

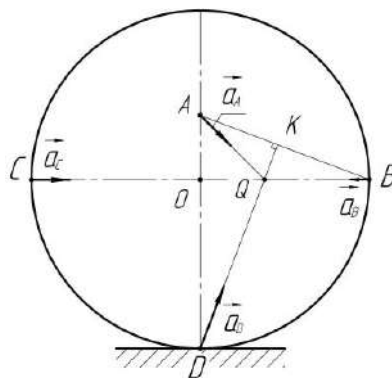
Становішча пункта Q можна вызначыць і без палёў як для прыватнага выпадку руху, пры якім $\omega \neq 0, \varepsilon, \delta \neq 0$. ЦП знаходзіцца на перасячэнні ліній вектараў $\vec{a}_A, \vec{a}_B$. А паколькі лінія вектара $\vec{a}_B$ гарызантальная, то пункт перасячэння Q знаходзіцца на гарызантальным дыяметры CB ; пры $a_A = a_B$ $AQ = QB$. Таму, каб знайсці пункт Q , будзем перпендыкуляр да адрэзка AB з яго сярэдзіны K (рысунак 6). Далей аналізуем падобныя трохвугольнікі BQK і BAO , у якіх $BQ/BA = BK/BO$. Адсюль $BQ = (BA \cdot BK) / BO = (BA)^2 / 2r = (r\sqrt{5}/2) / 2r = 5r/8$ і $\rho_Q = OQ = 3r/8$.



Рысунак 4 — Складанне паскарэнняў



Рысунак 5 — Поле роўных паскарэнняў



Рысунак 6 — Вызначэнне ЦП

Методыка прымянення палёў паскарэнняў для вылічэння сіл інерцыі апісана ў артыкуле [1].

Заклучэнне. У навукова-метадычнай распрацоўцы выкладзены арыентаваны на фарміраванне доўгатэрміновых ведаў альтэрнатыўны метады аналізу паскарэння пунктаў цела, якое выконвае плоскі рух. Палявы метады выкарыстаны для даследавання паскарэнняў пунктаў кола пры яго качэнні са слізганнем. Апісаны два варыянты даследавання — паводле першай і другой мадэляў плоскага руху.

Спіс цытаваных крыніц

1. Русан, С. І. Даследаванне палёў сіл інерцыі пры качэнні аднародных цыліндрычных цел / С. І. Русан // Теоретическая и прикладная механика : межведомств. сб. науч.-метод. ст. — Минск : [б. и.], 2008. — Вып. 23. — С. 223—226.

Матэрыял паступіў у рэдакцыю 12.09.2014 г.

УДК 531.01

С. І. Русан, кандыдат тэхнічных навук, дацэнт, Я. С. Стэцкі
Установа адукацыі «Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт», Баранавічы

АЛЬТЭРНАТЫЎНЫ АНАЛІЗ СКОРАСЦЕЙ ПУНКТАЎ КОЛА ПРЫ КАЧЭННІ ПА ПЛОСКАСЦІ СА СЛІЗГАННЕМ

Для даследавання хуткасці пунктаў кола выкарыстоўваецца палявы кінематычны аналіз. На прыкладзе паказана яго эфектыўнасць у навучальным працэсе. Альтэрнатыўны аналіз спрыяе фармаванню доўгатэрміновых ведаў студэнтаў.

Ключавыя словы: кінематычны аналіз, плоскі рух, скорасць пункта.

For research of speeds of points of a wheel the field kinematic analysis is used. On an example its efficiency in educational process is shown. The alternative analysis promotes formation of geometrical images of movement, and on their basis — long-term knowledge of students.

Key words: kinematic analysis, flat movement, point speed.

Агульныя заўвагі. Змешчаная ніжэй навукова-метадычная распрацоўка мае на мэце паглыбленае вывучэнне тэмы «Плошчапаралельны рух цела» ў курсе тэарэтычнай механікі. Яна можа быць выкарыстана як у навуковых гуртках па дысцыпліне, так і для падрыхтоўкі студэнтаў да алімпіяд.

Пры качэнні з праслізгваннем кола выконвае плоскі рух. У тэарэтычнай механіцы разглядаюцца дзве кінематычныя мадэлі такога руху. Паводле першай з іх плоскі рух прадстаўляецца ў выглядзе сукупнасці паступальнага і вярчальнага рухаў; паводле другой — у выглядзе спецыфічнага вярчальнага руху, пры якім цэнтры вярчэння, называемыя імгненнымі, для скорасцей (далей — ШС) і паскарэнняў (далей — ШП) не супадаюць паміж сабою (у адрозненне ад статычных цэнтраў пры звычайным вярчальным руху цела). У тых выпадках, калі імгненныя цэнтры скорасцей і паскарэнняў вядомы (ці лёгка знаходзяцца), перавага аддаецца другой мадэлі даследавання плоскага руху. І хоць кінематыка плоскага руху цела ў тэарэтычным плане прынцыпова распрацавана, асобныя яе пытанні працягваюць займаць даследчыкаў. Яны адносяцца як да зместу самой тэорыі, так і да метадыкі яе выкладання і прымянення ў вучэбным працэсе. Ва ўсіх аўдыторных задачах і заданнях для самастойнага выканання ад студэнтаў патрабуецца вызначэнне скорасцей і паскарэнняў у асобных пунктах. Такі традыцыйны падыход назавём дыскрэтным кінематычным аналізам. У працэсе дыскрэтнага аналізу ў студэнтаў не фарміруецца ўяўленне пра ўзровень кінематычных характарыстык ва ўсіх пунктах аб'екта даследавання. Сапраўды, вызначыўшы скорасць (ці паскарэнне) у адным пункце цела, нельга візуальна без разлікаў ацаніць яе велічыню ў іншых пунктах таго ж цела.

Кінематычны аналіз з дапамогай вектарных палёў. У якасці альтэрнатывы дыскрэтнаму аналізу мы прапануем кінематычны аналіз плоскага руху з дапамогай вектарных палёў кінематычных характарыстык — палявы кінематычны аналіз. Плоскі рух цела, як вядома з курса тэарэтычнай механікі, мадэліруецца рухам аднаго яго сячэння. Кінематычнае поле ўяўляе сукупнасць кінематычных характарыстык для ўсіх пунктаў такога сячэння. Прапануемы аналіз нам падаецца больш інфарматыўным, таму што дазваляе ўспрымаць карціну размеркавання скорасцей для ўсяго аб'екта. І разам з тым ён застаецца даступным для разумення студэнтамі, бо вядомы навучэнцам яшчэ са школьных падручнікаў па фізіцы, дзе пры вывучэнні магнітных і электрычных з'яў удзельнічаюць паняцці аб магнітных і электрычных палях. Палявы кінематычны аналіз фарміруе геаметрычныя вобразы руху матэрыяльных аб'ектаў і на іх аснове забяспечвае доўгатэрміновыя веды студэнтаў.

Для вывучэння плоскага руху цела паводле першай мадэлі выкарыстоўваюцца аднародныя і цэнтральныя сіметрычныя палі $\vec{v}_i = \text{const}$, $v_i = \rho_i \omega$, паводле другой мадэлі — толькі восесіметрычныя $v_i = \rho_i \omega$, дзе ρ_i — адлегласць пункта ад восі (цэнтра). Кінематычнае даследаванне качэння кола без