

Мы амаль скончылі разгляд спрощанага варыянта задачы, калі лічылі  $M_T = 0$ . Трэба дадаць, што для агульнасці можна разгледзець вуглы дзеяння сілы ў больш шырокіх межах:  $-180^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ . Гэта дасць яшчэ адзін варыянт для раўнавагі кола ці яго раўнамернага руху, калі лінія дзеяння сілы таксама праходзіць праз пункт  $P$ , але ўжо накіраваная ўніз. Трэба адзначыць, што пры адмоўным  $\alpha$  у выразе (3) для рухаючай сілы назоўнік відавочна можа ператварацца ў ноль пры  $f = -\operatorname{ctg} \alpha$ . Гэта значыць, што пры пэўных параметрах сістэмы раўнамернае качэнне са слізганнем стане ўвогуле немагчыма ні пры якім значэнні рухаючай сілы, ці кола можа заклініць у час руху (маецца на ўвазе амаль імгненны і вельмі значны рост сілы нацягнення тросу за кошт запasu кінетычнай энергіі).

Цяпер разгледзім момант супраціўлення качэнню, калі  $M_T = \delta N \neq 0$ . Тады з трэцяга ўраўнення сістэмы (2), у якім  $M_T = \delta N = \delta(G - F \sin \alpha)$  атрымліваем  $Fr + \delta(G - F \sin \alpha) - F \cos \alpha R = 0$ ; адсюль  $F = \delta G / (R \cos \alpha + \delta \sin \alpha - r)$ . Велічыні сіл  $F$  і  $F_{\text{шч}}^{\text{ct}}$  пры качэнні кола ўправа і ўлева знаходзяцца па аднолькавых формулах, аднак значэнні сіл розныя; гэта тлумачыцца змяненнем вугла  $\alpha$ , які ўжо не будзе роўны  $\arccos r/R$  (лінія дзеяння рухаючай сілы не праходзіць праз пункт  $P$ , таму што з'явіўся дадатковы момант  $M_T$ ). Пры змене правага напрамку качэння на левы неабходная сіла  $F_{\text{шч}}^{\text{ct}}$  памяншаецца, а сіла  $F$  павялічваецца.

Выкарыстаем першае і трэцяе ўраўненні сістэмы (2). Выключаем з іх сілу  $F_{\text{шч}}$ , атрымліваем  $M + M_\Phi + M_T - (F \cos \alpha - \Phi_C)R = 0$ . Улічваючы, што тут спалучэнне  $M_\Phi + \Phi_C R$  паводле залежнасцей (1) роўнае  $I_{cz}\varepsilon + m a_c R = (I_{cz}/R + mR)a_c$ , знаходзім:

$$a_c = (FR \cos \alpha - M - M_T) / (I_{cz}/R + mR) = \text{const.}$$

Цяпер зноў вяртаемся да першага ўраўнення сістэмы (2), з яго выражаем шукаемую дынамічную сілу шчаплення  $F_{\text{шч}} = F \cos \alpha - \Phi_C = F \cos \alpha - m a_c$ . Параўнанне з раўнамерным качэннем паказвае, што паскоранае качэнне кола прыводзіць да зніжэння сілы шчаплення на велічыню сілы інерцыі. Ва ўсіх выпадках мы можам вызначыць адпаведны мінімальны каэфіцыент трэння слізгання:  $f_{\min} = F_{\text{шч}} / N$ .

**Заклучэнне.** У даследаванні выкладзена метадыка прымянення прынцыпа Даламбера для дынамічнага аналізу раўнамернага і паскоранага качэння тэхналагічнага кола; устаноўлены крытэрыі для вызначэння напрамку качэння; вызначаны статычная і дынамічная сілы шчаплення, неабходныя для качэння кола без слізгання; указана магчымасць закліньвання пры некаторых умовах качэння са слізганнем; паказана, што сілы шчаплення могуць залежыць ад напрамку качэння.

УДК 531

**С. І. Русан,**

*кандыдат тэхнічных навук, дацэнт*

*Установа адукацыі «Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт», Баранавічы*

**Я. С. Стэцкі**

*Установа адукацыі «Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт», Баранавічы*

## ДЫНАМІЧНЫ АНАЛІЗ КАЧЭННЯ ВЯДУЧАГА КОЛА ПА ПЛОСКАСЦІ З ПЕРАМЕННЫМ КАЭФІЦЫЕНТАМ ТРЭННЯ СЛІЗГАННЯ

Выкананы якасны аналіз руху кола па плоскасці з пераменным каэфіцыентам трэння слізгання. Вызначана сіла шчаплення кола з плоскасцю, неабходная для раўнамернага і паскоранага качэння. Для даследавання выкарыстаны дыферэнцыяльныя ўраўненні плоскага руху цвёрдага цела.

A qualitative analysis of the motion of the wheel plane with variable coefficient of sliding friction. Determined the bond strength with the plane of the wheel, necessary for the uniform and accelerated rolling. The study used the differential equations of plane motion of a rigid body.

**Уводзіны.** Даследаванне руху аб'екта выконваецца на падставе гіпотэз і ўраўненняў, выкладзеных у курсе тэарэтычнай механікі. Мэта аналізу — паглыбленае вывучэнне руху аднаго з найбольш распаўсюджаных аб'ектаў тэхнікі — кола (альбо любога цыліндрычнага цела з кругавой накіравальнай). Кінематычны аналіз яго качэння выкананы ў работах [1]. Асаблівасць разглядаемай тут задачы заключаецца ва ўліку зменнасці механічнай характарыстыкі паверхні качэння — яе шурпатасці. Апошняя апісваецца пераменным каэфіцыентам трэння слізгання  $f(x)$ .

**Асноўная частка.** Прадставім тры графікі функцыі  $f(x)$ : 1 —  $f(x)$  узрастае; 2 —  $f(x)$  змяншаецца; 3 —  $f(x)$  застаецца нязменнай (рысунк 1). Пункцірнай лініяй 4 паказана мінімальнае значэнне каэфіцыента

трэння  $f_{\min}$ , неабходнае для качэння кола без слізгання. Велічыня  $f_{\min}$  не залежыць ад механічных уласцівасцей паверхні качэння, яе вызначэнне прыведзена ніжэй.

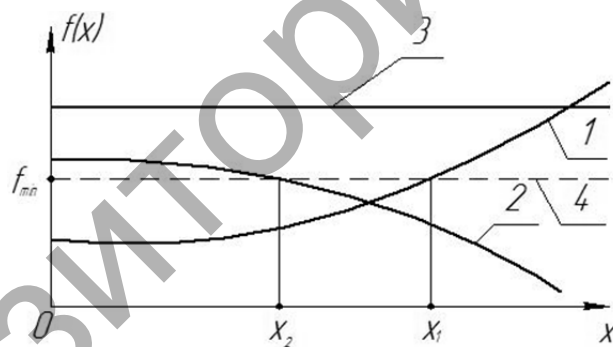
Кола ў агульным выпадку пераменнай уздоўж радыуса таўшчыні  $h = f(\rho)$  (ці ступеньчатае) масы  $m$  коціцца па гарызантальнай шурпатай плоскасці пад дзеяннем пары сіл з момантам  $M$ . Да восі кола прыкладзена сіла  $F$ , што мадэлюе карыснае супраціўленне (рысунк 2). Зададзены каэфіцыент трэння слізгання  $f(x)$  і трэння качэння  $\delta = \text{const}$ . Патрэбна вызначыць неабходную для качэння без слізгання сілу шчаплення  $F_{\text{шч}}$  і характар руху кола.

Наяўнасць графікаў 1—4 (гл. рысунк 1) дазваляе скласці папярэднюю ўяву аб характары руху кола. На ўчастках шляху, для якіх розніца  $\Delta f(x) = f(x) - f_{\min} > 0$ , кола коціцца без слізгання, а пры  $\Delta f(x) < 0$  — са слізганнем. Так, калі  $f(x)$  змяняецца паводле графіка 1, то на ўчастку шляху  $x < x_1$  кола рухаецца са слізганнем; пры  $x > x_1$  яго качэнне працягваецца без слізгання. Пры змяненні каэфіцыента  $f(x)$  паводле графіка 2 качэнне без слізгання мае месца на ўчастку шляху  $x < x_2$ ; далей кола рухаецца са слізганнем. Графіку 3 на ўсім шляху адпавядае качэнне без слізгання. Характар качэння можна вызначыць па рысунку 1 візуальна без вылічэння  $\Delta f(x)$ : на тым участку, дзе графік функцыі  $f(x)$  знаходзіцца вышэй пункцірнай лініі  $f_{\min}$ , качэнне адбываецца без слізгання, а дзе ніжэй — кола коціцца са слізганнем [2].

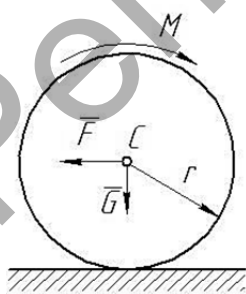
Калі на кола дзейнічае момант  $M$ , то яно можа знаходзіцца на шурпатай паверхні ў раўнавазе, можа каціцца па ёй без слізгання раўнамерна ці паскорана толькі пры пэўных значэннях сілы шчаплення. Разгледзім прыватныя выпадкі.

*Кола не рухаецца.* Каб забяспечыць такі стан кола, замацуем яго цэнтр з дапамогай стрыжня  $BC$  (рысунк 3). Рэактыўную сілу, што ўзнікае ў плоскасці кантакта кола з паверхняй  $S$  будзем называць статычнай сілай шчаплення і абазначым літарай  $F_{\text{шч}}^{\text{ст}}$ . Для яе вызначэння складаем умову раўнавагі:  $\sum M_C(\vec{F}_i) = F_{\text{шч}}^{\text{ст}} r - M = 0$ . Адсюль  $F_{\text{шч}}^{\text{ст}} = M/r$ . Далей выкарыстоўваем ураўненні дынамікі плоскага руху цела (захоўваем агульнапрынятыя ў курсе тэарэтычнай механікі абазначэнні):

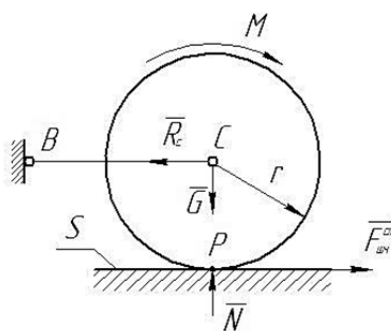
$$m\ddot{x}_c = \sum X_i, \quad m\ddot{y}_i = \sum Y_i, \quad I_c \ddot{\phi} = \sum M_C(F_i). \quad (1)$$



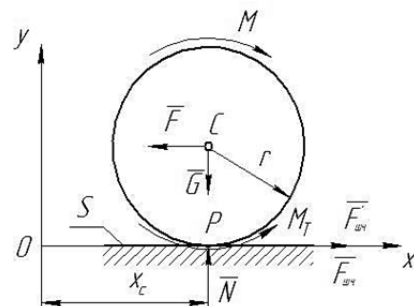
Рысунк 1 — Графікі змянення каэфіцыента трэння  $f(x)$



Рысунк 2 — Кола на шурпатай плоскасці



Рысунк 3 — Кола ў раўнавазе



Рысунк 4 — Паскоранае качэнне кола

Кола коціцца без слізгання раўнамерна. Пры такім руху паскарэнне цэнтра кола  $a_c = \ddot{x}_c$  і яго вуглавое паскарэнне  $\varepsilon = \ddot{\phi}$  роўныя нулю. Гэта дазваляе запісаць першае і трэцяе ўраўненні ў выглядзе  $\sum X_i = 0$ ;  $\sum M_p(\vec{F}_i) = 0$ . Улічваючы момант трэння  $M_T$  і сілу супраціўлення  $F$  (рысунак 4) атрымліваем:

$$F'_{\text{шч}} - F = 0; \quad M - M_T - F \cdot r = 0. \quad (2)$$

З другога ўраўнення (2) знаходзім неабходную для раўнамернага качэння кола сілу супраціўлення  $F = (M - M_T) / r$ . Затым з першага ўраўнення (2) вызначаем  $F'_{\text{шч}} = F = (M - M_T) / r$ . Як бачым, патрэбная для раўнамернага качэння без слізгання сіла  $F'_{\text{шч}}$  пры  $M_T = 0$  не адрозніваецца ад  $F_{\text{шч}}^{\text{ст}}$ , яе таксама будзем называць статычнай.

Кола коціцца без слізгання паскорана, гэта значыць знаходзіцца ў пераходным рэжыме руху. Адназначную сілу шчаплення назавём дынамічнай і абазначым літарай  $F_{\text{шч}}$ . Для яе вызначэння выкарыстаем першае і другое ўраўненні сістэмы (1) з правымі часткамі, адпаведнымі рысунку 4:

$$m\ddot{x}_c = F_{\text{шч}} - F; \quad I_z\ddot{\phi} = M - M_T - F_{\text{шч}} \cdot r. \quad (3)$$

Далей улічваем, што тут пры качэнні без слізгання  $x_c = \phi r$ ,  $\ddot{x}_c = \ddot{\phi} r$ . Гэта дазваляе выключыць з сістэмы (3)  $\ddot{x}_c$ ,  $\ddot{\phi}$  і з атрыманага алгебраічнага ўраўнення вызначыць дынамічную сілу шчаплення [3], пры  $I_z = mi_z^2$  яна роўная

$$F_{\text{шч}} = \frac{\left[ \frac{(M - M_T)r}{i_z^2} \right]}{1 - \frac{r^2}{i_z^2}},$$

дзе  $i_z$  — радыус інерцыі кола.

Для параўнання велічыні  $F_{\text{шч}}$  са значэннямі  $F'_{\text{шч}}$  (ці  $F_{\text{шч}}^{\text{ст}}$ ) апошнюю формулу прывядзём да выгляду  $F_{\text{шч}} = \left[ r^2 / (r^2 + i_z^2) \right] [(M - M_T) / r]$ , альбо карацей:  $F_{\text{шч}} = \gamma F'_{\text{шч}}$ . Тут велічыня  $\gamma = r^2 / (r^2 + i_z^2) < 1$ ; назавём яе каэфіцыентам змяншэння статычнай сілы шчаплення. Значыць, каб знайсці дынамічную сілу шчаплення, неабходна адпаведную статычную сілу памножыць на каэфіцыент змяншэння  $\gamma$ . Каб мець уяву, наколькі істотна ўплывае паскорана рух кола на сілу шчаплення, вылічым каэфіцыент  $\gamma$  для кола пастаяннай таўшчыні. Для яго радыус інерцыі  $i_z^2 = r^2 / 2$ . Тады  $\gamma = \frac{r^2}{r^2 + (r^2/2)} = \frac{2}{3}$ .

Ведаючы неабходную для качэння без слізгання сілу  $F_{\text{шч}}$ , можам знайсці адпаведны ёй мінімальны каэфіцыент трэння слізгання  $f_{\text{мін}}$  з формулы  $F_{\text{шч}} = f_{\text{мін}} N$ . Рэакцыю плоскасці  $N$  вызначаем з другога ўраўнення (1) пры  $\ddot{y}_c = 0$ :  $m\ddot{y}_c = G - N$ . Атрымліваем  $N = G = mg$ . Графік велічыні  $f_{\text{мін}}$  паказаны на рысунку 1.

**Заклучэнне.** У даследаванні выкладзена метадыка рашэння прыкладной задачы качэння кола, што засталася па-за ўвагай аўтараў падручнікаў па тэарэтычнай механіцы. Знаёмства з ёй назапашвае і ўзбагачае досвед рашэння нетыповых праблем. Атрыманы вынік у выглядзе формулы для вылічэння сілы шчаплення кола з плоскасцю качэння дазваляе прагназаваць магчымасць качэння кола і характар яго руху. Даследаванне зацікавіць дапытлівых студэнтаў і спецыялістаў у галіне транспартных машын і тэхналагічнага абсталявання.

#### Спіс цытаваных крыніц

1. Русан С. І., Стэцкі Я. С. Альтэрнатыўны аналіз скорасцей пунктаў кола пры качэнні па плоскасці са слізганнем // *Технологии, экономика и право: актуал. проблемы и инновации* : материалы Междунар. науч.-практ. конф., Барановичи, 20 нояб. 2014 г. Барановичи : РИО БарГУ, 2014. С. 39—41 ; Русан С. І., Наліўка А. І. Выкарыстанне палёў у даследаванні паскарэнняў кола пры качэнні па плоскасці са слізганнем // *Технологии, экономика и право: актуал. проблемы и инновации* : материалы Междунар. науч.-практ. конф., Барановичи, 20 нояб. 2014 г. Барановичи : РИО БарГУ, 2014. С. 36—39.
2. Русан С. І., Стэцкі Я. С. Альтэрнатыўны аналіз скорасцей пунктаў кола пры качэнні па плоскасці са слізганнем.
3. Русан С. І., Наліўка А. І. Выкарыстанне палёў у даследаванні паскарэнняў кола пры качэнні па плоскасці са слізганнем.