

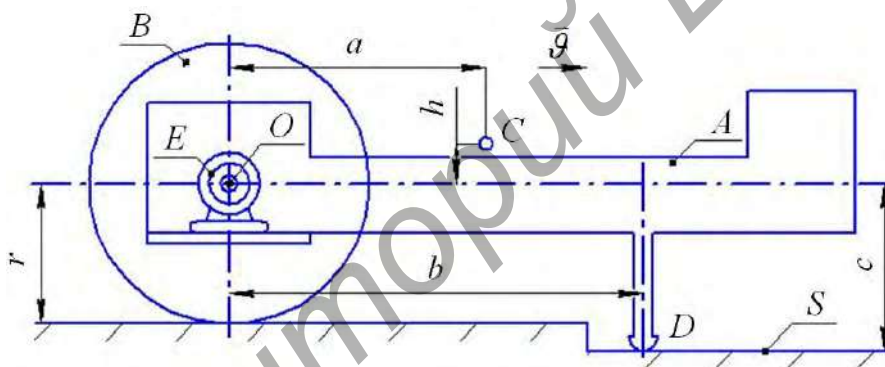
ВЫЗНАЧЭННЕ І ДАСЛЕДАВАННЕ МЕХАНІЧНЫХ ХАРАКТАРЫСТЫК РУХУ МАБІЛЬНАЙ СІСТЭМЫ

маг. Дыдышка І.М., к.т.н. Русан С.І., к.т.н. Гаўрыленя А.К.

Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт, Баранавічы

Агульныя звесткі. Мабільныя механічныя сістэмы шырока выкарыстоўваюцца на дапаможных работах у сельскай гаспадарцы і прамысловасці. Такія сістэмы, як правіла, уключаюць цвёрдае цела, на якім замацаваны рабочы орган, сродкі перамяшчэння (цыліндры, колы, гусеніцы і г.д.) і рухавік, злучаны са сродкамі перамяшчэння. Мабільнай сістэмай (машынай) выконваецца работа па пераадоўванні карысных і шкодных супраціўленняў.

Абстрактная мадэль мабільнай механічнай сістэмы складаецца з цела A масы m_A , кола B масы m_B і электрарухавіка E , які прыводзіць сістэму ў рух. Ротар рухавіка жорстка звязаны з колам B і яго маса і момант інерцыі ўлічваюцца ў інерцыйных характарыстыках кола B . Цела A абпіраецца на гарызонтальную плоскасць S у пункце D (рысунак 1). Корпус электрарухавіка прымацаваны да цела A .



Рыс. 1. Агульны выгляд мабільнай механічнай сістэмы

Шурпатаць паверхні S забяспечвае качэнне кола без слізгання. Цэнтры цяжару цела A і кола B абзначаны на рысунку літарамі C і O адпаведна. Напрамак руху паказаны стрэлкай. Прыняты абзначэнні: r — радыус кола; i_ε — яго радыус інерцыі; f — каэфіцыент трэння ў пункце D ; $M = M(t)$ — момант, перадаваемы ад рухавіка E на кола B . Целы, утвараючыя механічную сістэму, разглядаюцца як абсалютна цвёрдыя. У пачатковы момант часу ($t=0$), калі механічная сістэма нерухома, уключаецца электрарухавік. Праз τ секунд пачынаецца рух сістэмы.

У працэсе работы машыны выдзяляецца некалькі характэрных яе станаў. Пасля ўключэння рухавіка ствараемы ім момант за прамежак часу τ узрастае ад нуля да стартавага (пачатковага) значэння M_τ . Пры $t = \tau$ пачынаецца рух мабільнай сістэмы ў пераходным рэжыме працягласцю $t = \tau_y$; пры гэтым яе скорасць узрастае ад нуля да некаторага ўсталяванага значэння \mathcal{V}_y . Далей рух машыны працягваецца з пастаяннай скорасцю \mathcal{V}_y . Падчас руху магчыма зніжэнне скорасці да велічыні $\mu \mathcal{V}_y$, дзе $\mu < 1$ — каэфіцыент зніжэння ўсталяванай скорасці. Разглядаецца два рэжымы тармажэння: тармажэнне рухавіком і з дапамогай адмысловай тармазнай сістэмы. Адпаведныя ім

тармазныя шляхі будзем абазначаць праз s_1, s_2 . Для мабільнай машыны дамінуючае значэнне мае яе манеўровасць, якая залежыць ад такіх характарыстык як $M_{\text{п}}, \vartheta_y, \tau_y, s_1, s_2$.

Вызначэнне стартвага (пачатковага) моманту рухавіка.

Знаходзім момант $M(t)$ у прамежак часу $0 \leq t \leq \tau$.

Будзем лічыць, што механічная характарыстыка рухавіка E вызначаецца дыферэнцыяльным ураўненнем:

$$b_1 \frac{dM}{dt} + b_2 M = b_3 - \alpha \omega, \quad (1)$$

дзе b_1, b_2, b_3, α — пастаянныя каэфіцыенты; ω — вуглавая скорасць.

У інтэрвале часу $0 \leq t \leq \tau$ ва ўраўненні (1) $\omega = 0$. Рашэнне неаднароднага ўраўнення (1) з пастаяннымі каэфіцыентамі шукаем у выглядзе сумы рашэнняў аднароднага M_1 і неаднароднага M_2 ураўненняў: $M(t) = M_1 + M_2$. Карыстаючыся тыповой метадыкай рашэння, прымаем: $M_1 = C_1 e^{kt}, M_2 = C_2$. Пастаянную k знаходзім з характарыстычнага ўраўнення: $k = -b_2 / b_1$. Агульнае рашэнне ўраўнення (1) прыводзіцца да выгляду:

$$M(t) = C_1 e^{-(b_2/b_1)t} + b_3 / b_2. \quad (2)$$

Пастаянную C_1 вызначаем з пачатковай умовы: пры $t = 0, M(t) = 0$. Атрымліваем: $C_1 = -b_3 / b_2$.

Канчаткова:

$$M(t) = b_3 \left(1 - e^{-(b_2/b_1)t} \right) / b_2. \quad (3)$$

Патрэбны стартваы момант $M(\tau)$ не можа быць атрыманы з формулы (3), бо ў ёй не вядома значэнне $t = \tau$. Каб працягнуць рашэнне, выкарыстаем тэарэму аб змяненні кінетычнай энергіі ў дыферэнцыяльнай форме (гл. падручнік і дапаможнікі [1-4]) $dT = \sum dA_i$. Прадыферэнцыруем гэту роўнасць па часе. Атрымаем:

$$dT / dt = \sum N_i, \quad (4)$$

дзе T — кінетычная энергія сістэмы; $N_i = dA_i / dt$ — магутнасць сілы F_i , што дзейнічае на яе; dA_i — элементарная работа сілы.

Разліковая схема механічнай сістэмы прадстаўлена на рысунках 2, 3, дзе выкарыстаны агульнапрынятыя абазначэнні сіл цяжару, рэакцый сувязей і скорасцей (гл. [1-4]). Будзем улічваць, што $\vartheta_o = \vartheta_c = \vartheta_A = \vartheta = \dot{\chi}$, і пры качэнні без слізгання $\omega = \dot{\chi} / r$. Карыстаючыся мадэллю, што на рысунку 2, і прымаючы да ўвагі залежнасць $X_D = fY_D$, знойдзем выражэнні: $T = m_{\text{пр}} \dot{\chi}^2 / 2, \sum N_i = (M / r - fY_D) \dot{\chi}$. Тады паводле роўнасці (4) атрымаем:

$$m_{\text{пр}} \ddot{\chi} = M / r - fY_D. \quad (5)$$

Тут $m_{\text{пр}} = m_A + \left(1 + \frac{i_{\xi}^2}{r^2} \right) m_B$ — прыведзеная маса сістэмы.

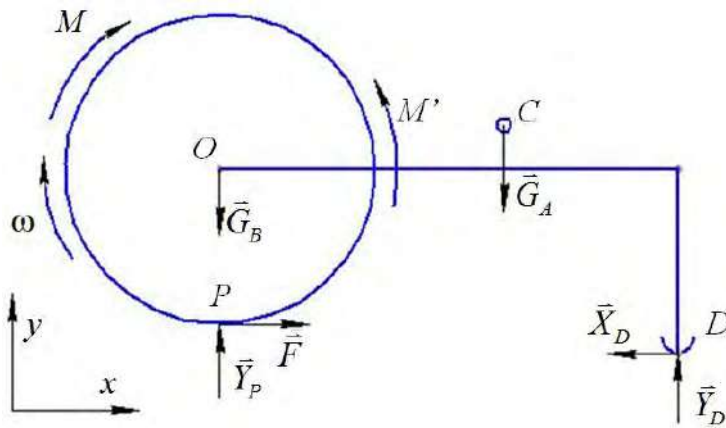


Рис. 2. Разліковая схема ўсёй мабільнай сістэмы

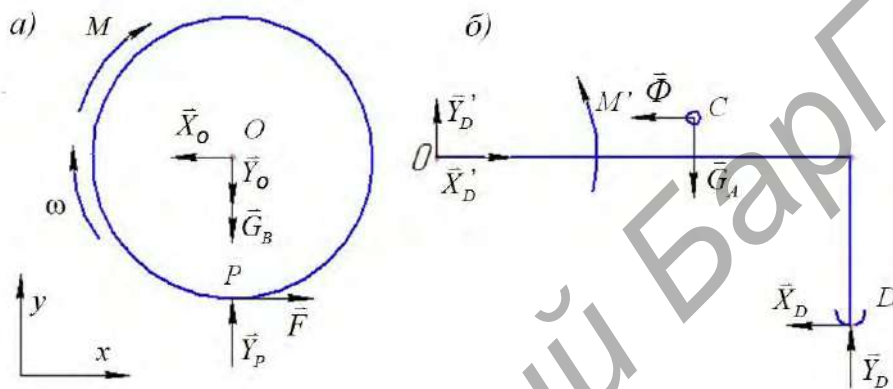


Рис. 3. Разліковыя схемы левай (а) і правай (б) частак

Каб выключыць з роўнасці (5) невядомую рэакцыю Y_D , складзем ураўненне метаду кінетастатиці асобна для цела A (рысунак, 3б): $\sum M_O(\vec{F}_i) = M' - G_A a - f Y_D c + Y_D b + \Phi h = 0$, дзе $\Phi = m_A a_C = m_A \ddot{x}$ — сіла інерцыі. Адсюль $Y_D = (G_A a - M' - m_A h \ddot{x}) / d$. Тут $d = b - fc$; $M' = M$. Падставляем Y_D у роўнасць (5) і ўводім абазначэнні: $a_1 = f + d/r$; $a_2 = f a m_A g$; $a_3 = m_{np} d - f h m_A$. Атрымліваем:

$$a_3 \ddot{x} = a_1 M - a_2. \quad (6)$$

Рух сістэмы пачынаецца пры дадатным паскарэнні, г. зн. Пры $\ddot{x} > 0$ ці $a_3 \ddot{x} > 0$. Але тады ва ўраўненні (6) і правая частка $(a_1 M - a_2) > 0$. Адсюль $M > a_2 / a_1$; а гэта азначае, што мінімальны пачатковы (стартавы) момант

$$M_{п} = a_2 / a_1, \quad (7)$$

Ведаючы $M_{п} = M(\tau)$, з формулы (3) знаходзім час τ пачатку руху сістэмы:

$$\tau = \frac{b_1}{b_2} \ln \left(\frac{b_3}{b_3 - b_2 M_{п}} \right). \quad (8)$$

Вызначэнне руху сістэмы ў пераходным рэжыме.

Каб знайсці скорасць $\vartheta = \dot{x}$ паступальнага руху сістэмы, пераўтворым сумесна ўраўненні (1) і (6). Вынік запішам ў выглядзе дыферэнцыяльнага ўраўнення другога парадку з пастаяннымі каэфіцыентамі:

$$\ddot{\vartheta} + 2n\dot{\vartheta} + k^2\vartheta = D, \quad (9)$$

дзе $n = b_2 / 2b_1$; $k = \sqrt{\alpha a_1 / r a_3 b_1}$; $D = (a_1 b_3 - a_2 b_2) / a_3 b_1$.

Паводле тыпавой metodyкі рашэнне ўраўнення (9) неабходна шукаць у выглядзе сумы $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2$. Для вызначэння \mathcal{G}_1 складаецца характарыстычнае ўраўненне $z^2 + 2nz + k^2 = 0$. Пры $n > k$ яго карані сапраўдныя: $z_{1,2} = -n \pm k_1$, дзе $k_1 = \sqrt{n^2 - k^2}$. А рашэнне \mathcal{G}_2 пры $D = \text{const}$ належыць шукаць у выглядзе пастаяннай. У выніку атрымаем:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(t) = C_1 e^{-(n-k_1)t} + C_2 e^{-(n+k_1)t} + D/k^2, \quad (10)$$

Тут C_1, C_2 – пастаянныя інтэгравання, што вызначаюцца з пачатковых умоў: пры $t = \tau$, $\mathcal{G}(\tau) = 0$, $\dot{\mathcal{G}}(\tau) = 0$. Пасля вызначэння пастаянных скорасць сістэмы пры $t \geq \tau$ знаходзіцца па формуле:

$$\mathcal{G}(t) = (D/2k_1 k^2) \left[-(n+k_1) e^{-(n-k_1)(t-\tau)} + (n-k_1) e^{-(n+k_1)(t-\tau)} + 2k_1 \right], \quad (11)$$

Даследуем скорасць паступальнага руху сістэмы. Для гэтай мэты выкарыстаем формулу (11), у якой $(t - \tau)$ — час руху механічнай сістэмы.

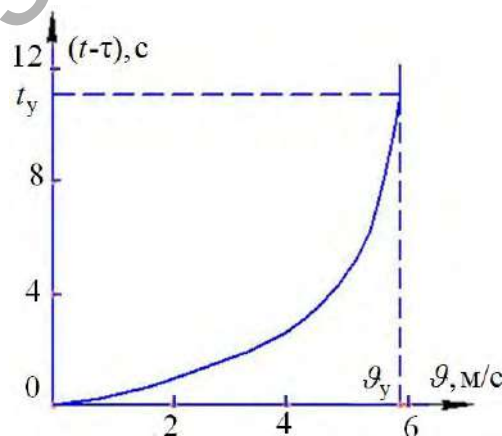
Прыклад. Дадзена: $m_A = 40 \text{ кг}$; $m_B = 90 \text{ кг}$; $r = 0,45 \text{ м}$; $i_\xi = 0,4 \text{ м}$; $f = 0,4 \text{ м}$; $a = 1,6 \text{ м}$; $h = 0,1 \text{ м}$; $b = 1,7 \text{ м}$; $c = 0,6 \text{ м}$; $\alpha = 3,5$; $b_1 = 2,28 \cdot 10^{-2}$; $b_2 = 0,20$; $b_3 = 60$.

Рашэнне. Аналіз формулы (11) паказвае, што праз пэўны час t_y першыя два складаемыя набліжаюцца да нуля і скорасць сістэмы вызначаецца толькі трэцім складаемым – усталяванай скорасцю $\mathcal{G}_y = D/k^2$.

Па атрыманых вышэй формулах знаходзім: $m_{\text{пр}} = 201,11 \text{ кг}$; $d = 1,46 \text{ м}$; $a_1 = 3,64$; $a_2 = 251,136 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $a_3 = 292,02 \text{ кг} \cdot \text{м}$; $\tau = 0,0296 \text{ с}$; $n = 5,482 \text{ с}^{-1}$; $k = 2,062 \text{ с}^{-1}$; $D = 25,258 \text{ м}^3/\text{с}^3$; $\mathcal{G}_y = 5,940 \text{ м/с}$; $k_1 = 5,079 \text{ с}^{-1}$; $n+k_1 = 10,561 \text{ с}^{-1}$; $n-k_1 = 0,403 \text{ с}^{-1}$; $2k_1 = 10,158 \text{ с}^{-1}$; паводле формулы (11)

$$\mathcal{G}(t) = 0,5848 \left[-10,561 e^{-0,403(t-0,0296)} + 0,403 e^{-10,561(t-0,0296)} + 10,158 \right] \quad (12)$$

На рысунку 2 паказаны графік змянення скорасці паступальнага руху сістэмы ў пераходным рэжыме.



Рыс. 4. Графік скорасці ў пераходным рэжыме руху

Час руху сістэмы ў пераходным рэжыме t_y можна набліжана вызначыць з першага складаемага формулы (11), прыняўшы яго дастаткова малым у выглядзе:

$(D/2k_1k^2)(n+k_1)e^{-(n-k_1)t_y} = \mu \mathcal{G}_y$. Для нашого прикладу при $\mu = 0,01$ атрымаем $t_y = 11,524$ с.

Даследаванне дынамічных і кінематычных характарыстык руху.

Для вывучэння залежнасцей дынамічных і кінематычных характарыстык мабільнай сістэмы ад суадносін мас m_A і m_B уводзім абзначэнні: $m_A/m_B = \eta$, $m_A + m_B = m$; тады атрымаем (a_1 не змяняецца): $a_2 = famg\eta/(1+\eta)$;

$$a_3 = \left[(d - fh)\eta/(1+\eta) + \left(1 + \frac{i_\xi^2}{r^2} \right) d/(1+\eta) \right] m; M_{\pi} = c_1 [1 - 1/(1+\eta)], \text{ дзе } c_1 = famg/a_1.$$

З апошняй формулы відаць, што пры $\eta \rightarrow \infty M_{\pi} \rightarrow c_1$.

Каб вывучыць уплыў трэння слізгання на тыя ж характарыстыкі, велічыні a_1, a_2, a_3, M_{π} мэтазгодна запісаць у выглядзе: $a_1 = b/r + (1 - c/r)f$;

$$a_2 = a[\eta/(1+\eta)]fmg; \quad a_3 = \left(1 + \eta + \frac{i_\xi^2}{r^2} \right) bm/(1+\eta) - \left[\left(1 + \eta + \frac{i_\xi^2}{r^2} \right) c + h\eta \right] mf/(1+\eta);$$

$$M_{\pi} = a[\eta/(1+\eta)]fmg/a_1.$$

Канкрэтызуем параметры сістэмы: $m_A = 40$ кг; $m_B = 90$ кг; $r = 0,45$ м; $i_\xi = 0,4$ м; $f = 0,4$ м; $a = 1,6$ м; $h = 0,1$ м; $b = 1,7$ м; $c = 0,6$ м; $\alpha = 3,5$; $b_1 = 2,28 \cdot 10^{-2}$; $b_2 = 0,20$; $b_3 = 60$; $\mu = 0,9$.

Вынікі разлікаў прадстаўлены ў графічным выглядзе на рысунках 5-7.

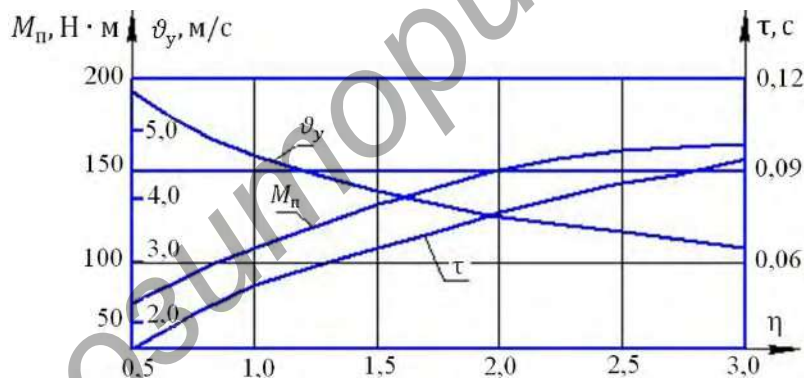


Рис. 5. Залежнасці пачатковага моманту M_{π} , усталюванай скорасці \mathcal{G}_y і часу τ пачатку руху ад суадносін мас η

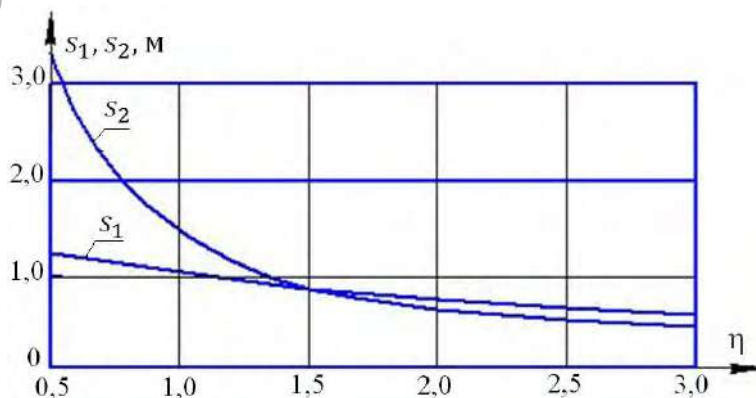
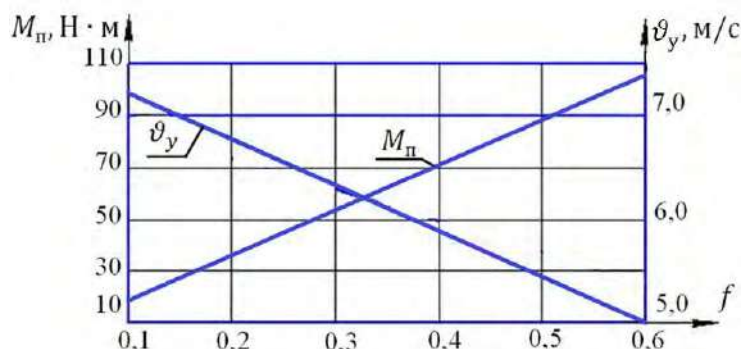


Рис. 6. Залежнасці тармажных шляхаў S_1, S_2 ад суадносін мас η



Рыс. 7. Залежнасць велічынь M_{π} і v_y ад каэфіцыента трэння f

Каб сумясціць вынікі разлікаў з інтуітыўным уяўленнем даследчыка, заўважым, што з павелічэннем суадносін η узрастае маса станіны m_A і яе ціск на апору D , а, значыць, і сіла трэння F_T . Тады натуральным падаецца (рысунак 5) паступовае ўзрастанне неабходнага стартавага моманту M_{π} і адрэзку часу τ_{π} , неабходнага для пачатку руху сістэмы. Паколькі пры любых значэннях η маса m_A застаецца меншай велічыны m , то і значэнні M_{π} , τ_{π} узрастаюць не бямежна, а набліжаюцца да некаторых гранічных значэнняў M_{π}^r , τ_{π}^r . Адначасова зніжаецца ўсталяванае значэнне скорасці v_y , якое таксама набліжаецца да гранічнага значэння v_y^r .

Велічыні гранічных параметраў знаходзім па формулах:

$$M_{\pi}^r = c_1 = \frac{f a m g}{a_1}; v_y^r = \frac{r(b_3 - b_2 M_{\pi}^r)}{a}; \tau_{\pi}^r = \frac{b_1}{b_2} \ln \left(\frac{b_3}{b_3 - b_2 M_{\pi}^r} \right).$$

Прыведзеным вышэй дадзеным адпавядаюць наступныя лікавыя значэнні:
 $M_{\pi}^r = 223,95 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $v_y^r = 1,95 \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $\tau_{\pi}^r = 0,16 \text{ с}$.

Паводле графікаў, што на рысунку 6, рэжымы тармажэння значна ўплываюць на тармажныя шляхі s_1, s_2 толькі пры $\eta \leq 1,2$. Пры большых значэннях η розніца ў велічынях s_1, s_2 не істотная. З рысунка 7 відаць, што залежнасці велічынь M_{π} і v_y ад каэфіцыента трэння слізгання носяць амаль лінейны характар.

ЛІТАРАТУРА

1. Чигарев, А. В. Курс теоретической механики: учеб. пособие / А. В. Чигарев, Ю. В. Чигарев. — Минск : Новое знание; М. : ЦУПЛ, 2010. — 397 с.
2. Хвясцько, Г. М. Курс тэарэтычнай механікі: вуч. дапаможнік / Г. М. Хвясцько. — Минск : БДТУ, 2000. — 354 с.
3. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики. Ч 2. Динамика : учебник для высших техн. уч. заведений / А. А. Яблонский. — М. : Высш. школа, 1971. — 488 с.
4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учебное пособие / коллектив авторов ; под общ. ред. А. А. Яблонского. — 18-е изд., стер. — М. : КНОРУС, 2011. — 392 с.