

## СРЕДНИЕ ФЕЙЕРА В ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Указаны условия, при которых тригонометрический ряд является рядом Фурье функции ограниченной или исчезающей средней осцилляции.

We give conditions for a trigonometric series to be the Fourier series of a function of bounded or vanishing mean oscillation.

**Введение.** Используем обозначения двухтомной монографии Р. Эдвардса [1]. Отличия: символ « := » означает, что правой части присвоено обозначение слева, аналогичный смысл имеет символ « =: ». Символ « ≡ » означает тождественное равенство.

Для двустороннего числового ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \quad (1)$$

через

$$s_N := \sum_{n=-N}^N a_n \quad (2)$$

обозначим  $N$ -ю симметричную частичную сумму этого ряда, где  $N \in \mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}$ . Если существует конечный предел  $s$  последовательности  $(s_N)_{N=0}^{\infty}$ , то двусторонний числовой ряд (1) называют сходящимся, число  $s$  называют суммой в смысле главного значения двустороннего числового ряда (1) и пишут  $\text{P.V.} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = s$ . Обозначение “P.V.” от английских слов “principal value”, которые переводятся как «главное значение». Если последовательность симметричных частичных сумм  $(s_N)_{N=0}^{\infty}$  не имеет конечного предела, то говорят, что двусторонний числовой ряд (1) расходится.

Например, для ряда Эйлера  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n$  все  $(N \in \mathbb{Z}_+)$  симметричные частичные суммы (2) с чётными номерами  $s_{2N} = 1$ , а с нечётными номерами  $s_{2N+1} = -1$ . Последовательность  $(s_N) \equiv ((-1)^N)_{N=0}^{\infty}$  ограничено колеблется, её предел  $s$  не существует, и, следовательно, ряд Эйлера расходится.

Если последовательность симметричных частичных сумм (2) двустороннего вещественного ряда (1) имеет предел  $s$  (конечный, или  $-\infty$ , или  $\infty$ ), то согласно О. Коши (1821 г.) последовательность средних арифметических

$$\forall N \in \mathbb{Z}_+ \quad \sigma_N := \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_N}{N+1} \quad (3)$$

сходится к тому же самому пределу  $s$  [2, с. 103]:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N = s \in \bar{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\} \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N = s. \quad (4)$$

В случае расходящегося ряда Эйлера  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n$  средние арифметические (3) с чётными номерами  $\sigma_{2N} = \frac{1}{2N+1}$ , а с нечётными номерами  $\sigma_{2N+1} = 0$ . Следовательно, предел последовательности  $(\sigma_N)_{N=0}^{\infty}$  существует и равен нулю:  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N = 0$ . На этом примере ряда Эйлера видно, что обращение импликации Коши (4) не имеет места.

Итак, средние (3) ограниченно расходящегося ряда Эйлера сходятся к нулю, который принимают за его неклассическую сумму и пишут  $P.V.(C,1) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n = 0$ . Исторически символ «(C,1)» ассоциируется с суммой Чезаро (Cesàro) первого порядка.

Теории суммируемости расходящихся числовых рядов на русском языке посвящены монографии Г. Харди [3], Р. Кука [4] и С. А. Барона [5].

Функция  $f \in L^1(T)$  порождает, во-первых, двустороннюю числовую последовательность её тригонометрических коэффициентов Фурье и, во-вторых, двусторонний функциональный

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f^{\wedge}(n) e^{inx} \quad (5)$$

её тригонометрический ряд Фурье.

Дюбуа-Реймон (1873 г.) явно построил на вещественной прямой  $R$  непрерывную и периодическую с периодом  $2\pi$  функцию  $f_1$ , для которой последовательность симметричных частичных сумм

$$\forall N \in Z_+ \quad s_N f_1(0) := \sum_{n=-N}^N f_1^{\wedge}(n) e^{in0}$$

не ограничена (и тем более не сходится):

$$\exists f_1 \in C(T) \quad \sup_{N \in Z_+} |s_N f_1(0)| = \infty. \quad (6)$$

В 1900 г. в докладах Парижской академии наук было опубликовано исследование Л. Фейера, согласно которому средние

$$\forall N \in Z_+ \quad \sigma_N f(x) := \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N s_n f(x) = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) f^{\wedge}(n) e^{inx} \quad (7)$$

тригонометрического ряда Фурье (5) любой непрерывной и  $2\pi$ -периодической функции  $f$  равномерно сходятся на  $R$  к ней:

$$\forall f \in C(T) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{-\pi \leq x \leq \pi} |f(x) - \sigma_N f(x)| = 0. \quad (8)$$

На современников исследование Фейера [6] и его развёрнутая версия [7] произвели большое впечатление. Им были известны импликация Коши (4) и пример Дюбуа-Реймона (6). Поэтому результат Фейера (8) открывал существенно новое в поведении тригонометрических рядов Фурье (5) и порождал новые теории суммируемости рядов Фурье по тригонометрической и ортогональным системам функций в вещественной и комплексной областях. До Второй мировой войны это признавали G. H. Hardy (Encyclopaedia Britannica, 1922), A. Rajchman, A. Zygmund (Mathematische Zeitschrift. 1926. Band 24. S. 47—104). На послевоенные оценки повлиял следующий биографический факт. Когда Германия внезапно за одну ночь оккупировала территорию своего верного боевого союзника, математик G. Alexits был депортирован в Dachau, а его коллега L. Fejér — нет, хотя и был уволен из Будапештского университета как расово чуждый, и приветствовал Красную Армию.

Сейчас доминирует название средние Фейера над названиями: средние арифметические первых симметричных частичных сумм, средние Чезаро первого порядка, средние Гёльдера (Hölder) первого порядка.

Настоящую работу мотивирует тригонометрический ряд [8]

$$\left( \sum_{n=-\infty}^{-2} + \sum_{n=2}^{\infty} \right) \frac{\operatorname{sgn} n}{\ln |n|} e^{inx},$$

который, во-первых, сходится в каждой точке  $x$  вещественной прямой  $R$  и, во-вторых, не является рядом Фурье—Лебега ни своей суммой, ни другой функции, т. е. не существует функции  $f \in L^1(T)$

такой, что  $\forall n \in Z \setminus \{-1, 0, 1\} \quad \frac{\operatorname{sgn} n}{\ln |n|} = f^{\wedge}(n)$ .

В данной работе мы отвечаем на вопрос «Когда тригонометрический ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (9)$$

является рядом Фурье (5) функции  $f$  из определённого пространства?» в терминах средних Фейера ряда (9).

### Средние Фейера для классических пространств функций

$$C(T) \subset L^\infty(T) \subset \bigcap_{1 < p < \infty} L^p(T) \subset L^1(T). \quad (10)$$

По теореме Рисса—Фишера [9], для того чтобы тригонометрический ряд (9) являлся рядом Фурье (5) некоторой функции  $f$  из пространства Гильберта  $L^2(T)$ , т. е. чтобы  $\exists f \in L^2(T) \forall n \in Z c_n = f^\wedge(n)$ , необходимо и достаточно, чтобы ряд из квадратов модулей его коэффициентов

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

сходился, т. е. последовательность  $\left( \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \right)_{N=0}^\infty$  была ограниченной. Кратко эту фундаментальную теорему записывают так:

$$(9) \in L^2(T) \Leftrightarrow (c_n)_{n=-\infty}^\infty \in l^2(Z). \quad (11)$$

Равенство Парсеваля для тригонометрических полиномов [10, с. 21]

$$\forall N \in Z_+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) c_n e^{inx} \right|^2 dx = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right)^2 |c_n|^2$$

подсказывает, что теорема Рисса—Фишера (11) может быть записана в виде [11, с. 19]

$$(9) \in L^2(T) \Leftrightarrow \sup_{N \in Z_+} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) c_n e^{inx} \right|^2 dx < \infty,$$

который уже допускает обобщение с показателя  $p = 2$  на показатели  $1 < p \leq \infty$ .

Согласно теореме У. и Дж. Юнгов [12]

$$\forall p \in (1, \infty) (9) \in L^p(T) \Leftrightarrow \sup_{N \in Z_+} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) c_n e^{inx} \right|^p dx < \infty. \quad (12)$$

Если функция  $f \in L^1(T)$ , то по теореме Римана—Лебега [13] её тригонометрические коэффициенты Фурье стремятся к нулю с возрастанием модуля их номера. Поэтому тригонометрический ряд

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}$  заведомо не является рядом Фурье функции из пространства  $L^1(T)$ , хотя нормы всех его средних Фейера в  $L^1(T)$  равны единице [14, с. 98—99]:

$$\forall N \in Z_+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e^{inx} \right| dx = \frac{1}{2\pi(N+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{\sin \left[ (N+1) \frac{x}{2} \right]}{\sin \frac{x}{2}} \right\}^2 dx = 1.$$

Итак, ограниченность средних Фейера тригонометрического ряда (9) в пространстве  $L^1(T)$  не влечёт, что ряд (9) является рядом Фурье—Лебега (5).

Т а б л и ц а 1 — Таблица истинности импликации

Посылка $A$	Заключение $B$	Импликация $A \Rightarrow B$
Истина	Истина	Истина
Истина	Ложь	Ложь
Ложь	Истина	Истина
Ложь	Ложь	Истина

Таким образом, утверждение «(A): ограниченность средних Фейера тригонометрического ряда (9) в пространстве  $X$  влечёт, что (9) является рядом Фурье (5) функции из  $X$ » в общем случае является ложным.

В связи с предыдущим напоминаем таблицу истинности импликации  $A \Rightarrow B$  (читается:  $A$  влечёт  $B$ ;  $B$  следует из  $A$ ; если  $A$ , то  $B$ ;  $A$  достаточно для  $B$ ;  $B$  необходимо для  $A$ ) (таблица 1).

Иными словами, по законам логики из истины можно вывести только истину, из истины вывести ложь нельзя, а из лжи можно вывести как истину, так и ложь.

По теореме У. Юнга [15], для того чтобы тригонометрический ряд (9) являлся рядом Фурье (5) некоторой функции  $f$  из пространства  $L^\infty(T)$ , необходимо и достаточно, чтобы последовательность его средних Фейера была ограниченной в пространстве  $C(T)$ , т. е.

$$(9) \in L^\infty(T) \Leftrightarrow \sup_{N \in \mathbb{Z}_+} \max_{-\pi \leq x \leq \pi} \left| \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) c_n e^{inx} \right| < \infty. \quad (13)$$

Относительно крайних пространств  $L^1(T)$  и  $C(T)$  шкалы (10) известны соответственно теорема Гросса—Штейнгауза [16, с. 168] и стартовая теорема Фейера (8) (последняя может быть приведена в нижеследующей редакции [17]): для того чтобы тригонометрический ряд (9) являлся рядом Фурье (5) некоторой функции  $f$  из пространства Штейнгауза  $L^1(T)$  или функции  $f \in C(T)$ , необходимо и достаточно, чтобы последовательность его средних Фейера сходилась в соответствующем пространстве.

Каждая сходящаяся последовательность элементов метрического пространства ограничена в нём. На примере ограниченно колеблющейся последовательности  $\left((-1)^N\right)_{N=0}^\infty$  видно, что обращение предыдущего утверждения в общем случае является ложным.

Если функция  $f \in L^p(T)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , то последовательность средних Фейера (7) её тригонометрического ряда Фурье (5) сходится в метрике пространства  $L^p(T)$  к ней [18]. Сопоставление этого результата с теоремой У. и Дж. Юнгов (12) приводит к выводу, что в пространствах Ф. Рисса  $L^p(T)$ , где  $1 < p < \infty$ , ограниченность последовательности средних Фейера равносильна их сходимости. Интересно было бы выяснить, в каких функциональных пространствах ограниченность последовательности равносильна их сходимости.

Напомним, что пространство  $L^\infty(T)$  не является сепарабельным [19, с. 232].

**Средние Фейера для функций ограниченной средней осцилляции.** В 1961 г. в своих исследованиях по теории дифференциальных уравнений в частных производных Джон (F. John) и Ниренберг (L. Nirenberg) ввели пространства **ВМО** функций ограниченной средней осцилляции (bounded mean oscillation).

По определению [20] вещественная функция  $f \in L^1(T)$  принадлежит пространству **ВМО**( $T$ ), если конечна её \*-полуорма

$$\|f\|_* := \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I f(x) - \frac{1}{|I|} \int_I f(t) dt \, dx, \quad (14)$$

где верхняя грань берётся по всем отрезкам  $I \subset \mathbb{R}$  и где  $|I|$  есть длина отрезка  $I$ . Очевидно, что  $\|\text{const}\|_* = 0$ . Норма  $\|f\|_{\text{ВМО}} := \|f\|_1 + \|f\|_*$ . Когда функция  $f \in L^\infty(T)$ , то  $\|f\|_* \leq 2\|f\|_\infty$ .

Хотя  $\forall f \in L^\infty(T) \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$  [21, с. 14], между вещественным пространством  $L^\infty(T)$  и вещественными пространствами Ф. Рисса  $\bigcap_{1 < p < \infty} L^p(T)$  имеется зазор, в котором находится

пространство  $\mathbf{BMO}(T)$ :  $\mathbf{L}^\infty(T) \subsetneq \mathbf{BMO}(T) \subsetneq \bigcap_{1 < p < \infty} \mathbf{L}^p(T)$ . Неограниченная  $2\pi$ -периодическая функция

$$f_2(x) := \begin{cases} |\ln|x||, & \text{когда } x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi], \\ 0, & \text{когда } x = 0, \end{cases} \quad (15)$$

принадлежит разности  $\mathbf{BMO}(T) \setminus \mathbf{L}^\infty(T)$  [22], а неограниченная  $2\pi$ -периодическая функция

$$f_3(x) := \begin{cases} \ln x, & \text{когда } x \in (0, \pi], \\ 0, & \text{когда } x \in (-\pi, 0], \end{cases}$$

принадлежит разности  $\bigcap_{1 < p < \infty} \mathbf{L}^p(T) \setminus \mathbf{BMO}(T)$  [23].

Как известно, тригонометрический ряд (9) является вещественным только тогда, когда  $\forall N \in \mathbb{Z}_+$

$\overline{c_n} = c_{-n}$ , где горизонтальная черта сверху означает комплексное сопряжение.

**Теорема 1.** Для того чтобы вещественный тригонометрический ряд (9) являлся рядом Фурье (5) некоторой функции  $f$  ограниченной средней осцилляции, необходимо и достаточно, чтобы последовательность  $*$ -полуноrm (14) его средних Фейера была ограниченной:

$$\sup_{N \in \mathbb{Z}_+} \left\| \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) c_n e^{inx} \right\|_* < \infty. \quad (16)$$

Для функции (15) справедлива оценка снизу

$$\inf_{N \in \mathbb{Z}_+} \|f_2 - \sigma_N f_2\|_* \geq \frac{1}{2e}, \quad (17)$$

где  $e$  — основание натурального логарифма.

В случае функции  $f \in \mathbf{L}^p(T)$ ,  $1 < p \leq \infty$  для последовательности средних Фейера (7) её тригонометрического ряда Фурье (5) имеем [24]

$$\sup_{N \in \mathbb{Z}_+} \|\sigma_N f\|_p < \infty, \quad (18)$$

а в случае функции  $f \in \mathbf{L}^p(T)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , как уже отмечалось, последовательность средних Фейера (7) её тригонометрического ряда Фурье (5) сходится в метрике пространства  $\mathbf{L}^p(T)$  к ней:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - \sigma_N f\|_p = 0. \quad (19)$$

Сопоставление неравенств (16) и (18) и оценки снизу (17) с предельным равенством (19) приводит к выводу, что в теории представления функций пространство  $\mathbf{BMO}(T)$  теснее связано с несепарабельным вещественным пространством  $\mathbf{L}^\infty(T)$ , чем со всеми сепарабельными вещественными пространствами Ф. Рисса  $\mathbf{L}^p(T)$ ,  $1 < p < \infty$ .

Справедливость первой части теоремы 1, когда  $f \in \mathbf{BMO}(T) \Leftrightarrow (16)$ , вытекает из леммы 1 [25] и леммы 2 [26].

**Лемма 1.** Если функция  $f \in \mathbf{BMO}(T)$ , то

$$\sup_{N \in \mathbb{Z}_+} \|\sigma_N f\|_* < \infty.$$

Ряды Фурье по системе  $(w_n(x))_{n=0}^\infty$  функций Уолша в нумерации Пэли считаются наиболее близкими по своим свойствам к рядам Фурье по тригонометрической системе. Поэтому интересно выяснить, справедлив ли для рядов Фурье—Уолша—Пэли аналог леммы 1, когда функция  $f$  принадлежит пространству  $\mathbf{BMO}[0, 1)$  или диадическому пространству  $\mathbf{BMO}_d[0, 1)$  [27]:  $\mathbf{BMO}[0, 1) \subsetneq \mathbf{BMO}_d[0, 1)$ . В связи с последней задачей напомним два обстоятельства.

Во-первых, если исключить значения в точках разрыва, то для первых восьми функций Уолша в нумерации Пэли имеем  $w_0(x) = 1$ ,  $w_1(x) = \operatorname{sgn} \sin 2\pi x$ ,  $w_2(x) = \operatorname{sgn} \sin 4\pi x$ ,  $w_3(x) = \operatorname{sgn} \cos 2\pi x$ ,  $w_4(x) = \operatorname{sgn} \sin 8\pi x$ ,  $w_5(x) = \operatorname{sgn} \cos 6\pi x$ ,  $w_6(x) = \operatorname{sgn} \cos 4\pi x$ ,  $w_7(x) = \operatorname{sgn} \sin 6\pi x$ . Отсюда видно, что первым восьми функциям системы Уолша—Пэли  $(w_n(x))_{n=0}^{\infty}$  соответствуют не первые восемь функций вещественной 1-периодической тригонометрической системы  $(1, \cos 2\pi x, \sin 2\pi x, \dots, \cos 2\pi x, \sin 2\pi x, \dots)$ , а первые восемь функций некоторой переставленной тригонометрической системы.

Во-вторых, Г. Моргенталер, ученик А. Зигмунда, для рядов по системе  $(w_n(x))_{n=0}^{\infty}$  функций Уолша в нумерации Пэли доказал аналоги теорем У. Юнга (13) [28, с. 487], Л. Фейера (8) [29], Гросса—Штейнгауза [30]. Однако полной аналогии нет; сравните [31, с. 489, теорема XVI] или [32, с. 250, теорема 4] с [33, с. 222, теорема (4.3)] и [34, с. 491, теорема XVIII] с [35, с. 282, теорема (11.4)].

**Лемма 2.** Если ограничена последовательность \*-полуноrm (14) средних Фейера

$$\forall N \in \mathbb{Z}_+ \sum_{n=-N}^N \left(1 - \left|\frac{n}{N+1}\right|\right) c_n e^{inx} \quad (20)$$

вещественного тригонометрического ряда (9), то этот ряд является рядом Фурье (5) некоторой функции  $f$  ограниченной средней осцилляции:  $(16) \Rightarrow \exists f \in \mathbf{BMO}(T) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n = \hat{f}(n)$ .

Приведём доказательство леммы 2, которое опирается на следующий фундаментальный результат [36].

**Теорема Карлесона—Ханта.** Если функция  $f$  принадлежит пространству Ф. Рисса  $\mathbf{L}^p(T)$ ,  $1 < p < \infty$ , то её тригонометрический ряд Фурье (5) сходится почти всюду на вещественной прямой  $\mathbb{R}$  к ней:  $s_N f(x) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{п.в.}} f(x)$ . Более того, мажоранта модуля частичных сумм  $s^* f(x) := \sup_{N \in \mathbb{Z}_+} |s_N f(x)|$  принадлежит  $\mathbf{L}^p(T)$  и удовлетворяет неравенству  $\|s^* f\|_p \leq A_1(p) \|f\|_p$ , где константа  $A_1$  зависит только от показателя  $p$ .

**Доказательство** леммы 2.

**Шаг 1.** Воспользуемся следующим обращением неравенства Гёльдера [37]: если функция  $f \in \mathbf{BMO}(T)$ , то

$$\forall p \in (1, \infty) \left( \sup_I \left| \frac{1}{|I|} \int_I f(x) - \frac{1}{|I|} \int_I f(t) dt \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq A_2(p) \|f\|_*$$

где константа  $A_2$  зависит только от показателя  $p$ . Тогда из (16) для отрезка  $I = [-\pi, \pi]$  с учётом  $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} dt = 0$  имеем

$$\forall p \in (1, \infty) \sup_{N \in \mathbb{Z}_1} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left( \sum_{n=-N}^{-1} + \sum_{n=1}^N \right) \left(1 - \left|\frac{n}{N+1}\right|\right) c_n e^{inx} \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Отсюда на основании репликации ( $\Leftrightarrow$ ) У. и Дж. Юнгов (12) получаем, что тригонометрический ряд  $\left( \sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \right) c_n e^{inx}$  является рядом Фурье некоторой функции  $g \in \bigcap_{1 < p < \infty} \mathbf{L}^p(T)$ :  $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad c_n = \hat{g}(n)$ .

Стало быть, исходный вещественный тригонометрический ряд (9) является рядом Фурье (5) функции  $f := g + c_0 \in \bigcap_{1 < p < \infty} \mathbf{L}^p(T)$ :  $\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n = \hat{f}(n)$ .

**Шаг 2.** Докажем, что функция  $f$  на самом деле принадлежит собственной части  $\mathbf{BMO}(T)$  пересечения пространств Рисса  $\bigcap_{1 < p < \infty} \mathbf{L}^p(T)$ .

Обозначим конечную верхнюю грань в (16) через  $A_3$ . Тогда с учётом результата шага 1 неравенство (16) примет следующий вид:

$$A_3 = \sup_{N \in \mathbb{Z}_+} \sup_I \left| \frac{1}{|I|} \int_I \left( \sigma_N f(x) - \frac{1}{|I|} \int_I \sigma_N f(t) dt \right) dx \right| < \infty. \quad (21)$$

В последнем неравенстве при фиксированном отрезке  $I$  перейдём к пределу по  $N \rightarrow \infty$ .

Так как функция  $f \in \cap_{1 < p < \infty} \mathbf{L}^p(T)$ , то по теореме Карлесона—Ханта её частичные суммы  $s_N f(x) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{п. в.}} f(x)$ . Тогда в силу импликации Коши (4) её средние Фейера  $\sigma_N f(x) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{п. в.}} f(x)$ . Очевидно, что средние Фейера имеют согласно той же теореме Карлесона—Ханта интегрируемую по Лебегу мажоранту

$$\forall N \in \mathbf{Z}_+ \quad |\sigma_N f(x)| \leq \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N |s_n f(x)| \leq s^* f(x) \in \cap_{1 < p < \infty} \mathbf{L}^p(T).$$

С учётом вышесказанного из (21) на основании теоремы А. Лебега о мажорированной сходимости [38] имеем

$$\frac{1}{|I|} \int_I \left| f(x) - \frac{1}{|I|} \int_I f(t) dt \right| dx \leq A_3 < \infty.$$

Отсюда, так как отрезок  $I$  — произвольный, в силу определения (14) \*-полуnormы получаем  $\|f\|_* \leq A_3 < \infty$ .

Лемма 2 доказана.

Заметим, что при доказательстве леммы 2 весь потенциал фундаментальной теоремы Карлесона—Ханта не был использован.

**Доказательство** оценки снизу (17). При любом фиксированном  $N \in \mathbf{Z}_+$  среднее Фейера  $\sigma_N f_2(x)$  в силу (7), очевидно, непрерывно и  $2\pi$ -периодично на вещественной прямой  $\mathbf{R}$ :  $\sigma_N f_2 \in \mathbf{C}(T)$ . По теореме Кантора оно равномерно непрерывно на  $\mathbf{R}$ : для любого вещественного числа  $\varepsilon > 0$  существует такое вещественное число  $\delta > 0$ , что для любой пары вещественных чисел  $x_1$  и  $x_2$ , удовлетворяющих условию  $|x_1 - x_2| \leq \delta$ , выполняется неравенство

$$|\sigma_N f_2(x_1) - \sigma_N f_2(x_2)| \leq \varepsilon. \quad (22)$$

Интегральное среднее

$$\frac{1}{\delta} \int_0^\delta f_2(t) dt = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \ln t dt = \ln \delta - 1.$$

Тогда

$$\frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left| f_2(x) - \frac{1}{\delta} \int_0^\delta f_2(t) dt \right| dx = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |\ln x - \ln \delta + 1| dx.$$

С помощью функции распределения

$$m(\lambda) := \text{mes} \{ x \in (0, \delta) : |\ln x - \ln \delta + 1| > \lambda \}$$

получаем [39, с. 55]

$$\frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left| f_2(x) - \frac{1}{\delta} \int_0^\delta f_2(t) dt \right| dx = \frac{1}{\delta} \int_0^\infty m(\lambda) d\lambda. \quad (23)$$

Если рассматривать только те вещественные  $x \in (0, \delta)$ , для которых отрицательно выражение  $\ln x - \ln \delta + 1$ , то мера

$$\text{mes} \{ x : |\ln x - \ln \delta + 1| > \lambda \} = \text{mes} \{ x : \ln \delta - 1 - \ln x > \lambda \} = \delta e^{-\lambda-1}.$$

Поэтому левая часть (23)

$$\frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left| f_2(x) - \frac{1}{\delta} \int_0^\delta f_2(t) dt \right| dx \geq \frac{1}{\delta} \int_0^\infty \delta e^{-\lambda-1} d\lambda = \frac{1}{e}. \quad (24)$$

Для вещественных  $x \in (0, \delta)$  с помощью неравенства (22) получаем

$$\begin{aligned} \left| \sigma_N f_2(x) - \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \sigma_N f_2(t) dt \right| &= \left| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \sigma_N f_2(x) dt - \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \sigma_N f_2(t) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left| \sigma_N f_2(x) - \sigma_N f_2(t) \right| dt \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

До сих пор  $\varepsilon > 0$  было произвольным. Теперь фиксируем  $\varepsilon := \frac{1}{2e}$ . Тогда из предыдущего неравенства имеем

$$\left| \sigma_N f_2(x) - \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \sigma_N f_2(t) dt \right| \leq \frac{1}{2e}. \quad (25)$$

Так как длина любой стороны треугольника больше модуля разности длин двух других сторон этого треугольника, то согласно определению (14) \*-полуноормы

$$\begin{aligned} \|f_2 - \sigma_N f_2\|_* &\geq \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left| f_2(x) - \sigma_N f_2(x) - \frac{1}{\delta} \int_0^\delta [f_2(t) - \sigma_N f_2(t)] dt \right| dx \geq \\ &\geq \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left| \left| f_2(x) - \frac{1}{\delta} \int_0^\delta f_2(t) dt \right| - \left| \sigma_N f_2(x) - \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \sigma_N f_2(t) dt \right| \right| dx. \end{aligned}$$

Отсюда в силу неравенств (24) и (25) получаем

$$\begin{aligned} \|f_2 - \sigma_N f_2\|_* &\geq \\ &\geq \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left| f_2(x) - \frac{1}{\delta} \int_0^\delta f_2(t) dt \right| dx - \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left| \sigma_N f_2(x) - \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \sigma_N f_2(t) dt \right| dx \geq \frac{1}{e} - \frac{1}{2e} = \frac{1}{2e}. \end{aligned}$$

Поскольку  $N$  — произвольное неотрицательное целое число, то оценка снизу (17) доказана.

Заметим, что при доказательстве (17) в использовании строгого и нестрогого неравенств мы следовали Л. Шварцу [40, с. 22]: употребляли знак строгого неравенства только в тех случаях, когда заменить его нестрогим неравенством нельзя.

**Средние Фейера для функций исчезающей средней осцилляции.** Пусть вещественная функция  $f \in L^1(T)$  и вещественное число  $\delta > 0$ . Положим

$$M_\delta(f) := \sup_{|I| \leq \delta} \frac{1}{|I|} \int_I \left| f(x) - \frac{1}{|I|} \int_I f(t) dt \right| dx.$$

Согласно Сарасону (Sarason) функция  $f$  имеет исчезающую среднюю осцилляцию (vanishing mean oscillation), если  $\lim_{\delta \rightarrow 0+0} M_\delta(f) = 0$ . Пишут  $f \in \mathbf{VMO}(T)$ . Очевидно, что \*-полуноорма (14)

$$\|f\|_* = \lim_{\delta \rightarrow 2\pi-0} M_\delta(f). \text{ Также очевидно, что } \mathbf{C}(T) \subset \mathbf{VMO}(T) \subset \mathbf{BMO}(T).$$

**Теорема 2.** Для того чтобы вещественный тригонометрический ряд (9) являлся рядом Фурье (5) некоторой функции  $f$  исчезающей средней осцилляции, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его средних Фейера сходилась в \*-полуноorme (14).

Сравните необходимое условие в теореме 2 с оценкой снизу (17).

Необходимость условия теоремы 2 вытекает из леммы 3.

**Лемма 3.** Если функция  $f \in \mathbf{VMO}(T)$ , то последовательность средних Фейера (7) сходится в \*-полуноorme (14) к ней:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - \sigma_N f\|_* = 0. \quad (26)$$

Ещё раз сравните предельное равенство (26) с оценкой снизу (17).

Тригонометрический ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i \cdot \operatorname{sgn} n) f^{\wedge}(n) e^{inx} \quad (27)$$

называется сопряжённым с тригонометрическим рядом Фурье (5) функции  $f \in L^1(T)$ . Если тригонометрический ряд (27) является рядом Фурье некоторой функции, то её называют тригонометрически сопряжённой к функции  $f$  и обозначают через  $\tilde{f}$ .

Когда функция  $f \in L^1(T)$ , то

$$f(x) \stackrel{\text{п. в.}}{=} \lim_{R \rightarrow 1-0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} f^{\wedge}(n) e^{inx}, \quad (28)$$

$$\tilde{f}(x) \stackrel{\text{п. в.}}{=} \lim_{R \rightarrow 1-0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} (-i \cdot \operatorname{sgn} n) f^{\wedge}(n) e^{inx}, \quad (29)$$

где символ « $\stackrel{\text{п. в.}}{=}$ » означает равенство почти всюду на вещественной прямой  $R$ . Иными словами, тригонометрический ряд Фурье (5) функции  $f \in L^1(T)$  и сопряжённый с ним тригонометрический ряд (27) суммируем методом Абеля ( $\Leftrightarrow$  методом Абеля—Пуассона) почти всюду на  $R$  соответственно к  $f(x)$  и  $\tilde{f}(x)$ . В правых частях (28) и (29) стоят функции, которые образуют пару гармонически сопряжённых в единичном круге  $z = re^{ix}$  функций, где модуль  $r := |z| \in [0, 1)$  и главное значение аргумента  $x := \arg z \in (-\pi, \pi]$ . Это объясняет, почему функция  $\tilde{f}$  названа тригонометрически сопряжённой к  $f$ .

Если функция  $f$  принадлежит пространству Ф. Рисса  $L^p(T)$ ,  $1 < p < \infty$ , то и тригонометрически сопряжённая функция  $\tilde{f}$  принадлежит тому же пространству  $L^p(T)$ . Если же  $f \in \mathbf{BMO}(T)$ , то и  $\tilde{f} \in \mathbf{BMO}(T)$ . В случае  $f \in L^\infty(T)$  можно лишь утверждать, что  $\tilde{f} \in \mathbf{BMO}(T)$ . Напоминаем, что имеют место строгие включения  $L^\infty(T) \subsetneq \mathbf{BMO}(T) \subsetneq \bigcap_{1 < p < \infty} L^p(T)$ .

По аналогии с тригонометрическим рядом (27), сопряжённым с тригонометрическим рядом Фурье (5) функции  $f \in L^1(T)$ , и по аналогии с функцией  $\tilde{f}$ , тригонометрически сопряжённой к функции  $f$ , вводились понятия сопряжённого ряда и сопряжённой функции для других ортогональных рядов. Например, Макенхоупт и Стейн — для ультрасферических рядов [41, с. 24], Макенхоупт — для рядов Эрмита [42], Макенхоупт — для рядов Лагерра [43, с. 416], Хант — для рядов Уолша [44], П. Л. Бутцер и Р. Л. Штэнс — для рядов Фурье по системе многочленов Чебышёва первого рода [45, с. 56], И. Йо — для рядов Дирихле [46] и разложения Штурма—Лиувилля [47].

**Доказательство** леммы 3. Если функция  $f \in \mathbf{VMO}(T)$ , то по теореме Сарасона [48] можно найти две функции  $\phi \in C(T)$  и  $\psi \in C(T)$  такие, что  $f(x) = \phi(x) + \tilde{\psi}(x)$  и  $\|\phi\|_{C(T)} \leq A_4 \|f\|_*$ ,  $\|\psi\|_{C(T)} \leq A_4 \|f\|_*$  при некоторой постоянной  $A_4$ . Норма  $\|\phi\|_{C(T)} := \max_{-\pi \leq x \leq \pi} |\phi(x)|$ . Так как длина любой стороны треугольника меньше суммы длин двух других сторон этого треугольника, то

$$\|f - \sigma_N f\|_* \leq \|\phi - \sigma_N \phi\|_* + \|\tilde{\psi} - \sigma_N \tilde{\psi}\|_*.$$

Поскольку разность  $\phi - \sigma_N \phi \in C(T) \subset \mathbf{BMO}(T)$ , то  $\|\phi - \sigma_N \phi\|_* \leq 2 \|\phi - \sigma_N \phi\|_{C(T)}$  [49]. Для разности  $\tilde{\psi}(x) - \sigma_N \tilde{\psi}(x)$ , тригонометрически сопряжённой к разности  $\psi(x) - \sigma_N \psi(x)$ , согласно теореме Спанне—Стейна [50] имеем  $\|\tilde{\psi} - \sigma_N \tilde{\psi}\|_* \leq A_5 \|\psi - \sigma_N \psi\|_{C(T)}$ , где  $A_5$  — абсолютная постоянная.

Таким образом,

$$\|f - \sigma_N f\|_* \leq 2 \|\phi - \sigma_N \phi\|_{C(T)} + A_5 \|\psi - \sigma_N \psi\|_{C(T)}.$$

Отсюда следует (26), так как средние Фейера (7) тригонометрических рядов Фурье непрерывных и  $2\pi$ -периодических функций  $\phi$  и  $\psi$  в силу (8) равномерно сходятся на вещественной прямой  $R$  соответственно к  $\phi$  и  $\psi$ .

Лемма 3 доказана.

Достаточность условия теоремы 2 вытекает из леммы 4.

**Лемма 4.** Если последовательность средних Фейера (20) вещественного тригонометрического ряда (9) сходится в \*-полунорме (14), то ряд (9) является рядом Фурье (5) некоторой функции  $f$  исчезающей средней осцилляции.

**Доказательство.** Шаг 1. Из сходимости средних Фейера (20) вещественного тригонометрического ряда (9) в \*-полунорме (14) вытекает их ограниченность в этой полунорме. Отсюда на основании леммы 2 следует, что ряд (9) является рядом Фурье (5) некоторой функции  $f$  ограниченной средней осцилляции: (16)  $\Rightarrow \exists f \in \mathbf{BMO}(T) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n = f^\wedge(n)$ .

Шаг 2. Докажем, что функция  $f$  на самом деле принадлежит собственной части  $\mathbf{VMO}(T) \subset \mathbf{BMO}(T)$ .

Так как  $\forall N \in \mathbb{Z}_+$  средние Фейера  $\sigma_N f \in \mathbf{C}(T)$ , пространство Сарасона  $\mathbf{VMO}(T)$  является замыканием в \*-полунорме (14) пространства  $\mathbf{C}(T)$  [51] и по условию с учётом результата шага 1 имеет место (26), то предельная функция  $f \in \mathbf{VMO}(T)$ .

Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы 2 закончено.

**Заключение.** В настоящей работе результаты Л. Фейера [52, с. 165], Рисса—Фишера (11), У. и Дж. Юнгов (12), У. Юнга (13) и Гросса—Штейнгауза [53] о том, когда тригонометрический ряд (9) является рядом Фурье (5) функции из классических пространств  $\mathbf{C}(T) \subsetneq \mathbf{L}^\infty(T) \subsetneq \mathbf{L}^q(T) \subsetneq \mathbf{L}^2(T) \subsetneq \mathbf{L}^p(T) \subsetneq \mathbf{L}^1(T)$ , где показатель  $1 < p < 2$ , а сопряжённый показатель  $q := \frac{p}{p-1} \in (2, \infty)$ , дополнены исследованиями на левом конце предыдущей шкалы пространств:  $\mathbf{C}(T) \subsetneq \mathbf{VMO}(T) \subsetneq \mathbf{BMO}(T) \subsetneq \bigcap_{1 < p < \infty} \mathbf{L}^p(T)$ . В теории представления функций тригонометрическими рядами в данной работе, во-первых, установлена аналогия между пространством  $\mathbf{C}(T)$  и пространством Сарасона  $\mathbf{VMO}(T)$ : тригонометрический ряд (9) принадлежит  $\mathbf{C}(T)$  или  $\mathbf{VMO}(T)$ , если его средние Фейера (20) сходятся соответственно в  $\mathbf{C}(T)$  или в \*-полунорме (14); во-вторых, частичная аналогия между пространствами Ф. Рисса  $\bigcap_{1 < p < \infty} \mathbf{L}^p(T)$  и пространством Джона—Ниренберга  $\mathbf{BMO}(T)$ : тригонометрический ряд (9) принадлежит  $\mathbf{L}^p(T)$  или  $\mathbf{BMO}(T)$ , если его средние Фейера (20) ограничены соответственно в  $\mathbf{L}^p(T)$  или в \*-полунорме (14); различие в предельном равенстве (19) и оценке снизу (17).

#### Список цитируемых источников

1. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении : в 2 т. М. : Мир, 1985. Т. 1. 264 с. ; Т. 2. 400 с.
2. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1.
3. Харди Г. Расходящиеся ряды. М. : ИИЛ, 1951. 504 с.
4. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М. : ГИФМЛ, 1960. 471 с.
5. Барон С. А. Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин : Валгус, 1977. 280 с.
6. Fejér L. Sur les fonctions bornées et intégrables // Gesammelte Arbeiten : in 2 Bd. Budapest : Akadémiai kiadó, 1970. Band 1. S. 37—41.
7. Fejér L. Untersuchungen über Fouriersche Reihen // Gesammelte Arbeiten : in 2 Bd. Budapest : Akadémiai kiadó, 1970. Band 1. S. 142—160.
8. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. С. 11 ; Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М. : ГИФМЛ, 1961. С. 123, 671.
9. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. С. 159 ; Бари Н. К. Тригонометрические ряды. С. 74.
10. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1.
11. Бруй И. Н. Абелевы средние ортогональных рядов и пространства Орлича // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. 2013. № 2 (151). С. 18—24.
12. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 2. С. 98 ; Бари Н. К. Тригонометрические ряды. С. 166.
13. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. С. 49 ; Бари Н. К. Тригонометрические ряды. С. 77.
14. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1.
15. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 2. С. 98 ; Бари Н. К. Тригонометрические ряды. С. 165.
16. Бари Н. К. Тригонометрические ряды.
17. Там же. С. 165.
18. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. С. 108 ; Бари Н. К. Тригонометрические ряды. С. 167, 170.
19. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М. : ГИФМЛ, 1958. 507 с.
20. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М. : Мир, 1984. С. 226 ; Кусис П. Введение в теорию пространств  $H^p$ . М. : Мир, 1984. С. 226 ; Torchinsky A. Real-Variable Methods in Harmonic Analysis. Orlando ; San Diego ; New York : Academic Press, Inc., 1986. P. 200.
21. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М. : Наука, 1977. 456 с.
22. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. С. 224, 232 ; Torchinsky A. Real-Variable Methods in Harmonic Analysis. P. 200.

23. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. С. 224 ; Torchinsky A. Real-Variable Methods in Harmonic Analysis. P. 217.
24. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 2. С. 98 ; Бари Н. К. Тригонометрические ряды. С. 165—166.
25. Bruij J., Schmieder G. Real trigonometric series of class BMO and (C,1)-means // Acta scientiarum mathematicarum (Szeged). 1998. Vol. 64. P. 485.
26. Ibid. P. 486.
27. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. С. 273.
28. Morgenthaler G. W. On Walsh—Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. 1957. Vol. 84, № 2. P. 472—507.
29. Ibid. P. 488.
30. Ibid. P. 490.
31. Ibid. P. 489.
32. Fine N. J. Fourier—Stieltjes series of Walsh functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1957. Vol. 86, № 1. P. 246—255.
33. Зигмунд А. Тригонометрические ряды : в 2 т. М. : Мир, 1965. Т. 1. 615 с.
34. Morgenthaler G. W. On Walsh—Fourier series.
35. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1.
36. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. С. 201 ; Карлсон Л. О. сходимости рядов Фурье и о росте их частных сумм // Математика : период. сб. пер. иностран. ст. 1967. Т. 11, № 4. С. 113 ; Hunt R. A. On the convergence of Fourier series // Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues. Carbondale : Southern Illinois University Press, 1968. P. 235—255.
37. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. С. 234 ; Torchinsky A. Real-Variable Methods in Harmonic Analysis. P. 203.
38. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. С. 40 ; Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М. : Наука, 1974. С. 142.
39. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1.
40. Шварц Л. Анализ : в 2 т. М. : Мир, 1972. Т. 1. 824 с.
41. Muckenhoupt B., Stein E. M. Classical expansions and their relation to conjugate harmonic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 118, № 6. P. 17—92.
42. Muckenhoupt B. Hermite conjugate expansions // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 139. P. 256 ; Joó I. 1) Saturation theorems for Hermite—Fourier series // Acta Math. Hungar. 1991. Vol. 57, № 1—2. P. 170 ; 2) On Hermite—Fourier series // Period. Math. Hungar. 1992. Vol. 24, № 2. P. 112.
43. Muckenhoupt B. Conjugate functions for Laguerre expansions // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. Vol. 147. P. 403—418.
44. Hunt R. A. Developments related to the a. e. convergence of Fourier series // Studies in harmonic analysis : Proc. of the Conf., Chicago, 1974. Washington, DC : Mathematical Association of America, 1976. P. 29 ; Joó I. On some problems of M. Horváth (saturation theorems for Walsh—Fourier expansions) // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 1988. Т. 31. P. 248.
45. Butzer P. L., Stens R. L. The Operational Properties of the Chebyshev Transform. II. Fractional Derivatives // Теория приближения функций : Междунар. конф. по теории приближения функций, Калуга, 24—28 июля 1975 г. : тр. М. : Наука, 1977. С. 49—61.
46. Joó I. On the conjugate function of Dirichlet series // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 1992. Т. 35. P. 59—67.
47. Joó I. On some notions of harmonic analysis for Sturm—Liouville expansions // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 1992. Т. 35. P. 77—98.
48. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. С. 252 ; Sarason D. Functions of vanishing mean oscillation // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. Vol. 207. P. 396.
49. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. С. 224 ; Torchinsky A. Real-Variable Methods in Harmonic Analysis. P. 200.
50. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. С. 228 ; Кусис П. Введение в теорию пространств  $H^p$ . С. 270 ; Torchinsky A. Real-Variable Methods in Harmonic Analysis. P. 206.
51. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. С. 252 ; Torchinsky A. Real-Variable Methods in Harmonic Analysis. P. 221 ; Muckenhoupt B., Stein E. M. Classical expansions and their relation to conjugate harmonic functions. P. 396.
52. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. С. 165.
53. Там же. С. 168.

УДК 536.33

**Д. Ю. Горбач**

*Белорусский национальный технический университет, Минск*

**Е. И. Гацкевич,**

*кандидат физико-математических наук, доцент  
Белорусский национальный технический университет, Минск*

## **ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММЫ WOLFRAM/ALPHA И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПАКЕТА MATHCAD ДЛЯ АНАЛИЗА НАГРЕВА И ОХЛАЖДЕНИЯ МЕТАЛЛОВ ПРИ ИМПУЛЬСНЫХ ЛАЗЕРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ**

В настоящей работе проведено исследование нагрева и последующего охлаждения металлов при импульсном лазерном воздействии на основе анализа решения одномерного уравнения теплопроводности с помощью программы Wolfram/Alpha (computational knowledge engine) и пакета математических программ Mathcad. Получены данные о пространственно-временной эволюции температурного поля в различных режимах облучения. Проведён сравнительный анализ эффективности использования Wolfram/Alpha и Mathcad для изучения лазерно-индуцированных процессов.

Heating and following cooling of metal have been studied under pulsed laser irradiation on the basis of analysis of one-dimensional heat conduction equation solution by use of the computational knowledge engine Wolfram/Alpha and mathematical program package Mathcad. The data about space-time evolution of temperature field in different regime of irradiation is obtained. The comparative analysis of the effectiveness of Wolfram/Alpha and Mathcad using for the study of laser-induced processes is carried out.