

МІНІСТЭРСТВА АДУКАЦЫІ РЭСПУБЛІКІ БЕЛАРУСЬ  
УА “БАРАНАВІЦКІ ДЗЯРЖАЎНЫ УНІВЕРСІТЭТ”

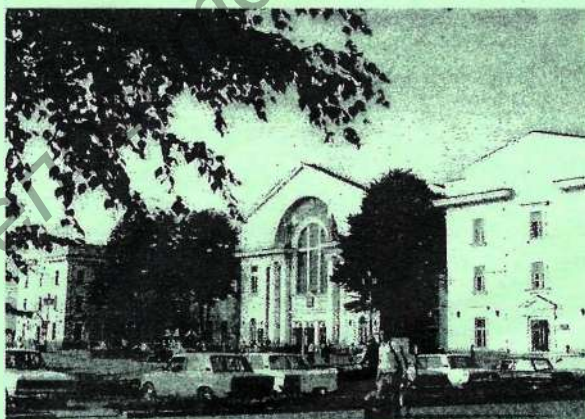
Кафедра агульнанавуковых дысцыплін

*С.І. Русан*

# РАЎНАВАГА ПЛОСКІХ МЕХАНІЧНЫХ СІСТЭМ

(нетрадыцыйная методыка вывучэння)

*Метадычныя рэкамендацыі*



Баранавічы  
2005

УДК 531

Складальнік: С.І. Русан

Рэцэнзенты: кандыдат тэхнічных навук, дацэнт Л.І. Леткоўскі;  
кандыдат тэхнічных навук, дацэнт М.В. Чычкан

Разгледжаны і рэкамендаваны да зацвярджэння кафедрай агульнанавуковых дысцыплін, пратакол № 5 ад 12.01.05 года.

Заг. кафедрай

С.І. Русан

Разгледжаны і зацверджаны метадычнай камісіяй інжынернага факультэта, пратакол № 8 ад 25.05.2005 года.

Русан С.І.

**Раўнавага плоскіх механічных сістэм (нетрадыцыйная метадыка вывучэння):** Вучэб.-метад. дапам. для студэнтаў выш. тэхн. навуч. устаноў / С.І. Русан. – Баранавічы: БарДУ, 2005. – 44 с.

Асноўная мэта вывучэння метадычнага дапаможніка – забяспечыць больш іпэнсіўнае развіццё пэўнага мыслення студэнтаў і фарміраванне ў іх доўгатэрміновых ведаў. Яна дасягаецца з дапамогай нетрадыцыйнай метадыкі рашэння задач, пабудаванай на непасрэдным прымяненні асноўных тэарэтычных палажэнняў статыкі. Гэтыя палажэнні сфармуляваны тут у выглядзе ўласцівасцей сіл і пар. Паказана, што ўсю разнастайнасць простых плоскіх сістэм можна апісаць абмежаванай колькасцю бэлькавых мадэлей. Студэнты, якія авалодаюць метадыкай, здолеюць рашаць задачы статыкі без скаладання ўраўненняў раўнавагі (у галаве).

Адзін з магчымых варыянтаў укаранення метадыкі ў навучальны працэс грунтуецца на самастойным вывучэнні гэтага дапаможніка студэнтамі з наступным замацаваннем матэрыялу на першых двух-трох практычных занятках па статыцы. Аднак вывучэнне метадыкі можна перанесці і ў заключэнне раздзела “Статыка” альбо нават на першыя практычныя заняткі па дысцыпліне “Супраціўленне матэрыялаў”.

УДК 531

## Змест

1. Агульныя заўвагі.....	4
2. Асноўныя паняцці статьикі.....	4
3. Пекаторыя ўласцівасці сіл і пар.....	7
4. Віды сувязей і іх аналіз.....	9
5. Аксіёма аб сувязях.....	11
6. Асноўныя метады аналізу раўнявагі.....	12
7. Балькавыя мадэлі.....	18
8. Аналіз балькавых мадалей.....	19
9. Вызначэнне рэакцый сувязей.....	24
10. Задаанне № 1. Вызначэнне рэакцый апораў цвёрлага цела.....	28
11. Задаанне № 2. Вызначэнне рэакцый сувязей складанай сістэмы.....	33
12. Літаратура.....	39

## *1. Агульныя заўвагі*

Абстрактная форма выкладання курса тэарэтычнай механікі ў падручніках і вучэбных дапаможніках пастаянна выклікае цяжкасці пры вывучэнні дысцыпліны ў тэхнічных вузах. Адсутнасць у большасці студэнтаў дастаткова развітага абстрактнага мыслення не дазваляе ім злучыць у свядомасці тэарэтычныя звесткі без вобразнага носыбіта з рэальнымі аб'ектамі тэхнікі. У выніку завучання тэарэтычных палажэнні курса і фармалізавання метадыкі рашэння задач не спрыяюць фарміраванню доўгатэрміновых ведаў.

Тут робіцца спроба выправіць адзначаны недахоп метадыкі ў працэсе вывучэння першага раздзела дысцыпліны – статьикі. Паказана, што раўнавагу механічнай сістэмы можна аналізаваць на падставе простых, відавочных залежнасцей і схем, не адрываючыся ад пачуццёвага досведу і здаровага сэнсу. У прыватнасці, для вызначэння рэакцый сувязей шырокага класу механічных сістэм плоскай статьикі можна скарыстаць простыя бэлькавыя мадэлі. Іх засвойванне дазваляе студэнтам у многіх выпадках атрымаць рэзультат хутчэй без складання ураўненняў (у галаве). У працэсе рашэння задач такім спосабам актывізуецца мысліцельная дзейнасць; у навучальны працэс залучаюцца і студэнты з яшчэ нефарміраваным абстрактным мысленнем. Пастаянная неабходнасць выдзяляць істотныя ўласцівасці аналізуемых аб'ектаў дазваляе студэнтам рабіць уласныя абагульненні, што садзейнічае развіццю абстрактнага мыслення і інжынернай інтуіцыі.

Уключэнне гэтага дапаможніка ў навучальны працэс трэба разглядаць як дадатак (уводзіны) да раздзела “Статьякі”. Студэнт, які авалодае альтэрнатыўнымі элементарнымі метадамі сілавога аналізу, здолее кантраляваць і прадказваць рэзультат аналітычнага рашэння (са складаннем ураўненняў раўнавагі). Па гэтай прычыне змест дапаможніка лепш вывучаць на першых практычных занятках, пакуль не назалашаны тэарэтычны матэрыял для рашэння задач традыцыйным метадам. Аднак можна разгледзець яго і ў заключэнні раздзела “Статьякі”, і нават на першых практычных занятках па супраціўленні матэрыялаў. Для паспяховага вывучэння любой дысцыпліны, у тым ліку і тэарэтычнай механікі, ад студэнтаў патрэбна нашмат: варта толькі праявіць да яе інтарэс. І чым ён глыбейшы, тым лягчэй і больш трывала засвойваецца дысцыпліна.

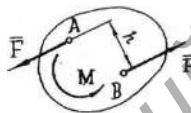
## *2. Асноўныя паняцці статьикі*

Вывучэнне статьикі пачынаецца з асноўных паняццяў і тэрміналогіі. Нагадаем іх.

**2.1. Матэрыяльны аб'ект.** Пад матэрыяльным аб'ектам будзем разумець цэла альбо сістэму (сукупнасць) кантактуючых цел. У канкрэтных задачах матэрыяльнымі аб'ектамі могуць быць: матэрыяльны пункт, стрыжань, бэлька, рама, вагон, самалёт, чалавек і інш. У тэарэтычнай механіцы дэфармацыямі цэлі ігнаруюць, г.зн. лічаць іх абсалютна цвёрдымі.

**2.2. Механічныя сілы.** Сіла ўяўляе сабою меру механічнага ўзаемадзеяння паміж матэрыяльнымі аб'ектамі. Паняцце сілы ўводзіцца перш за ўсё для колькаснага апісання велічыні гэтага ўзаемадзеяння. Адзінкамі сілы прыняты Ньютан ( $H$ ) і кіланьютан ( $kH$ ). Сіла характарызуецца велічынёй, напрамкам, пунктам прыкладання і лініяй дзеяння. Такім чынам, матэматычна яе можна прадставіць у выглядзе вектара. Як вядома, сілы бываюць знешнія (у адносінах да якога-небудзь аб'екта) і ўнутраныя, актыўныя і рэактыўныя (рэакцыі сувязей).

**2.3. Пара сіл.** Гэта сукупнасць дзвюх паралельных, роўных і процілеглых накіраваных сіл (рыс. 2.1). Карацейшая адлегласць паміж лініямі дзеяння сіл называецца *плячом* пары  $h$ . Калі пару сіл прыкладасі да свабоднага матэрыяльнага аб'екта, то яна прыводзіць яго ў вярчальны рух. Дзеянне пары характарызуецца яе момантам  $M = \pm Fh$ . Пара з дадатным момантам імкнецца вярцець цэла супраць руху стрэлкі гадзінніка. На малюнку пару сіл можна паказаць дугавой стрэлкай з абзначэннем яе моманта  $M$  (рыс. 2.1).



Мал.2.1

**2.4 Сістэма сіл.** Яна ўяўляе сабой сукупнасць сіл і пар, аб'яднаных па якой-небудзь прыкмеце. Напрыклад, сілы, прыкладзеныя да аднаго аб'екта, можна разглядаць як сістэму сіл. Калі лініі дзеяння ўсіх сіл, што ўтвараюць сістэму, паралельныя паміж сабою, то яе называюць *паралельнай*, а калі яны перасякаюцца ў адным пункце, то – *сыходнай*. Усе астатнія сістэмы сіл называюць *адвольнымі*.

**2.5 Раўнадзейная.** Сіла альбо пара сіл, якая аказвае на аб'ект такое ж дзеянне, як і некаторая сістэма сіл, называецца *раўнадзейнай* гэтай сістэмы.

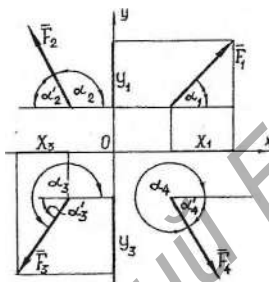
**2.6.Ураўнаважальная.** Сіла альбо пара сіл, якая можа ўраўнаважыць дзеянне на цэла некаторай сістэмы сіл, называецца *ураўнаважальнай* гэтай сістэмы. Яна роўна па велічыне і процілегла па напрамку раўнадзейнай той жа сістэмы сіл.

**2.7. Ураўнаважаная сістэма сіл.** Будзем лічыць, што цэла знаходзіцца ў раўнавазе (ураўнаважана), калі яно нерухома. Раўназначны яму стан раўнамернага прамалінейнага руху не разглядаем. Сістэма сіл, пад дзеяннем якой цэла застаецца нерухомым, называецца *ураўнаважанай*. Раўнадзейная ўраўнаважанай сістэмы сіл роўна нулю.

**2.8. Праекцыя сілы на вось.** Яна ўяўляе сабой алгебраічную велічыню, якая знаходзіцца па тым жа правіле, што і праекцыя любога вектара на вось. Напрыклад, праекцыі сіл, паказаных на мал.2.2, на каардынатыя восі вылічваюцца па формулах:  $X_i = F_i \cos \alpha_i$ ,  $Y_i = F_i \sin \alpha_i$ , ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Пры

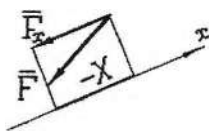
рашэнні задач больш зручна выкарыстоўваць вострыя вуглы  $\alpha'$ . Тады  $X_2 = -F_2 \cos \alpha'$ ,  $Y_2 = F_2 \sin \alpha'$ ,  $X_3 = -F_3 \cos \alpha_3$ ,  $Y_3 = -F_3 \sin \alpha_3$ .

Каб хутка і беспамылкова ўстанавіць знак праекцыі, неабходна мысленна знайсці складальную сілу, паралельную адпаведнай восі. Калі яна накіравана ў той самы бок, што і вось, то мае знак плюс. На мал.2.3 складальная  $F_x$  сілы  $F$  накіравана процілегла да восі. Таму яе праекцыя  $X = F_x$  адмоўная.

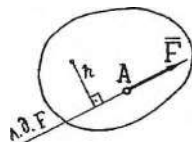


Мал. 2.2

**2.9. Момент сілы адносна пункта (цэнтра).** Гэта алгебраічная велічыня  $M_0(\vec{F})$ , роўная здабытку сілы  $F$  на яе плячо  $h$  адносна цэнтра  $O$ :  $M_0(\vec{F}) = \pm Fh$ . Тут  $h$  – карцейшая адлегласць ад цэнтра  $O$  да лініі дзеяння сілы. Момент сілы прымаецца дадатным, калі сіла імкнецца павярнуць цела адносна цэнтра супраць ходу гадзіннікавай стрэлкі. Вось стрэлкі змешчана ў цэнтры  $O$ . Мал. 2.4. момент дадатны.



Мал. 2.3



Мал. 2.4

**2.10. Галоўны вектар.** Галоўным вектарам сістэмы  $n$  сіл называецца геаметрычная сума ўсіх сіл, якія ўваходзяць у гэтую сістэму:  $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$ . Па такой жа формуле знаходзіцца і раўнадзейная, але ў адрозненне ад яе галоўны вектар не мае вызначанай лініі дзеяння.

**2.11. Галоўны момант.** Галоўным момантам сістэмы  $n$  сіл адносна цэнтра  $O$  называецца алгебраічная сума момантаў усіх сіл, якія ўваходзяць у сістэму, адносна гэтага цэнтра:  $M_0 = \sum_{i=1}^n M_0(\vec{F}_i)$ .

**2.12. Свободныя і несвободныя матэрыяльныя аб'екты.** Матэрыяльны аб'ект называецца *свободным*, калі яго рух не абмежаваны другімі аб'ектамі (цэламі). Калі ж рух матэрыяльнага аб'екта часткова або цалкам абмежаваны, то яго называюць *несвободным*.

**2.13. Сувязі.** Целы, што прылягаюць да якога-небудзь матэрыяльнага аб'екта і абмяжоўваюць яго перамяшчэнні, называюцца *сувязямі*, накладзенымі на аб'ект. Сувязі могуць быць *знешнімі* і *ўнутранымі*. Унутраныя сувязі перааказваюць узаемнаму перамяшчэнню цел, што ўваходзяць у механічную сістэму. Сукупнасць сувязей, накладзеных на матэрыяльны аб'ект, называецца *сістэмай сувязей*. Больш падрабязна аб сувязях напісана ў п. 4.

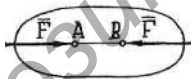
**2.14. Рэакцыі сувязей.** Калі да несвободнага матэрыяльнага аб'екта прыкладзіць сілы, то іх дзеянне перадаецца праз аб'ект і на сувязі – аб'ект узаемадзейнічае з імі. Сілы ўзаемадзеяння, якія ўзнікаюць у адпаведнасці з трэцім законам Ньютана і перадаюцца ад сувязей на матэрыяльны аб'ект, называюцца *рэакцыямі сувязей*.

### 3. Некаторыя ўласцівасці сіл і пар

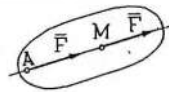
Прыгледзем неабходныя на далей законы, аксіёмы, тэарэмы механікі аб сілах і вынікі з іх.

**3.1.** *Калі цела знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем дзвюх сіл, то гэтыя сілы роўныя па велічыні і накіраваны па адной лініі ў процілеглыя бакі (мал. 3.1.).*

**3.2.** *Не змяняючы дзеяння сілы на цела, яе можна пераносіць у межах цела па лініі дзеяння. На мал. 3.2. сіла  $F$  перанесена з пункта  $A$  ў пункт  $M$ .*

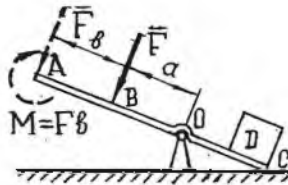


Мал. 3.1.

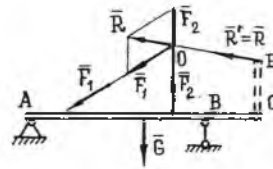


Мал. 3.2.

**3.3.** *Не змяняючы дзеяння сілы  $F$  на цела, яе вектар  $F$  можна пераносіць паралельна з аднаго пункта ў іншы, прыбаўляючы пры гэтым пару з момантам  $M$ , які роўны моманту дадзенай сілы адносна новага пункта прылажэння. Каб пазбегнуць памылкі ў напрамку далучанай пары  $M$ , высветлім на прыкладзе яе паходжанне. На мал. 3.3. паказаны рычаг  $AC$ , які выкарыстоўваецца для падымання груза  $D$ . Плячо сілы  $F$  адносна пункта  $O$  спачатку было роўна  $h_0 = a$ , а яе момант  $M_0 = Fh_0 = Fa$ . Пасля пераносу сілы ў пункт  $A$  плячо ўзрасло:  $h_1 = a + b$ ; новы момант сілы  $M_1 = F(a + b) = Fa + Fb$ . Як бачым, першапачатковы момант  $M_0$  павялічыўся на  $M' = Fb$ . А каб дзеянне сілы не змянілася пасля пераносу, да яе далучаецца пара  $M = -M'$ . Тут знак “-” азначае, што момант далучанай пары  $M$  процілеглы па накірунку моманту перанесенай сілы адносна першапачатковага пункта прылажэння  $B$ .*



Мал. 3.3.



Мал. 3.4.

3.4. Дзве сілы, прыкладзеныя да пункта цела, можна замяніць раўнадзейнай сілай, велічыня і лінія дзеяння якой вызначаюцца дыяганаллю паралелаграма, пабудаванага на зададзеных сілах. Справядліва і адваротнае сцвярджэнне: сілу, якая дзейнічае на цела, можна прадставіць у выглядзе дзвюх складаючых сіл па любых зададзеных напрамках у плоскасці яе дзеяння.

3.5. Калі сістэма трох непаралельных сіл (альбо цела, да якога сістэма прыкладзена) знаходзіцца ў раўнавазе, то яна ўяўляе плоскую сыходную сістэму сіл, гэта значыць лініі дзеяння ўсіх сіл перасякаюцца ў адным пункце.

3.6. Калі плоская сістэма  $n$  сіл  $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}, F_n$  знаходзіцца ў раўнавазе і пры гэтым  $(n-1)$  сілы паралельны паміж сабой, то і сіла  $F_n$  паралельна ім. У прыватнасці, пры  $n=3$ , калі сілы  $F_1$  і  $F_2$  паралельны паміж сабой, то і сіла  $F$  паралельна ім.

3.7. Адвольную плоскую сістэму  $n$  сіл у агульным выпадку можна прывесці да аднаго цэнтра  $O$  і такім чынам замяніць яе адной сілай  $R_0$ , роўнай галоўнаму вектару сістэмы, і адной парай  $M_0$ , роўнай яе галоўнаму моманту адносна цэнтра  $O$ .

3.8. Для ўраўнаважанай адвольнай плоскай сістэмы сіл яе галоўны вектар і галоўны момант адносна любога цэнтра  $O$ , роўныя нулю:  $\vec{R}_0 = 0, M_0 = 0$ .

3.9. Пара сіл можа быць ураўнаважана толькі сістэмай сіл, якая прыводзіцца да пары, альбо іншай парай.

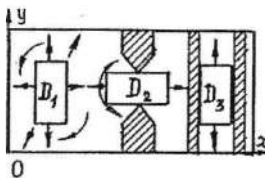
3.10. Рэакцыя сувязі, што накладзена на матэрыяльны аб'ект, выкліканая дзеяннем якой-небудзь сістэмы сіл, роўная геаметрычнай суме рэакцый, што выкліканы дзеяннем кожнай сілы паасобку.

3.11. Не змяняючы стану раўнавагі матэрыяльнага аб'екта, можна пашырыць яго габарыты. Фармальна неабходнасць у гэтым узнікае часам пры рашэнні задач. Напрыклад, пры замене сістэмы сіл, што прыкладзена да цела, адной сілай можа атрымацца, што яе лінія дзеяння праходзіць па-за межамі цела. У гэтым выпадку яго размеры можна ўяўна змяніць такім чынам, каб пункт прыкладання раўнадзейнай знаходзіўся ў межах габарытаў "пашыранага" цела. На мал.3.4 лінія дзеяння раўнадзейнай  $\vec{R}$  сіл  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  праходзіць па-за бэлькай AC. Уласцівасць 3.11 дазваляе дапоўніць бэльку фіктыўным участкам

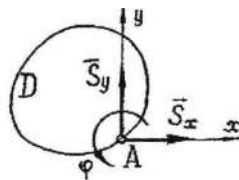
СЕ, а уласціваць 3.2. – перанесці вектар  $\vec{R}$  з пункта  $O$  у пункт  $E$ . Вага бэлькі і палажэнне цэнтры цяжару не змяняюцца.

#### 4. Віды сувязей і іх аналіз

Спынімся больш падрабязна на сутнасці сувязі. Згодна вызначэнню 2.13 механічная сувязь ( $C$ ) уяўляе сабой цэла, якое абмяжоўвае перамяшчэнні матэрыяльнага аб'екта ( $MA$ ). Сувязі адрозніваюцца паміж сабою абмежавальнымі ўласцівасцямі. Сувязь можа абмяжоўваць перамяшчэнні ў адным альбо ў некалькі напрамках. Яна можа перашкаджаць паступальнаму або вярчальнаму перамяшчэнню  $MA$ . Уявім сабе прамавугольную дошку  $D$  на паверхні стала (мал. 4.1, від зверху). У палажэнні  $D_1$  для яе руху няма ніякіх перашкод. Дошцы можна надаць, не адрываючы яе ад стала, безліч перамяшчэнняў: паступальных уздоўж восей  $Ox$ ,  $Oy$  альбо пад рознымі вугламі да іх, павароты ў розныя бакі. У палажэнні  $D_2$  дошка знаходзіцца паміж двума завоштражымі накладкамі, якія абмяжоўваюць яе паступальнае перамяшчэнне уздоўж восі  $Oy$ . З трэцяга палажэння  $D_3$  яна можа перамяшчацца толькі уздоўж восі  $Oy$ , таму што сувязі – паралельныя планкі – выключаюць вуглавое і паступальнае перамяшчэнне ўздоўж восі  $Ox$ . Устаноўлена, што любое свабоднае цвёрдае цэла  $D$  у плоскасці мае тры незалежныя перамяшчэнні. Іх можна задаць у выглядзе вектараў  $\vec{S}_x$ ,  $\vec{S}_y$ , якога-небудзь пункта  $A$  і вугла паварота  $\varphi$  цэла  $D$  адносна гэтага пункта (мал. 4.2.). Прымацаваная (інакш, накладзеная) у пункце  $A$  сувязь можа часткова альбо поўнасцю выключаць гэтыя перамяшчэнні. Так, на мал. 4.3 паказана сувязь  $A$ , якая называецца *ідэальным рухомым цыліндрычным шарнірам* (узятая ў кружок). Яна жорстка прымацавана сваім шарнірам да пункта  $A$  цэла  $D$  і выключае перамяшчэнне гэтага пункта ўздоўж восі  $Ay$ , але дапускае яго перамяшчэнне ( $a$ , значыць, і ўсяго цэла, калі адсутнічаюць іншыя сувязі) уздоўж восі  $Ax$ , і таксама паварот цэла адносна пункта  $A$ . Таму пры нагружэнні цэла  $D$  рэакцыя  $R_A$ , якая ўзнікае ў адпаведнасці з трэцім законам Ньютана як сіла супрацьдзеяння, накіравана па восі  $Ay$  (уверх альбо ўніз).

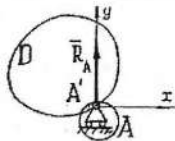


Мал. 4.1.

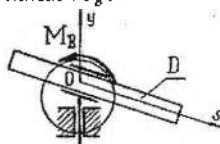


Мал. 4.2.

Связь на мал. 4.4 называецца *падвойнай сьлізаючай замацоўкай*; яна абмяжоўвае паварот цела  $D$ , але не перашкаджае яго паступальнаму перамяшчэнню па напрамках  $Oy$ ,  $Oz$ . Пры нагружэнні цела рэакцыя на яго з боку сувязі ўяўляе толькі пару супрацьдзеяння  $M_B$ .

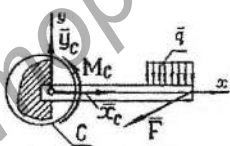


Мал. 4.3.



Мал. 4.4.

Прыведзены тут аналіз сувязей паказвае, што няма пагрэбы запамінаць напрамак рэакцый для кожнага віду сувязі. Дастаткова толькі памятаць, што рэакцыя – гэта сілы супрацьдзеяння; напрамак магчымага супрацьдзеяння лёгка ўбачыць на схеме сувязі. Нагадаем, што калі ў якім-небудзь напрамку сувязь дапускае перамяшчэнне  $MA$ , то яе супрацьдзеянне ў гэтым напрамку адсутнічае і адпаведная рэакцыя не ўзнікае. Сувязь  $C$  на мал. 4.5 выключыць ўсе тры перамяшчэнні. Яна называецца *жорсткай замацоўкай*. Рэакцыі сувязі  $C$  абзначаны літарамі  $X_C$ ,  $Y_C$ ,  $M_C$ .



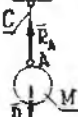
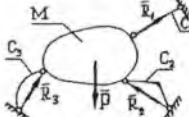
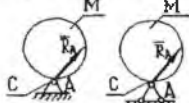
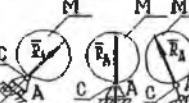



Мал. 4.5

Найбольш пашыраныя віды плоскіх сувязей і іх рэакцыі прыведзены ў табл. 4.1. Колькасць абмежаванняў, якія накладвае сувязь на  $MA$ , будзем абзначыць літарай  $z$  і называць *валентнасцю* сувязі.

Сувязь, для якой  $z=1$ , назавём *простай* (аднавалентнай). На малюнках 4.3, 4.4 паказаны аднавалентныя, а на малюнку 4.5 – трохвалентная сувязь. Нерухомасць цела ў плоскасці можа быць забяспечана сістэмай сувязей, сумарная валентнасць, якая роўная тром, а ў прасторы – шасці.

Табліца 4.1

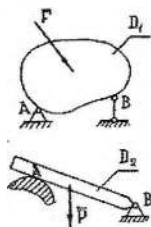
№ п/п	Выяўленне сувязі (схема)	Назва сувязі (C)	Валентнасць сувязі (z)	Заўвагі
1		Гладкая паверхня	1	Рэакцыя перпендыкулярна да паверхні сувязі ( $R_A \perp At$ )

2		Гладкая паверхня са зломом (па лініі $AA$ )	1	Рэакцыя перпендыкулярна да паверхні матэрыяльнага аб'екта ( $\vec{R}_A \perp A_t$ )
3		Бязважкая ніць (трос, канат, ланцуг, вяроўка і інш.)	1	Рэакцыя накіравана па ніці ад $MA$ .
4		Ненагружаны бязважкі стрыжань з шарнірамі на канцах	1	Рэакцыя накіравана па прамой, якая праходзіць праз шарніры стрыжня
5		Ідэальны нерухомы цыліндрычны шарнір	2	Рэакцыя праходзіць праз цэнтр шарніра, перпендыкулярна да яго восі
6		Ідэальны рухомы цыліндрычны шарнір	1	Рэакцыя перпендыкулярна паверхні, на якой замацаваны шарнір
7		Слізаючая замацоўка	2	Рэакцыя перпендыкулярна да плоскасці слізання $MA$
8		Падвойная слізаючая замацоўка.	1	Рэактыўная пара $M$ дзейнічае у плоскасці напружэння $M$
9		Жорсткая замацоўка	3	Сячэнне $A$ матэрыяльнага аб'екта (сувязь) нерухоме. $R_A, M_A$ дзейнічаюць у плоскасці напружэння $\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A$

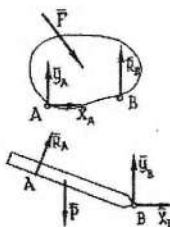
### 5. Аксіёма аб сувязях

Для вывучэння раўнавагі несвабоднай механічнай сістэмы яе, звычайна, неабходна прывесці да свабоднай. Для гэтага выкарыстоўваецца наступная аксіёма аб вызваленні  $MA$  ад сувязей( $AC$ ): кожны несвабодны  $MA$  можна разглядаць як свабодны, калі накладзеныя на яго сувязі замяніць адпаведнымі ім рэакцыямі. На падставе гэтай аксіёмы несвабодныя целы  $D_1, D_2$  на мал. 5.1

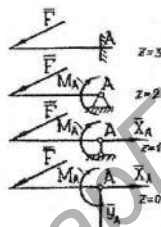
заменены свободными (мал. 5.2). Аксиёму можна выкарыстоўваць таксама і для частковага вызвалення  $MA$  ад сувязей. Так, на мал. 5.1 можна адкінуць толькі сувязі  $B$ , замяніўшы іх рэакцыямі  $R_B$ ,  $X_B$ ,  $Y_B$ , альбо вызваліцца такім жа чынам толькі ад сувязей  $A$ .



Мал. 5.1



Мал. 5.2



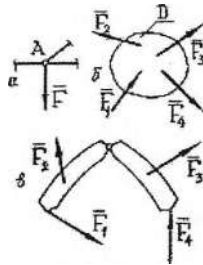
Мал. 5.3

**Заўвага.** Приведеная тут аксіёма з'яўляецца прыватным выпадкам больш агульнай аксіёмы аб паніжэнні валентнасці сувязей: валентнасць сувязі альбо сістэмы сувязей можна панізіць, уведзшы рэакцыі, адпаведныя адкінутым сувязям. Калі на падставе гэтай аксіёмы панізім валентнасць сістэмы сувязей (альбо адной сувязі) да нуля, то атрымаем свабодны  $MA$ , як і ў прыведенай вышэй  $AC$ . Прыклад паслядоўнага паніжэння валентнасці жорсткай замацоўкі змешчаны на мал. 5.3. Пры  $z=0$  б'юлька ўдзяляе свабодную механічную сістэму.

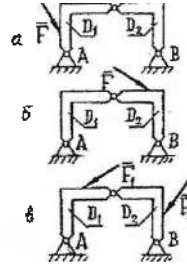
## 6. Асноўныя метады аналізу раўнавагі

Для рашэння задач статыкі па вызначэнні сіл і рэакцый сувязей у залежнасці ад іх складанасці і патрэбнай дакладнасці рэзультату могуць прымяняцца розныя метады. Разгледзім некаторыя з іх.

**6.1. Аналітычны метад, заснаваны на складанні ўмоў раўнавагі.** Гэта асноўны, найбольш дакладны метад, які дазваляе складаць алгарытмы і праграмы рашэння задач на камп'ютэрах. Яго недахоп – фармалізацыя рашэння і, як вынік, адсутнасць у методыцы аналізу механічнага ўзаемадзеяння частак сістэмы, а значыць, і стымулу да мыслення. Сутнасць і алгарытм аналітычнага метаду выражаецца ў наступных дзеяннях: выбар аб'екта раўнавагі ( $AP$ ); вызваленне  $AP$  ад сувязей; складанне ўмоў раўнавагі аб'екта; рашэнне атрыманай сістэмы ўраўненняў і аналіз рэзультату. Спынімся больш падрабязна на выбары  $AP$ , таму што з гэтага дзеяння пачынаецца рашэнне задач усімі іншымі спосабамі. У якасці  $AP$  могуць разглядацца: матэрыяльны альбо геаметрычны пункт (мал. 6.1, а); цвёрдае цела  $D$  (мал. 6.1, б); сістэма з некалькіх злучаных цел (мал. 6.1, в).



Мал. 6.1



Мал. 6.2

При аналізі складаної механічної системи можна виділяючи декілька *AP*. Характернає адрознення *AP* від зв'язі заключається у тому, що *да яко прикладені активні сили*. У механічній системі одно і те ж ціла *у залежності від дієння активних сил* може бути як *AP*, так і зв'яззю. На мал. 6.2, а ціла *D<sub>1</sub>* з'являється *AP*, ціла *D<sub>2</sub>* - зв'яззю, а на мал. 6.2, б наадварот. Для визначення реакцій зв'язей *A, B* системи, що показана на мал. 6.2, в, необхідна випущай два *AP*: наприклад, систему ціл *D<sub>1, D<sub>2</sub></sub>* і асобна одно з їх. Калі механічна система складається з одного ціла, то після визвалення його від зв'язей колькась невідомых величинь роўная *трім* (як і валентність адкінутаї системи зв'язей *z*). Такімі величинами звичайна з'являються тільки реакції і вугли їх нахилу. Для визначення невідомых у гэтым випадку складаються *трім* умови раўнавагі :

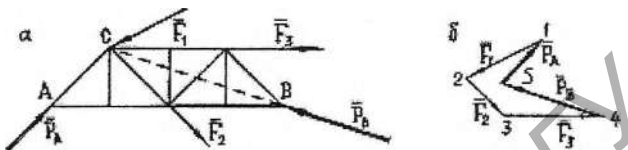
$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum M_A(\vec{F}_i) = 0.$$

**6.2. Графічны метад, заснаваны на пабудове сілавога і вярвачнага многавугольнікаў.** Ён параўнальна хутка прыводзіць да мэты, адрозніваецца нагляднасцю, але дакладнасць рэзультату не высокая; пры гэтым ускладняецца прымяненне камп'ютераў. З гэтых прычын графічныя метады разлікаў зараз адыходзяць на другі план. Аднак іх метаэгодна выкарыстоўваць для *якаснага кантролю* рэзультатаў аналітычных разлікаў, асабліва для аналізу раўнавагі сыходнай сістэмы сіл. У апошнім выпадку графічны метад яшчэ больш спрашчаецца, таму што вынік знаходзіцца без пабудовы вярвачнага многавугольніка. Разгледзім больш падрабязна раўнавагу сыходнай сістэмы сіл. Для яе галоўны вектар роўны нулю:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0 \quad (6.2)$$

Геаметрычная ўмова (6.2) азначае, што многавугольнік, сторонамі якога з'являюцца сілы, што ўваходзяць у суму (6.2), *замкнуты*. Прымяненне графічнага метаду да рашэння задач разгледзім на прыкладах.

**Приклад 6.1.** Стрыжнёвая сістэма размешчана на гладкай гарызантальнай плоскасці і нагружана дадзенымі сіламі  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  (мал. 6.3, а). Вызначыць сілы  $\vec{P}_A, \vec{P}_B$ , прыкладзеныя ў пунктах  $A, B$  і ўраўнаважваючы дадзеную сістэму сіл, пры ўмове, што іх лініі дзеяння задаюцца адрэзкамі  $AC, BC$ .



Мал. 6.3

**Рашэнне.** З умовы раўнавагі выплывае, што лініі дзеяння ўсіх сіл, якія прыкладзены да  $AP$ , перасякаюцца ў пункце  $C$ . Згодна графічнай умове раўнавагі сыходнай сістэмы сіл многавугольнік, пабудаваны на сілах гэтай сістэмы, павінен быць замкнуты. Пабудову многавугольніка пачынаем з дадзеных сіл  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ , адкладваючы іх на малонку паслядоўна ў выбраным маштабе. Спачатку атрымліваем ломаную  $1-2-3-4$ . Затым з пунктаў  $1$  і  $4$  праводзім лініі, паралельныя да адрэзкаў  $AC$  і  $BC$ ; у іх перасячэнні знойдзем вяршыню  $5$  сілавога многавугольніка. Яго стараны  $5-1$  і  $5-4$  уяўляюць велічыні шукаемых сіл  $\vec{P}_A, \vec{P}_B$  у тым жа маштабе, што і дадзеныя сілы. Напрамак знойдзеных сіл вызначаем, кіруючыся простым правілам: у атрыманым замкнутым многавугольніку плынь вектараў сіл накіравана ў адзін бок. Напрамак плыні задаецца вядомымі сіламі  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ . Так, на мал. 6.3, б чытаем:  $1-2, 2-3, 3-4$ . Працягваючы абход, атрымліваем шукаемыя напрамкі сіл:  $4-5(\vec{P}_B)$ ,  $5-1(\vec{P}_A)$ . Вектары  $\vec{P}_A, \vec{P}_B$  пераносім паралельна ў пункты  $A$  і  $B$ . Выкананую на мал. 6.3, б пабудову можна трактаваць як графічнае рашэнне вектарнага ўраўнення

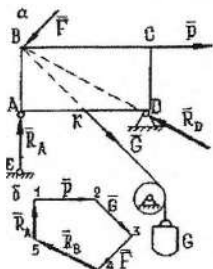
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{P}_A + \vec{P}_B = 0 \quad (6.3)$$

Калі б ураўненне (6.3) змяшчала болей, чым дзве невядомыя, то задача была б статычна нявызначанай – не мела б рашэння.

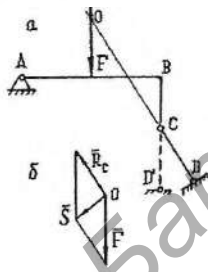
**Приклад 6.2.** Цела  $ABCD$ , замацаванае ў пунктах  $A, D$ , нагружана сіламі  $\vec{P}, \vec{F}$  і вагой гіры  $G$  (р. 6.4, а). Знайсці рэакцыі апораў.

**Рашэнне.** Аб'ектам раўнавагі тут з'яўляецца цела  $ABCD$ . Сілу цяжару пераносім у пункт  $K$ . Сувязі ў пунктах  $A$  і  $D$  замяняем рэакцыямі. Напрамак рэакцыі  $\vec{R}_D$  пакуль невядомы. На мал. 6.4, а відаць, што лініі дзеяння сіл  $\vec{P}, \vec{F}, \vec{G}$  і  $\vec{R}_A$  перасякаюцца ў адным пункце  $B$ . Тады ў адпаведнасці з уласцівасцю сіл 3.5 лінія дзеяння рэакцыі  $\vec{R}_D$  таксама праходзіць праз пункт  $B$ . Такім чынам, нам ужо вядомы лініі дзеяння рэакцый  $\vec{R}_A, \vec{R}_D$ , але іх напрамкі пакуль не

вызначаны. Задача зведзена да папярэдняй. Пабудова многавугольніка сіл выканана на мал. 6.4, б. Трэба мець на ўвазе, што вектары вядомых сіл можна адкладваць у любой паслядоўнасці:  $F, G, P; G, P, F; G, F, P$ . І вяршыню 5 можна шукаць інакш: правесці з пункта 1 прамую паралельна да адрэзка  $BD$ , а з пункта 4 – паралельна да  $AB$ . Вынік пры гэтым не зменіцца.



Мал. 6.4

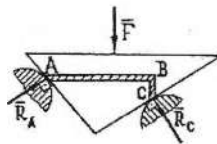


Мал. 6.5

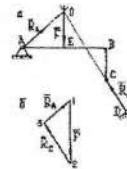
Графічны метад асабліва эфектыўны для аналізу раўнавагі несвабодных механічных сістэм, якія нагружаны адной сілай. Рапэрне задачы ў гэтым выпадку зводзіцца да пабудовы *травугольніка сіл*. З яго дапамогай лёгка вызначаюцца велічыні і напрамкі рэакцый апораў.

**Прыклад 6.3** Стрыжань  $ABC$  нагружаны вертыкальнай сілай  $F$  (мал. 6.5, а). Вызначыць рэакцыі сувязей  $A$  і  $CD$ .

**Раішэнне.** Для стрыжня  $CD$  лёгка вызначаюцца як лінія дзеяння рэакцыі (яна заўсёды праходзіць праз яго шарніры), так і яе напрамак (па лініі дзеяння ўверх). Цяжэй гэтае пытанне вырашаецца для двухвалентнай сувязі  $A$ . Калі прапанаваць студэнтам знайсці лінію дзеяння рэакцыі  $R_A$  інтуітыўна (без формул і графічных пабудов), то большасць з іх пакажуць вертыкальную лінію. Памылковы адказ, верагодна, выклікаецца падобнай схемай канструкцыі з вертыкальным стрыжнем  $CD$  (на мал. 6.5,а ён паказаны пункцірам); для яе адказ правільны. Але чаму рэакцыя  $R_A$  нахілена? Прагназуючы яе як сілу *процідзеяння*, трэба спачатку правільна вызначыць само *дзеянне*. А такім з'яўляецца не толькі вертыкальная сіла  $F$ , але і нахіленая рэакцыя  $R_C$ , а больш дакладна – іх раўнадзейная  $\bar{S}$ , што паказана на мал. 6.5,б. Пры яе пабудове рэакцыя  $R_C$  і сіла  $\bar{F}$  перанесены па сваіх лініях дзеяння ў пункт  $O$ . Напрамак рэакцыі  $R_C$  процілеглы вектару  $\bar{S}$ . Набліжана вызначыць напрамак рэакцыі  $R_A$  можна інакш – прыняць у якасці разліковай інтуітыўнай схемы мадэль кліна (мал. 6.6). У нашым прыкладзе кліном мадэліруецца стрыжань  $ABC$ . Не глядзячы на тое, што сіла  $\bar{F}$ , якая дзейнічае на клін, вертыкальна, рэакцыі  $R_A$ ,  $R_C$  нагружаных кліном паверхнасцей нахілены (яны перпендыкулярны да плоскасцей кліна).



Мал. 6.6



Мал. 6.7

Напрамак рэакцый не зменяцца, калі замест кліна пакінуць заштрыханую яго частку (мал. 6.6), што нагадвае дадзены стрыжань  $ABC$ .

А зараз рашым прыклад 6.3 графічна. Лініі дзеяння рэакцыі  $\vec{R}_C$  і сілы  $\vec{F}$  перасякаюцца ў пункце  $O$ . Згодна ўласцівасці 3.5 праз гэты пункт праходзіць і лінія дзеяння рэакцыі  $\vec{R}_A$ . Будуем у выбраным маштабе вектар  $\vec{F}$ ; з яго пачатку і канца праводзім лініі, паралельныя да адрэзкаў  $AO$  і  $CO$  (мал. 6.7,б). У іх перасячэнні атрымліваем пункт  $Z$  – вяршыню трохвугольніка сіл. Абыходзячы яго па напрамку сілы  $\vec{F}$ , вызначаем напрамкі рэакцый: 1-2, 2-3 ( $\vec{R}_C$ ), 3-1 ( $\vec{R}_A$ ). Іх велічыні знаходзім шляхам змярэння адпаведных старонаў трохвугольніка.

**6.3. Графічны спосаб раскладання сілы.** Ён прымяняецца для вызначэння ўнутраных сіл у шарнірна-стрыжнёвых сістэмах і прыгодны для рашэння найбольш простых задач.

**Прыклад 6.4.** Кранштэйн складаецца са стрыжняў 1,2, з'яднаных з дапамогай шарніра  $A$ . Вызначыць унутраныя сілы  $\vec{S}_1$ ,  $\vec{S}_2$ , калі шарнір нагружан сілаю  $\vec{F}$  (мал. 6.8).

*Рашэнне.* Раскладаем сілу  $\vec{F}$  на складнікі па напрамках стрыжняў.

Для гэтага з канца вектара сілы праводзім лініі, паралельныя да стрыжняў 1,2. Шукаемыя сілы выяўляюцца на малонку ў выглядзе старон лабудаванага паралелаграма. Іх неабходна змераць альбо вылічыць. Заўважым, што на малонку атрыманы ўнутраныя сілы  $\vec{S}_1$ ,  $\vec{S}_2$ , а не рэакцыі сувязей, як гэта мае месца пры другіх спосабах рашэння задачы (ўнутраныя сілы роўныя па велічыні рэакцыям, але процілеглыя ім па напрамку).

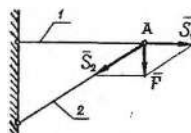
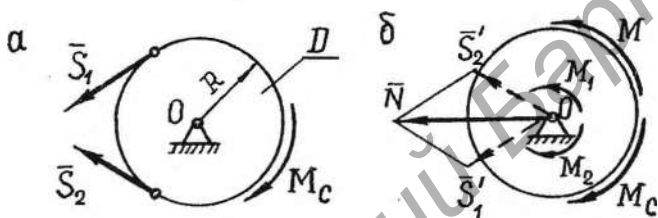


Рис. 6.8

**6.4 Аналітычны спосаб, заснаваны на прывядзенні сістэмы сіл да аднаго цэнтра.** Ён прымяняецца, у прыватнасці, для вызначэння рэакцый сувязей у сістэмах з адным замацаваным пунктам.

**Прыклад 6.5.** На барабан  $B$  дзейнічаюць сілы нацяжэння пасаў трансмісіі  $\bar{S}_1, \bar{S}_2$  ( $S_1 > S_2$ ) і момант супраціўлення  $M_C$ , якія забяспечваюць яго раўнамернае вярчэнне (мал. 6.9, а). Вызначыць ціск  $\bar{N}$  барабана на апору  $O$  і вярчальны момант  $M$ , які ствараецца пасамі.

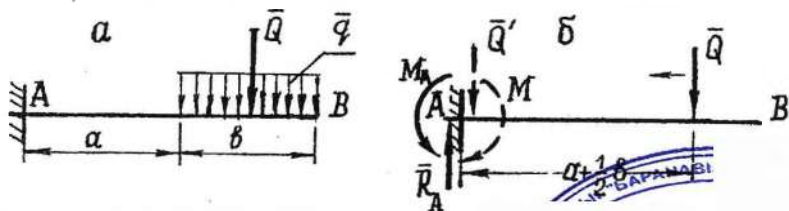
**Рашэнне.** На падставе ўласцівасці сіл 3.3 пераносім сілы  $\bar{S}_1, \bar{S}_2$  паралельна ў пункт  $O$ , пры гэтым далучаем пары з момантамі  $M_1 = S_1 R$ ,  $M_2 = S_2 R$ . Знаходзім ціск на апору  $O$  як раўнадзейную сіл  $\bar{S}'_1, \bar{S}'_2$ :  $\bar{N} = \bar{S}'_1 + \bar{S}'_2 = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$ . Вярчальны момант роўны:  $M = M_1 - M_2 = (S_1 - S_2)R$ . Рэзультат рашэння паказаны на мал. 6.9, б



Мал. 6.9

**Прыклад 6.6.** Вызначыць рэакцыі апоры  $A$  кансольнай бэлькі, што ўспрымае раўнамерна размеркаваную нагрузку  $q$ . Размеры паказаны на мал. 6.10, а.

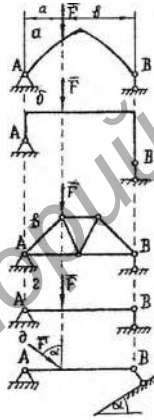
**Рашэнне.** Як і барабан у папярэднім прыкладзе, вось бэлькі мае адзін замацаваны пункт  $A$ . Размеркаваную нагрузку  $q$  замяняем раўнадзейнай сілай  $Q$ . На падставе ўласцівасці 3.3 прыводзім сілу  $Q$  да пункта  $A$  (мал. 6.10, б). Атрымліваем сілу  $Q' = Q = qb$  і пару з момантам  $M = Q(a + 0,5b) = (a + 0,5b) bq$  (на мал. 6.10, б сіла  $Q'$  і пара  $M$  паказаны пункцірам). Шукаем рэакцыі роўныя ім па велічыні і процілеглыя па накірунку (паказаны суцэльнымі лініямі):  $R_A = Q' = Q$ ,  $M_A = M$ . Як бачым, для атрымання рэзультату не давялося склацаць і рашаць сістэму ўраўненняў.



Мал. 6.10

## 7. Бэлечныя мадэлі

Як ужо адзначалася, у працэсе інтуітыўнага аналізу інжынерных задач выкарыстоўваюцца, часцей неўсвядомлена, канкрэтныя разліковыя мадэлі. Яны, як правіла, значна прасцейшыя, чым рэальныя аб'екты, таму што апісваюць толькі істотныя іх уласцівасці. Напрыклад, для вызначэння рэакцый апор аркі, рамы і фермы, паказаных на мал. 7.1, а, б, в, разліковай мадэллю можа служыць двухапорная бэлька  $AB$  (мал. 7.1, г). Клас задач, якія рашаюцца на аснове бэлечнай мадэлі, значна пашырыцца, калі такую мадэль прыняць у выглядзе, што паказаны на мал. 7.1, д. З яе ў прыватным выпадку пры  $\alpha = 0$  атрымаем папярэдні варыянт.

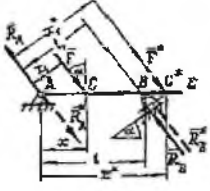
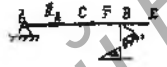
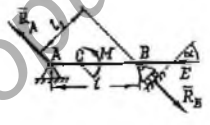
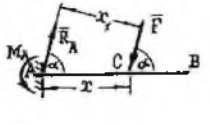
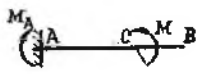


Мал. 7.1

Каб тая ці іншая разліковая мадэль магла стаць элементам інтуітыўнага мыслення, яе засвойванне неабходна даводзіць да пачуццёвага ўзроўню. Гэта дасягаецца ў працэсе ўдумлівага аналізу мадэлі, праз мысленны эксперымент з ёю. Самы непрадуктыўны спосаб вывучэння механічных з'яў – гэта спроба запамінаць інфармацыю аб іх.

Тут разглядаюцца простыя бэлечныя мадэлі, якія могуць выкарыстоўвацца для якаснага і колькаснага аналізу шырокага класу механічных сістэм без прымянення ўмоў раўнавагі. Асноўныя тыпы мадэлей прыведзены ў табліцы 7.1. З яе відаць, што ўсе мадэлі ўяўляюць сабою простыя бэлькі на двох апорах альбо з адной жорсткай замацоўкай – кансольныя бэлькі. Прыведзены ў табліцы формулы рэакцый могуць быць лёгка атрыманы з умоў раўнавагі.

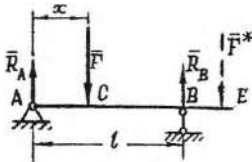
Таблица 7.1

Абзначэнне	Назва мадэлі	Малюнак мадэлі	Рэакцыі апораў
$M1$ $M1^*$	Бэлька на дзвюх апорах нагружана сілай, якая паралельна да лініі дзеяння $R_B$		$R_A = \frac{F}{l_1}(l_1 - x_1)$ $R_B = \frac{F}{l_1} x_1$ $R_A^* = \frac{F^*}{l_1}(x_1^* - l_1)$ $R_B^* = \frac{F^*}{l_1} x_1^*$ $x_1 = x^* \cos \alpha$ $x_1 = x \cos \alpha$ $l_1 = l \cos \alpha$
$M2$	Бэлька на дзвюх апорах нагружана падоўжнай сілай		$R_A = F$ $R_B = 0$
$M3$	Бэлька на дзвюх апорах нагружана парай сіл		$R_A = R_B = \frac{M}{l_1}$ $l_1 = l \cos \alpha$
$M4$	Кансольная бэлька нагружана сілай		$\bar{R}_A = -\bar{F}$ $M_A = Fx_1$ $x_1 = x \sin \alpha$
$M5$	Кансольная бэлька нагружана парай сіл		$R_A = 0$ $M_A = M$

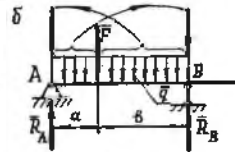
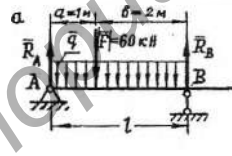
### 8. Аналіз бэлечных мадэлей

Разгледзім асаблівасці тыпаў бэлечных мадэлей і метадку вызначэння рэакцый па формулах, якія прыведзены ў табл. 7.1.

8.1. На мал. 7.2 сумешчаны дзве мадэлі. Мадэль  $M1^*$  адрозніваецца ад  $M1$  толькі тым, што пункт прыкладання сілы знаходзіцца на кансолі  $BE$ . Трэба звярнуць увагу на прыныповае паграбаванне да напрамку сілы ў мадэлях  $M1$ ,  $M1^*$ : вектар сілы навінен быць паралельны да лініі дзеяння рэакцыі  $R_B$ . А апошняя, як вядома, вызначаецца ўласцівасцю сувязі  $B$  – яе лінія дзеяння перпендыкулярна да апорнай плоскасці сувязі (гл. сувязь № 6 у табл. 4.1). Вывучэнне мадэлей  $M1$  і  $M1^*$  трэба пачынаць з прыватнага, але шырока распаўсюджанага выпадку, калі вугал  $\alpha$  роўны нулю (мал. 8.1). З пачатку неабходна, не карыстаючыся формуламі, усваядоміць якасную (набліжаную) залежнасць рэакцый ад палажэння сілы  $F$  на бэльцы. Адлегласць сілы ад апоры  $A$  задаецца каардынатай  $x$ , ад апоры  $B$  – адрэзкам  $(l-x)$ . Правядзем просты мысленны эксперымент. Прыкладзём сілу  $F$  над апорай  $A$  ( $x=0$ ). Відавочна, бэлька не будзе перадаваць ціск на апору  $B$  (уласнай вагою бэлькі ігнаруем), і сіла  $F$  будзе ўспрынята толькі апорай  $A$ . Таму  $R_A = F$ ,  $R_B = 0$ . Пачнем рухаць сілу ўправа; тады яе адлегласць  $x$  ад левай апоры будзе ўзрастаць, ад правай  $(l-x)$  – памяншацца. Пры гэтым рэакцыя  $R_A$  будзе памяншацца, рэакцыя  $R_B$  – ўзрастаць. Гэта залежнасць рэакцый ад палажэння сілы  $F$  адлюстравана ў формулах табліцы 7.1, у якія ўваходзяць адлегласці  $x$  і  $(l-x)$ .



Мал. 8.1



Мал. 8.2

Зразумёўшы яе, можна, глядзячы на мал. 8.2, а, сцвярджаць, што  $R_A > R_B$ , таму што сіла  $F$  знаходзіцца бліжэй да апоры  $A$ . А калі сілу прыкладзі пасярэдзіне бэлькі, то рэакцыі апор будуць роўныя паміж сабою. Усё пачынаецца з простага. Гэтым эксперыментам закладваецца падмурак трывалых доўгатэрміновых ведаў. Яго вынікі не трэба запамінаць; іх неабходна “бачыць” і пры неабходнасці знаходзіць так лёгка, як мы зрокава ўстанавіваем суадноснасць паміж адрэзкамі  $AC$  і  $CB$ . Няхай на мал. 8.1  $CB=2AC$ , г. зн. пралёт бэлькі падзелены на тры роўныя часткі. Тады, улічваючы адзначаную вышэй адваротна прапарцыянальную залежнасць рэакцый ад палажэння сілы на бэльцы, можна сцвярджаць, што  $R_A = 2F/3$ ,  $R_B = F/3$ . Гэтыя формулы набліжаныя, паколькі суадноснасць адрэзкаў  $AC$  і  $CB$  мы ўстанавілі на вока. Дапусцім, што мы навучыліся візуальна па схеме якасна ацэньваць рэзультат. А як атрымаць дакладныя колькасныя значэнні рэакцый? Тут не абыйсціся без дакладных формул і размераў. А каб формулы запісаць не з памяці, а на падставе аналізу схемы бэлькі, неабходна зразумець іх структуру і стварыць

у свядомасці адпаведны ёй вобраз. Пры  $\alpha=0$  з табліцы 7.1 знаходзім:

$$R_A = \frac{F}{l}(l-x), \quad R_B = \frac{F}{l}x \quad \text{альбо ў абазначэннях па мал. 8.2, а}$$

$$R_A = \frac{F}{l}b, \quad R_B = \frac{F}{l}a \quad (8.1)$$

Множнік  $\frac{F}{l}$  у формулах (8.1) можна разглядаць як інтэнсіўнасць раўнамерна размеркаванай нагрузкі  $q$  (мал. 8.2,а). Лінія дзеяння сілы дзеліць нагружаны пралёт бэлькі на левы ўчастак даўжынёю  $a$  і правы – даўжынёю  $b$ ; здабыткі  $qa$  і  $qb$  уяўляюць сабою раўнадзейныя гэтых участкаў нагрузкі.

Фармальна атрымліваем, што ціск нагрузкі  $F$  на апоры  $A$  і  $B$  роўны:

$$N_A = qb, \quad N_B = qa \quad (8.2)$$

Мы прыйшлі да вобразнага правіла (мал. 8.2, в): *раўнадзейная ўчастка размеркаванай нагрузкі  $q$ , які знаходзіцца паміж лініяй дзеяння сілы  $F$  і апорай  $B$ , перадаецца на апору  $A$ , а раўнадзейная ўчастка, змешчанага паміж лініяй дзеяння гэтай сілы і апорай  $A$  – на апору  $B$* . Гэта фізічная (сілавая) трактоўка размеркавання ціску сілы  $F$  на апоры. Ёй адпавядае геаметрычная: ціск сілы на апоры бэлькі размяркоўваецца адваротна прапарцыянальна іх адлегласцям ад лініі дзеяння сілы  $F$ . А паколькі ціск на велічыні роўны рэакцыі апоры, то справядлівы суадносіны:

$$R_A / B = R_B / a, \quad \text{альбо}$$

$$R_A / (l-x) = R_B / x \quad (8.3)$$

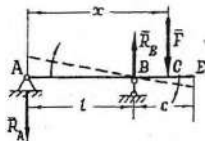
$$\text{дзе } R_A + R_B = F$$

Формулы (8.2) альбо (8.3) дазваляюць дакладна вызначыць рэакцыі сувязей, не складаючы ўраўненняў раўнавагі. Напрыклад, па мал. 8.2,а, узяўшы да ўвагі лікавыя дадзеныя, знаходзім:  $R_A = 40 \text{ кН}$ ,  $R_B = 20 \text{ кН}$ .

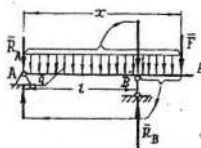
**8.2.** Разгледзім мадэль  $MI^*$  пры  $\alpha=0$  (мал. 8.3). Зорачку (\*), якой адзначаны яе параметры ў табліцы 7.1, адкінем. Як ужо адзначалася, тут пункт прыкладання сілы  $C$  знаходзіцца на кансолі  $BE$ , г. зн.  $(l+c) \geq x \geq l$ . Мадэль  $MI^*$  нагадвае вядомы з курса фізікі сярэдняй школы рычаг з апорай у пункце  $B$ . Каб лепш зразумець дзеянне сілы на апоры, правядзём і тут мысленны эксперымент. Змесцім сілу  $F$  над апорай  $B$  ( $x=l$ ). Бэлька застаецца ў гарызантальным палажэнні і пры адсутнасці апоры  $A$ ; ціск сілы будзе перадавацца толькі на апору  $B$ ; таму  $R_A = 0$ ,  $R_B = F$ . Пры ўзрастанні каардынаты  $x$  бэлька пад дзеяннем сілы  $F$  імкнецца павярнуцца на апоры  $B$ , а яе левы канец – падняцца ўверх (на мал. 8.3 пункцірная лінія). Таму сіла процідзеяння – рэакцыя  $R_A$  – накіравана ўніз. Звернем увагу яшчэ на адну асаблівасць рэакцый мадэлі  $MI^*$ .

Калі ў мадэлі  $MI$  кожная з рэакцый па велічыні не перавышала сілу  $F$ , то ў мадэлі  $MI^*$  такое абмежаванне адсутнічае. Так, на малюнку 8.3 рэакцыю  $R_B$

можна разглядаць як ўраўнаважвальную сілу  $F$  і  $R_A$ :  $R_B = F + R_A$ . Адсюль відаць, што рэакцыя  $R_B$  заўжды большая, чым сіла  $F$ . Што тычыцца рэакцыі  $R_A$ , то, як відаць з формулы (табл. 7.1), яна ўзрастае прапарцыянальна адлегласці  $(x-l)$  і пры  $(x-l)=l$  роўна  $F$ ; пры далейшым павелічэнні адлегласці рэакцыя перавышае сілу  $F$ .



Мал. 8.3



Мал. 8.4

Для вызначэння велічынь рэакцый у выпадку адвольнага палажэння сілы на кансолі можна выкарыстаць вывад, зроблены ў п. 8.1: *рэакцыі апор адваротна прапарцыянальныя да іх адлегласці ад лініі дзеяння сілы  $F$ , г. зн.*

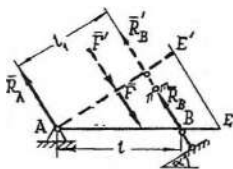
$$\frac{R_A}{x-l} = \frac{R_B}{x} \quad (8.4)$$

Застаецца справядлівай і прыведзеная там інтэрпрэтацыя з раўнамерна размеркаванай нагрузкай  $q = F/l$ ; гэту нагрузку ў мадэлі  $MI^*$  неабходна працягнуць да лініі дзеяння сілы (мал. 8.4). Тады  $R_A = \frac{F}{l}(x-l)$ ,  $R_B = \frac{F}{l}x$  альбо

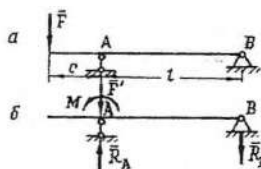
$$R_A = qb, \quad R_B = qa \quad (8.5)$$

Тут  $a = x$ ,  $b = x-l$ .

У заключэнне аналізу мадэлей  $MI$  і  $MI^*$  яшчэ раз нагадаем: пры перамяшчэнні сілы ў межах пралёту бэлькі  $l$  значэнні рэакцый абмежаваны велічынёй сілы  $F$ ; калі ж сілу прыкладваць на кансолі, рэакцыі апор могуць неабмежавана перавышаць яе велічыню.



Мал. 8.5



Мал. 8.6

8.3. Калі на малюнку 7.2 вугал  $\alpha$ , не роўны нулю, то рэакцыі сувязей вызначаюцца непасрэдна па формулах табліцы 7.1, у каторых  $x_1 = x \cos \alpha$ ,  $x_1^* = x^* \cos \alpha$ ,  $l_1 = l \cos \alpha$ . Рэакцыі сувязей і сіла  $F$  перпендыкулярны да апорнай плоскасці сувязі  $B$ . Значэнні рэакцый не змяняцца, калі дадзеную бэльку  $AE$

змяніць умоўнай бэлькай  $AE'$ , паралельнай да апорнай плоскасці (як паказана на мал. 8.5 пункцірам). Для умоўнай бэлькі справядлівы ўсе вывады, зробленыя ў п.п. 8.1, 8.2 для мадэлей  $M1, M1'$ , пры  $\alpha = 0$ . На малюнку 8.5  $R'_a = R_b$ ,  $F' = F$ .

8.4. У мадэлі  $M2$  рэакцыя  $R_A$  не залежыць ад вугла нахілу  $\alpha$  апорнай плоскасці сувязі  $B$  і палажэння пункта  $C$ , у якім прыкладзена сіла  $F$ . Яе велічыня знаходзіцца непасрэдна з азначэння рэакцыі як сілы процідзеяння з боку апоры  $A$  на грузцы  $F$ :  $R_A = F$ . Калі змяніць напрамак сілы на процілеглы, то рэакцыя таксама зменіць свой напрамак. Адзначым істотную асаблівасць мадэлі  $M2$ : лінія дзеяння сілы павінна праходзіць праз пункты  $A$  і  $B$ . Літарай  $A$  тут абазначаны пункт, у якім наложана *двухвалентная* сувязь. Прыклады прымянення гэтай мадэлі разгледжаны ніжэй.

Заўвага. Мадэль  $M2$  можна разглядаць як прыватны выпадак больш агульнай мадэлі, у якой лінія дзеяння сілы  $F$  можа праходзіць толькі праз пункт  $A$ . Такая мадэль пададзена на мал. 8.7, дзе габарыты бэлькі  $AE$  пашыраны (у адпаведнасці з п. 3.11). На гэтым малюнку  $\vec{R}_A = -\vec{F}$ ,  $R_B = 0$ , г. зн. сіла  $F$  успрымаецца адной апорай  $A$ ; на аднавалентную сувязь  $B$  уздзеянне сілы не перадаецца. Пры  $\alpha = 0$  разгледжаная мадэль пераходзіць у  $M2$ . Заўважым, што апора  $B$  таксама можа цалкам успрыняць сілу  $F$ , калі лінія дзеяння апошняй супадае з лініяй дзеяння рэакцыі  $R_B$ . Тады  $R_A = 0$ ,  $R_B = F$ . У справядлівасці прыведзеных тут вынікаў лёгка пераканацца шляхам пабудовы сілавога трохвугольніка (ён выраджаецца ў адрэзак).

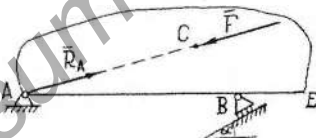


Рис. 8.7

8.5. У мадэлі  $M3$  дзеянне пары  $M$  на апоры таксама не залежыць ад палажэння пункта  $C$  на бэльцы. Рэакцыі  $R_A, R_B$  утвараюць пару супрацьдзеяння, момант якой згодна ўласцівасці 3.9 роўны моманту дадзенай пары, г. зн.  $R_A l_1 = M$ , адкуль знаходзім:  $R_A = R_B = M/l_1$ . Напрамак рэакцый устанаўліваем, як для пары процідзеяння. Так, на малюнку 7.4 актыўная пара  $M$  накіравана *супраць* гадзіннікавай стрэлкі; значыць, рэакцыі апораў павінны ўтвараць рэактыўную пару, накіраваную *на стрэлку* гадзінніка. Пры гэтым трэба памятаць, што рэакцыя апоры  $B$  перпендыкулярна да яе апорнай плоскасці, а рэакцыя  $R_A$  заўсёды паралельна вектару  $R_B$ , таму што ўтварае з ім рэактыўную пару.

8.6. Жорсткая замацоўка  $A$  ў мадэлі  $M4$  у адрозненне ад шарнірных апор перашкаджае як паступальнаму перамяшчэнню бэлькі, так і яе павароту вакол пункта замацавання. Таму процідзеянне сіле  $F$  з боку сувязі выражаецца двума

сілавымі фактарамі – рэакцыяй  $R_A$  і рэактыўнай парай  $M_A$ . Паколькі сіла  $F$  на малюнку 7.5 імкнецца павярнуць бэльку па стрэлцы гадзінніка, то пара процідзеяння  $M_A$  накіравана супраць руху стрэлкі гадзінніка. Па велічыні яна роўна моманту сілы адносна пункта  $A$ . Не цяжка заўважыць, што пры  $\alpha = 0$  альбо  $\alpha = \pi$  пара  $M_A = 0$ . Рэакцыя  $R_A$  не залежыць ад каардынаты  $x$  пункта  $C$  і заўсёды роўна і паралельна сіле  $F$ .

8.7. Знешнюю нагрузку ў мадэлі  $M5$  стварае толькі пара  $M$ , якая імкнецца павярнуць бэльку вакол пункта  $A$ . Працідзеянне гэтаму павароту аказвае рэактыўная пара  $M_A = M$ , накіраваная ў процілеглы бок; яна не залежыць ад палажэння пункта  $C$ . Вызначыць велічыню пары  $M_A$  можна таксама на падставе ўласцівасці 3.9.

Такім чынам, усе мадэлі разгледжаны. Ці трэба іх запамінаць? Вядома, не. Нумары мадэлей, літарныя абазначэнні іх параметраў былі патрэбны тут для апісання сутнасці задач. Але формулы, што прыведзены ў табліцы 7.1, неабходна засвоіць і асэнсаваць так, каб яны сталі відавочнымі, натуральнымі і лёгка ўзнаўляліся ў працэсе аналізу вывучаемай сістэмы альбо мысленнага эксперыменту з ёю. Для гэтага, магчыма, давядзецца не адзін раз звяртацца да табліцы 7.1. Але творча і трывала бэлечныя мадэлі могуць быць засвоены толькі на шматлікіх прыкладах.

Заўвага. Трэба мець на ўвазе, што любая задача статыкі дапускае некалькі спосабаў рашэння. Напрыклад, задачы, што апісваюцца мадэлямі  $M1$ ,  $M1^*$ , на падставе ўласцівасці 3.3 прыводзяцца да мадэлі  $M3$ . Для гэтага неабходна ў мадэлях  $M1$ ,  $M1^*$  сілу  $F$  перанесці паралельна на адну з апораў у палажэнне  $F'$  і далучыць пару сіл з момантам  $M$ . Затым знайсці рэакцыі апораў асобна ад сілы  $F' = F$  і пары  $M$ . На малюнку 8.6 сіла  $F$  перанесена ў пункт  $A$ ; пры гэтым дабаўлены момант  $M = Fc$ . Рэакцыі апораў знаходзім па формулах:

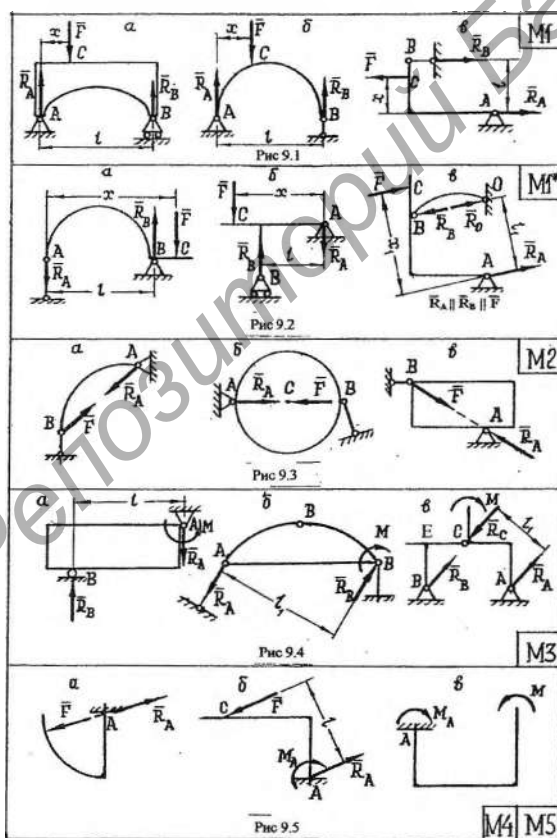
$$R_A = F' + \frac{M}{l} = F + \frac{Fc}{l}, \quad R_B = \frac{M}{l} = \frac{Fc}{l}.$$

## 9. Вызначэнне рэакцый сувязей

Нагадаем, што бэлечная мадэль – гэта яшчэ не канструкцыя аб'екта і нават не яго геаметрычная мадэль, а толькі *разліковая схема для вызначэння рэакцый сувязей*. Таму абмежаваны набор простых мадэлей, якія разгледжаны ў п. 7, дазваляе аналізаваць безліч геаметрычна разнастайных механічных сістэм. Прыклады такіх сістэм прыведзены ў табліцы 9.1. У правых вуглах рамак змешчаны нумары бэлечных мадэлей, якія неабходна выкарыстоўваць для вызначэння рэакцый апораў трох аднатыпных сістэм. Аналіз малюнкаў 9.1 – 9.4 паказвае, што геаметрычная форма механічнай сістэмы, размяшчэнне яе сувязей не маюць істотнага значэння пры выбары тыпа бэлечнай мадэлі. Адрэзак  $AB$ , які злучае апоры, можа быць гарызантальным, вертыкальным альбо нахіленым. Найбольшыя цяжкасці выклікае аналіз механічных сістэм,

які пададзены на малюнках 9.1, 9.2. Пры іх вывучэнні спачатку трэба знайсці лінію дзеяння рэакцыі рухомай апоры  $B$  (у задачах яна можа быць абазначана ліняй літарай), затым звярнуць увагу, што вектар сілы  $F$  паралельны да гэтай рэакцыі. Тады, грунтуючыся на п.3.7, можна сцвярджаць, што лінія дзеяння рэакцыі нерухомай апоры паралельна да рэакцыі  $R_B$  і сілы  $F$ . Калі пры гэтым шмеліцца, што лінія дзеяння сілы перасякае адрэзак  $AB$ , то сістэма прыводзіцца да мадэлі  $M1$ , а калі яна праходзіць па-за адрэзкам, то – да мадэлі  $M1^*$ . На малюнках 9.2, в, 9.4, а, в рухомыя апоры пададзены ў выглядзе крывалінейнага стрыжня, цыліндрычнага ролика і ломанага стрыжня  $BEC$ . У механічнай сістэме, якая паказана на малюнку 9.5, а, рэактыўная пара адсутнічае, таму што лінія дзеяння сілы  $F$  праходзіць праз пункт  $A$ .

Табліца 9.1



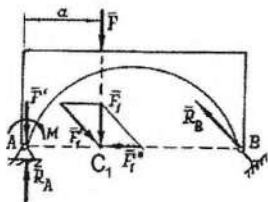
Бэлечныя мадэлі змяшчаюць толькі адзін сілавы фактар – сілу  $F$  альбо пару  $M$ . Пры гэтым у мадэлях  $M1$ ,  $M1^*$ ,  $M2$  накладзены абмежаванні на палажэнні ліній дзеяння дадзеных сіл  $F$  – яны альбо паралельны да рэакцый рухомах апор, альбо накіраваны ўздоўж адрэзка  $AB$ . Аднак названыя мадэлі можна выкарыстоўваць і ў больш агульных выпадках, калі прымяняць эквівалентнае пераўтварэнне нагрузак.

Разгледзім некаторыя магчымыя выпадкі.

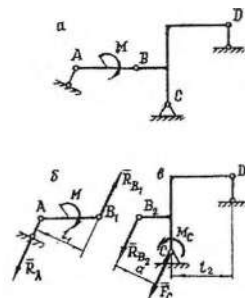
**9.1. На сістэму дзейнічае размеркаваная нагрузка.** Для знаходжання рэакцый яе трэба замяніць раўнадзейнай сілай.

**9.2. Нагрузка складаецца з некалькіх параў сіл.** Для рашэння задачы сістэму пар трэба прывесці да раўнадзейнай пары, г.зн. знайсці алгебраічную суму дадзеных параў.

**9.3. Геаметрычная схема механічнай сістэмы прыводзіцца да мадэлі  $M1$  альбо  $M1^*$ , але сіла  $F$  не паралельна да рэакцый рухомай апоры.** Рэакцыі сувязей можна знайсці на падставе п. 3.4, як для сістэмы трох сыходных сіл (без формул бэлечных мадэлей). Калі ўсё ж мэтазгодна выкарыстаць формулы, то сілу  $F$  неабходна пераўтварыць. Гэта можна зрабіць двума спосабамі: перанесці сілу паралельна на апору і далучыць пару  $M$  альбо раскладзі яе на два складнікі, адзін з якіх паралельны да рэакцыі  $R_B$ , а другі напраўлены па лініі  $AB$ . На малюнку 9.6 паказаны абодва варыянты пераўтварэння сілы. Пры паралельным пераносе вектара  $F$  на апору  $A$  атрымліваем сілу  $F' = F$  і пару з момантам  $M = Fa$ . Прымяняючы спосаб раскладання, сілу спачатку пераносім па яе лініі дзеяння ў пункт  $C$ , на адрэзку  $AB$  (на малюнку перанесеная сіла абазначана праз  $F_1$ ), а затым прадстаўляем яе ў выглядзе двух складнікаў:  $F_1' \parallel R_B$  і  $F_1''$  уздоўж  $AB$ . Пасля пераўтварэння нагрузкі рэакцыі вызначаюцца ад кожнага складніка паасобку.



Мал. 9.6



Мал. 9.7

**9.4. Сістэма нагружана адвольнымі сілай і парай.** Сілу  $F$  неабходна пераўтварыць, як апісана ў п. 9.3; атрыманую пры гэтым пару скласці з зададзенай парай  $M$ . У агульным выпадку нагружэння сістэмы можна

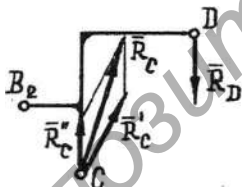
використаць пераўтварэнне нагрукі, выкладзенае ў п. 3.7, і рашаць даволі складаныя задачы.

Спынімся коротка на выкарыстанні бэлых мадэлей ў *састаўных* сістэмах. Методыка іх аналізу не адрозніваецца ад вядомай методыкі са складаннем умоў раўнавагі. Разлік пачынаецца з нагруканай часткі сістэмы.

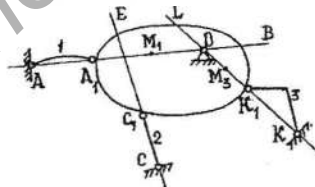
**Прыклад 9.1.** Механічная сістэма складаецца з бэлькі  $AB$ , на якую дзейнічае пара  $M$ , і рамы  $BCD$  (мал. 9.7, а). Знайдзі рэакцыі апор  $A$ ,  $C$ ,  $D$ . Геаметрычныя параметры сістэмы зададзены.

**Рашэнне.** Расчліняем сістэму на дзве часткі: бэльку і раму (мал. 9.7, б, в). Рэакцыю  $R_d$  накіроўваем паралельна да рэакцыі  $R_a$ . Нагруканай з'яўляецца бэлька  $AB$ . Выкарыстаўшы для яе мадэль  $M3$ , знаходзім:  $R_a = R_b = \frac{M}{l_1}$ .

Пераходзім да аналізу рамы. Нагрукай для яе з'яўляецца рэакцыя  $R_b$ , роўная і паралельная да  $R_a$ . Пераносім вектар  $R_b$  паралельна на апору  $C$ . Атрымліваем сілу  $F_c = R_b = M/l_1$ . Нагадаем, што сіла  $F_c$  і пара  $M_c$  ствараюць новую нагрукку на раму (замест  $R_b$ ). Улічваючы, што сіла ўспрымаецца адной апорай  $C$ , і зноў выкарыстоўваючы мадэль  $M3$ , знаходзім рэакцыі апораў. Ад дзеяння сілы  $F_c$  маем:  $R_c = -F_c$ ,  $R'_d = 0$ ; ад дзеяння пары  $M_c$  знаходзім:  $R_c'' = R'_d = M_c/l_2 = Mal/l_1l_2$  (рыс. 9.8). Запісваем канчатковыя выражэнні рэакцый сувязей:  $R_a = M/l_1$ ,  $R_c = R_c' + R_c''$ ,  $R_d = Mal/l_1l_2$ , дзе  $R_c' = M/l_1$ ,  $R_c'' = Mal/l_1l_2$ .



Мал. 9.8

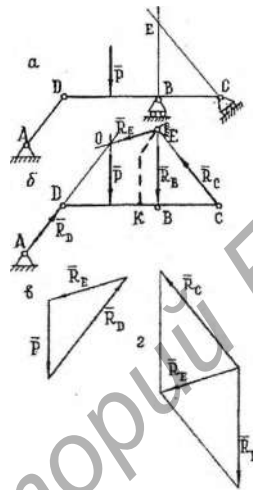


Мал. 9.9

**9.5.** Вышэй разглядаліся мадэлі бэлек з адной альбо двума сувязямі. Сустрэкаюцца задачы, у якіх на цэла накладзены сістэмы з трох простых сувязей. У гэтым выпадку неабходны эквівалентныя пераўтварэнні сістэмы сувязей. На мал. 9.9 кожная з простых сувязей 1, 2, 3 процідейнічае перамяшчэнням пунктаў цэла  $D$  уздоўж прамых  $AB$ ,  $CE$ ,  $KL$ , якія праведзены праз шарніры  $A$ ,  $A_1$ ,  $B$ ,  $B_1$ ,  $K$ ,  $K_1$ . Напрыклад, пункт  $M_1$  не можа перамяшчацца уздоўж лініі  $AB$ , пункт  $M_1$  — уздоўж лініі  $KL$ . Адгэтуль вынікае, што для пункта  $O$ , у якім перасякаюцца прамыя  $AB$  і  $KL$ , выключаны перамяшчэнні ў двух напрамках  $AB$  і  $KL$ , а значыць, і па ўсіх іншых напрамках у плоскасці. Таму, калі ў пункце  $O$  змясціць нерухома цыліндрычны шарнір, то ён будзе выконваць функцыі двух сувязей 1 і 3. Такім чынам, сістэма з трох простых сувязей, што

накладены на цела  $D$ , можа быць заменена дзвюма: аднавалентнай сувяззю 2 і двухвалентнай  $O$ .

**Прыклад 9.2.** Бэлька  $DC$  нагружана сілаю  $P$  і замацавана пры дапамозе трох сувязей  $AD$ ,  $B$  і  $C$  (мал. 9.10, а). Знайдзі іх рэакцыі, не складаючы ўмоў раўнавагі.



Мал. 9.10

**Рашэнне.** Замяняем сувязі  $B$  і  $C$  адной сувяззю – нерухомым цыліндрычным шарнірам. Змесцім яго ў пункце  $E$  на перасячэнні ліній дзеяння рэакцый гэтых сувязей (мал. 9.10,б). Як бачым, шарнірная апора аказалася за межамі бэлькі. На падставе ўласцівасці 3.11 аб пашырэнні габарытаў аб'екта раўнавагі злучаем апору  $E$  з бэлькай  $DC$  пры дапамозе стрыжня  $EK$  (ён паказаны пункцірам). Вызваляемся ад сувязей. Цяпер бэлька знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем трох сіл:  $P$ ,  $R_D$ ,  $R_E$ . Іх лініі дзеяння павінны перасякацца ў адным пункце  $D$ . Графічнае рашэнне задачы прыведзена на мал. 9.10, в. Атрыманая рэакцыя  $R_E$  ўжывае сабою раўнадзейную рэакцыю сувязей  $B$  і  $C$ . Вектары  $R_B$  і  $R_C$  знаходзім шляхам раскладання вектара  $R_E$  на складнікі, паралельныя да адрэзкаў  $BE$  і  $CE$  (мал. 9.10, з).

### 10. Вызначэнне рэакцый апораў цвёрдага цела

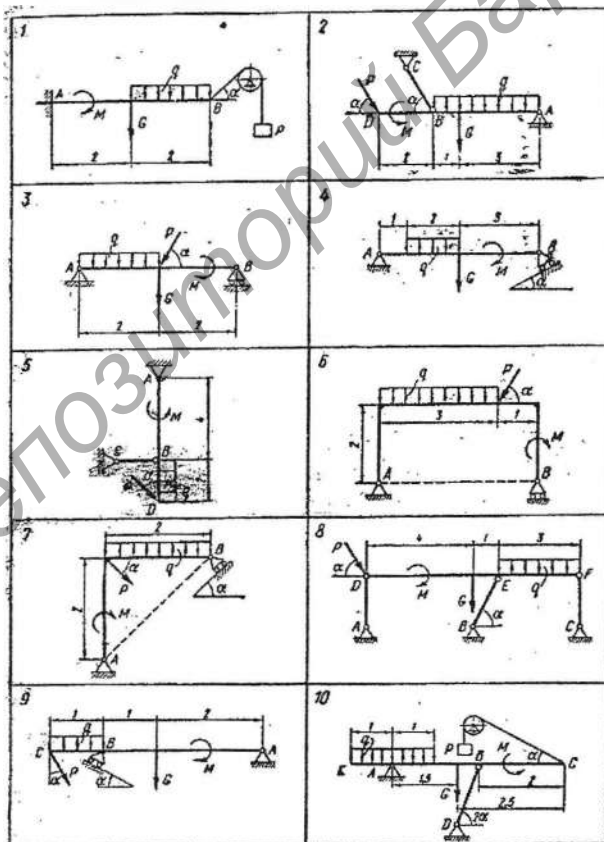
#### Заданне № 1

У якасці цвёрдых цел тут разглядаюцца бэлькі, рамы, і іншыя плоскія сістэмы. Кожнае цела нагружана адным з наступных відаў нагрузак:

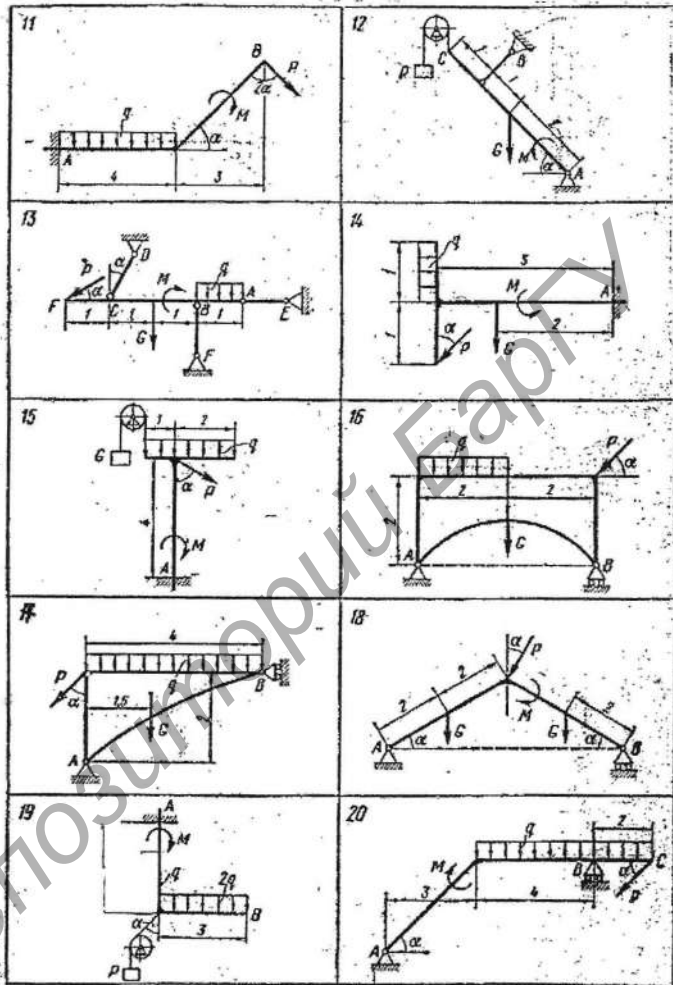
всюроджаная сіла  $P$ , пара сіл  $M$ , уласная вага  $G$ , размеркаваная нагрузка  $q$ . Зданне змяшчае 60 варыянтаў. У кожным варыянце чатыры задачы. Нумар варыянта адпавядае парадкаваму нумару студэнта ў спісе вучэбнай групы (альбо задаецца выкладчыкам). Нумары схем для задач прыведзены ў радку табліцы 10.1 (стар. ...), што вызначаецца нумарам варыянта, а нагрузка, якую неабходна пакінуць на схеме, змешчана над нумарам схемы ў версе табліцы. Тут прыведзены і значэнні вуглоў  $\alpha$ , якія патрэбны для графічнага рашэння задачы. Схемы механічных сістэм і нагрузка паказаны на малюнках 10.1 – 10.3. Умовы ўсіх задач сфармуляваны аднолькава.

*Задача. Для зададзенай механічнай сістэмы і нагрузкі знайсці ў агульным выглядзе рэакцыі апору, не складаючы ўмоў раўнавагі.*

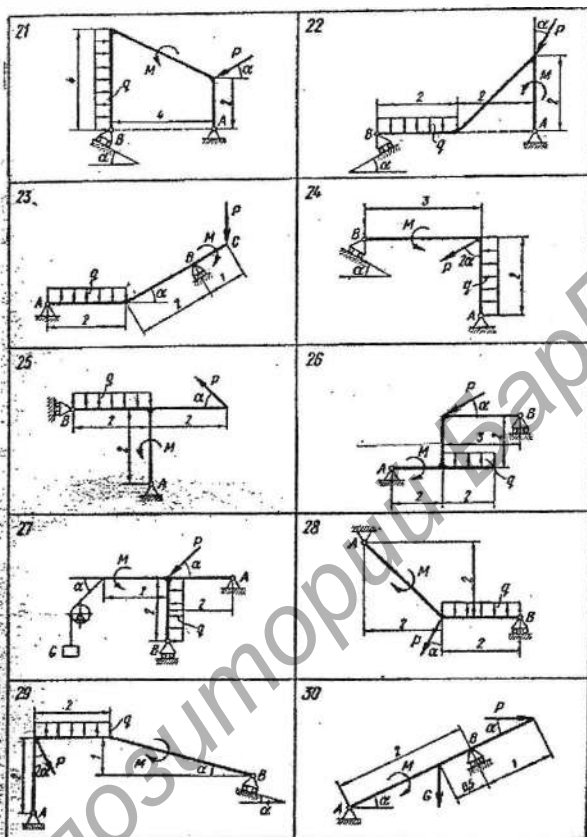
**Прыклад выканання.** Разгледзім варыянт задання № 60. У адпаведнасці з табліцай 10.1 у яго ўваходзяць задачы з нумарамі схем 11; 1; 30; 29. Схемы знаходзім на малюнках 10.1 – 10.3.



Мал. 10.1



Мал. 10.2



Мал. 10.3

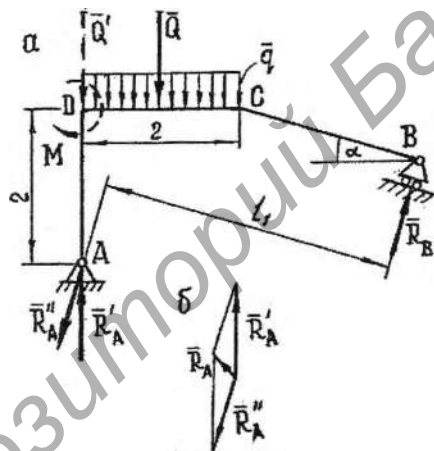
**Задача 1** (схема 11). Аналізуючы малюнак 10.4, пераконваемся, што схема адносіцца да мадэлі  $M5$ . А гэта азначае, што заданая пара  $M$  ураўнаважваецца рэактыўнай парай процілеглага напрамку. Таму  $M_A = M$ ,  $R_A = 0$ .

**Задача 2** (схема 1). Вага груза  $P$  перадаецца на бэльку  $AB$  пры дапамозе простага блока  $D$  без змянення:  $P_B = P$  (мал. 10.5). Выкарыстоўваючы мадэль  $M4$ , знаходзім:  $R_A = P_B = P$ ,  $M_A = Pl_1 = P \cdot 4 \sin \alpha$ . Сіла  $P_B$  імкнецца павярнуць бэльку вакол пункта  $A$  супраць руху стрэлкі гадзінніка. Таму рэактыўная пара супрацьдзеяння накіравана па стрэлцы гадзінніка.



для нагрукі  $G$   $R'_A = \frac{G'}{2} \cdot 0,5 = 0,25G \cos \alpha$ ,  $R'_B = \frac{G'}{2} \cdot 1,5 = 0,75G \cos \alpha$ ; для нагрукі  $G'$   $R''_A = G' = G \sin \alpha$ ,  $R''_B = 0$ . Поўныя рэакцыі апораў роўныя:  $R_A = \sqrt{(R'_A)^2 + (R''_A)^2} = G \sqrt{(0,25 \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha}$ ,  $R_B = R'_B = 0,75G \cos \alpha$ . Нагадаем, што тут  $G'/2 = q'$  - фіктыўная інтэнсіўнасць нармальнай нагрукі на пралёце бэлькі  $AB$  даўжынёю  $l = 2m$ .

**Задача 4** (схема 29). Участак рамы  $DC$  нагрукан размеркаванай нагрукі  $q$  (мал. 10.8). Задача прынцыпова не адрозніваецца ад папярэдняй і яе можна рашыць тымі ж спосабамі. Скарыстаемся другім спосабам. Нагрукі  $q$  замяняем раўнадзейнай  $Q = 2q$ . Сілу  $Q$  пераносім паралельна ў пункт  $D$ . Атрымліваем сілу  $Q' = Q$  і пару з момантам  $M = Q \frac{2}{2} = Q$ .



Мал. 10.8

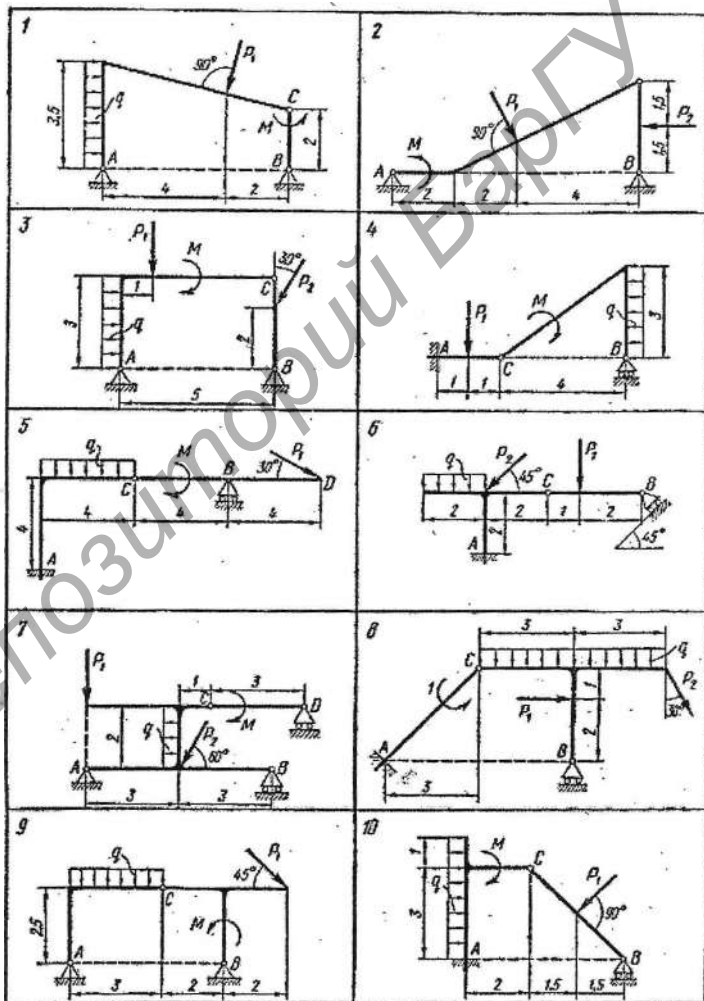
Рэакцыі апораў вызначаюць асобна ад сілы  $Q'$  і пары  $M$ . Канчаткова знаходзім:  $\bar{R}_A = \bar{R}'_A + \bar{R}''_A$  (мал. 10.8, б),  $\bar{R}_B = -\bar{R}''_A$ , дзе  $R'_A = Q = 2q$ ,  $R''_A = \frac{Q}{l_1}$ ,  $l_1 = CB + DC \cos \alpha - AD \sin \alpha$ .

## 11. Вызначэнне рэакцый сувязей складанай сістэмы

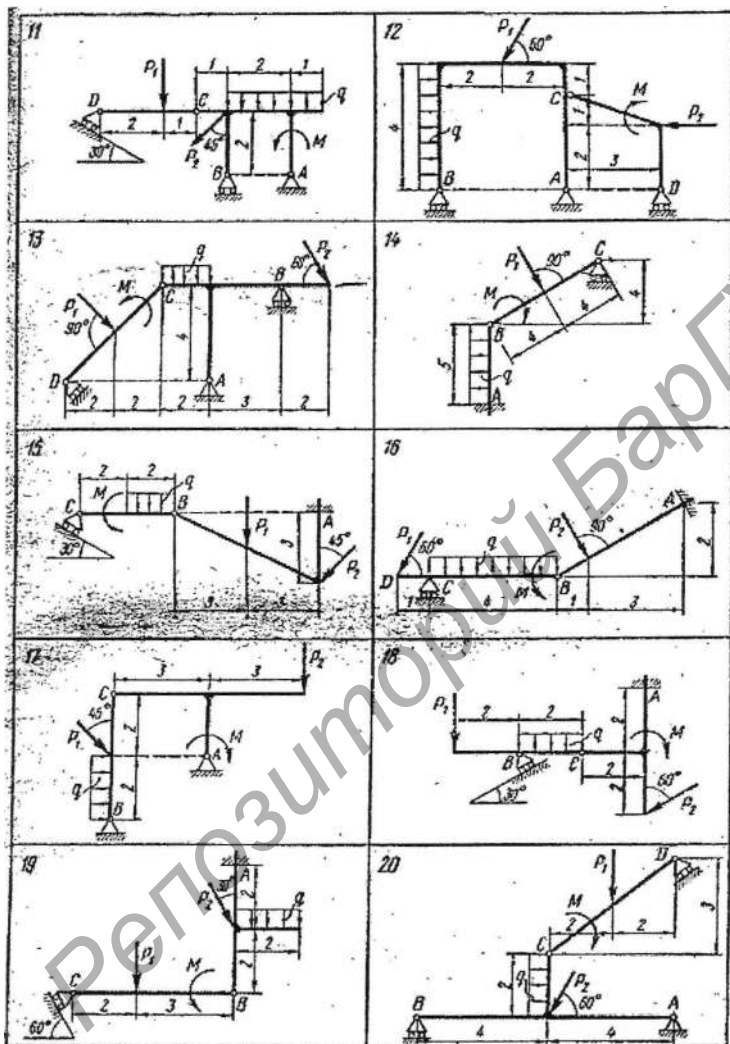
### Заданне № 2

Заданне змяшчае 60 варыянтаў. Кожны з іх утрымлівае чатыры задачы, у якіх прадстаўлены механічныя сістэмы з дзвюх частак. Адна з іх нагрукана якім-небудзь з пералічаных відаў нагрукі: парай  $M$ , сілай  $P_1$ , сілай  $P_2$ ,

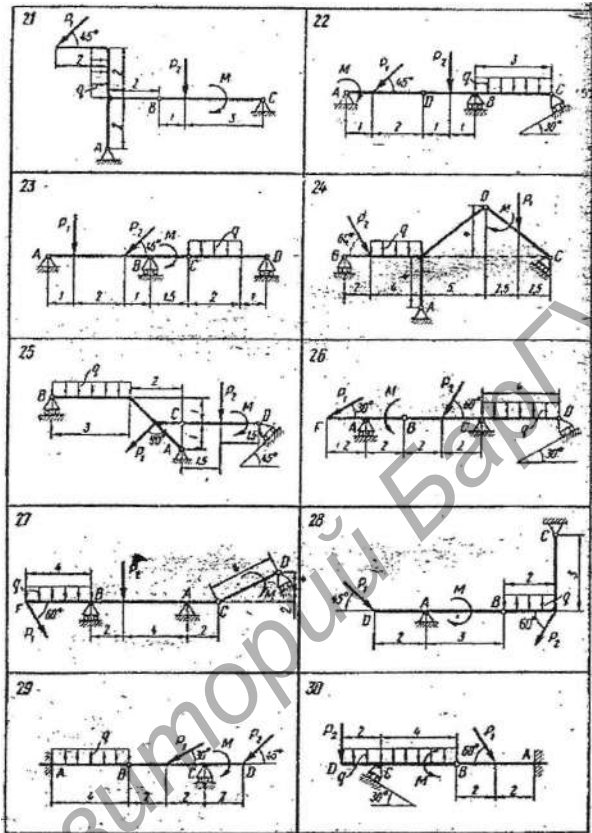
размеркаванай нагрузкай  $q$ . Нумар варыянта выбіраецца, як і ў заданні №1: ён адпавядае парадкаваму нумару студэнта ў спісе вучэбнай групы (альбо задаецца выкладчыкам). Нумары схем да задач прыведзены ў адпаведным варыянту радку тэблiцы 11.1 (стар. 41), а від нагрузкі, якую патрэбна пакінуць на схеме, указаны над нумарам схемы ў загаловку тэблiцы. Схемы механічных сістэм прыведзены на малюнках 11.1–11.3. Умовы ўсіх задач фармулююцца аднолькава.



Мал. 11.1



Мал. 11.2



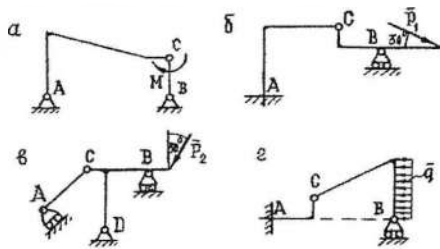
Мал. 11.3

*Задача.* Для заданной механической системы и нагрузки найти в указанном виде реакции внешних и внутренних связей, не складывая умов равновесия.

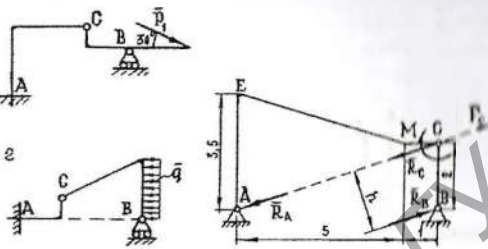
Приступая к решению задачи, необходимо сначала выучить механическую систему. Две утваряючы яе падсістэмы (два цэлы) можна аднесці да аднаго з наступных відаў: *базісная, надбудаваная і прамежная*. У базіснай падсістэме валентнасць знешніх сувязей роўна тром, у надбудаванай – нулю, а ў прамежнай – адзінці альбо двум. Першая з іх можа існаваць як самастойная (простая) сістэма. *Дзеянне нагрузкі, прыкладанай да базіснай падсістэмы, не перадаецца на другія падсістэмы.*

Трэба мець на ўвазе, што паколькі на схемах, паказаных на малюнках 11.1–11.3, застаецца толькі адзін від нагрузкі, то многія з іх разлічваюцца як простыя (адно цэла). У некаторых варыянтах ненагружаныя часткі трэба разглядаць як сувязі.

**Приклад виконання.** Розглядім варіант задання № 64). На таблиці 11.1 знаходім номери задач: 1; 5; 13; 4. Адаведніи ім схема і шаруєт прилведення на рис. 11.1 і асобна вынесены на мал. 11.4.



Мал. 11.4



Мал. 11.5

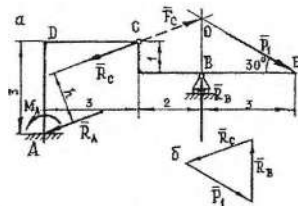
**Задача 1** (схема 1). Тут нагрукай з'яўляецца пара сіл  $M$  (мал. 11.5). Стрыжань  $AEC$  разглядаецца як сувязь, накладзеная на аб'ект раўнавагі  $BC$ . Лінія дзеяння рэакцыі гэтай сувязі праходзіць праз шарніры  $A$ ,  $C$ . У адпаведнасці з п. 3.9 рэакцыя другой сувязі  $B$  павінна ўтварыць сумесна з рэакцыяй  $R_C$  пару процідзеяння; таму  $\vec{R}_B \parallel \vec{AC} \parallel \vec{R}_C$ . Пры гэтым  $R_C = R_B = M/h$ . Рэактыўная пара  $(\vec{R}_A, \vec{R}_C)$  процілеглая па накірунку зададзенай пары  $M$ . На малюнку паказаны сапраўдныя напрамкі рэакцый  $R_B, R_C$ . Сіла  $F_C$ , якая дзейнічае на стрыжань  $AEC$  з боку стрыжня  $BC$ , накіравана процілеглая рэакцыі  $R_C$ , г. зн.  $\vec{F}_C = -\vec{R}_C$  (мал. 11.5). Паколькі стрыжань  $AEC$  знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем дзвюх сіл  $F_C$  і  $R_A$ , то ў адпаведнасці з п. 3.1 гэтыя сілы роўныя і накіраваны ў процілеглыя бакі:  $R_A = F_C = M/h$ . Нагадаем, што рэакцыя  $R_C$  прыкладзеная да стрыжня  $BC$ , а сіла  $F_C$  – да стрыжня  $AEC$ .

**Заўвага.** Калі пару  $M$  прыкладзі да стрыжня  $AEC$ , то другі стрыжань  $BC$  будзе сувязню. У гэтым выпадку рэакцыі  $R_C, R_A$  вертыкальныя.

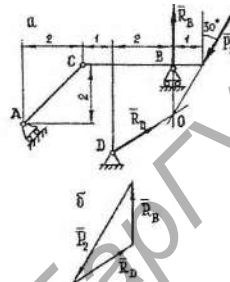
**Задача 2** (схема 5). Тут  $ADC$  і  $CBE$  – адпаведна базісная і прамежная падсістэмы. Для рашэння задачы неабходна разгледзець раўнавагу кожнай падсістэмы. Пачынаем з нагруканай часткі  $CBE$ . Мысленна аддзяляем яе ад базіснай падсістэмы  $ADC$ . На выдзеленую частку накладзены дзве сувязі. Сувязь  $C$  уяўляе сабой нерухомы цыліндрычны шарнір. Рэакцыі знойдем графічна. Для гэтага будзем сістэму на малюнку ў маштабе; вектар сілы наносім з дапамогай вугламера. Знаходзім пункт перасячэння ліній дзеяння сілы  $P_1$  і рэакцыі  $R_B$ . Праз яго праходзіць і лінія дзеяння рэакцыі  $R_C$ . Будзем адпаведны трохвугольнік сіл (мал. 11.6,б). Вымяраем яго стораны, паралельныя да вектараў  $R_B, R_C$  і дзелім вынік на даўжыню стараны, што прадстаўляе сілу  $P_1$ ; атрымліваем:  $R_B = 0,54P_1, R_C = 0,92P_1$ .

Разгледзім левую частку  $ADC$ . На яе перадаецца сіла  $F_C$ , роўная па велічыні і процілеглая па напрамку рэакцыі  $R_C$ :  $\vec{F}_C = -\vec{R}_C$ . Высвятляем, што частка  $ADC$ ,

нагружена сілаю  $F_C$ , належыць да мадэлі  $M4$ . Значыць, рэактыўнае процідзеянне апоры  $A$  выражаецца сілай  $R_A = F_C = 0,92P_1$  і парай  $M_A = F_C h = 0,92P_1 h$ .



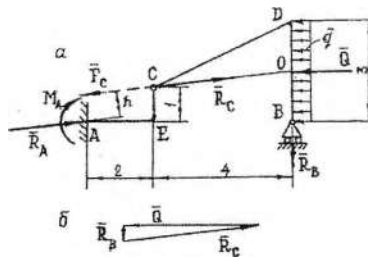
Мал. 11.6



Мал. 11.7

**Задача 3** (схема 13). Канструкцыя складаецца з двух частак: надбудаванай  $AC$  і базіснай  $DBC$  (мал. 11.7, а). Аналіз пачынаем з нагружанай падсістэмы. Калі б сіла  $P_2$  была перпендыкулярна да апорнай плоскасці сувязі  $B$ , то гэтую частку можна было б разглядаць як кансольную бэльку мадэлі  $M1^*$ . Тут, як і ў задачы 2, давядзецца прымяніць графічны спосаб. Лінія дзеяння рэакцыі  $R_B$  вядома. Знаходзім яе пункт перасячэння з лініяй дзеяння сілы  $P_2$ . Праз гэты пункт праводзім лінію дзеяння рэакцыі  $R_C$ . Затым будзем трохвугольнік сіл (мал. 11.7, б), змяраем яго стораны і вылічваем іх адносіны да стараны  $P_2$ ; знаходзім:  $R_B = 0,57P_2$ ;  $R_C = 0,55P_2$ . Левая частка  $AC$  уяўляе прамежную падсістэму. Таму дзеянне сілы  $P_2$  на яе не перадаецца і, значыць,  $R_A = 0$ .

**Задача 4** (схема 6). Механічная сістэма складаецца з базіснай  $AEC$  і прамежнай  $CBD$  падсістэм. Мысленна (каб не рабіць дадатковых малюнкаў) раз'ядноўваем іх у шарніры  $C$ . Разглядаем раўнавагу нагружанай часткі  $CBD$ , вызваліўшы яе ад сувязей у пунктах  $B$  і  $C$ . Размеркаваную нагрузку  $q$  замяняем раўнадзейнай сілай  $Q = 3q$ . Прымяняем графічны спосаб рашэння. Знаходзім пункт перасячэння  $O$  вядомых ліній дзеяння рэакцыі  $R_B$  і сілы  $Q$ . Праз яе праводзім лінію дзеяння рэакцыі  $R_C$ . Далей, будзем трохвугольнік сіл (мал. 11.8, б). Сілу  $Q$  лічым вядомай. Змяраем дзве другія яго стораны і, як у задачы 3, знаходзім:  $R_B = 0,125Q = 0,375q$ ;  $R_C = 1,025Q = 3,075q$ . Сіла  $\vec{F}_C = -\vec{R}_C$  служыць нагрузкай для левай часткі  $AEC$  (мал. 11.8, а), якая адносіцца да мадэлі  $M4$ . Проціддзеянне сувязі  $A$  выражаецца сілай  $R_A = F_C = R_C = 3,075q$  і парай сіл  $M_A = F_C h = 3,075qh$ .



Мал. 11.8

Зувеага. У заданнях № 1 і № 2 выкарыстаны механічныя сістэмы са зборніка [1].

#### Літаратура

1. Зборнік заданняў для курсавых работ па тэарэтычнай механіцы / Пад рэд. А.А. Яблонскага. – Масква: Выд-ва “Вышэйшая школа”. – Выданні да 1985 г.

Таблиця 10.1

№№ варіанту	Задачі: № схеми, від нагрузки				№№ варіанту	Задачі: № схеми, від нагрузки				Вугал $\alpha$ , град	
	M	P	G	q		M	P	G	q	№№схем	$\alpha$
1	1	2	3	29	31	10	3	8	27	1	30
2	2	3	4	28	32	11	5	9	29	2	60
3	3	5	8	27	33	30	6	10	28	3	60
4	4	6	9	26	34	29	7	12	26	4	30
5	5	7	10	25	35	28	8	13	24	5	45
6	6	8	12	24	36	27	9	14	23	6	60
7	7	9	13	23	37	26	10	15	25	7	45
8	8	10	14	22	38	25	11	16	1	8	60
9	9	11	15	21	39	24	12	17	2	9	30
10	10	12	16	20	40	23	13	18	3	10	30
11	11	13	17	19	41	22	14	27	19	11	45
12	12	14	18	17	42	21	15	30	4	12	45
13	13	15	27	16	43	20	16	3	5	13	30
14	14	16	30	15	44	19	17	4	6	14	45
15	15	17	1	14	45	18	19	1	7	15	60
16	18	17	2	13	46	15	20	2	8	16	45
17	19	18	3	11	47	14	21	30	9	17	45
18	20	19	4	10	48	13	22	27	10	18	30
19	21	20	8	9	49	12	23	18	11	19	45
20	22	21	9	8	50	11	24	17	13	20	45
21	23	22	10	7	51	10	25	16	14	21	30
22	24	23	12	6	52	9	26	15	16	22	30
23	25	24	13	5	53	8	27	14	16	23	30
24	26	25	14	4	54	7	28	13	17	24	30
25	27	26	15	3	55	6	29	12	20	25	45
26	28	27	16	2	56	5	30	10	21	26	30
27	29	28	17	1	57	4	18	9	22	27	45
28	30	29	18	27	58	3	2	8	23	28	30
29	10	30	27	28	59	2	6	18	24	29	45
30	1	7	14	25	60	11	1	30	29	30	30

Таблиця 11.1

Нумари варіянтау	Задачы: № схеми, від нагрукі				Нумари варіянтау	Задачы: № схеми, від нагрукі			
	$M$	$P_1$	$P_2$	$q$		$M$	$P_1$	$P_2$	$q$
1	1	2	3	4	31	2	3	30	5
2	2	3	6	5	32	3	4	29	7
3	3	4	7	6	33	4	2	28	8
4	4	5	8	7	34	5	6	27	9
5	5	6	11	8	35	6	7	26	10
6	6	7	12	9	36	7	8	25	11
7	7	8	13	10	37	8	9	24	12
8	8	9	15	11	38	9	10	23	13
9	9	10	16	12	39	10	11	22	14
10	10	11	17	13	40	11	12	21	15
11	11	12	18	14	41	12	13	20	16
12	12	13	19	15	42	13	14	19	17
13	13	14	20	16	43	14	15	18	19
14	14	15	21	17	44	15	16	17	18
15	15	16	22	18	45	16	17	15	20
16	16	17	23	19	46	17	18	16	21
17	17	18	24	20	47	18	19	13	22
18	18	19	25	21	48	19	20	12	23
19	19	20	26	22	49	20	21	11	24
20	20	21	27	23	50	21	22	8	25
21	21	22	28	24	51	22	23	7	26
22	22	23	29	25	52	23	24	6	27
23	23	24	30	26	53	24	25	3	28
24	24	25	3	27	54	25	26	3	29
25	25	26	6	28	55	26	27	12	30
26	26	27	7	29	56	27	28	11	1
27	27	28	8	30	57	28	29	8	2
28	28	29	11	1	58	29	30	7	3
29	29	30	12	2	59	30	1	6	6
30	30	1	13	3	60	1	5	13	4

**С.І. РУСАН**

**РАЎНАВАГА ПЛОСКІХ МЕХАНІЧНЫХ СІСТЭМ  
(нетрадыцыйная методька вывучэння)**

***Метадычныя рэкамендацыі***

Тэхнічны рэдактар *І.М. Астапчык*  
Набор тэкста *Ю.П. Нярода*  
Камп'ютэрная вёрстка *А.Г. Халол*

Здадзена ў набор 25.06.2005. Падапісана ў друк 26.09.2005.  
Фармац 21х14,5. Папера афсетная.  
Друк афсетны. Гарнітура Таймс.  
Ум. друк. арк. 2,4. Ул.-выд. арк. 2,5.  
Тыраж 100 экз. Заказ 384.

Ліцэнзія ЛВ № 02330/0133468 от 09.02.2005.

Выдавец і паліграфічнае выкананне:  
УА "Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт"  
225404 г. Баранавічы, вул. Войкава, 21