Заключение. Отметим, что РВУ, основанное на представлении (5) с матрицей Γ_4, содержащей один ненулевой спиновый блок $C^{1/2}$ вида (6), при выборе матрицы билинейной формы η в виде (4), (6) удовлетворяет всем необходимым требованиям и описывает микрообъект со спином $1/2$ и тремя различными значениями массы. Значения массы находятся из формулы (3), где $\lambda_3 = 1$, λ_1 и λ_2 определяются согласно (10). Выбрав, например, $c_1 = c_2 = 1$, $|c_3| = |c_4| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, получим: $m_1 = \frac{2}{\sqrt{5}+1}m, \quad m_2 = \frac{2}{\sqrt{5}-1}m, \quad m_3 = m.$

Список цитируемых источников

1. *Плетюхов, В. А.* Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. — Минск : Беларус. навука, 2015. — 326 с.

УДК 517.538.52+517.538.53

А. А. Драпеза, М. В. Сидорцов
Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель

АСИМПТОТИКА АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА—ПАДЕ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Введение. Пусть $\lambda_j = e^{i\frac{2\pi(j-1)}{k}}$, $j = 1, 2, ..., k$, $\varphi(\xi) = -\xi(\xi-\lambda_1)(\xi-\lambda_2)...(\xi-\lambda_k) = \xi(1-\xi^k)$, а x_j — нули φ', т. е.

$$x_j = \sqrt[k]{\frac{1}{k+1}}e^{i\frac{2\pi(j-1)}{k}}, \quad j = 1, 2, ..., k,$$

где i — мнимая единица. Рассмотрим однозначную вещественнозначную функцию $S(\xi) = \ln\varphi(\xi), \xi \in (0; 1)$, считая, что выбрана та ветвь, для которой $\ln e^{-1} = -1$. По определению полагаем, что $S(0) = S(1) = -\infty$.

Справедливы равенства

$$S(x_1) = \ln\frac{k}{\sqrt[k]{(k+1)^{k+1}}}, S'(\xi) = \frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)}, S''(\xi) = \frac{\varphi''(\xi)\varphi(\xi) - [\varphi'(\xi)]^2}{\varphi^2(\xi)},$$

из которых следует, что $S'(x_1) = 0, S''(x_1) = -(k+1)^{(k+2)/k}$. Далее считаем, что $n = m_1 = m_2 = \ldots = m_k$, $\lambda_j = e^{i\frac{2\pi(j-1)}{k}}, \quad j = 1, 2, ..., k$ [1].

Основная часть. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *При $n \to \infty$ равномерно на любом из C*

$$P_{kn}^j(z) \to \exp\left\{\left(\lambda_j - \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)z\right\}, j = 1, 2, ... k.$$

Теорема 2. *Для любого фиксированного $j = 1, 2, ..., k$ при $n \to \infty$*

$$P_{kn}^j(z) = (-1)^n\lambda_j^{n+1}\frac{z^{kn+n+1}}{(kn+n)!}e^{\lambda_j z(1-x_1)}\sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_1)}}e^{nS(x_1)}(1+O(1)).$$

Теорема 3. *Для любого фиксированного $j = 1, 2, ..., k$ при $n \to \infty$*

$$e^{\lambda_j z} - \pi_{kn,kn}^j(z; e^{\lambda_j \xi}) = (-1)^n\lambda_j^{n+1}\frac{z^{kn+n+1}}{(kn+n)!}e^{\lambda_j z(1-x_1)}\sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_1)}}e^{nS(x_1)}e^{\frac{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i}{k+1}z}(1+O(1)).$$

Следствие 1. *Если k = 1, то при* $n \to \infty$ $P_n(z) \to e^{z/2}$.

В случае, когда $k \geq 2$, *то при* $n \to \infty$ $P_{kn}^j(z) \to e^{\lambda_j z}$, $j = 1, 2, ..., k$.

Для доказательства следствия 1 достаточно заметить, что при $k = 1$ $\lambda_1 = 1$. Далее, если предположить $k \geq 2$, то легко показать, что $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$.

Следствие 2. *Если k = 1, то при* $n \to \infty$

$$e^z - \pi_{n,n}(z; e^{\xi}) = (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n)!} e^z \sqrt{\frac{\pi}{4n}} \frac{1}{4^n}(1 + O(1)).$$

Данное асимптотическое равенство является частным случаем хорошо известного в теории аппроксимаций Паде равенства Д. Браесса: $n \to \infty$:

$$e^z - \pi_{n,m}(z; e^{\xi}) = \frac{(-1)^m n! m! e^{2mz/(n+m)}}{(n+m)!(n+m+1)!} z^{n+m+1}(1 + O(1).$$

Следствие 3. *Если* $k = 2$, *то* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ *и при* $n \to \infty$

$$e^z - \pi_{2n,2n}^1(z; e^{\xi}) = (-1)^n \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} e^{\left(1 - 1/\sqrt{3}\right)z} \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n (1 + O(1)).$$

Заметим, что утверждения следствия согласуются с результатами работ [1—3].

Заключение. Мы нашли асимптотику аппроксимаций Эрмита—Паде второго рода для экспоненциальных функций с комплексными множителями в показателях экспонент.

Список цитируемых источников

1. *Старовойтов, А. П.* Асимптотика аппроксимаций Эрмита—Паде системы экспонент / А. П. Старовойтов // Докл. НАН Беларуси. — 2013. — Т. 57. — № 2. — С. 5—10.
2. *Старовойтов, А. П.* О свойствах аппроксимаций Эрмита—Паде для системы функций Миттаг—Леффлера / А. П. Старовойтов // Докл. НАН Беларуси. — 2013. — Т. 57. — № 1. — С. 5—10.
3. *Старовойтов, А. П.* Аппроксимации Эрмита—Паде для системы функций Миттаг—Леффлера / А. П. Старовойтов // Проблемы физики, математики и техники. — 2013. — № 1 (14). — С. 81—87.

УДК 517.538.52+517.538.53

Е. П. Кечко

Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель

О ЛОКАЛИЗАЦИИ НУЛЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА—ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Введение. Для заданного натурального числа k рассмотрим произвольный фиксированный набор $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ различных комплексных и произвольный набор $\{n_p\}_{p=0}^k$ натуральных чисел.

Недиагональными многочленами Эрмита—Паде 1-го рода системы экспонент $\left\{e^{\lambda_p z}\right\}_{p=0}^k$ называют многочлены $A_{n_p}^p(z)$, $\deg A_{n_p}^p \leq n_p - 1$, $p = 0, 1, \ldots, k$, среди которых хотя бы один тождественно не равен нулю, удовлетворяющие условию

$$R_{n_0, n_1, \ldots n_k}(z) = \sum_{p=0}^{k} A_{n_p}^p(z) e^{\lambda_p z} = O(z^{n_0 + n_1 + \ldots n_k - 1}), \; z \to 0. \quad (1)$$