МІНІСТЭРСТВА АДУКАЦЫІ РЭСПУБЛІКІ БЕЛАРУСЬ

УСТАНОВА АДУКАЦЫІ
«БАРАНАВІЦКІ ДЗЯРЖАЎНЫ ЎНІВЕРСІТЭТ»

С. І. РУСАН

СТАТЫКА

ПРАЕКЦЫЯ І МОМАНТ СІЛЫ

**Метадычныя рэкамендацыі
для аўдыторнай і самастойнай работы студэнтаў**

**Баранавічы
РВА БарДУ
2011**

УДК 621(072)
ББК 34.4я73
Р88

Рэкамендавана да друку метадычнай камісіяй
інжынернага факультэта

А ў т а р

С. І. Русан

Р э ц э н з е н т ы:

М. В. Чычкан, кандыдат тэхнічных навук, дацэнт кафедры
тэхналогіі машынабудавання БарДУ;
А. К. Гаўрыленя, кандыдат тэхнічных навук, выкладчык кафедры
агульнанавуковых дысцыплін БарДУ

Русан, С. І.

Р88 **Статыка : Праекцыя і момант сілы** [Тэкст] : метад. рэкамендацыі для аўдыторнай і самастойнай работы студэнтаў / С. І. Русан. — Баранавічы : РВА БарДУ, 2011. — 70, [6] с. : іл. — 95 экз.

Змяшчае заданні для самастойнага выканання на вызначэнне праекцый сіл на восі і плоскасці і на вызначэнне іх момантаў адносна цэнтраў і восей, а таксама кароткія звесткі з тэорыі і прыклады выканання заданняў.

Рэкамендуецца студэнтам тэхнічных спецыяльнасцей вышэйшых навучальных устаноў.

Табл. 4. Рыс. 98. Дадат. 3.

УДК 621(072)
ББК 34.4я73

ЗМЕСТ

ПРАДМОВА

Пачынаць вывучэнне статыкі немагчыма без грунтоўнага засваення тэмы «Праекцыя і момант сілы». Між тым, у большасці падручнікаў [1—6] па тэарэтычнай механіцы праекцыі сілы не разглядаюцца наогул, а паняцці аб моманце сілы не замацоўваюцца на прыкладах. Зусім адсутнічаюць заданні па тэме для самастойнага выканання студэнтамі, у тым ліку і дамашнія заданні. У выніку першыя практычныя заняткі па дысцыпліне праводзяцца непрадуктыўна.

Падрыхтаваныя тут матэрыялы дазваляюць павысіць інтэнсіўнасць вучэбнага працэсу на пачатку вывучэння дысцыпліны і забяспечыць у далейшым больш высокі яго ўзровень.

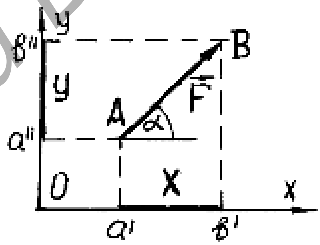
Студэнт, які сумленна выканае змешчаныя тут заданні, не сустрэне істотных цяжкасцей пры рашэнні задач па статыцы і значна лягчэй пераадолее іх пры вывучэнні кінематыкі і дынамікі.

1 КАРОТКІЯ ЗВЕСТКІ З ТЭОРЫІ

1.1 Праекцыя сілы на вось

Праекцыя сілы на вось — *алгебраічная велічыня, роўная даўжыні адрэзка паміж праекцыямі пачатку і канца вектара сілы на гэтую вось.*

Праекцыі сілы F на восі *Ox*, *Oy*, *Oz* будзем абазначаць вялікімі літарамі X, Y, Z альбо F_x, F_y, F_z. Калі сіла абазначана літарай з індэксам, то і яе праекцыі абазначаюцца з тым жа індэксам. Напрыклад, праекцыі сілы F_5 трэба абазначыць праз X_5, Y_5, Z_5 (альбо F_{5x}, F_{5y}, F_{5z}), а праекцыі сілы F_A — праз X_A, Y_A, Z_A (альбо F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Az}). На рысунку 1.1 паказаны праекцыі сілы F на восі каардынат *Ox*, *Oy*. Для гэтага з пачатку вектара сілы A і з яго канца B праведзены перпендыкуляры да восей і атрыманы праекцыі гэтых пунктаў. На рысунку 1.1 яны абазначаны літарамі a', a'', b', b''. З азначэння праекцыі сілы на вось відаць, што яны роўны адрэзкам $a'b'$, $a''b''$, г. зн. $X = a'b'$, $Y = a''b''$.



Рысунак 1.1

Велічыні праекцый сілы знаходзяцца па формулах

$$X = F\cos\alpha, \qquad Y = F\sin\alpha. \tag{1.1}$$

Яны справядлівы пры ўмове, што вугал α адлічваецца ад восі *Ox*.

Паколькі праекцыі сілы — алгебраічныя велічыні, то яны могуць быць дадатнымі і адмоўнымі. Памылкі ў знаках таксама недапушчальны, як і ў велічынях. Таму *правілы знакаў* неабходна засвоіць цвёрда. Разгледзім іх.

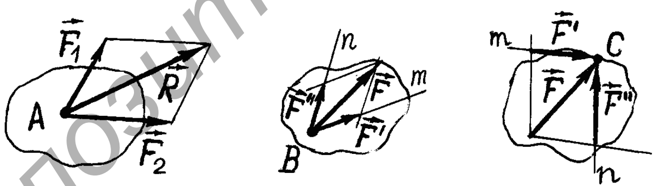
Першае правіла. Знакі праекцый у формулах (1.1) устанаўліваюцца па знаках трыганаметрычных функцый $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ у залежнасці ад велічыні вугла α. Калі, напрыклад, $0° < \alpha < 90°$, то функцыі $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ дадатныя; пры $90° < \alpha < 180°$, функцыя $\sin\alpha$ дадатная, а $\cos\alpha$ —

адмоўная і г. д. Гэтае правіла будзем называць *трыганаметрычным*. Яго недахоп заключаецца ў тым, што вугал α даводзіцца заўжды адлічваць ад восі Ox і выкарыстоўваць увесь дыяпазон яго значэнняў ад $0°$ да $360°$. У практычным прымяненні гэта стварае вялікія нязручнасці, якія яшчэ больш узрастаюць пры выкарыстанні неартаганальных восей каардынат.

Другое правіла. Калі рух (вастрыя алоўка альбо вачэй) ад праекцыі пачатку вектара сілы на вось (*гл.* рыс. 1.1) да праекцыі яго канца адбываецца ў дадатным напрамку восі каардынат, то адпаведная праекцыя сіл дадатная, а калі наадварот — то адмоўная.

Прыменім гэтае правіла да рысунка 1.1. Паставім вастрыё алоўка на кропку a' і рухаем яго да кропкі b'. Рух адбываецца ўправа, г. зн. у дадатным напрамку восі Ox; таму і праекцыя X дадатная.

Каб зразумець, а затым свабодна карыстацца трэцім правілам, трэба ведаць, як раскладваецца сіла на складаемыя (кампаненты). Паколькі раскладанне сілы неабходна не толькі для выкарыстання правіла знакаў праекцый, а значна часцей, то спынімся на ім падрабязна. На падставе аксіёмы аб паралелаграме сіл дзве сілы F_1 і F_2, прыкладзеныя ў адным пункце, можна скласці, г. зн. замяніць іх адной сілай R — раўнадзейнай (рыс. 1.2, *а*).



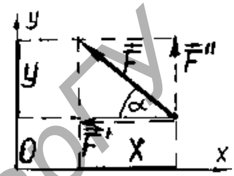
а) б) в)

Рысунак 1.2

Магчыма і адваротнае дзеянне: сілу F, прыкладзеную ў якім-небудзь пункце B, прадставіць у выглядзе двух кампанентаў F', F'' па зададзеных напрамках Bn, Bm (рыс. 1.2, *б*). Для гэтага з канца вектара F праводзяцца дзве прамыя, паралельныя да Bn, Bm. Яны і вызначаюць паралелаграм, старанамі якога з'яўляюцца складаемыя вектары F', F''.

ЗАЎВАГА!
Каб пазбегнуць памылкі, трэба мець на ўвазе, што пунктам прыкладання сілы F можа быць як пачатак вектара, так і яго канец (бо сілу можна пераносіць па лініі дзеяння). Гэта заўжды відаць з умовы задачы. Напрамкі, па якіх неабходна раскласці вектар сілы, праводзяцца *з пункта прыкладання сілы*. На рысунку 1.2, *в*, паказана раскладанне сілы F для выпадку, калі гэты пункт C знаходзіцца на канцы вектара F. Калі раскладанне выканана правільна, то *кампаненты* F' *і* F'' *прыкладзены ў тым жа пункце, што і сіла* F.

Трэцяе правіла. Каб устанавіць знакі праекцый сілы F на восі каардынат (ці любыя іншыя восі), уяўна раскладаем сілу на складаемыя, што паралельны да гэтых восей. Калі атрыманыя вектары F' і F'' накіраваны ў той бок, што і восі, то праекцыі сілы дадатныя. І наадварот, калі, напрыклад, вось Ox (рыс. 1.3) накіравана ўправа, а паралельны да яе вектар F' — улева, то праекцыя сілы F на вось Ox адмоўная.



Рысунак 1.3

Прыклад

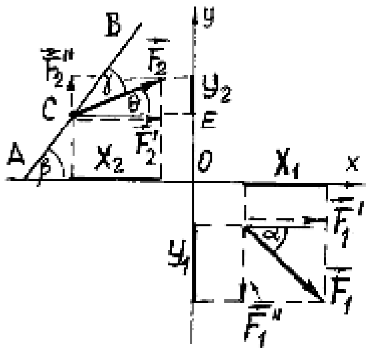
Дадзены сілы F_1, F_2 і вуглы α, β, γ (рыс. 1.4). Вызначыць праекцыі сіл на восі Ox, Oy.

Рашэнне

1. Знаходзім праекцыі сілы F_1. Апускаем перпендыкуляры з пачатку і канца вектара сілы на восі Ox, Oy і адзначаем на іх адрэзкі X_1, Y_1. Знаходзім іх даўжынні: $X_1 = F_1\cos\alpha$, $Y_1 = F_1\sin\alpha$.

Устанаўліваем знакі праекцый па трэцяму правілу. Уяўна раскладваем сілу на вектары F_1', F_1''. Звычайна на рысунках іх не паказваюць. Тут яны патрэбны для апісання методыкі (паказаны пункцірам). З рысунка 1.4 відаць, што вектар F_1' накіраваны ў напрамку восі Ox, а вектар F_1'' — процілегла восі Oy. Такім чынам, праекцыя X_1 дадатная, а Y_1 — адмоўная. Канчаткова атрымліваем:

$$X_1 = F_1\cos\alpha, \quad Y_1 = -F_1\sin\alpha.$$



Рысунак 1.4

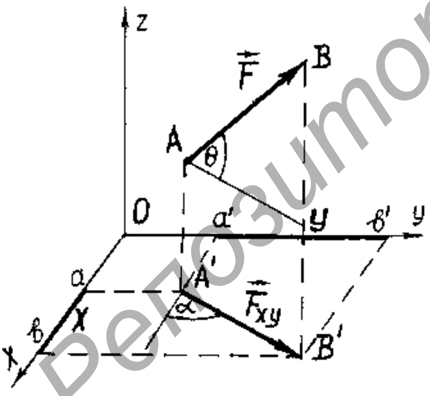
2. Знаходзім праекцыі сілы F_2. На рысунку 1.4 яе палажэнне зададзена вуглом γ адносна адрэзка *AB*, які нахілены да восі *Ox* пад вуглом β. Для вызначэння праекцый сілы патрэбны вугал, які вектар сілы ўтварае з адпаведнай воссю каардынат. Такім вуглом на рысунку будзе вугал θ нахілу сілы да восі *Ox*. Як відаць з рысунка 1.4, $\angle BCE = \beta$; тады $\theta = \beta - \gamma$. Складаемыя F_2' і F_2'' вектара F_2 паказваем пункцірам. На рысунку яны накіраваны таксама, як і восі *Ox*, *Oy*. Таму праекцыі сілы F_2 дадатныя.

Атрымліваем

$$X_2 = F_2\cos(\beta - \gamma), \qquad Y_2 = F_2\sin(\beta - \gamma).$$

1.2 Праекцыя сілы на плоскасць

Праекцыя сілы на плоскасць — *вектар, які знаходзіцца паміж праекцыямі пачатку і канца вектара сілы на гэтую плоскасць*.



Рысунак 1.5

Звяртаем увагу на прынцыповае адрозненне праекцый сілы на вось і на плоскасць: першая — алгебраічная велічыня, другая — вектарная. Кіруючыся прыведзеным азначэннем, знойдзем праекцыю сілы F на каардынатную плоскасць Oxy (рыс. 1.5).

Для гэтага з пачатку вектара A і канца B апускаем перпендыкуляры на плоскасць і знаходзім праекцыі A' і B'. Затым злучаем іх і будуем праекцыю сілы F_{xy}: $F_{xy} = A'B'$. Яе велічыню знаходзім па формуле

$$F_{xy} = F\cos\theta,$$

дзе θ — вугал, утвораны вектарам F з плоскасцю Oxy (ці з яго праекцыяй F_{xy}).

Праекцыя сілы на плоскасць патрэбна ў асноўным для таго, каб затым праз яе знаходзіць праекцыі сілы F на восі і яе моманты адносна восей. Выкарыстаем вектар F_{xy} для вызначэння праекцый X, Y сілы F на восі каардынат. З пачатку A' і канца B' вектара F_{xy} праводзім перпендыкуляры да восей Ox і Oy — знаходзім на іх праекцыі a, a', b, b' пачатку і канца сілы F. Злучаем іх і атрымліваем: $X = ab$, $Y = a'b'$. Каб знайсці значэнні X, Y, абазначым на рысунку 1.5 вугал паміж вектарам F_{xy} і воссю Ox праз α. Тады атрымаем формулы:

$$X = F_{xy}\cos\alpha, \qquad Y = F_{xy}\sin\alpha$$

альбо

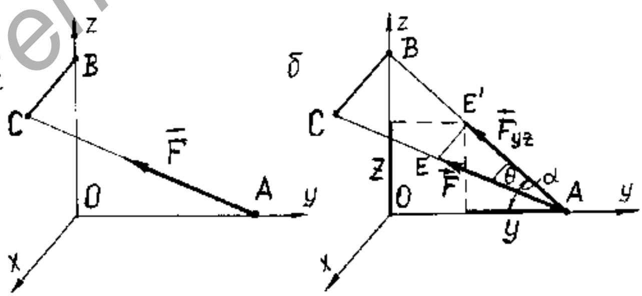
$$X = F\cos\theta\cos\alpha, \qquad Y = F\cos\theta\sin\alpha.$$

Такім чынам, можна сфармуляваць наступнае *правіла* ў два дзеянні: каб вызначыць праекцыю сілы F на вось, якая не ляжыць у адной плоскасці з вектарам сілы, неабходна спачатку знайсці праекцыю гэтай сілы F_p на тую плоскасць P, у якой знаходзіцца вось, а затым атрымаць праекцыю вектара F_p на вось.

На рысунку 1.5 праекцыя сілы P на плоскасць Oxy роўна F_{xy}.

Прыклад

Знайсці праекцыі сілы F, прыкладзенай у пункце A, на плоскасць Oyz і на восі Oy, Oz (рыс. 1.6, *а*). Дадзена: $BC = a$, $AO = b$, $BO = c$, $BC \parallel Ox$.



а) *б)*

Рысунак 1.6

Рашэнне

Знаходзім праекцыю F_{yz} (рыс. 1.6, *б*). Пачатак вектара F знаходзіцца ў плоскасці *Oyz*; праводзім перпендыкуляр з яго канца на гэтую плоскасць (ён паралельны да восі Ox). Злучаем пункты A і E'; атрымліваем вектар F_{yz}. Яго модуль роўны $F_{yz} = F\cos\theta$. Вызначаем праекцыі Y і Z, як паказана на рысунку 1.6, *б*. Атрымліваем

$$Y = -F_{yz}\cos\alpha = -F\cos\theta\cos\alpha, \qquad Z = F_{yz}\sin\alpha = F\cos\theta\sin\alpha.$$

Тут

$$\cos\theta = AB / AC = \sqrt{b^2 + c^2} / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2};$$

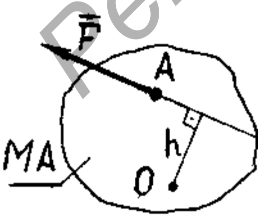
$$\sin\alpha = BO / AB = c / \sqrt{b^2 + c^2}; \qquad \cos\alpha = AO / AB = b / \sqrt{b^2 + c^2}.$$

1.3 Момант сілы адносна цэнтра

Пад цэнтрам разумеюць любы пункт, узяты на матэрыяльным аб'екце альбо ў прасторы. Неабходнасць у вызначэнні моманта сілы адносна цэнтра ўзнікае пры вывучэнні раўнавагі *плоскай* сістэмы сіл.

Момант сілы F **адносна цэнтра** O (рыс. 1.7) — *алгебраічная велічыня, роўная здабытку сілы на яе плячо* h *адносна цэнтра:*

$$M_0\left(\vec{F}\right) = \pm Fh. \qquad (1.2)$$



Рысунак 1.7

Момант сілы характарызуе велічыню яе вярчальнага ўздзеяння на цела.

Плячо сілы адносна цэнтра роўна *карацейшай адлегласці ад цэнтра да лініі дзеяння сілы*. Знак «плюс» у формуле (1.2) прымаецца ў тым выпадку, калі сіла імкнецца вярцець матэрыяльны аб'ект *(MA)* вакол цэнтра O *супраць* ходу стрэлкі гадзінніка.

У адваротным выпадку яе момант адмоўны. Момант сілы на рысунку 1.7 дадатны.

Прыклад 1

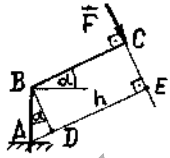
Знайсці момант сілы F адносна цэнтра A (рыс. 1.8).

Дадзена: $AB = a$, $BC = b$, α.

Рашэнне

Праводзім з цэнтра A перпендыкуляр да лініі дзеяння сілы F. Як відаць з рысунка 1.8, плячо h роўна суме адрэзкаў:

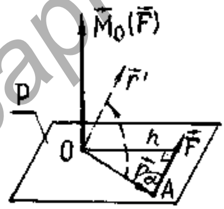
$$h = AD + DE = AB\sin\alpha + BC = a\sin\alpha + b.$$



Рысунак 1.8

Па формуле (1.2) знаходзім момант сілы $M_A(\vec{F}) = -Fh = -F(a\sin\alpha + b)$. Знак «мінус» прыняты таму, што сіла F імкнецца павярнуць стрыжань ABC вакол пункта A за ходам стрэлкі гадзінніка.

Момант сілы можна ўмоўна прадставіць вектарам $\vec{M}_0(\vec{F})$, перпендыкулярным да плоскасці P, што ўтворана лініей дзеяння сілы F і цэнтрам O (рыс. 1.9).



Рысунак 1.9

Матэматычна гэты вектар вызначаецца як вектарны здабытак па формуле

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}, \tag{1.3}$$

дзе $\vec{r}$ — радыус-вектар пункта прылажэння сілы F.

Формула (1.3) вызначае як напрамак вектара $\vec{M}_0(\vec{F})$, так і яго модуль. Нагадаем *правіла вектарнага здабытку:* вектар $\vec{M}_0(\vec{F})$ праводзіцца перпендыкулярна да плоскасці P, утворанай вектарамі $\vec{r}$ і $\vec{F}$ у той бок, адкуль карацейшы паварот першага ў формуле (1.3) вектара $\vec{r}$ да палажэння, паралельнага другому вектару $\vec{F}$, відаць *супраць ходу стрэлкі гадзінніка*.

Гэта правіла будзе прымяняцца далей ва ўсім курсе тэарэтычнай механікі і ў значнай ступені вызначыць поспехі ў вывучэнні дысцыпліны. Таму на самым пачатку яго трэба цвёрда засвоіць. Звернемся зноў да рысунка 1.9. Каб вектар $\vec{r}$ заняў палажэнне $\vec{r}'$, паралельнае да вектара $\vec{F}$, яго трэба павярнуць карацейшым шляхам, як паказана на рысунку дугавой стрэлкай. Гэты паварот убачым супраць ходу стрэлкі, калі будзем глядзець на плоскасць P *зверху*. Таму вектар $\vec{M}_0(\vec{F})$ трэба накіраваць *уверх*.

Модуль вектара (1.3) знаходзіцца па формуле $M_0(\vec{F}) = rF\sin\alpha$. Тут здабытак $r\sin\alpha$ можна замяніць адрэзкам h, праведзеным з цэнтра O перпендыкулярна да вектара F (*гл.* рыс. 1.9). Тады атрымаем $M_0(\vec{F}) = Fh$. Такім чынам, мы прыйшлі да той жа формулы (1.2).

Увядзем адвольную прамавугольную сістэму восей каардынат $Oxyz$ з пачаткам у цэнтры O (на рысунку 1.9 яна не паказана). Гарызантальную плоскасць Oxy сумясцім з плоскасцю P. Вось Oz супадае з вектарам $\vec{M}_0(\vec{F})$. Орты восей (як прынята) будзем абазначаць літарамі $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Раскладзем вектар $\vec{M}_0(\vec{F})$ па восях гэтай сістэмы:

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ X & Y & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y & 0 \\ Y & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x & 0 \\ X & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot 0 - \vec{j}\cdot 0 +$$

$$+\vec{k}\left(xY - yX\right) = \vec{k}\left(xY - yX\right).$$

Інакш вектар $\vec{M}_0(\vec{F})$ можна прадставіць у выглядзе роўнасці

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{k}M_0(\vec{F}).$$

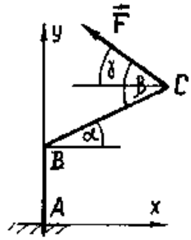
Зраўняем у апошніх формулах выражэнні пры орце $\vec{k}$. Знойдзем момант сілы па формуле

$$M_0(\vec{F}) = xY - yX. \tag{1.4}$$

Атрыманая формула, як і формула (1.2), можа выкарыстоўвацца для вызначэння моманту сілы. У некаторых выпадках яна больш эфектыўная. Формула (1.4) спрашчае алгарытм складання вылічэнняў на камп'ютары. Нагадаем прынятыя ў ёй абазначэнні: x, y — каардынаты пункта прылажэння сілы F, X, Y — праекцыі вектара сілы F.

Прыклад 2

Знайсці момант сілы F адносна цэнтра A (рыс. 1.10). Дадзена: $AB = a$, $BC = b$, α, β.



Рысунак 1.10

Рашэнне

Каб прымяніць формулу (1.2), трэба правесці перпендыкуляр з пункта A да лініі дзеяння сілы F і знайсці плячо h. Гэта можа заняць шмат часу. Скарыстаемся формулай (1.4). Уводзім прамавугольную сістэму каардынат Axy. Знаходзім каардынаты x, y пункта C і праекцыі сілы на восі Ax, Ay.

Для вызначэння праекцый адзначым на рысунку патрэбны вугал $\gamma = \beta - \alpha$. Атрымліваем $x = b\cos\alpha$, $y = a + b\sin\alpha$, $X = -F\cos(\beta - \alpha)$, $Y = F\sin(\beta - \alpha)$.

Па формуле (1.4) вызначаем момант сілы $M_A(\vec{F})$:

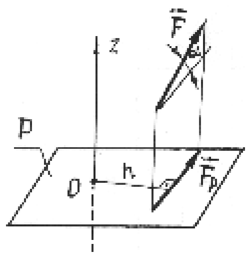
$$M_A(\vec{F}) = b\cos\alpha F\sin(\beta - \alpha) - (a + b\sin\alpha)\cdot[-F\cos(\beta - \alpha)] =$$
$$= [b\cos\alpha\sin(\beta - \alpha) + (a + b\sin\alpha)\cos(\beta - \alpha)]F.$$

Велічыня, што ў квадратных дужках перад сілай F, уяўляе сабой плячо сілы h.

1.4 Момант сілы адносна восі

Момант сілы F адносна восі Oz (рыс. 1.11) *роўны моманту праекцыі гэтай сілы F_p на плоскасць P, якая перпендыкулярна да восі, адносна пункта перасячэння O восі з плоскасцю:*

$$M_z(\vec{F}) = \pm F_p h. \tag{1.5}$$



Рысунак 1.11

Знак «плюс» у формуле (1.5) прымаецца, калі з дадатнага напрамку восі відаць, што сіла F_p імкнецца вярцець плоскасць P адносна пункта O *супраць стрэлкі гадзінніка*. Моманты сіл адносна восей вызначаюцца пры вывучэнні раўнавагі *прасторавай* сістэмы сіл.

Пад воссю Oz у прыведзеным азначэнні разумеецца адвольная вось у прасторы; яна можа быць, як і цэнтр O, абазначана любымі іншымі літарамі. Паслядоўнасць дзеянняў пры вызначэнні моманта $M_z(\vec{F})$ наступная:

1) будуем плоскасць P, перпендыкулярную да восі z;

2) знаходзім праекцыю сілы F на плоскасць P: $F_p = F\cos\alpha$;

3) знаходзім пункт перасячэння O восі з плоскасцю P;

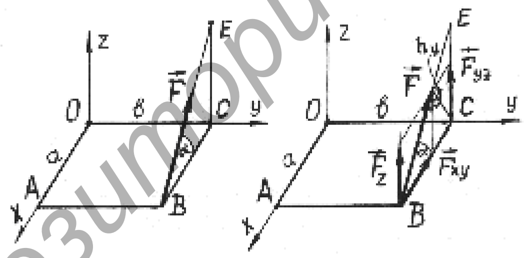
4) знаходзім плячо h сілы F_p адносна цэнтра O;

5) вылічваем велічыню моманта сілы F адносна восі Oz па формуле (1.5);

6) устанаўліваем знак моманта. На рысунку 1.11 момант сілы дадатны.

Прыклад 1

Да гарызантальнай прамавугольнай пласціны са старанамі a і b пад вуглом α прыкладзена сіла F (рыс. 1.12, *а*). Вызначыць моманты сілы адносна восей каардынат.



а) *б)*

Рысунак 1.12

Рашэнне

Будзем выкарыстоўваць апісаную ў пункце 1.4 методыку.

1. *Вызначэнне моманту* $M_x(\vec{F})$. Плоскасцю, перпендыкулярнай да восі Ox, з'яўляецца каардынатная плоскасць Oyz. Праекцыя сілы F на гэту плоскасць (рыс. 1.12, *б*) роўна $F_p = F_{yz} = F\sin\alpha$. Пункт перасячэння восі Ox з плоскасцю Oyz супадае з пачаткам кардынат O. Праводзім перпендыкуляр з цэнтра O на вектар F_{yz}, знаходзім плячо сілы F_{yz}

адносна восі Ox: $h_x = b$. Па формуле (1.5) маем: $M_x(\vec{F}) = F_{yz} \cdot h_x = F\sin\alpha \cdot b$. Гэты момант дадатны, таму што з канца восі Ox накірунак сілы F_{yz} адносна цэнтра O бачны процілеглым руху гадзіннікавай стрэлкі.

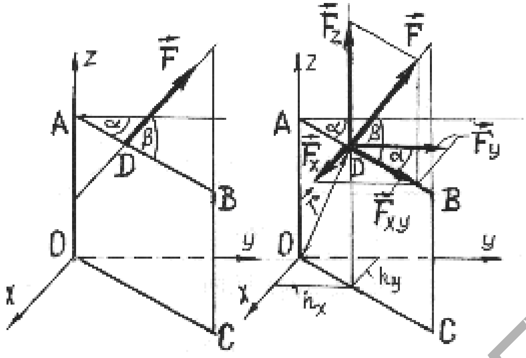
2. *Вызначэнне моманту* $M_y(\vec{F})$. Знаходзім плоскасць, перпендыкулярную да восі Oy. Можна выкарыстаць каардынатную плоскасць Oxz, але тут прасцей выкарыстаць паралельную да Oxz плоскасць трохвугольніка BCE, у якім знаходзіцца вектар F. Яго праекцыя на гэту плоскасць роўна самому вектару: $F_p = F$. Пунктам перасячэння плоскасці трохвугольніка BCE з воссю Oy з'яўляецца пункт C. Праводзім перпендыкуляр з цэнтра C на лінію дзеяння сілы F; знаходзім $h_y = BC \cdot \sin\alpha = a\sin\alpha$. Па формуле (1.5) атрымліваем: $M_y(\vec{F}) = -Fa\sin\alpha$. Калі глядзець на сілу F з дадатнага напрамку восі Oy, то ўбачым, што яна здольна вярцець стрэлку, замацаваную ў цэнтры C, так як яна рухаецца ў гадзінніку, таму момант сілы адмоўны. Заўважым, што тут момант сілы F можна вызначыць, не знаходзячы пляча h_y. Для гэтага патрэбна выкарыстаць тэарэму Варыньёна, якая сцвярджае, што момант раўнадзейнай сілы роўны суме момантаў складаемых сіл. У гэтым прыкладзе раўнадзейнай будзе сіла F, а яе складаемыя — сілы F_z і F_{xy}. Тады атрымаем

$$M_y(\vec{F}) = M_C(\vec{F}) = M_C(\vec{F}_z) + M_C(\vec{F}_{xy}) = -F_z \cdot a + F_{xy} \cdot 0 = -F\sin\alpha \cdot a.$$

3. *Вызначэнне моманту* $M_z(\vec{F})$. Да восі Oz перпендыкулярна плоскасць пласціны $ABCO$. Праекцыя сілы F на гэтую плоскасць мае выгляд $F_p = F_{xy} = F\cos\alpha$. Вось Oz перасякаецца з плоскасцю ў пункце O. Плячо сілы F_{xy} адносна цэнтра O роўна $h_z = b$. Па формуле (1.5) знаходзім момант $M_z(\vec{F}) = F\cos\alpha \cdot b$. Як відаць з рысунка 1.12, *б*, момант дадатны.

Прыклад 2

Вертыкальная прамавугольная пласціна $ABCO$ ўтварае з плоскасцю Oyz двухгранны вугал α. Да яе ў пункце D пад вуглом β прыкладзена сіла F (рыс. 1.13, *а*). Дадзена: $AD = a$, $AO = h$. Знайсці моманты сілы адносна восей каардынат.



а) *б)*

Рысунак 1.13

Рашэнне

Непасрэднае прымяненне формулы (1.5) для вызначэння момантаў $M_x(\vec{F})$, $M_y(\vec{F})$ тут не рацыянальна, таму што ўзнікаюць цяжкасці пры вызначэнні праекцый сілы на плоскасці *Oxz*, *Oyz*. Момант $M_z(\vec{F})$ знаходзіцца элементарна: паколькі лінія дзеяння сілы F перасякае вось Oz (у пункце *E*), то $M_z(\vec{F}) = 0$.

Астатнія моманты знойдзем двума іншымі спосабамі:

1. Спачатку раскладаем сілу $\vec{F}$ на тры складаемыя, паралельныя да восей каардынат (рыс. 1.13, *б*):

$$F_x = F_{xy}\sin\alpha = F\cos\beta\sin\alpha;$$

$$F_y = F_{xy}\cos\alpha = F\cos\beta\cos\alpha;$$

$$F_z = F\sin\beta.$$

Затым па формуле (1.5) знаходзім моманты адносна восей ад кожнага складаемага асобна, улічваючы, што іх моманты адносна паралельных да іх восей роўны нулю:

$$M_x(\vec{F}_x) = 0, \qquad M_y(\vec{F}_y) = 0, \qquad M_z(\vec{F}_z) = 0;$$

$$M_x\left(\vec{F}\right)=M_x\left(\vec{F}_z\right)+M_x\left(\vec{F}_y\right)=F_z h_x - F_y h = F\sin\beta\cdot a\cos\alpha - F\cos\beta\quad\cos\alpha\cdot h;$$

$$M_y\left(\vec{F}\right)=M_y\left(\vec{F}_x\right)+M_y\left(\vec{F}_z\right)=F_x h - F_z h_y = F\cos\beta\ \ \sin\alpha\cdot h - F\sin\beta\cdot a\sin\alpha.$$

Канчаткова

$$M_x\left(\vec{F}\right)=\left(a\sin\beta - h\cos\beta\right)\cos\alpha\cdot F;$$

$$M_y\left(\vec{F}\right)=\left(h\cos\beta - a\sin\beta\right)\sin\alpha\cdot F.$$

2. Зададзім палажэнне пункта D, дзе прыкладзена сіла F, адносна пункта O радыус-вектарам $\vec{r}$, а затым прадставім момант сілы F у вектарнай форме, як гэта было зроблена ў пункце 1.3 (с. 10). Праекцыі атрыманага вектара на восі каардынат роўны момантам сілы F адносна восей:

$$\vec{M}_0\left(\vec{F}\right)=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ X & Y & Z\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}y & z\\ Y & Z\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}x & z\\ X & Z\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}x & y\\ X & Y\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\left(yZ - zY\right)+\vec{j}\left(zX - xZ\right)+\vec{k}\left(xY - yX\right). \tag{1.6}$$

З другога боку гэты момант роўны

$$\vec{M}_0\left(\vec{F}\right)=\vec{i}M_x\left(\vec{F}\right)+\vec{j}M_y\left(\vec{F}\right)+\vec{k}M_z\left(\vec{F}\right). \tag{1.7}$$

Параўноўваючы выразы (1.6) і (1.7), знаходзім

$$\left.\begin{aligned}M_x\left(\vec{F}\right)&=yZ - zY\\ M_y\left(\vec{F}\right)&=zX - xZ\\ M_z\left(\vec{F}\right)&=xY - yX\end{aligned}\right\}. \tag{1.8}$$

Пры рашэнні задач формулы (1.8) звычайна выкарыстоўваюцца без вывада. Прыменім іх для нашага прыклада. З рысунка 1.13, *б*, знаходзім каардынаты пункта D: $x = a\sin\alpha$, $y = a\cos\alpha$, $z = h$.

Вызначаем праекцыі сілы F на восі каардынат:

$$X = F\cos\beta\sin\alpha;$$

$$Y = F\cos\beta\cos\alpha;$$

$$Z = F\sin\beta.$$

Як бачым, па велічыні яны роўны складаемым F_x, F_y, F_z вектара F. Па формулах (1.8) знаходзім

$$M_x\left(\vec{F}\right) = a\cos\alpha\sin\beta \cdot F - h\cos\beta\cos\alpha \cdot F;$$

$$M_y\left(\vec{F}\right) = h\cos\beta\sin\alpha \cdot F - a\sin\alpha\sin\beta \cdot F;$$

$$M_z\left(\vec{F}\right) = a\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha \cdot F - a\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha \cdot F.$$

Канчаткова атрымліваем

$$M_x\left(\vec{F}\right) = \left(a\sin\beta - h\cos\beta\right)\cos\alpha \cdot F;$$

$$M_y\left(\vec{F}\right) = \left(h\cos\beta - a\sin\beta\right)\sin\alpha \cdot F;$$

$$M_z\left(\vec{F}\right) = 0.$$

Спосаб, заснаваны на формулах (1.8), універсальны, і, як ужо адзначалася, дазваляе складаць праграмы вылічэнняў на камп'ютары.

2 ЗАДАННІ ДЛЯ САМАСТОЙНАГА РАШЭННЯ З ПРЫКЛАДАМІ ВЫКАНАННЯ

Заданне 1

Знайсці праекцыі зададзеных сіл F_i і F_k на восі каардынат.

Указанне

Варыянт задання вызначае выкладчык. Заданне выконваецца ў школьным сшытку для індывідуальных заданняў. Яно ўключае:

– рысунак са схемамі прыкладання сіл і геаметрычнымі параметрамі (дадатак Б) (нумар рысунка адпавядае нумару варыянта);

– зададзеныя сілы F_i і F_k.

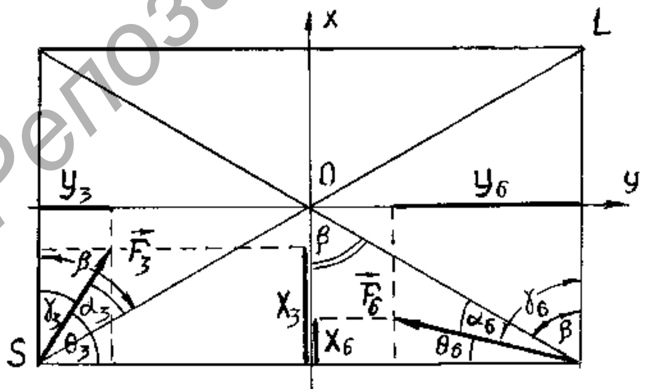
ЗАЎВАГА!
Рысункі змешчаны на старонках 36—53, а зададзеныя сілы неабходна ўзяць з табліцы А.1 (па нумару варыянта). Кожны рысунак уяўляе сабою прамавугольнік, сіметрычны адносна восей каардынат, з базавым вуглом α (альбо β).

Прыклад выканання

Разгледзім варыянт задання № 36. Адпаведны гэтаму нумару прамавугольнік з памерамі $p \times f$ пераносім у сшытак. На рысунку паказваем толькі зададзеныя сілы. Іх знаходзім з умовы задачы, якую выпісваем з табліцы А.1. Па ўмове знаходзім праекцыі сіл F_3, F_6 на восі. Базавы вугал пры вяршыні O абазначаны літарай β, а зададзеныя адносныя вуглы — праз α_3, α_6.

Рашэнне

1. Знаходзім вуглы, якія ўтвараюць вектары сіл F_3 і F_6 з восямі Ox, Oy (альбо са сторанамі прамавугольніка, паралельнымі да восей). Яны заўжды выражаюцца праз базавы вугал β і адносныя вуглы α_3, α_6. Вуглы, утвораныя вектарамі сіл з восямі, можна прадставіць па-рознаму. Перавагу трэба аддаваць карацейшым запісам. Так, вектар F_3 утварае з вертыкальнай стараной прамавугольніка (а значыцца, і з



Рысунак 2.1

воссю Ox) вугал $\gamma_3 = \beta - \alpha_3$, а з гарызантальнай — $\theta_3 = 90^{\mathbf{o}} - (\beta - \alpha_3)$; аналагічна вектар F_6 утварае з тымі ж сторанамі вуглы $\gamma_6 = \beta + \alpha_6$ і $\theta_6 = 90^{\mathbf{o}} - (\beta + \alpha_6)$. Будзем выкарыстоўваць γ_3 і γ_6.

2. Знаходзім праекцыі сіл на рысунку 2.1. Для гэтага праводзім перпендыкуляры да восей Ox, Oy з пачаткаў і канцоў вектараў сіл F_3 і F_6. Праекцыі сіл паказваем тоўстымі лініямі і абазначаем літарамі X_3, Y_3, X_6, Y_6.

3. Знаходзім велічыні праекцый сіл. З рысунка 2.1 відаць, што $X_3 / F_3 = \cos\gamma_3$, $Y_3 / F_3 = \sin\gamma_3$, $X_6 / F_6 = \cos\gamma_6$, $Y_6 / F_6 = \sin\gamma_6$. Адсюль $X_3 = F_3 \cos\gamma_3$, $Y_3 = F_3 \sin\gamma_3$, $X_6 = F_6 \cos\gamma_6$, $Y_6 = F_6 \sin\gamma_6$.

4. Устанаўліваем знакі праекцый сіл. Аналізуючы рысунак, бачым, што толькі складаемая $\vec{Y}_6$ накіравана супраць напрамку восі Oy і таму адпаведная праекцыя мае адмоўны знак. Канчаткова атрымліваем $X_3 = F_3 \cos(\beta - \alpha_3)$, $Y_3 = F_3 \sin(\beta - \alpha_3)$, $X_6 = F_6 \cos(\beta + \alpha_6)$, $Y_6 = -F_6 \sin(\beta + \alpha_6)$.

Заданне 2

Знайсці моманты сіл F_j, F_l адносна цэнтраў.

Указанне

Варыянт задання вызначае выкладчык. Як і папярэдняе, заданне 2 выконваецца ў сшытках для індывідуальных заданняў. Яно ўключае:

– рысунак са схемамі прыкладання сіл і геаметрычнымі параметрамі (дадатак Б); нумар рысунка адпавядае нумару варыянта задання;

– абазначэнні двух цэнтраў, адносна якіх неабходна вызначыць моманты.

> **ЗАЎВАГА!**
> Выкарыстоўваюцца тыя ж рысункі, што і ў заданні 1. Зададзеныя сілы F_j, F_l неабходна ўзяць з табліцы А.1. Малымі літарамі $a, b, c, d, e, f, k, l, p, r, s, t$ на рысунках абазначаны даўжыні старон прамавугольнікаў.

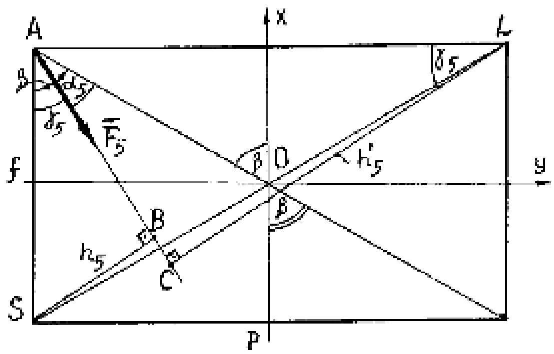
Прыклад выканання

Выканаем варыянт задання № 36. Адпаведны прамавугольнік $p \times f$ пераносім у сшытак.

З табліцы А.1 перапісваем умову. Знайсці моманты сіл F_5, F_7 адносна цэнтраў L і S.

Рашэнне

1. *Вызначэнне момантаў сілы* F_5 (рыс. 2.2).



Рысунак 2.2

1.1. Знаходзім вугал γ_5 пры вяршыні *A*, які ўтварае вектар F_5 з вертыкальнай старaной прамавугольніка. Для гэтага адзначаем на рысунку 2.2 вуглы, роўныя базаваму вуглу β. Заўважаем, што $\gamma_5 = \beta - \alpha_5$. Такі ж вугал адзначым і пры вяршыні *L* (яго стораны перпендыкулярны да старон вугла *SAC*).

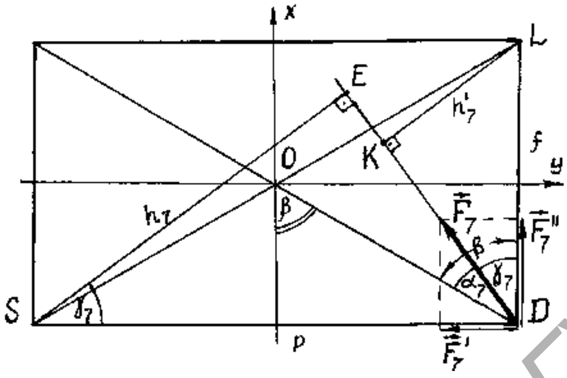
1.2. Знаходзім плечы сілы F_5 адносна цэнтраў *S* і *L*. Апускаем перпендыкуляры з цэнтраў *S* і *L* на лінію дзеяння сілы F_5. Абазначым іх праз h_5 і h'_5. З трохвугольнікаў *ABS* і *ALC* вызначаем $h_5 / AS = \sin\gamma_5$, $h'_5 / AL = \cos\gamma_5$. Адсюль $h_5 = AS\sin\gamma_5$, $h'_5 = AL\cos\gamma_5$.

1.3. Вызначаем велічыні момантаў сілы F_5 адносна цэнтраў *S*, *L* па формулах $M_S(\vec{F}_5) = F_5 h_5$, $M_L(\vec{F}_5) = F_5 h'_5$.

1.4. Устанаўліваем знакі момантаў. З рысунка 2.2 відаць, што адносна цэнтра *S* сіла F_5 імкнецца вярцець прамавугольнік па ходу стрэлкі гадзінніка, таму яе момант адмоўны. Адносна цэнтра *L* магчымае вярчэнне відаць супраць ходу стрэлкі — момант сілы дадатны. Канчаткова атрымліваем $M_S(\vec{F}_5) = -F_5 f\sin(\beta - \alpha_5)$, $M_L(\vec{F}_5) = F_5 p\cos(\beta - \alpha_5)$.

2. *Вызначэнне момантаў сілы* F_7 (рыс. 2.3).

2.1. Знаходзім вугал γ_7 пры вяршыні *D*. З рысунка 2.3 відаць, што $\gamma_7 = \beta - \alpha_7$. Такі ж вугал і пры вяршыні *S*.



Рысунак 2.3

2.2. Вызначаем плечы сілы F_7 адносна цэнтраў S і L. З трохвугольнікаў DES і DKL атрымліваем: $h_7 \,/\, DS = \cos\gamma_7$, $h_7' \,/\, DL = \sin\gamma_7$, адкуль $h_7 = DS \cdot \cos\gamma_7$, $h_7' = DL \cdot \sin\gamma_7$.

2.3. Знаходзім велічыні момантаў сілы F_7 адносна цэнтраў S, L па формулах: $M_S(\vec{F}_7) = F_7 h_7$, $M_L(\vec{F}_7) = F_7 h_7'$.

2.4. Устанаўліваем знакі момантаў. Сіла F_7 імкнецца вярцець прамавугольнік вакол цэнтра S супраць ходу стрэлкі гадзінніка, а вакол цэнтра L — за ходам. Таму ў першым выпадку момант дадатны, у другім — адмоўны. Канчаткова атрымліваем: $M_S(\vec{F}_7) = F_7\, p\cos(\beta - \alpha_7)$, $M_L(\vec{F}_7) = -F_7\, f\sin(\beta - \alpha_7)$.

ЗАЎВАГА!
У некаторых задачах для вызначэння моманту сілы адносна цэнтра мэтазгодна выкарыстоўваць тэарэму Варыньёна, паводле якой момант раўнадзейнай сыходнай сістэмы сіл адносна цэнтра роўны суме момантаў складаемых сіл адносна таго ж цэнтра. Прыменім гэту тэарэму для вызначэння моманту сілы F_7 адносна цэнтра L. Раскладзем вектар F_7 на складаемыя F_7', F_7'' (*гл.* рыс. 2.3).
Сілу F_7 будзем разглядаць як раўнадзейную сіл F_7', F_7'': $\vec{F}_7 = \vec{F}_7' + \vec{F}_7''$.
Тады, ў адпаведнасці з тэарэмай Варыньёна, $M_L(\vec{F}_7) = M_L(\vec{F}_7') + M_L(\vec{F}_7'') = -F_7' \cdot f + F_7'' \cdot 0 = -F_7 \sin\gamma_7 \cdot f$. Такім чынам, мы атрымалі момант сілы F_7, не знаходзячы яе пляча h_7'.

Заданне 3

Знайсці моманты сіл F_j і F_k адносна двух каардынатных восей і суму чатырох момантаў адносна трэцяй восі.

Указанне

Заданне ўключае:

– рысунак цела ў выглядзе прамавугольнага паралелепіпеда з прыкладзенымі да яго сіламі;

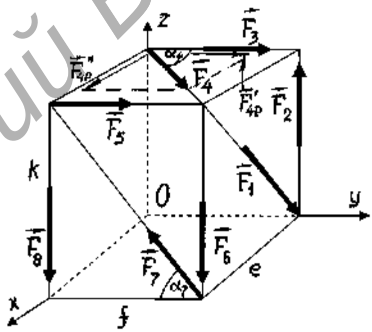
– пералік момантаў сіл, якія неабходна вызначыць.

ЗАЎВАГА!
Рысункі выбіраюцца па нумару зададзенага варыянта. Моманты сіл, якія неабходна вызначыць, знаходзяцца ў табліцы А.2. Нумар варыянта ў табліцы адпавядае нумару рысунка ў дадатку В.

Прыклад выканання

У якасці прыклада разглездзім варыянт № 36. Адпаведны яму рысунак пераносім у сшытак для індывідуальных заданняў (рыс. 2.4).

З табліцы А.2 выпісваем і знаходзім моманты сіл $M_x(\vec{F}_4)$, $M_y(\vec{F}_4)$, $\sum_{i=4}^{7} M_z(\vec{F}_i)$.



Рысунак 2.4

Рашэнне

1. *Вызначаем момант* $M_x(\vec{F}_4)$. Выкарыстоўваем методыку, апісаную ў пункце 1.4 (с. 13). Да восі Ox перпендыкулярна каардынатная плоскасць Oyz. Праекцыя сілы F_4 на гэтую плоскасць роўна $F'_{4p} = F_4 \cos\alpha_4$.

Вось Ox перасякае плоскасць у пункце O. Перпендыкуляр, праведзены з пункта O да лініі дзеяння праекцыі F'_{4p} (плячо), роўны $h'_4 = k$. Атрымліваем: $M_x(\vec{F}_4) = -F'_{4p} \cdot h'_4 = -F_4 \cos\alpha_4 k$. Знак «мінус» ставім таму, што сіла F'_{4p} імкнецца вярцець грань паралелепіпеда адносна цэнтра O за стрэлкай гадзінніка, калі глядзець насустрач восі Ox.

2. *Вызначаем момант* $M_y(\vec{F}_4)$. Да восі Oy перпендыкулярна каардынатная плоскасць Oxz. Праекцыя сілы F_4 на гэтую плоскасць

роўна $F''_{4p} = F_4 \sin\alpha_4$. Пунктам перасячэння восі Oy з плоскасцю Oxz будзе пункт O. Перпендыкуляр, праведзены з яго да вектара F''_{4p}, роўны $h''_4 = k$. Знаходзім момант $M_y\left(\vec{F}_4\right) = F''_{4p} h''_4 = F_4 \sin\alpha_4 \cdot k$. Ён дадатны, бо сіла F''_{4p} імкнецца вярцець грань паралелепіпеда, да якой яна прыкладзена, адносна цэнтра O супраць руху стрэлкі гадзінніка (калі глядзець справа).

3. *Знаходзім суму момантаў:*

$$\sum_{i=4}^{7} M_z\left(\vec{F}_i\right) = M_z\left(\vec{F}_4\right) + M_z\left(\vec{F}_5\right) + M_z\left(\vec{F}_6\right) + M_z\left(\vec{F}_7\right) = 0 + F_5 e + 0 - $$
$$- F_7 \cos\alpha_7 \cdot e.$$

Для вылічэння кожнага складаемага выкарыстана тая ж методыка, што і пры вызначэнні $M_x\left(\vec{F}_4\right)$, $M_y\left(\vec{F}_4\right)$, але без пабудовы праекцый сіл на рысунку. У прыватнасці, пры вызначэнні момантаў сіл F_4 і F_6 выкарыстана *прыкмета:* калі вектар сілы знаходзіцца ў адной плоскасці з воссю, то яго момант адносна восі роўны нулю. У гэтым выпадку лінія дзеяння сілы альбо перасякае вось, альбо паралельна ёй.

Заданне 4

Знайсці момант сілы $\vec{F}$, прыкладзенай у пункце A, адносна цэнтра O. Выканаць частковую праверку выніку. Палажэнне пункта A і вектар сілы F задаюцца каардынатным спосабам (рыс. 2.5):

$$\vec{r}_A = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \qquad \vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{i} + Z\vec{k},$$

дзе x, y, z і X, Y, Z — каардынаты пункта A і праекцыі вектара сілы на восі каардынат.

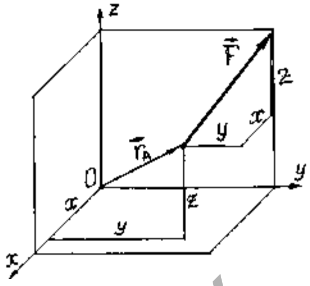
ЗАЎВАГА!
Значэнне x, y, z і X, Y, Z бяруцца з табліцы А.3. Нумар радкі ў табліцы адпавядае нумару рысунка зададзенага выкладчыкам варыянта задання.

Прыклад выканання

У якасці прыклада разгледзім варыянт № 36.

З табліцы А.3 выпісваем каардынаты пункта A (у метрах) і праекцыі сілы F (у Ньютанах): $x = 5$, $y = –4$, $z = 3$; $X = –6$, $Y = 2$,

$Z = 3$. Затым выбіраем масштабы даўжыні, сілы і будуем вектары $\vec{r}_A = 5\vec{i} - 4\vec{i} + 3\vec{k}$, $\vec{F} = -6\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Па восі Ox размеры скарачаем удвая. Паказваем толькі тую чвэрць прасторы, куды трапляе пункт A і вектар $\vec{F}$ (рыс. 2.6). Вектар-момант $\vec{M}_O(\vec{F})$ сілы $\vec{F}$ адносна цэнтра O знаходзім па формуле



Рысунак 2.5

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F} = M_x(\vec{F})\vec{i} + M_y(\vec{F})\vec{j} + M_z(\vec{F})\vec{k}, \tag{2.1}$$

дзе $M_x(\vec{F})\vec{i}$, $M_y(\vec{F})\vec{j}$, $M_z(\vec{F})\vec{k}$ — кампаненты (складаемыя) вектара $\vec{M}_O(\vec{F})$;

$M_x(\vec{F})$, $M_y(\vec{F})$, $M_z(\vec{F})$ — моманты сілы $\vec{F}$ адносна восей Ox, Oy, Oz (праекцыі вектара $\vec{M}_O(\vec{F})$ на восі каардынат).

Для вылічэння момантаў сілы выкарыстоўваем атрыманыя ў падраздзеле 1.4 формулы (1.8).

Атрымліваем:

$$M_x(\vec{F}) = (-4)\cdot 3 - 3\cdot 2 = -18 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

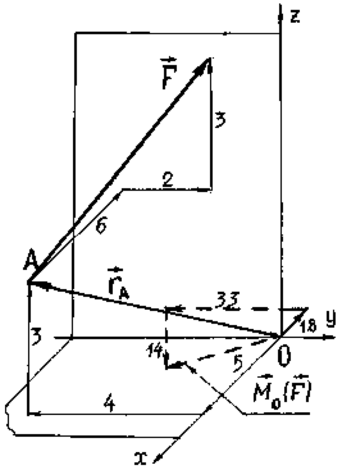
$$M_y(\vec{F}) = 3\cdot(-6) - 5\cdot 3 = -33 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_z(\vec{F}) = 5\cdot 2 - (-4)(-6) = -14 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Адмоўныя знакі атрыманых момантаў паказваюць, што напрамкі адпаведных ім кампанентаў вектара $\vec{M}_O(\vec{F})$ процілеглыя да восей каардынат. Выбіраем маштаб для момантаў, будуем кампаненты вектара $\vec{M}_O(\vec{F})$ і сам вектар (рыс. 2.6). Знаходзім велічыню (модуль) моманта:

$$M_O(\vec{F}) = \sqrt{M_x(\vec{F})^2 + M_y(\vec{F})^2 + M_z(\vec{F})^2} = \sqrt{(-18)^2 + (-33)^2 + (-14)^2} =$$

$$= \sqrt{1609} = 40{,}1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$



Рысунак 2.6

Праверка

Выканаем частковую праверку моманту на падставе формулы (2.1):

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right) = \vec{r}_A \times \vec{F}.$$

Паводле правіла вектарнага здабытку вектар $\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)$ перпендыкулярны да плоскасці, утваранай вектарамі $\vec{r}_A$ і $\vec{F}$, і накіраваны ў той бок, адкуль карацейшы паварот (на востры вугал) вектара $\vec{r}_A$ да палажэння, паралельнага вектару $\vec{F}$, бачны супраць руху стрэлкі гадзінніка.

Апошнюю ўласцівасць вектара $\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)$ — напрамак у прасторы — правяраем *візуальна* па рысунку 2.6. Глядзім насустрач пабудаванаму вектару $\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)$ і адначасова ўяўна паварочваем вектар $\vec{r}_A$ на востры вугал вакол цэнтра O да палажэння, паралельнага вектару $\vec{F}$. Такі паварот мы бачым *супраць* руху стрэлкі гадзінніка.

Такім чынам, напрамак вектара $\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)$ адпавядае правілу вектарнага здабытку.

Праверку перпендыкулярнасці вектара-моманту выканаем *аналітычна*. Знойдзем вугал φ паміж прамымі, зададзенымі вектарамі $\vec{r}_A$ і $\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)$. З аналітычнай геаметрыі вядома, што

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{\left(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2\right)\left(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2\right)}}, \qquad (2.2)$$

дзе l_1, m_1, n_1 і l_2, m_2, n_2 — накіроўваючыя косінусы вектараў $\vec{r}_A$ і $\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)$.

Знаходзім іх:

$$r_A = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{5^2 + (-4)^2 + 3^2} = 6{,}3245;$$

$$l_1 = x / r_A = 5 / 6{,}3245 = 0{,}7906;$$

$$m_1 = y / r_A = (-4) / 6{,}3245 = -0{,}6325;$$

$$n_1 = z / r_A = 3 / 6{,}3245 = 0{,}4743;$$

$$l_2 = M_x / M_O = (-18) / 40{,}1 = -0{,}4489;$$

$$m_2 = M_y / M_O = (-33) / 40{,}1 = -0{,}8229;$$

$$n_2 = M_z / M_O = (-14) / 40{,}1 = -0{,}3491.$$

Знойдзем толькі лічнік формулы (2.2):

$$0{,}7906(-0{,}4489) + (-0{,}6325)(-0{,}8229) + (0{,}4743)(-0{,}3491) =$$
$$= 0{,}5205 - 0{,}5205 = 0.$$

Значыць, $\cos\varphi = 0,\ \varphi = 90^{\circ}$.

Вынік аналітычнай праверкі становўчы:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) \perp \vec{r}_A.$$

Заданне 5

Знайсці моманты зададзенай сілы F_i, пары сіл M_i і размеркаванай па лінейнаму закону нагрузкі q, прыкладзеных да куба, адносна восей каардынат O_ix, O_iy, O_iz. Нагрузка q задаецца максімальным значэннем q_i, а сістэма восей каардынта — пачаткам O_i. Адлегласць ад пачатку кардынат да куба роўна O_iA_i. Сілавыя фактары F_i, M_i, q_i паказаны на рысунках 2.7 (для варыянтаў 1—32), 2.8 (для варыянтаў 33—64) і выбіраюцца з табліцы А.4. Нумар варыянта задаецца выкладчыкам.

Прыклад выканання

Разгледзім варыянт № 64. З адпаведнага радка табліцы А.4 выпісваем: пачатак каардынат O_0, адлегласць да куба $O_0A_0 = 2l$, даўжыню рабра куба l, сілавыя фактары F_3, M_1, q_2. Пераносім у сшытак рысунак 2.8 з зададзенай нагрузкай (рыс. 2.9).

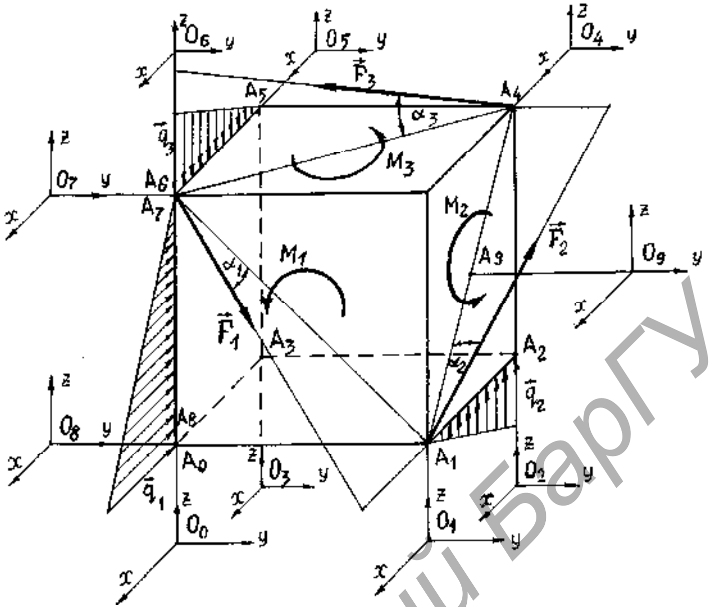


Рисунок 2.7

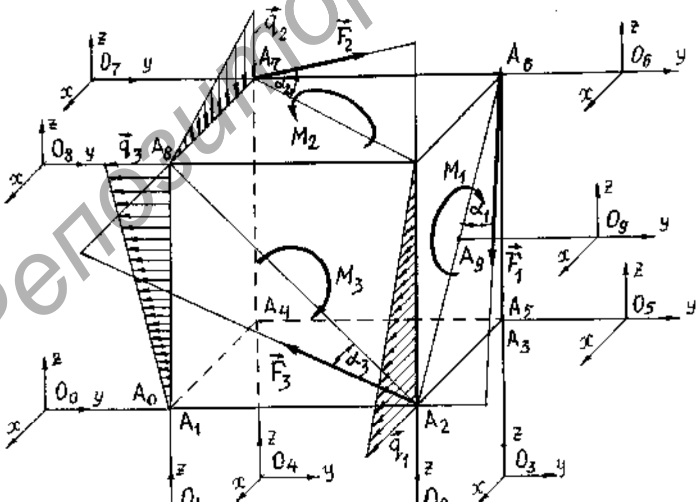
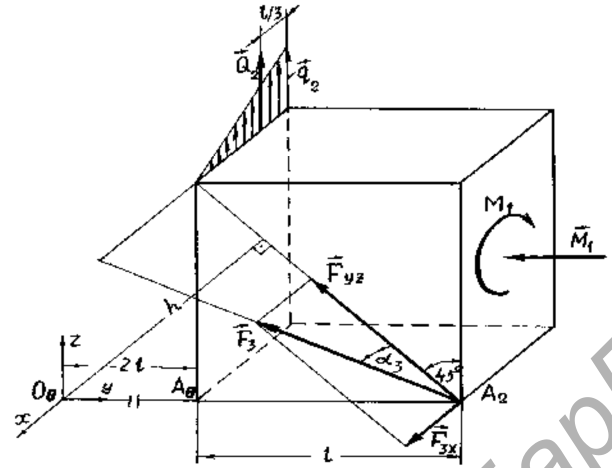


Рисунок 2.8



Рысунак 2.9

Рашэнне

1. *Вызначэнне момантаў сілы* F_3. Раскладваем сілу F_3 на складаемыя F_{yz} і F_{3x}: $F_{yz}=F_3\cos\alpha_3$, $F_{3x}=F_3\sin\alpha_3$. Вектары $\vec{F}_{yz}$, $\vec{F}_{3x}$ утвараюць сыходную сістэму сіл. Паводле тэарэмы Варыньёна

$$M_x(\vec{F}_3)=M_x(\vec{F}_{yz})+M_x(\vec{F}_{3x})=F_{yz}\cdot h+0=F_3\cos\alpha_3\cdot 3l\sin 45^\circ=3\sqrt{2}l\cos\alpha_3/2;$$

$$M_y(\vec{F}_3)=M_y(\vec{F}_{yz})+M_y(\vec{F}_{3x})=0+0=0;$$

$$M_z(\vec{F}_3)=M_z(\vec{F}_{yz})+M_z(\vec{F}_{3x})=0-F_{3x}\cdot A_2O_0=-F_3\sin\alpha\cdot 3l=-3lF_3\sin\alpha_3.$$

Тут $M_z(\vec{F}_{yz})=0,$ паколькі лінія дзеяння сілы F_{yz} перасякае вось O_0z.

2. *Вызначэнне момантаў пары сіл* M_1. Пару сіл прадставім у выглядзе вектара $\vec{M}_1$, перпендыкулярнага да правай грані куба (*гл.* рыс. 2.9); яе момант адносна восей каардынат будзем знаходзіць як праекцыю гэтага вектара на восі каардынат. Атрымаем: $M_y=-M_1$, $M_x=M_z=0.$

3. *Вызначэнне момантаў размеркаванай нагрузкі* q. Размеркаваную нагрузку замяняем засяроджанай раўнадзейнай сілай Q_2, роўнай

плошчы трохвугольнай эпюры: $Q_2 = \frac{1}{2} q_2 l.$ Лінія дзеяння Q_2 паралельна да напрамку вектара $\vec{q}_2$ і праходзіць праз цэнтр цяжару плошчы эпюры, г. зн. на адлегласці $l/3$ ад асновы трохвугольніка q_2 (*гл.* рыс. 2.9). Моманты раўнадзейнай Q_2 адносна восей каардынат знаходзім як для звычайнай сілы. Атрымліваем:

$$M_x(\vec{Q}_2) = Q_2 \cdot 2l = q_2 l^2; \qquad M_y(\vec{Q}_2) = Q_2 \cdot 2l/3 = q_2 l^2/3; \qquad M_z(\vec{Q}_2) = 0.$$

ЗАКЛЮЧЭННЕ

Звяртаюся да студэнта, які ўжо выканаў усе змешчаныя тут заданні і марыць праз некалькі гадоў стаць высокакваліфікаваным спецыялістам.

Не пакідайце нявысветленымі дэталі сваёй працы. Звяртайцеся з пытаннямі да выкладчыка альбо паспяховых сяброў. Можаце самастойна выбраць і выканаць дадатковыя заданні. Выканайце іх некалькімі спосабамі і пераканайцеся, што вынікі супадаюць.

Цвёрдае засваенне разглядаемай тэмы ў будучым дазволіць вам сэканоміць час на вывучэнне тэарэтычнай механікі і іншых дысцыплін, гарантуе поспех і станоўчыя эмоцыі.

ДАДАТАК А

Т а б л і ц а А.1

Нумар варыянта	Знайсці			Нумар варыянта	Знайсці		
	праекцыі сіл на восі (заданне 1)	моманты			праекцыі сіл на восі (заданне 1)	моманты	
		сіл	адносна цэнтраў (заданне 2)			сіл	адносна цэнтраў (заданне 2)
1	F_1, F_5	F_2, F_6	*B, D*	19	F_4, F_7	F_5, F_6	*K, N*
2	F_2, F_6	F_3, F_7	*A, C*	20	F_1, F_4	F_7, F_8	*E, L*
3	F_3, F_7	F_4, F_8	*B, D*	21	F_2, F_5	F_1, F_8	*P, K*
4	F_4, F_8	F_5, F_7	*A, D*	22	F_3, F_7	F_1, F_4	*E, P*
5	F_1, F_5	F_2, F_4	*B, C*	23	F_4, F_8	F_5, F_6	*S, T*
6	F_2, F_6	F_1, F_8	*B, C*	24	F_5, F_8	F_6, F_7	*K, P*
7	F_3, F_7	F_2, F_6	*B, C*	25	F_2, F_6	F_3, F_4	*C, T*
8	F_8, F_9	F_7, F_5	*C, D*	26	F_7, F_8	F_5, F_6	D, S
9	F_1, F_5	F_2, F_6	*A, D*	27	F_1, F_3	F_2, F_4	*K, P*
10	F_2, F_3	F_4, F_7	*A, C*	28	F_3, F_7	F_5, F_6	*E, S*
11	F_3, F_7	F_1, F_8	*M, N*	29	F_1, F_8	F_2, F_7	*P, T*
12	F_4, F_8	F_1, F_7	*M, N*	30	F_2, F_7	F_4, F_5	*A, S*
13	F_5, F_9	F_2, F_6	*B, C*	31	F_3, F_8	F_4, F_6	*B, P*
14	F_6, F_{10}	F_3, F_5	*C, D*	32	F_2, F_5	F_7, F_8	*C, L*
15	F_1, F_5	F_4, F_6	*D, E*	33	F_2, F_7	F_6, F_8	*D,T*
16	F_2, F_6	F_7, F_8	*C,K*	34	F_4, F_7	F_5, F_6	*A, B*
17	F_3, F_7	F_4, F_5	*D, L*	35	F_3, F_6	F_2, F_7	*B, T*
18	F_3, F_5	F_1, F_7	*L, K*	36	F_3, F_6	F_5, F_7	*L, S*

Т а б л і ц а А.2

Нумар варыянта	Вызначыць моманты сіл адносна восей	Нумар варыянта	Вызначыць моманты сіл адносна восей
1	$M_x(\vec{F}_2),\ M_y(\vec{F}_4),\ \sum_{i=1}^{4} M_z(\vec{F}_i)$	19	$\sum_{i=5}^{8} M_x(\vec{F}_i),\ M_y(\vec{F}_7),\ M_z(\vec{F}_4)$
2	$\sum_{i=2}^{6} M_x(\vec{F}_i),\ M_y(\vec{F}_5),\ M_z(\vec{F}_3)$	20	$M_x(\vec{F}_1),\ \sum_{i=5}^{8} M_y(\vec{F}_i),\ M_z(\vec{F}_2)$
3	$M_x(\vec{F}_8),\ \sum_{i=5}^{8} M_y(\vec{F}_i),\ M_z(\vec{F}_2)$	21	$M_x(\vec{F}_6),\ M_y(\vec{F}_8),\ \sum_{i=3}^{6} M_z(\vec{F}_i)$
4	$\sum_{i=3}^{6} M_x(\vec{F}_i),\ M_y(\vec{F}_2),\ M_z(\vec{F}_6)$	22	$\sum_{i=3}^{6} M_x(\vec{F}_i),\ M_y(\vec{F}_2),\ M_z(\vec{F}_3)$
5	$M_x(\vec{F}_3),\ \sum_{i=5}^{8} M_y(\vec{F}_i),\ M_z(\vec{F}_1)$	23	$M_x(\vec{F}_7),\ \sum_{i=3}^{7} M_y(\vec{F}_i),\ M_z(\vec{F}_3)$
6	$M_x(\vec{F}_7),\ M_y(\vec{F}_5),\ \sum_{i=2}^{5} M_z(\vec{F}_i)$	24	$M_x(\vec{F}_1),\ M_y(\vec{F}_6),\ \sum_{i=2}^{5} M_z(\vec{F}_i)$
7	$\sum_{i=3}^{6} M_x(\vec{F}_i),\ M_y(\vec{F}_8),\ M_z(\vec{F}_6)$	25	$\sum_{i=1}^{4} M_x(\vec{F}_i),\ M_y(\vec{F}_4),\ M_z(\vec{F}_6)$
8	$M_x(\vec{F}_7),\ \sum_{i=3}^{6} M_y(\vec{F}_i),\ M_z(\vec{F}_3)$	26	$M_x(\vec{F}_6),\ \sum_{i=1}^{4} M_y(\vec{F}_i),\ M_z(\vec{F}_5)$
9	$M_x(\vec{F}_5),\ M_y(\vec{F}_5),\ \sum_{i=1}^{4} M_z(\vec{F}_i)$	27	$M_x(\vec{F}_4),\ M_y(\vec{F}_7),\ \sum_{i=4}^{7} M_z(\vec{F}_i)$
10	$\sum_{i=3}^{6} M_x(\vec{F}_i),\ M_y(\vec{F}_1),\ M_z(\vec{F}_3)$	28	$\sum_{i=4}^{7} M_x(\vec{F}_i),\ M_y(\vec{F}_8),\ M_z(\vec{F}_5)$
11	$M_x(\vec{F}_1),\ \sum_{i=3}^{6} M_y(\vec{F}_i),\ M_z(\vec{F}_3)$	29	$M_x(\vec{F}_1),\ \sum_{i=1}^{4} M_y(\vec{F}_i),\ M_z(\vec{F}_4)$
12	$M_x(\vec{F}_8),\ M_y(\vec{F}_1),\ \sum_{i=1}^{4} M_z(\vec{F}_i)$	30	$M_x(\vec{F}_2),\ M_y(\vec{F}_5),\ \sum_{i=3}^{6} M_z(\vec{F}_i)$
13	$\sum_{i=1}^{4} M_x(\vec{F}_i),\ M_y(\vec{F}_7),\ M_z(\vec{F}_5)$	31	$\sum_{i=1}^{4} M_x(\vec{F}_i),\ M_y(\vec{F}_3),\ M_z(\vec{F}_8)$
14	$M_x(\vec{F}_2),\ \sum_{i=2}^{5} M_y(\vec{F}_i),\ M_z(\vec{F}_6)$	32	$M_x(\vec{F}_8),\ \sum_{i=3}^{6} M_y(\vec{F}_i),\ M_z(\vec{F}_6)$
15	$M_x(\vec{F}_7),\ M_y(\vec{F}_1),\ \sum_{i=2}^{5} M_z(\vec{F}_i)$	33	$M_x(\vec{F}_5),\ M_y(\vec{F}_2),\ \sum_{i=5}^{8} M_z(\vec{F}_i)$
16	$\sum_{i=4}^{7} M_x(\vec{F}_i),\ M_y(\vec{F}_5),\ M_z(\vec{F}_7)$	34	$\sum_{i=3}^{7} M_x(\vec{F}_i),\ M_y(\vec{F}_7),\ M_z(\vec{F}_3)$
17	$M_x(\vec{F}_2),\ \sum_{i=3}^{6} M_y(\vec{F}_i),\ M_z(\vec{F}_2)$	35	$M_x(\vec{F}_5),\ \sum_{i=1}^{4} M_y(\vec{F}_i),\ M_z(\vec{F}_8)$
18	$M_x(\vec{F}_1),\ M_y(\vec{F}_4),\ \sum_{i=5}^{8} M_z(\vec{F}_i)$	36	$M_x(\vec{F}_4),\ M_y(\vec{F}_4),\ \sum_{i=4}^{7} M_z(\vec{F}_i)$

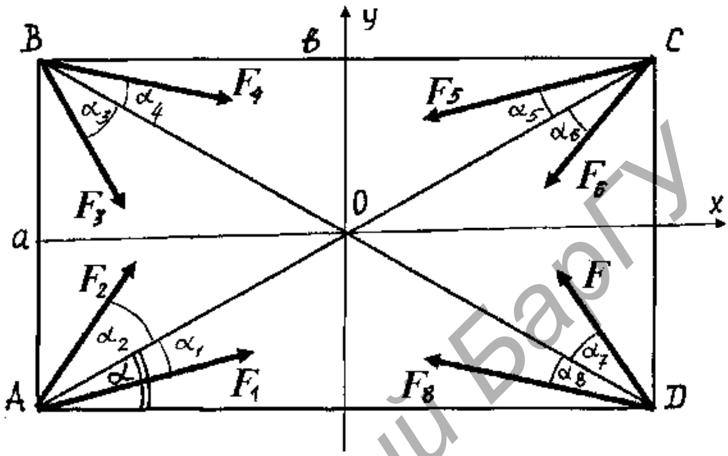
Т а б л і ц а А.3

Нумар варыянта	$\vec r_A = x\vec i + y\vec j + z\vec k$ (у метрах)			$\vec F = X\vec i + Y\vec j + Z\vec k$ (у Н'ютанах)			Нумар варыянта	$\vec r_A = x\vec i + y\vec j + z\vec k$ (у метрах)			$\vec F = X\vec i + Y\vec j + Z\vec k$ (у Н'ютанах)		
	x	*y*	*z*	*x*	*y*	*z*		*x*	*y*	*z*	*x*	*y*	*z*
1	8	–5	4	4	–4	2	19	10	9	–9	5	–5	–3
2	5	–3	5	6	7	–3	20	14	6	10	6	5	–2
3	4	4	–3	5	5	-4	21	8	7	6	4	3	–3
4	6	–5	5	–6	4	3	22	12	10	12	6	–4	3
5	7	–3	4	–7	3	4	23	14	7	6	7	5	–4
6	5	5	–2	–8	2	5	24	10	8	–4	8	6	–4
7	9	–6	7	4	4	–2	25	17	12	12	5	6	–3
8	4	–5	3	6	2	–3	26	9	10	8	7	–6	4
9	9	3	–3	5	3	2	27	16	6	–6	4	6	–4
10	3	–3	5	5	3	5	28	7	10	6	6	–6	3
11	6	–3	4	4	–5	4	29	12	6	6	7	–4	2
12	8	4	–4	8	4	4	30	16	10	–10	5	4	–3
13	7	–5	3	2	6	4	31	14	8	6	8	–5	4
14	5	–4	4	3	3	4	32	9	8	8	8	–6	6
15	9	–5	5	4	4	3	33	16	6	–8	6	4	4
16	8	–5	6	–5	4	3	34	–15	10	8	6	3	3
17	7	–3	3	–4	3	4	35	14	6	–8	4	3	4
18	5	–4	5	5	2	4	36	5	–4	3	–6	2	3

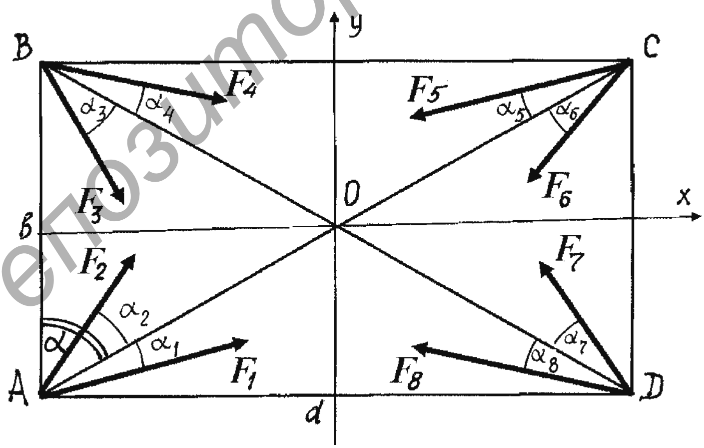
Т а б л і ц а А.4

Нумар варыянта	Геаметрычныя параметры			Нагрузка			Нумар варыянта	Геаметрычныя параметры			Нагрузка		
	Пачатак каардынат O_i	Адлегласць O_iA_i	Рабро куба (м)	F_i (Н)	M_i (Н · м)	q_i (Н / м)		Пачатак каардынат O_i	Адлегласць O_iA_i	Рабро куба (м)	F_i (Н)	M_i (Н · м)	q_i (Н / м)
1	O_0	$3a$	a	F_1	M_2	q_3	33	O_1	$2u$	u	F_3	M_1	q_2
2	O_9	$2u$	u	F_3	M_1	q_2	34	O_8	$3a$	a	F_2	M_3	q_1
3	O_1	$4b$	b	F_2	M_3	q_1	35	O_0	$2s$	s	F_1	M_1	q_1
4	O_8	$6s$	s	F_1	M_1	q_1	36	O_9	$3b$	b	F_2	M_1	q_3
5	O_2	$3c$	c	F_2	M_1	q_3	37	O_3	$3r$	r	F_1	M_3	q_1
6	O_7	$2r$	r	F_1	M_3	q_1	38	O_8	$2c$	c	F_2	M_2	q_3
7	O_3	$5d$	d	F_2	M_2	q_3	39	O_4	$3p$	p	F_3	M_3	q_2
8	O_6	$7p$	p	F_3	M_3	q_2	40	O_5	$2d$	d	F_1	M_2	q_3
9	O_4	$4e$	e	F_1	M_2	q_3	41	O_3	$2n$	n	F_2	M_3	q_1
10	O_5	$2n$	n	F_2	M_3	q_1	42	O_6	$2e$	e	F_3	M_1	q_2
11	O_3	$3f$	f	F_3	M_1	q_2	43	O_4	$3m$	m	F_1	M_1	q_1
12	O_4	$5m$	m	F_1	M_1	q_1	44	O_3	$2f$	f	F_1	M_3	q_1
13	O_2	$2k$	k	F_1	M_3	q_1	45	O_1	$2l$	l	F_3	M_3	q_2
14	O_3	$4l$	l	F_2	M_1	q_3	46	O_2	$2k$	k	F_2	M_3	q_1
15	O_3	$7b$	b	F_3	M_3	q_2	47	O_0	$3b$	b	F_1	M_2	q_3
16	O_0	$3u$	u	F_2	M_3	q_1	48	O_1	$3l$	l	F_3	M_1	q_2
17	O_9	$5c$	c	F_1	M_2	q_3	49	O_8	$3c$	c	F_1	M_2	q_2
18	O_1	$6s$	s	F_1	M_1	q_2	50	O_2	$4u$	u	F_1	M_1	q_3
19	O_8	$2d$	d	F_2	M_1	q_3	51	O_7	d	d	F_2	M_1	q_2
20	O_2	$3r$	r	F_1	M_3	q_1	52	O_1	$4s$	s	F_1	M_3	q_1
21	O_7	$5e$	e	F_3	M_3	q_1	53	O_9	$3e$	e	F_3	M_2	q_1
22	O_3	$4p$	p	F_2	M_1	q_3	54	O_2	$4r$	r	F_2	M_1	q_3
23	O_6	$6f$	f	F_2	M_3	q_1	55	O_5	$2e$	e	F_2	M_3	q_1
24	O_4	$3n$	n	F_1	M_1	q_2	56	O_3	$3p$	p	F_1	M_1	q_2
25	O_5	$5k$	k	F_1	M_3	q_2	57	O_4	$2n$	n	F_1	M_3	q_2
26	O_3	$7m$	m	F_3	M_2	q_2	58	O_2	$3k$	k	F_3	M_2	q_2
27	O_4	$6l$	l	F_3	M_2	q_1	59	O_3	$4m$	m	F_3	M_2	q_1
28	O_2	$2a$	a	F_2	M_2	q_2	60	O_1	l	l	F_2	M_2	q_2
29	O_3	$4s$	s	F_3	M_3	q_3	61	O_2	$5s$	s	F_3	M_3	q_3
30	O_3	$3b$	b	F_3	M_2	q_1	62	O_4	$3a$	a	F_3	M_2	q_1
31	O_0	$5r$	r	F_1	M_2	q_3	63	O_0	$2b$	b	F_1	M_2	q_3
32	O_9	$7c$	c	F_1	M_1	q_3	64	O_0	$2l$	l	F_3	M_1	q_2

СХЕМЫ ПРЫКЛАДАННЯ СІЛ І ГЕАМЕТРЫЧНЫЯ ПАРАМЕТРЫ



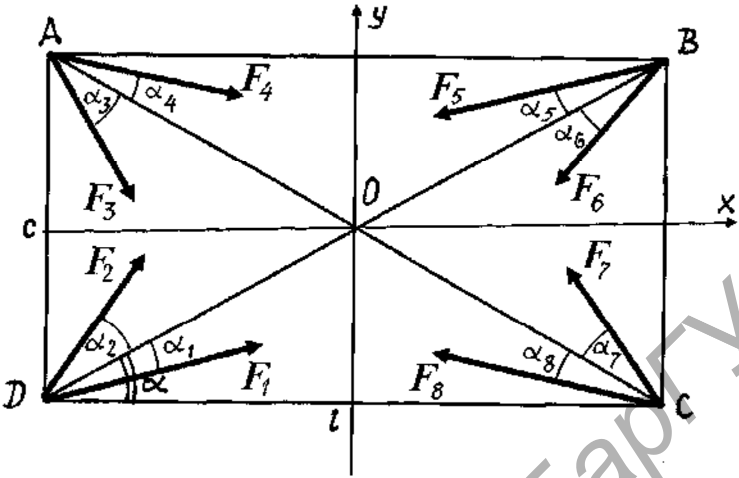
Рысунак 1*



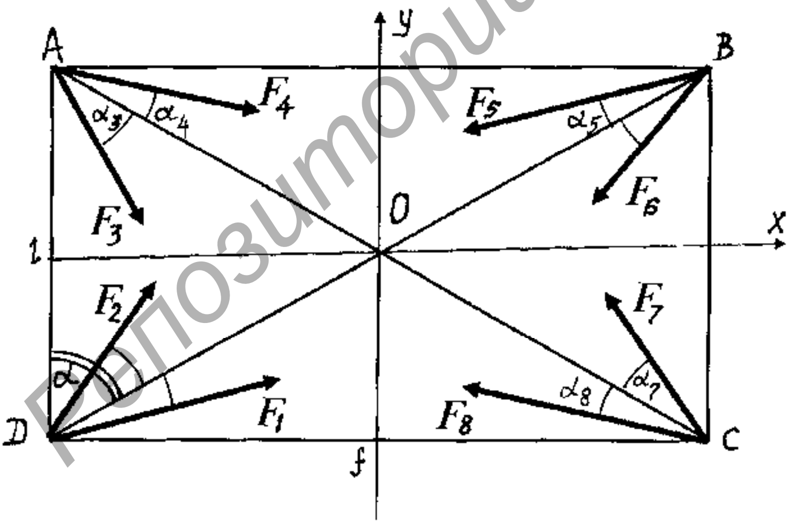
Рысунак 2

---

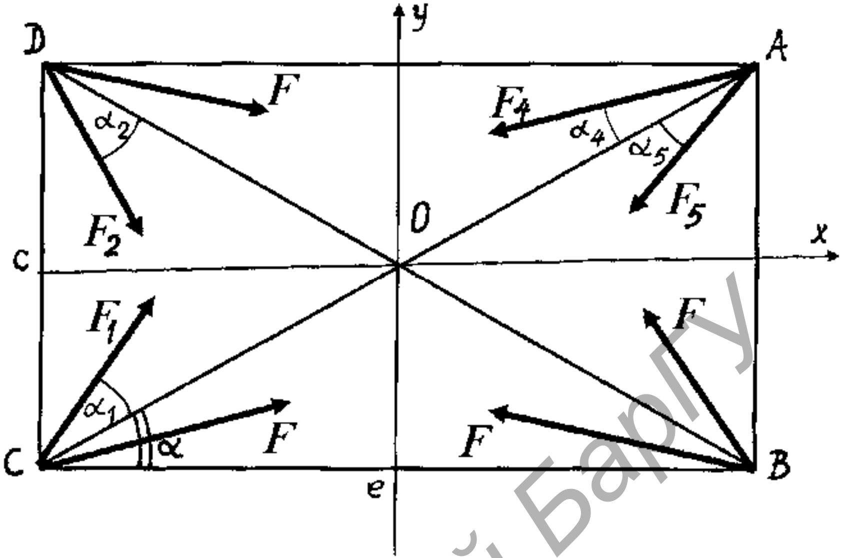
* Тут і далей літара, якая абазначае нумар дадатка, у подпісе рысункаў адсутнічае, таму што нумар рысунка (па ўмове задання) павінен супадаць з нумарам варыянта.



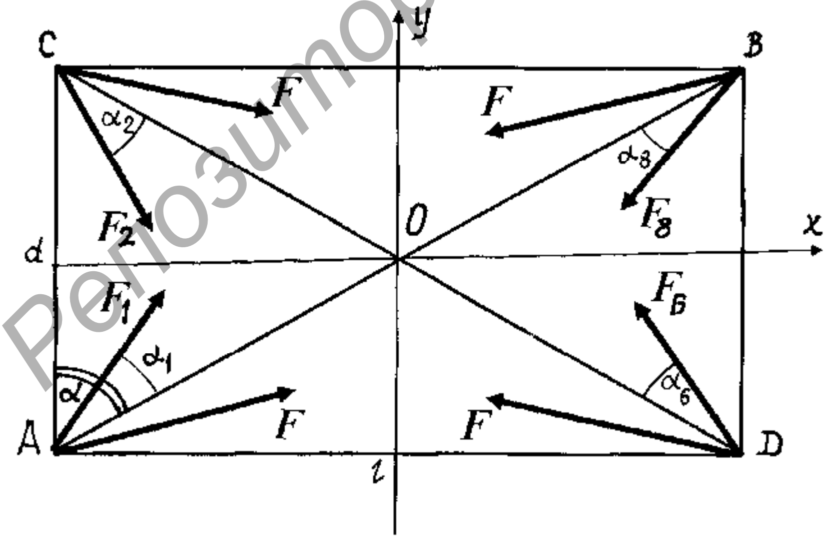
Рысунак 3



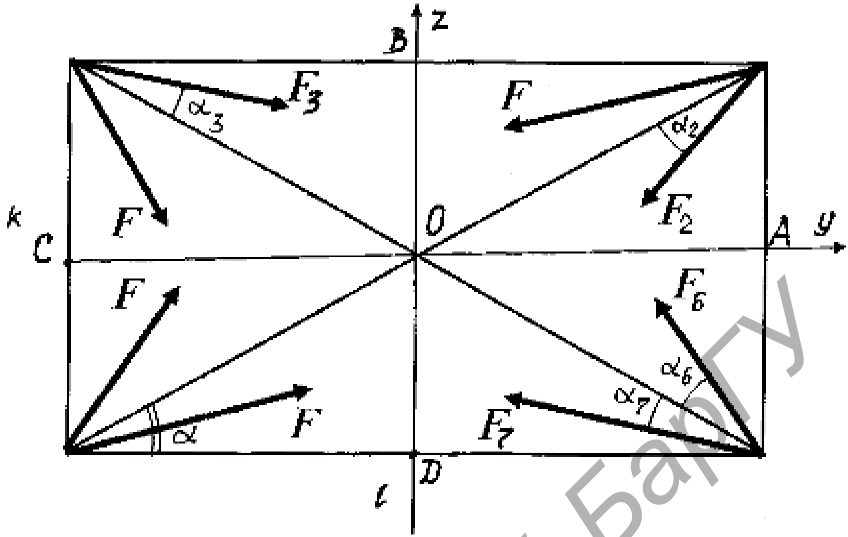
Рысунак 4



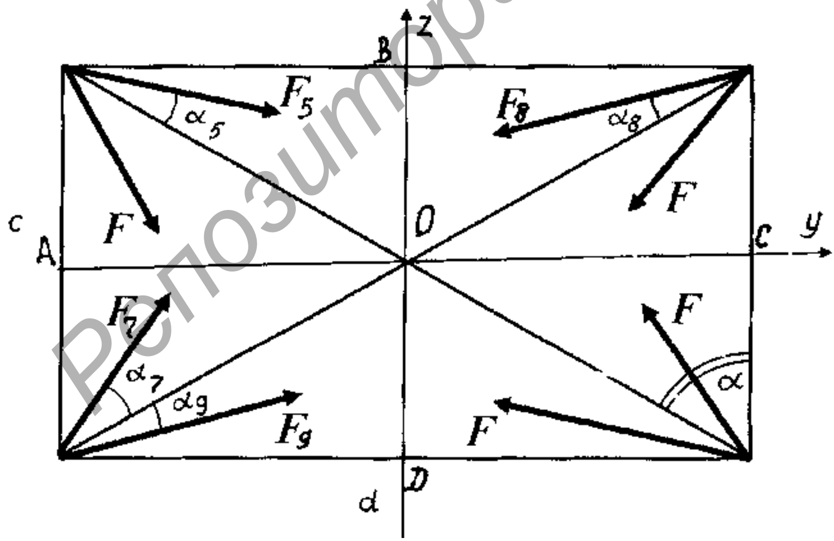
Рысунак 5



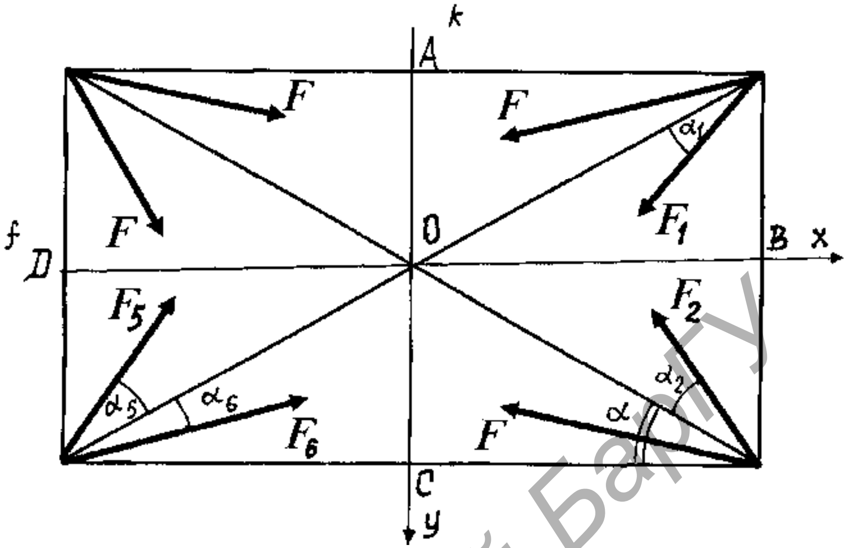
Рысунак 6



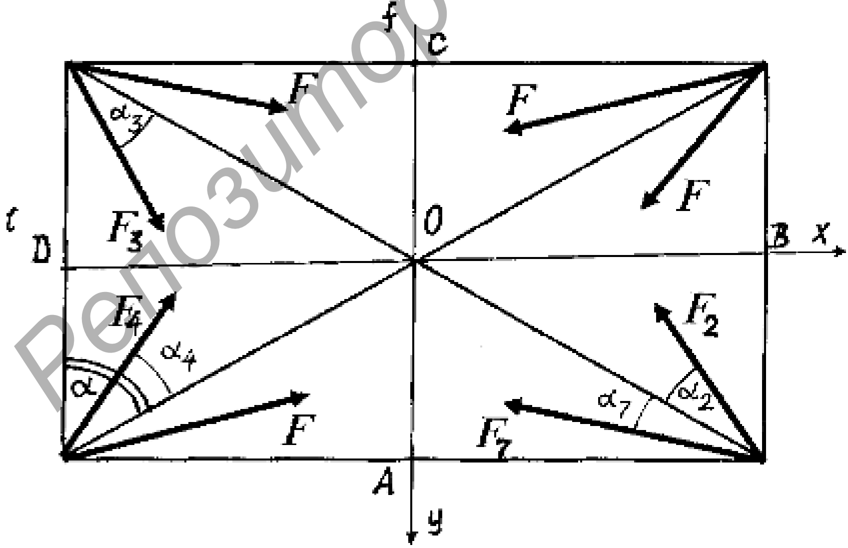
Рысунак 7



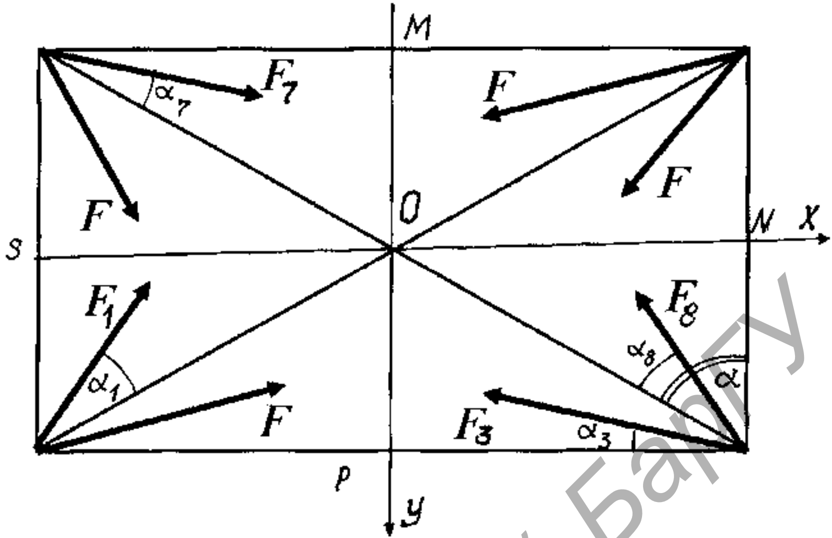
Рысунак 8



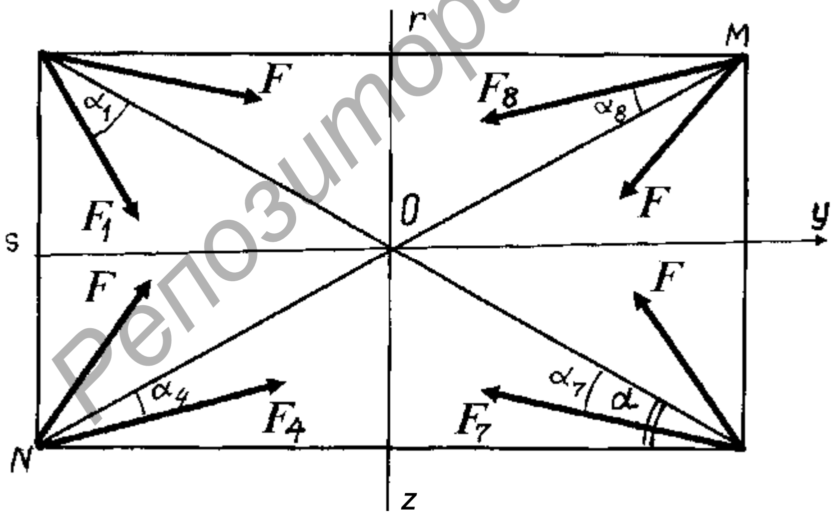
Рысунак 9



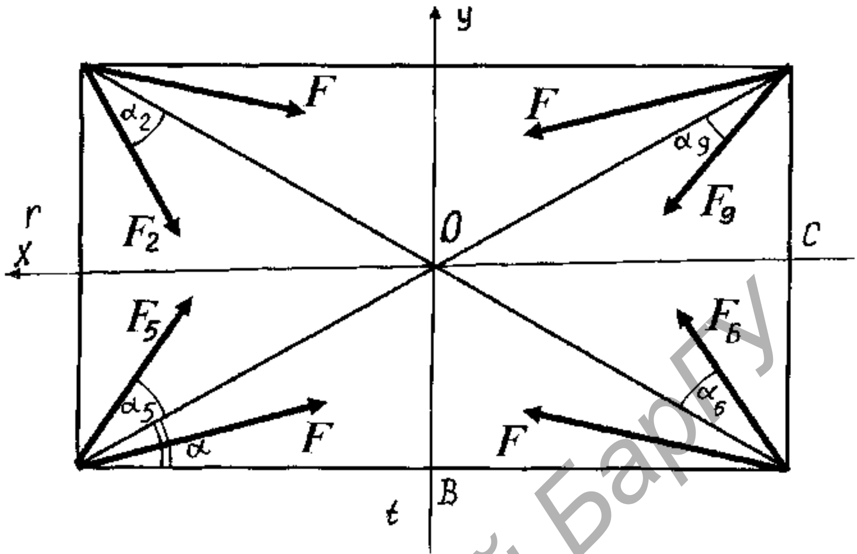
Рысунак 10



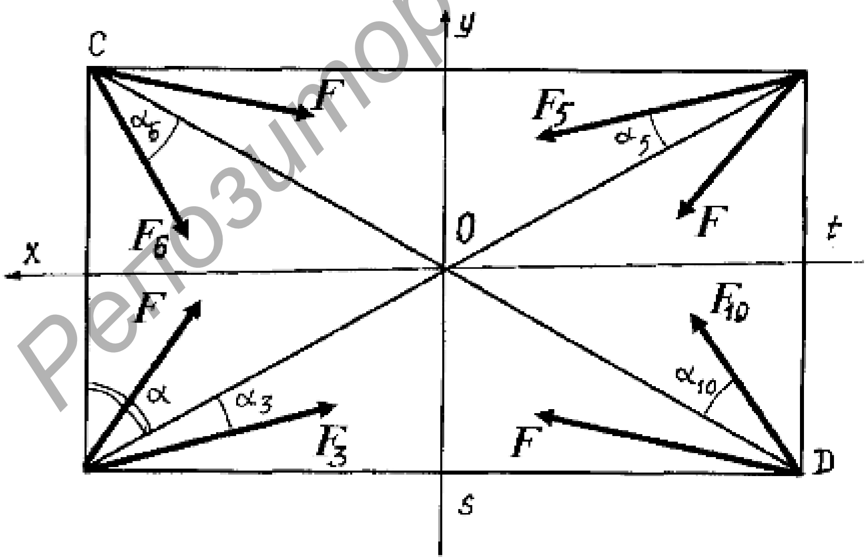
Рысунак 11



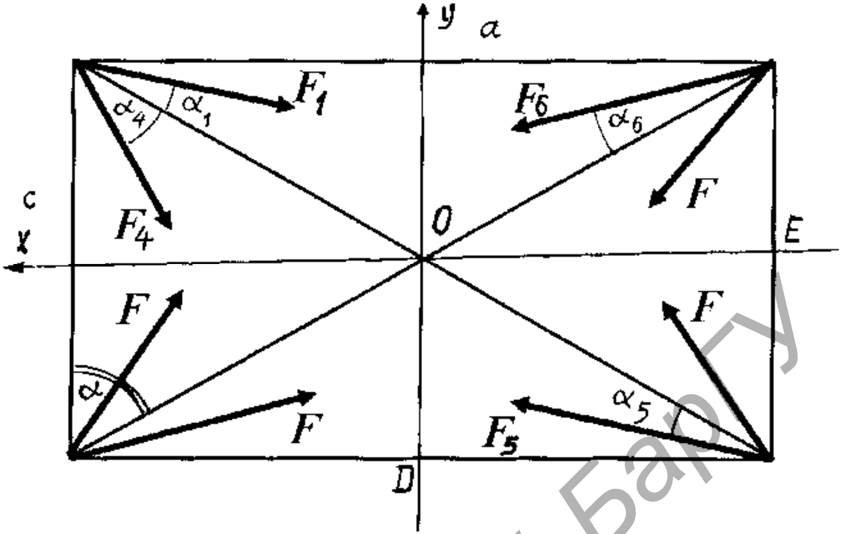
Рысунак 12



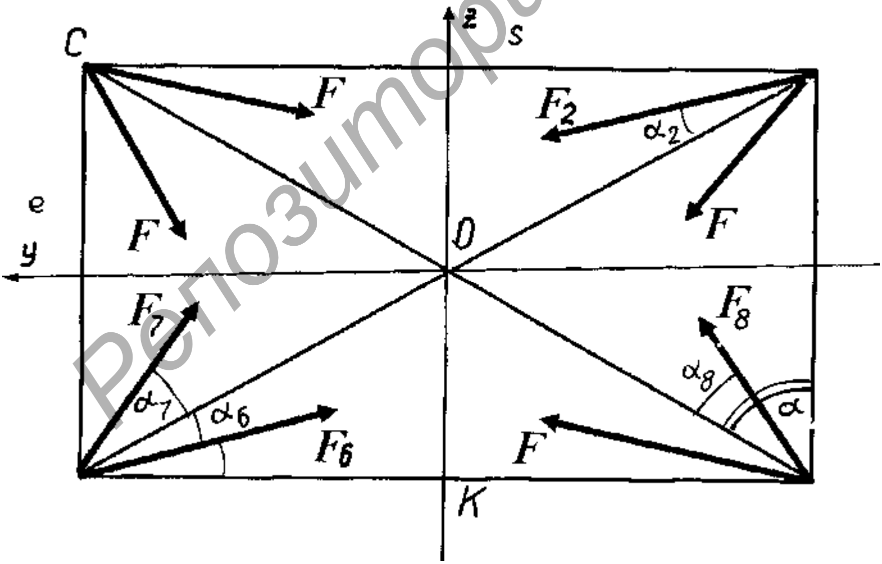
Рысунак 13



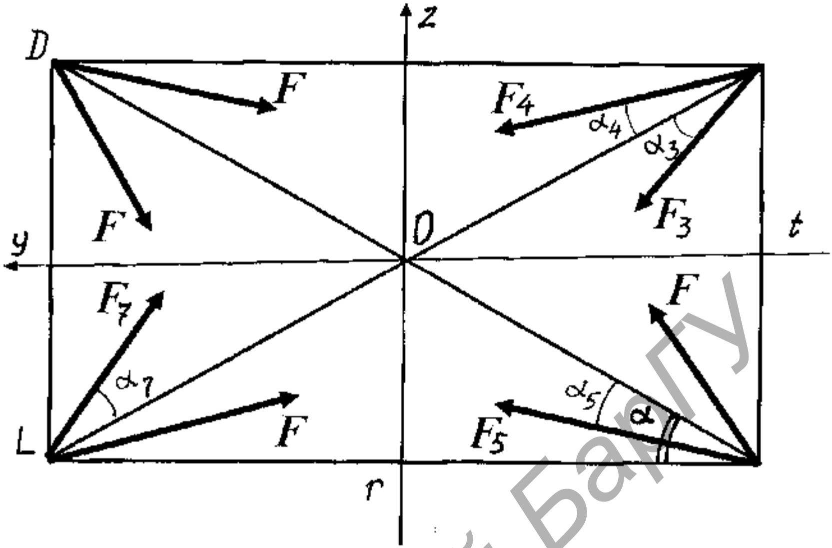
Рысунак 14



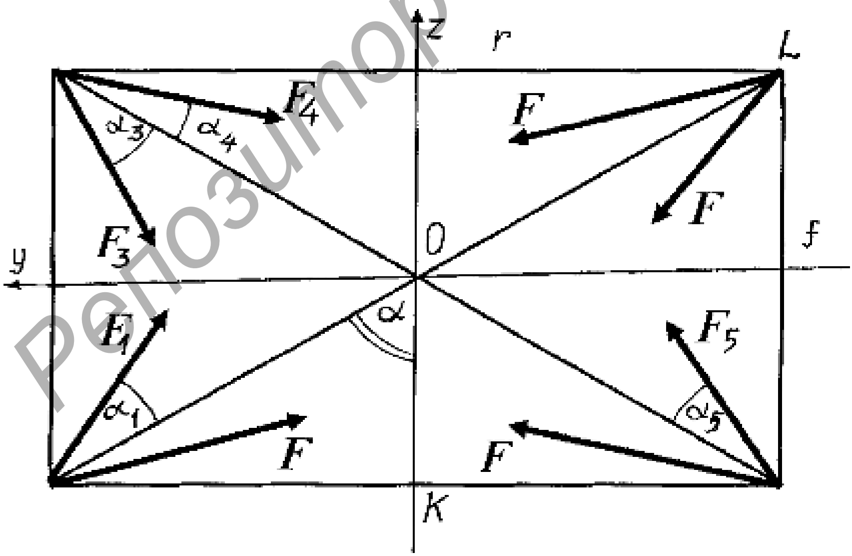
Рисунак 15



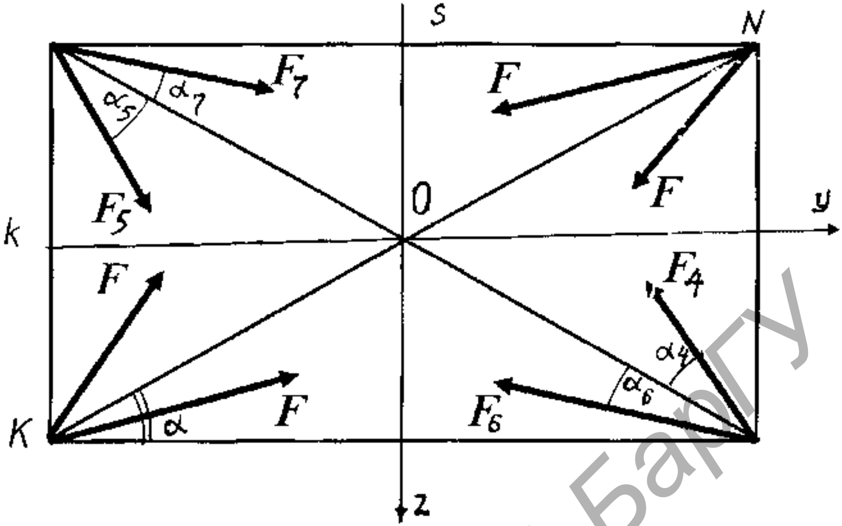
Рисунак 16



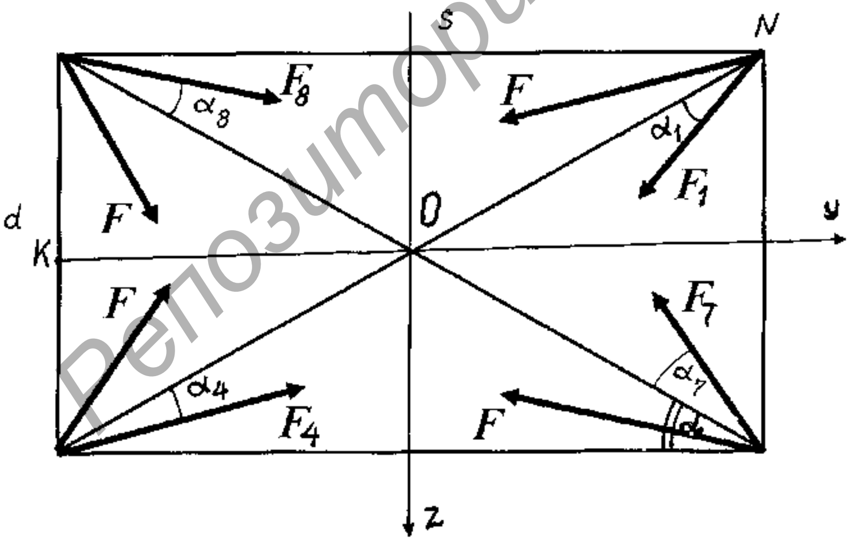
Рысунак 17



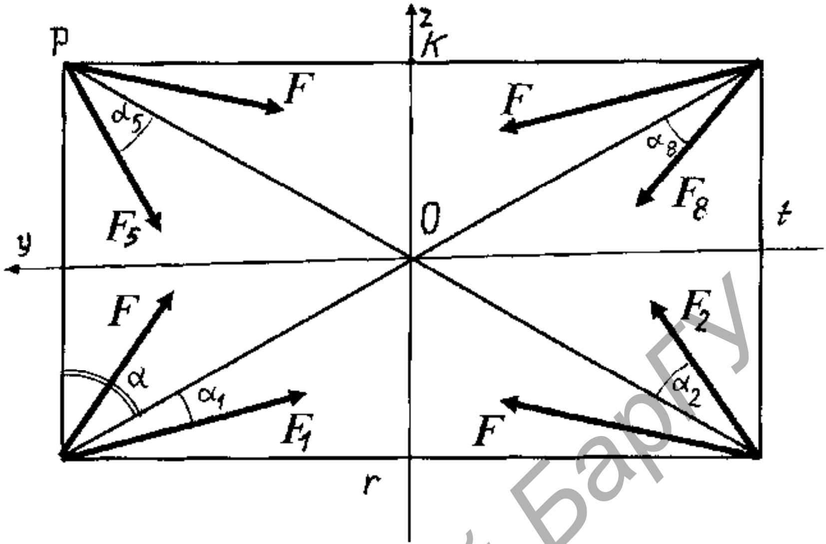
Рысунак 18



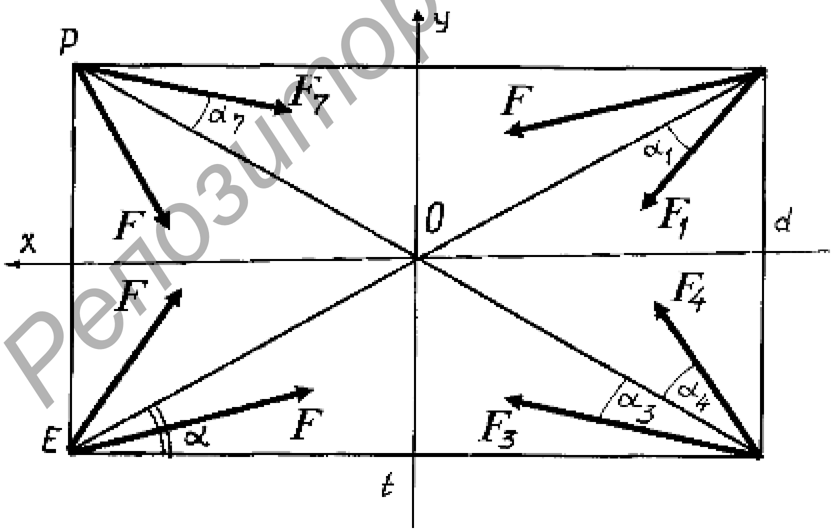
Рысунак 19



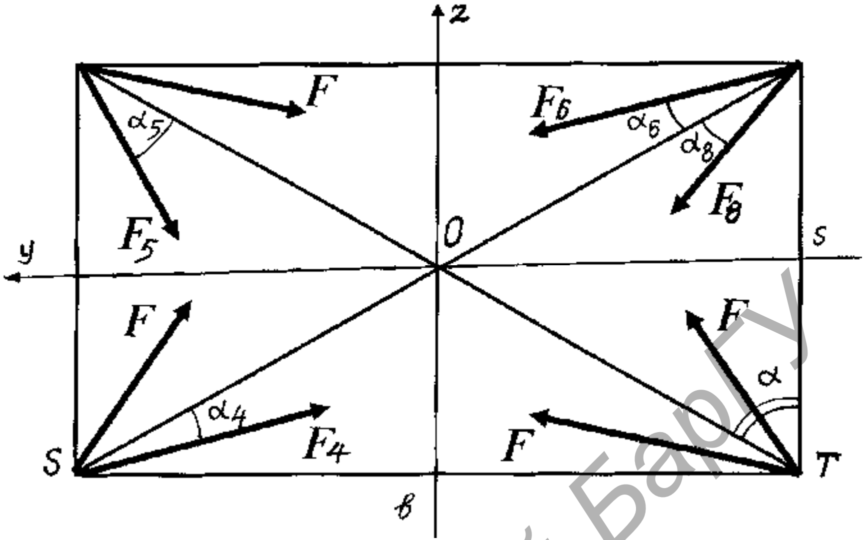
Рысунак 20



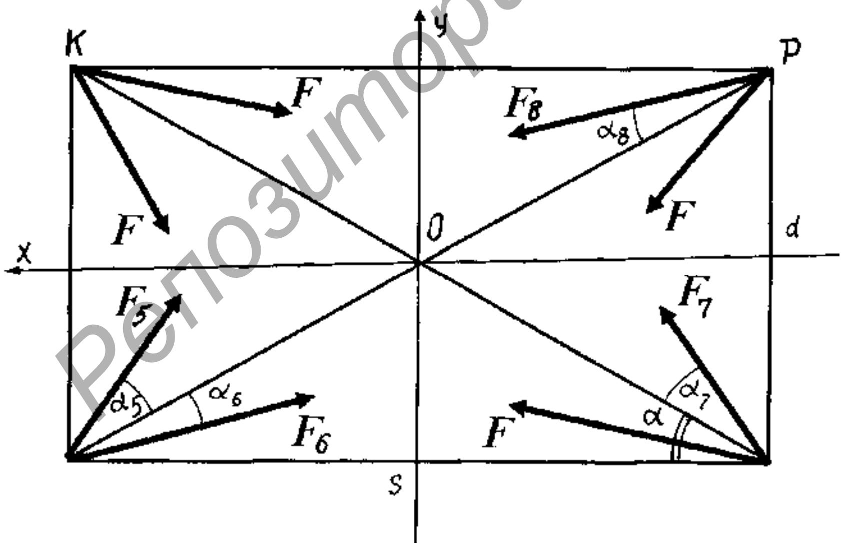
Рысунак 21



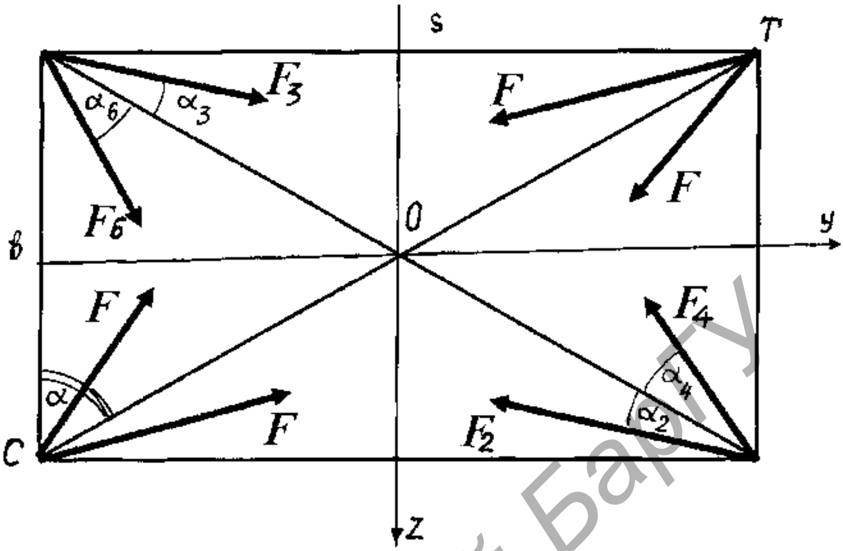
Рысунак 22



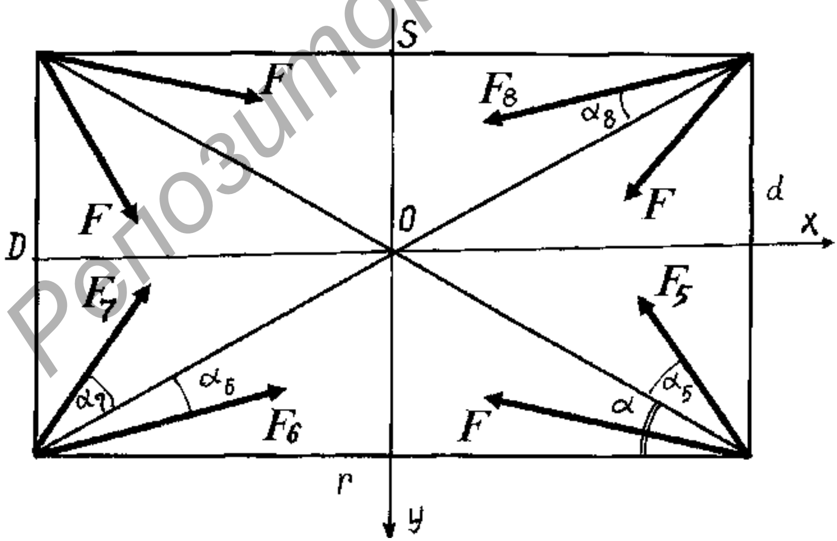
Рысунак 23



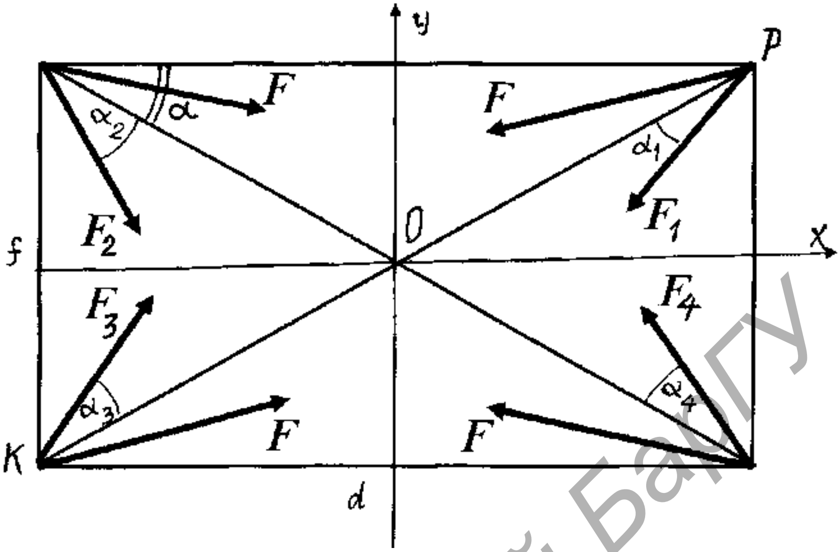
Рысунак 24



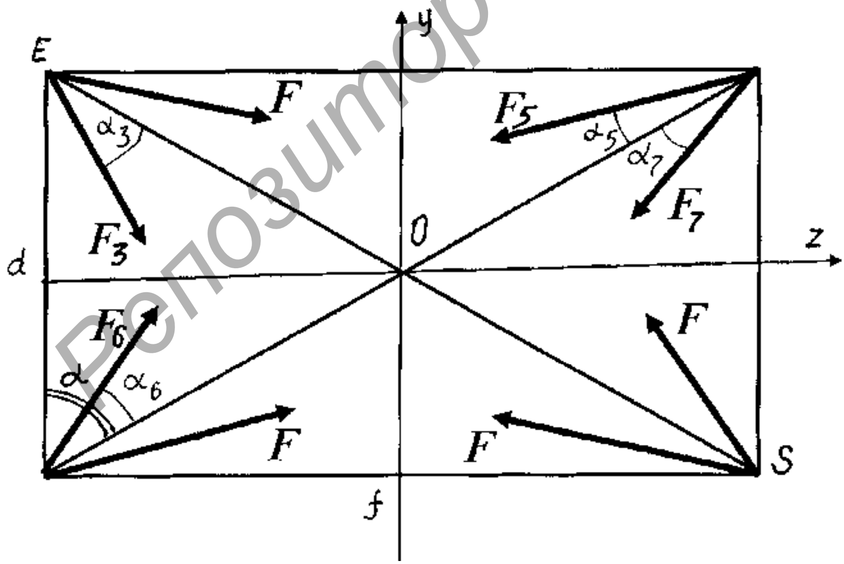
Рисунак 25



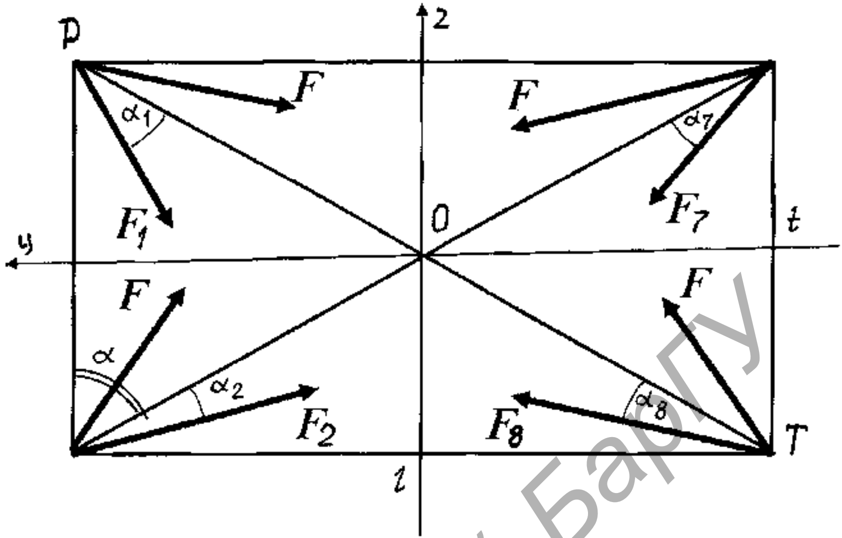
Рисунак 26



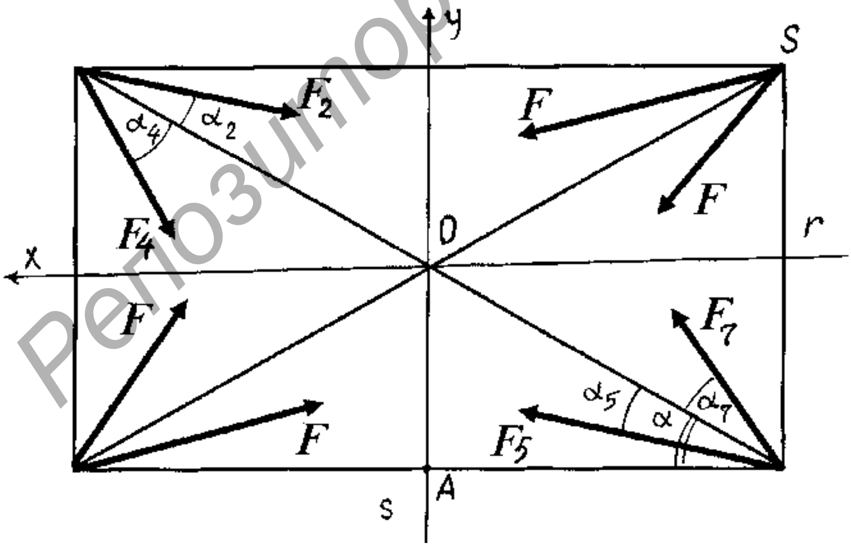
Рысунак 27



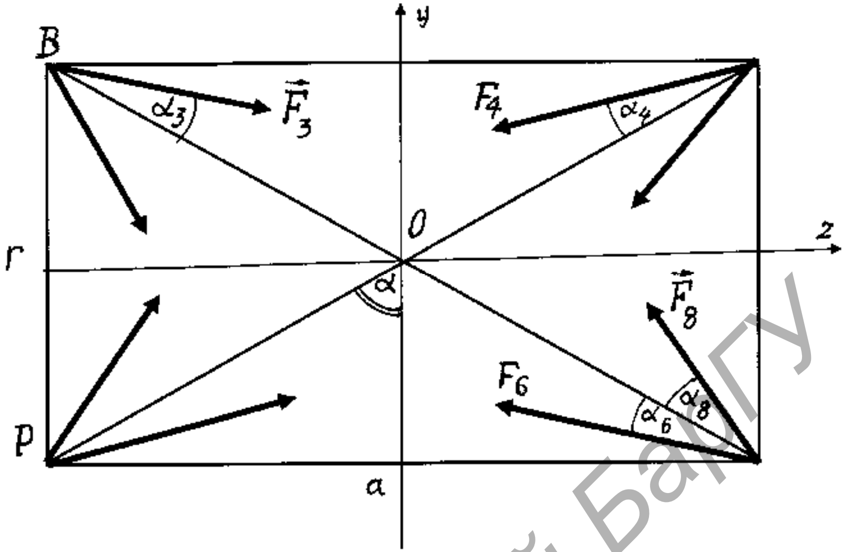
Рысунак 28



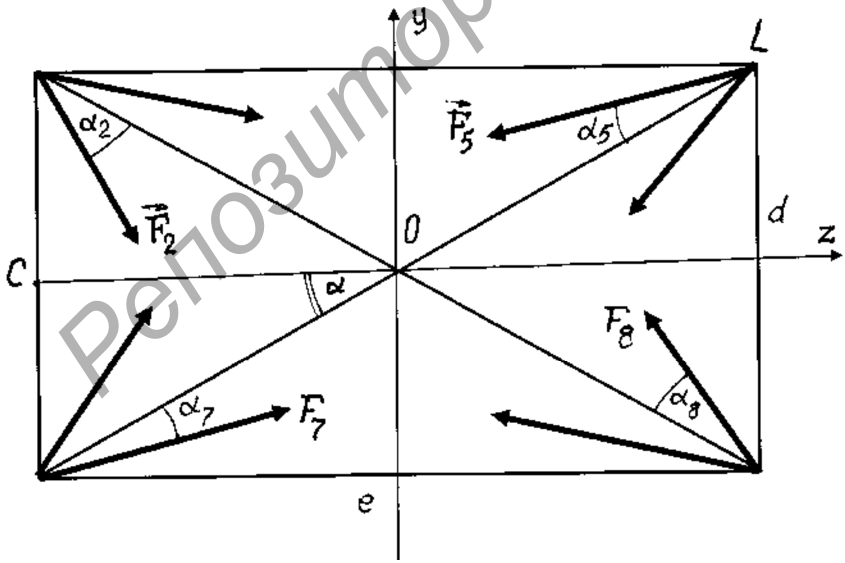
Рысунак 29



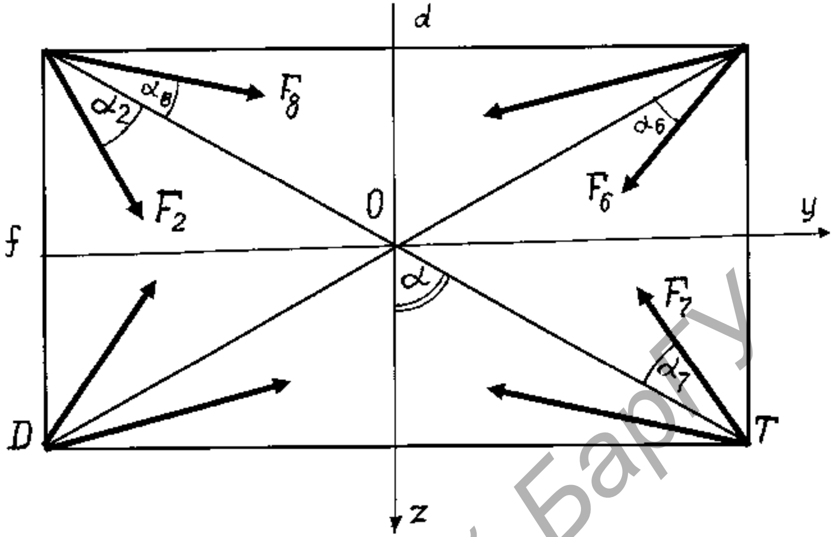
Рысунак 30



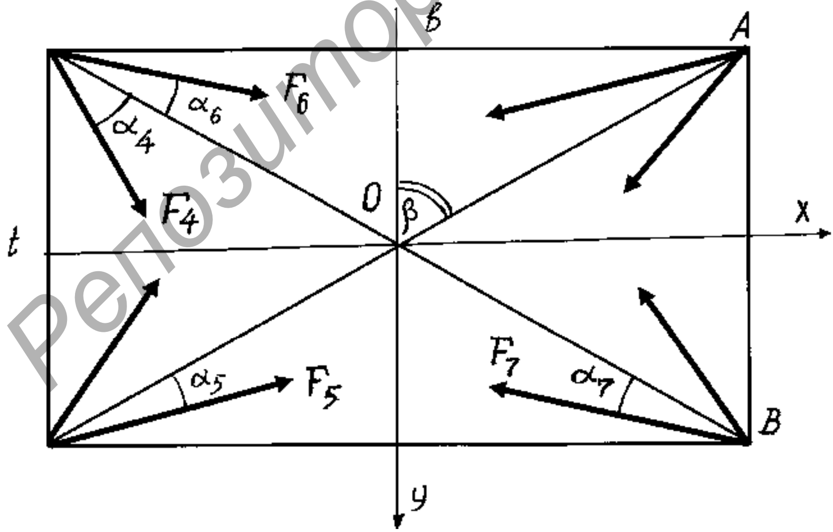
Рысунак 31



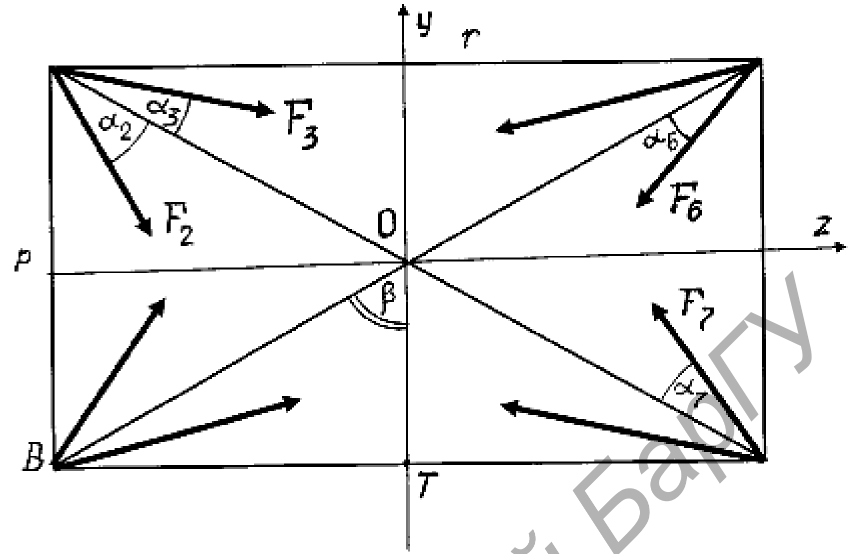
Рысунак 32



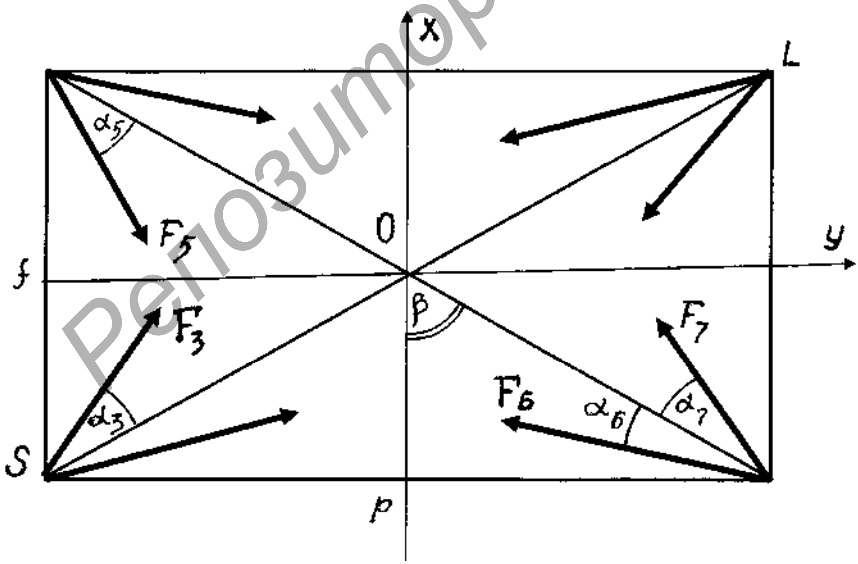
Рысунак 33



Рысунак 34

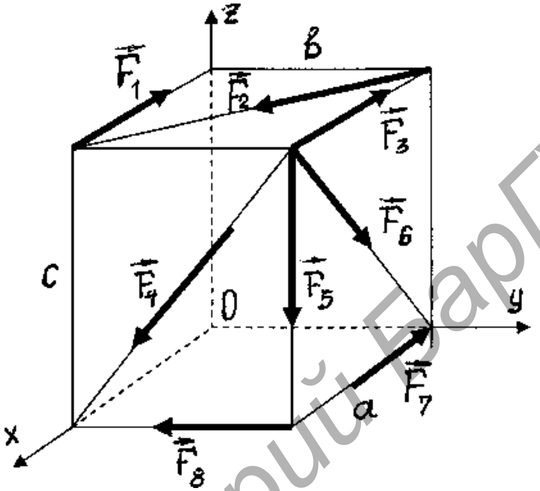


Рысунак 35

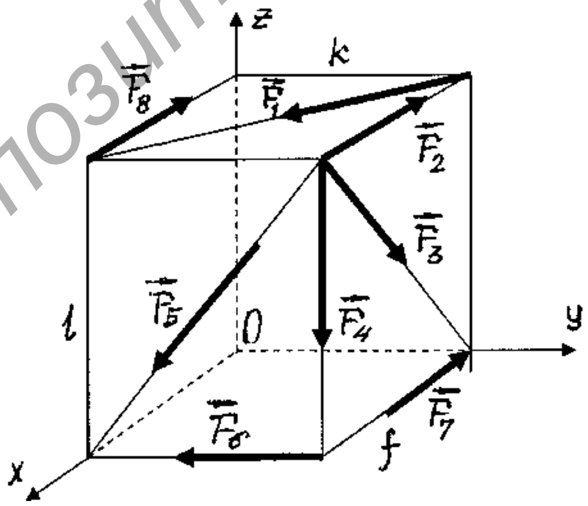


Рысунак 36

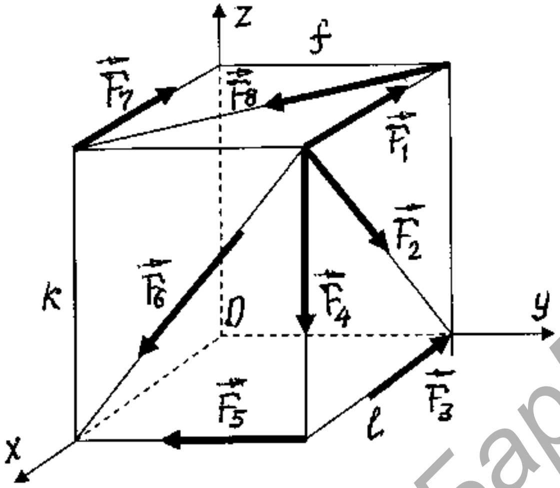
РЫСУНКІ ЦЕЛ У ВЫГЛЯДЗЕ ПРАМАВУГОЛЬНАГА ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА З ПРЫКЛАДЗЕНЫМІ ДА ЯГО СІЛАМІ



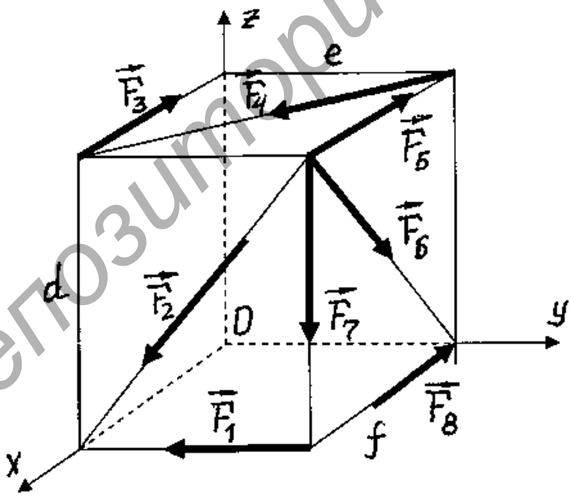
Рысунак 1



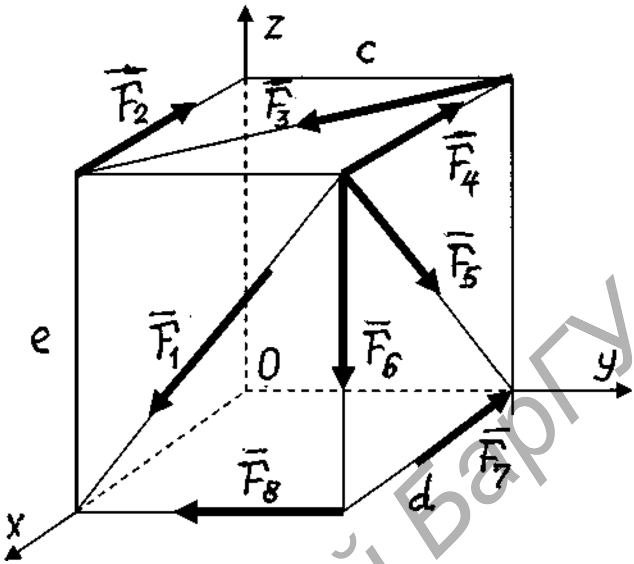
Рысунак 2



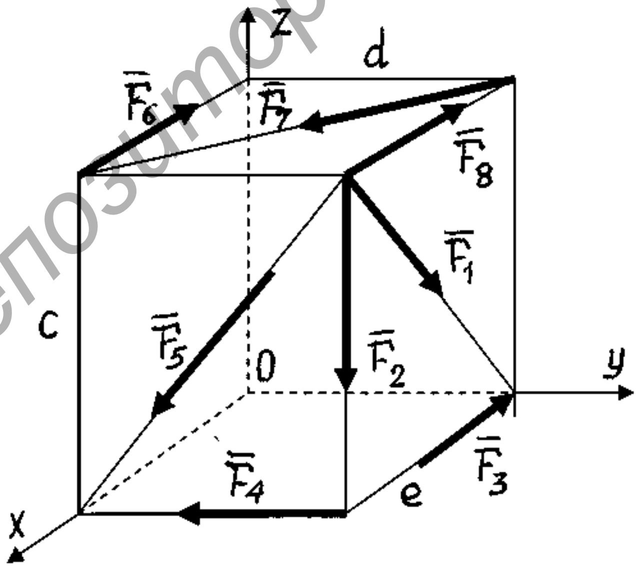
Рысунак 3



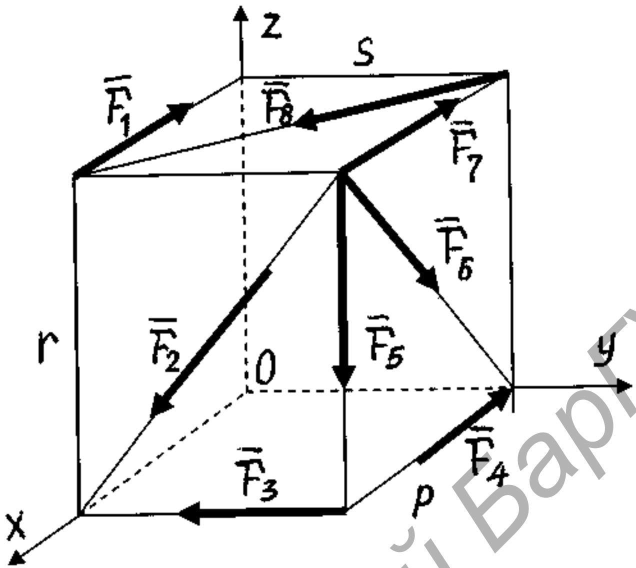
Рысунак 4



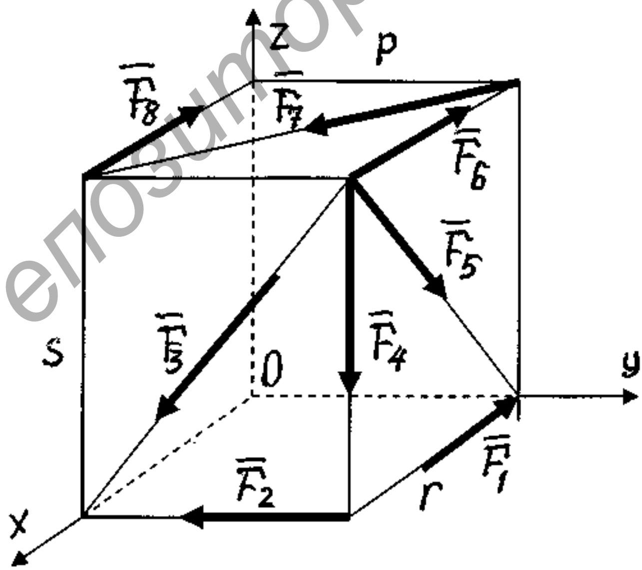
Рысунак 5



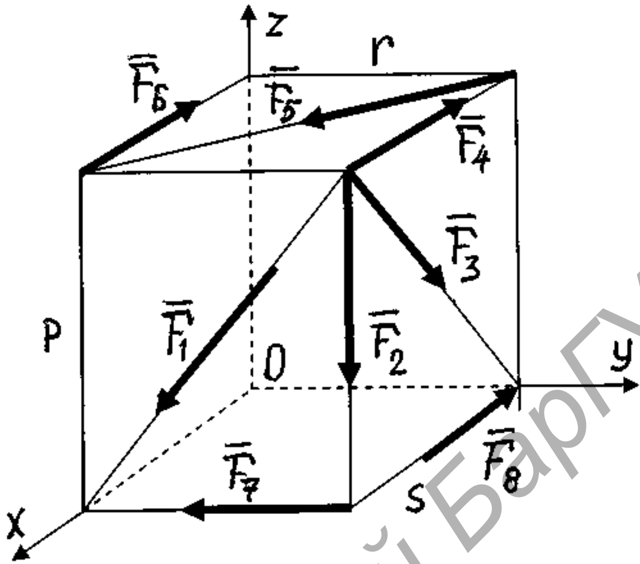
Рысунак 6



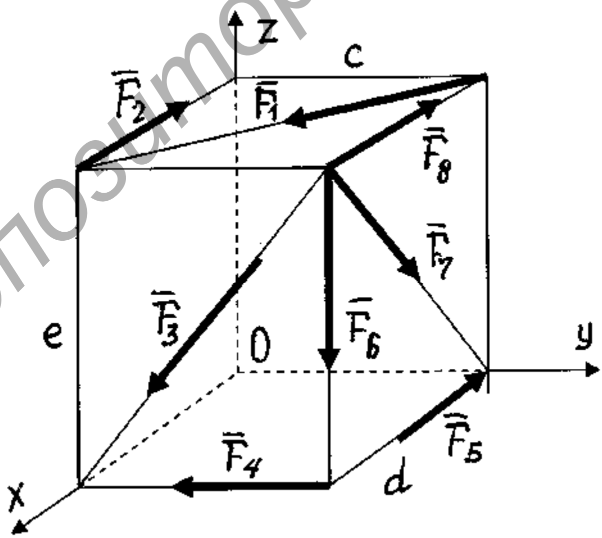
Рысунак 7



Рысунак 8



Рысунак 9



Рысунак 10

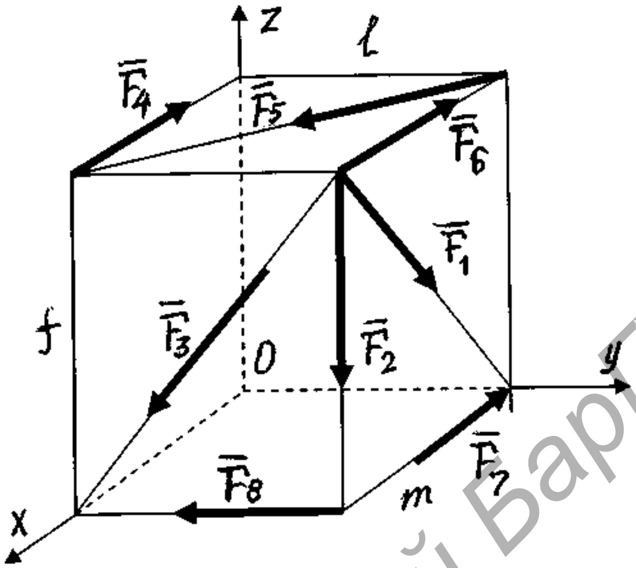


Рисунок 11

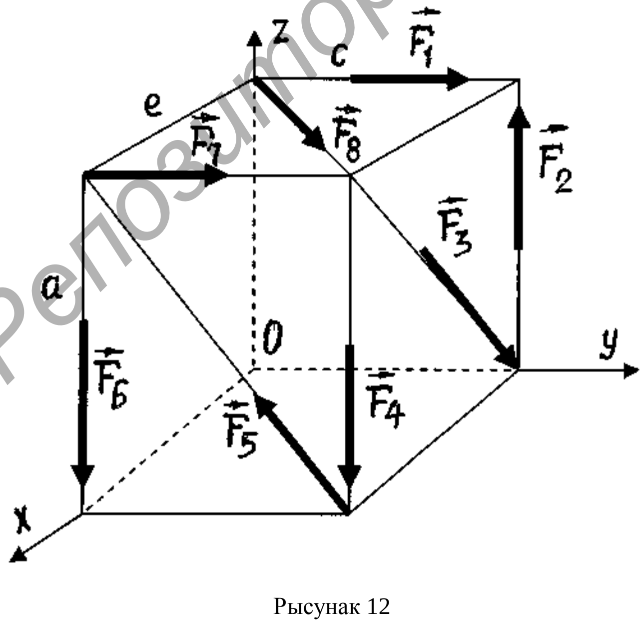
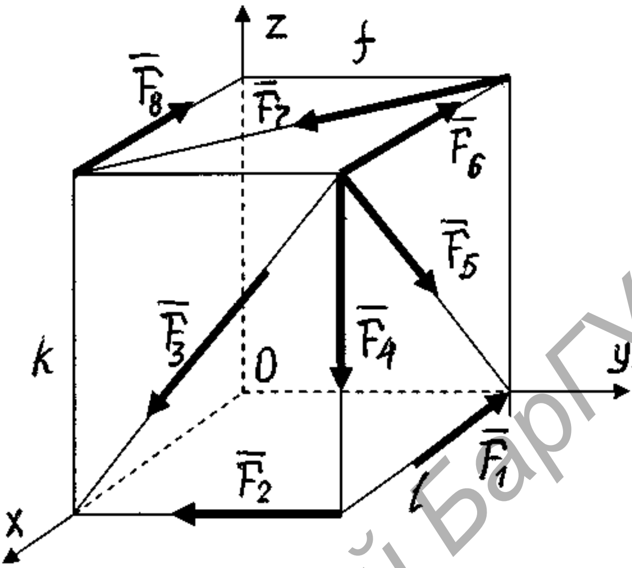
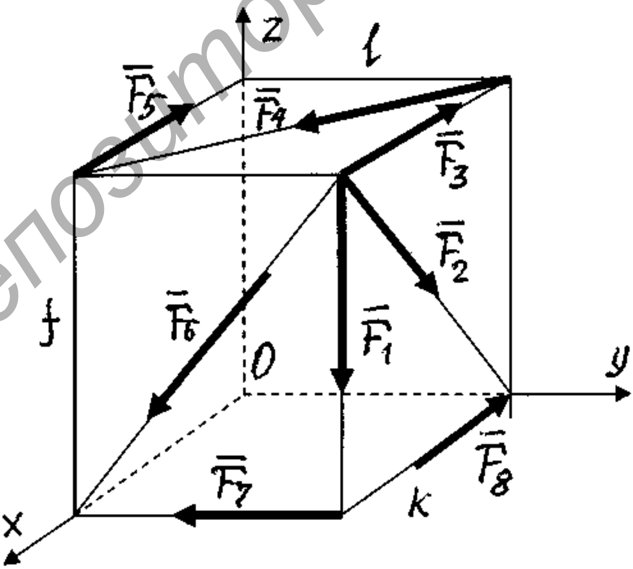


Рисунок 12



Рысунак 13



Рысунак 14

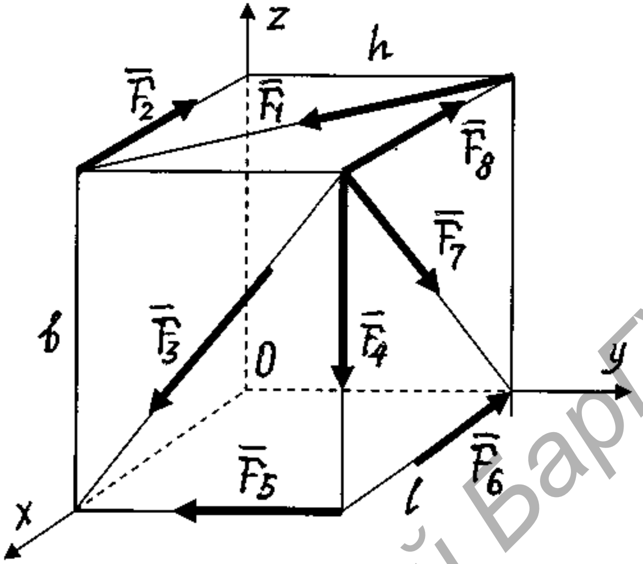


Рисунок 15

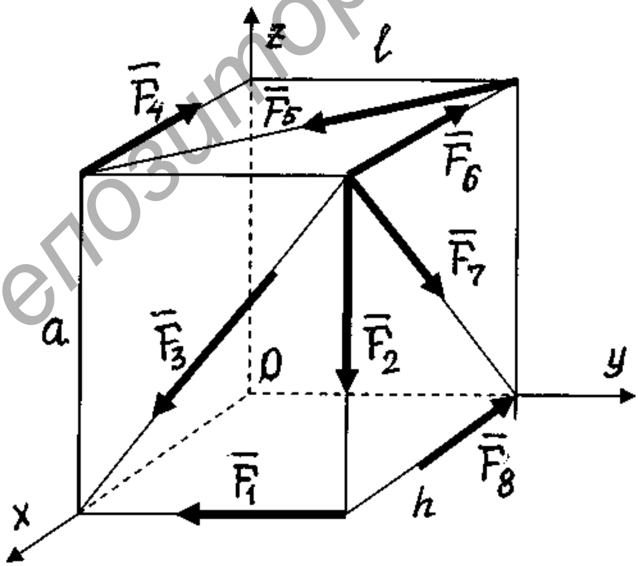
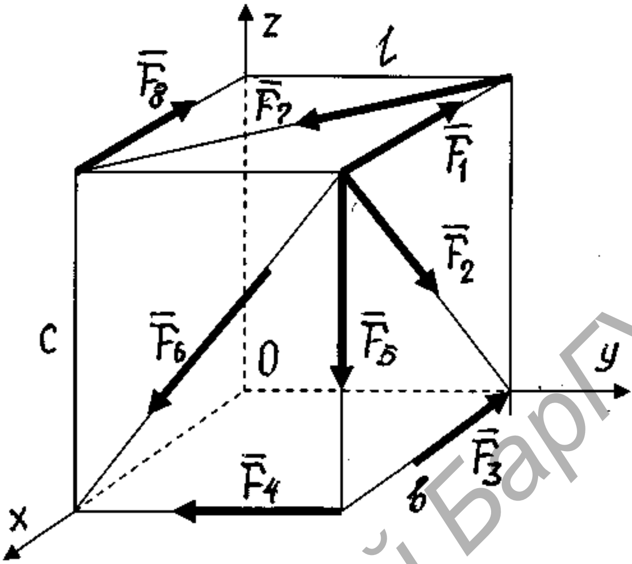
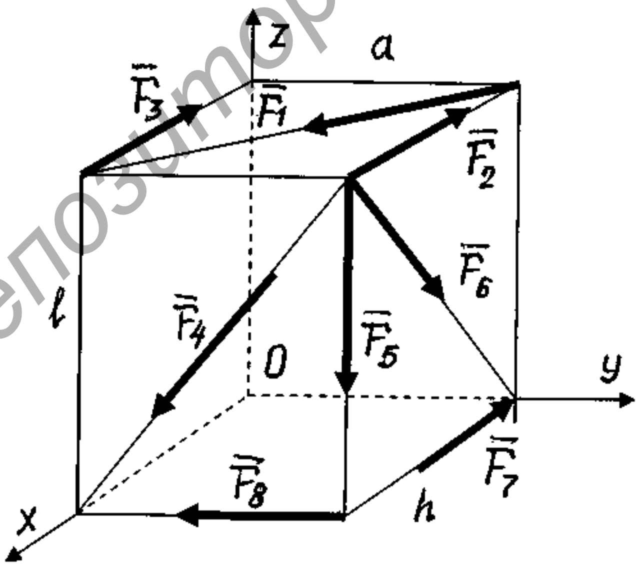


Рисунок 16



Рысунак 17



Рысунак 18

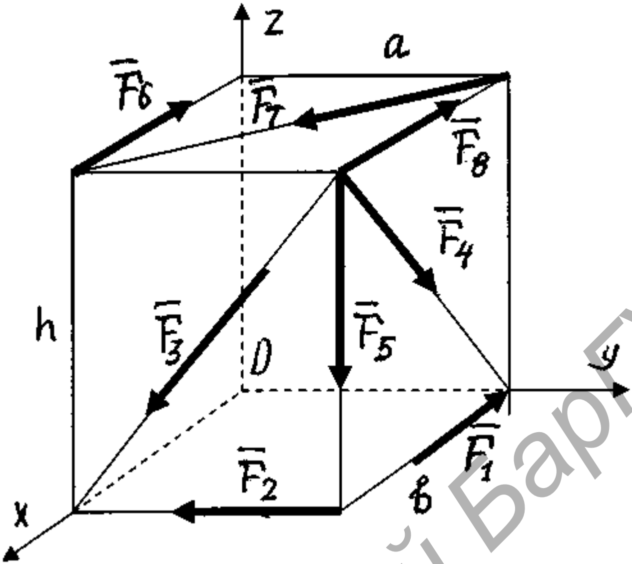


Рисунок 19

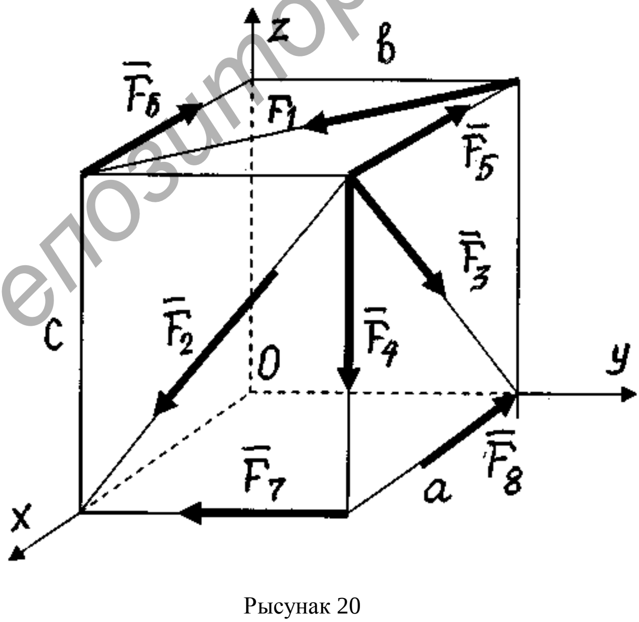
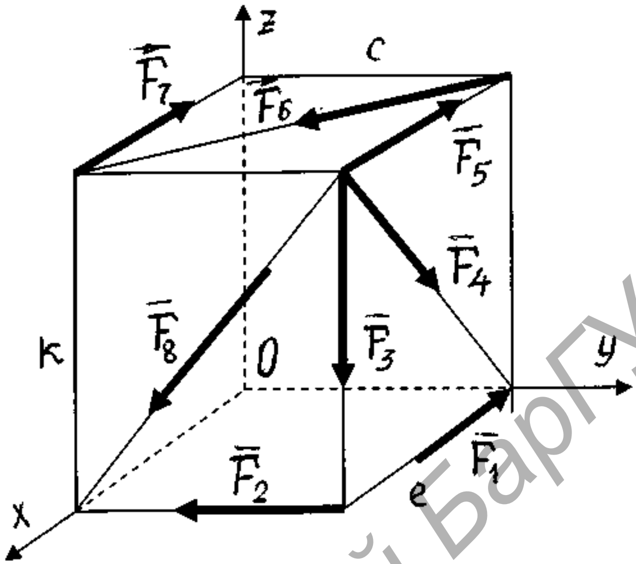
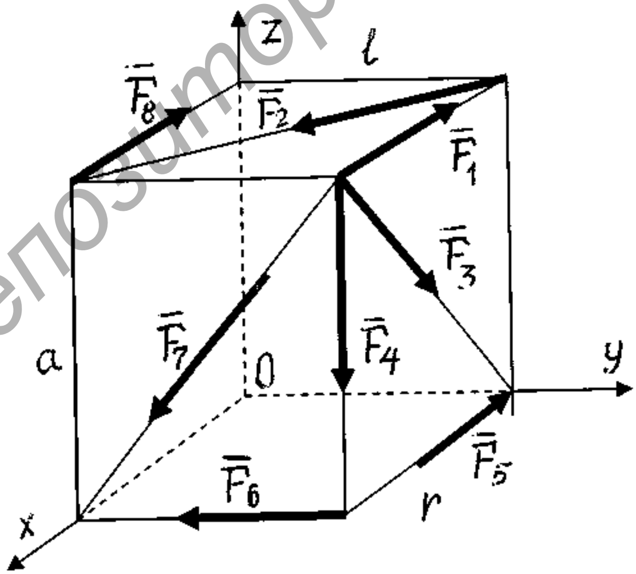


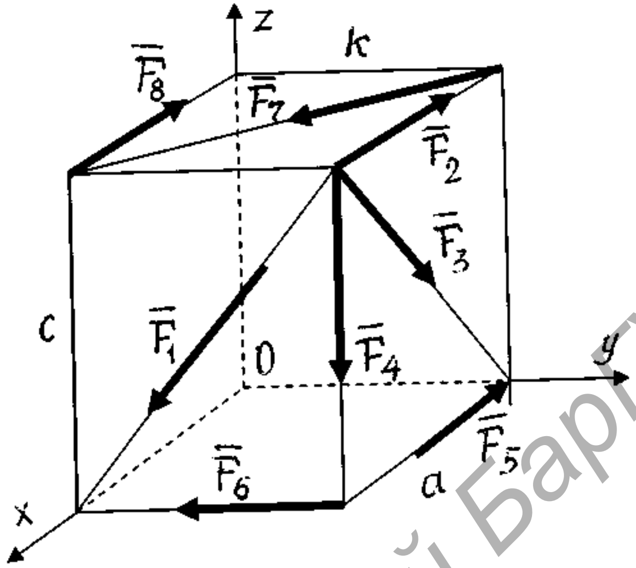
Рисунок 20



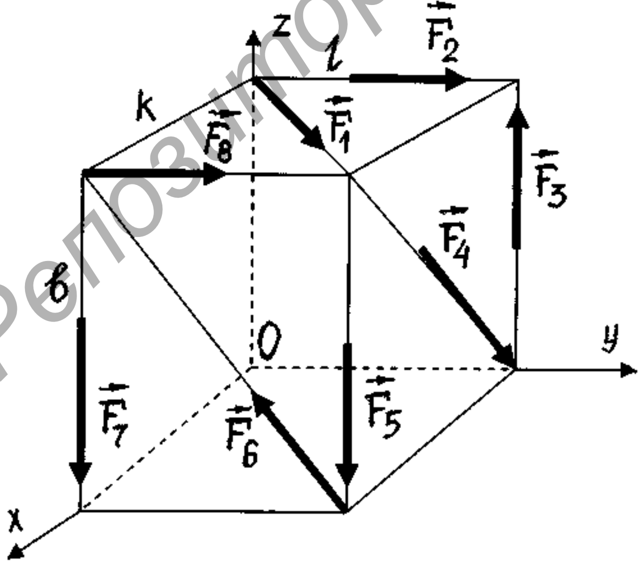
Рысунак 21



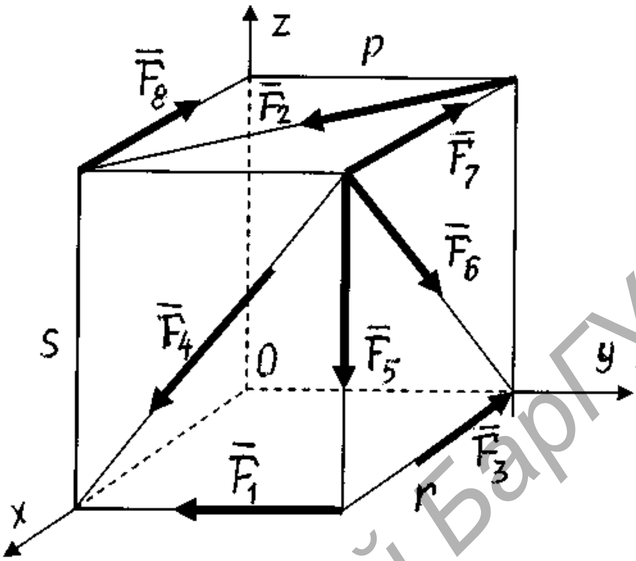
Рысунак 22



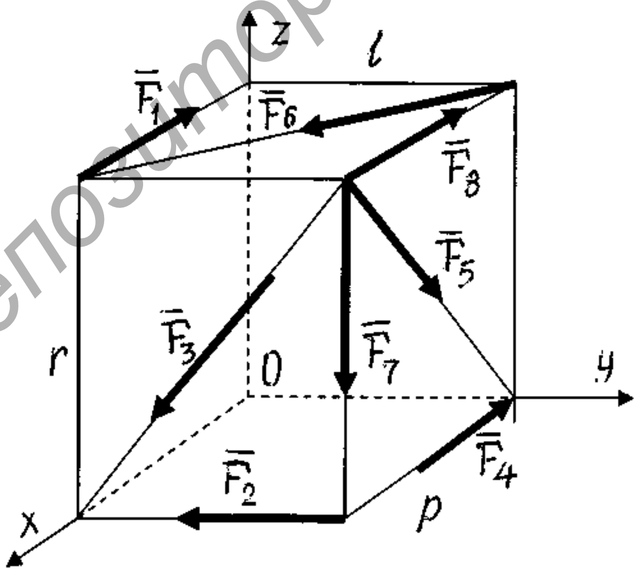
Рисунак 23



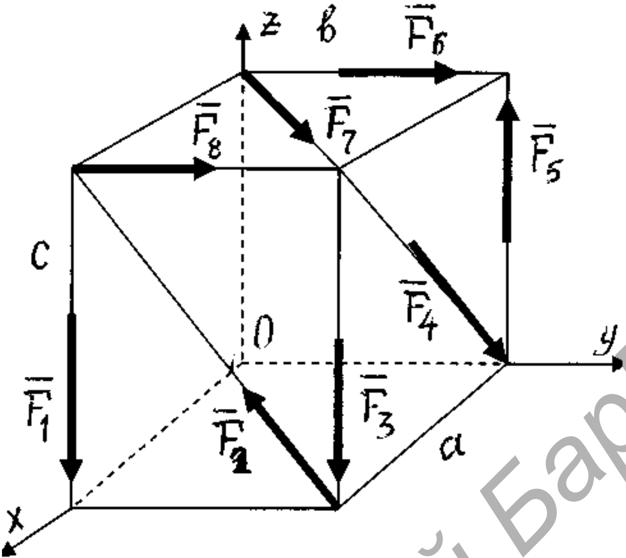
Рисунак 24



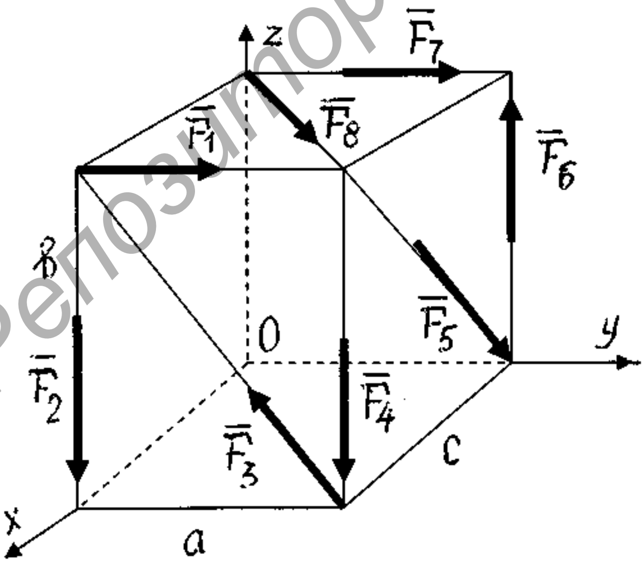
Рысунак 25



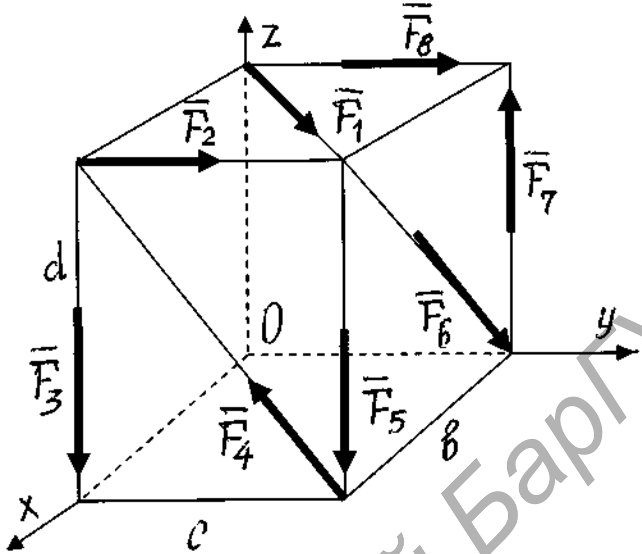
Рысунак 26



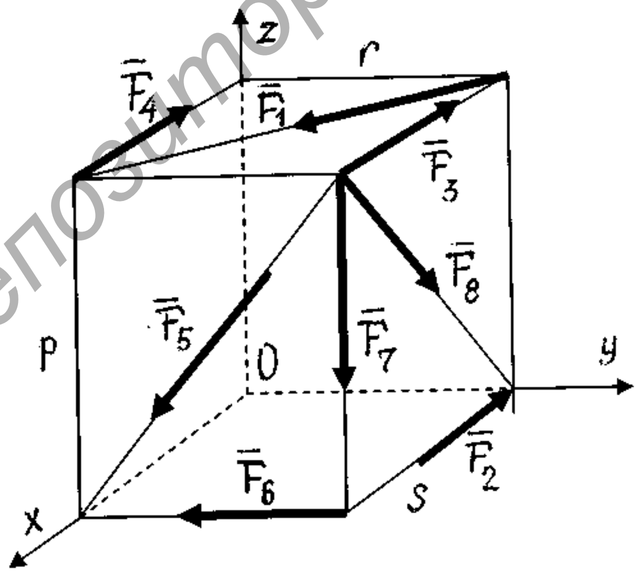
Рысунак 27



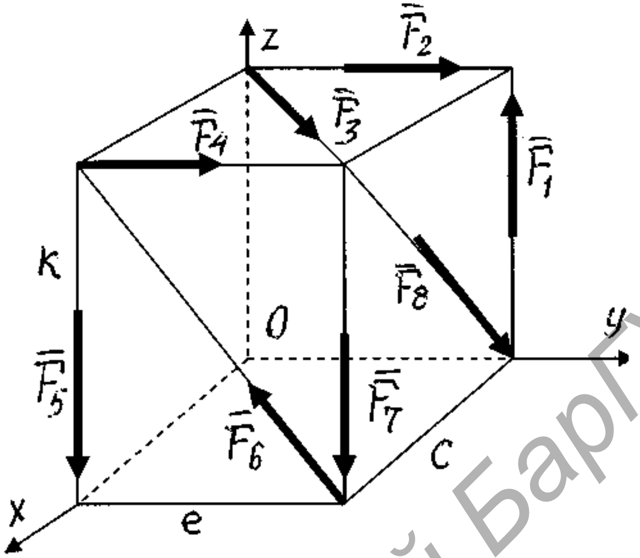
Рысунак 28



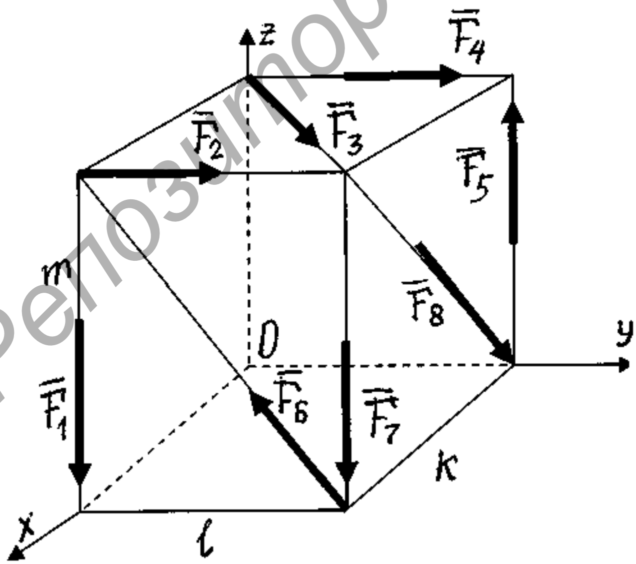
Рисунак 29



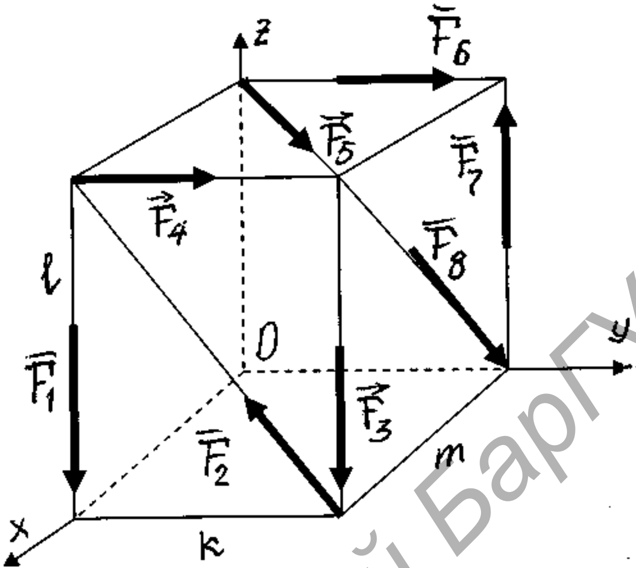
Рисунак 30



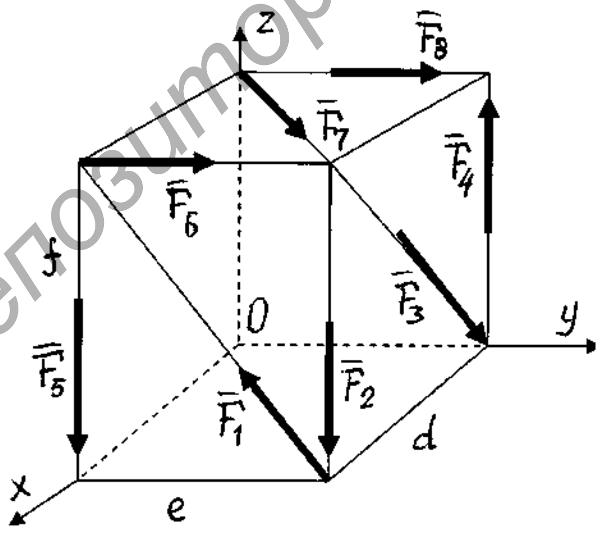
Рысунак 31



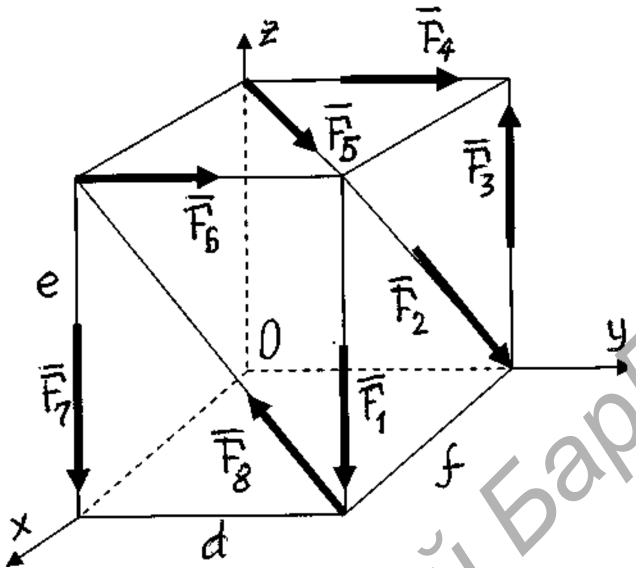
Рысунак 32



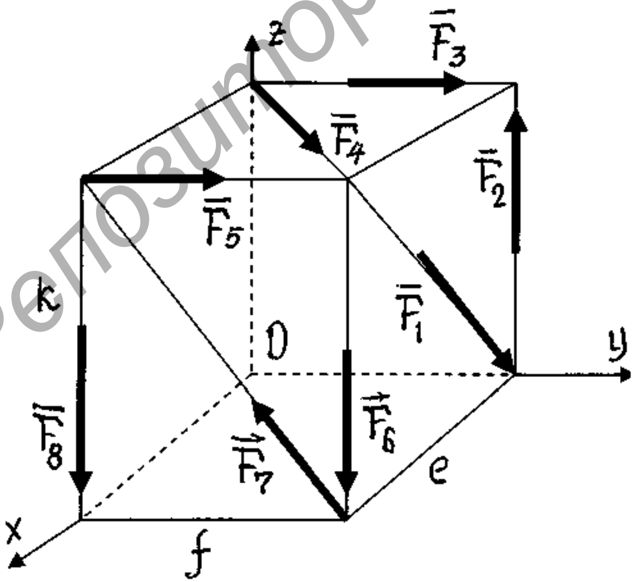
Рисунак 33



Рисунак 34



Рысунак 35



Рысунак 36

СПІС КРЫНІЦ

1. *Никитин, Н. Н.* Курс теоретической механики : учебник / Н. Н. Никитин. — М. : Высш. шк., 1990. — 607 с.
2. *Яблонский, А. А.* Курс теоретической механики : учебник : в 2 ч. / А. А. Яблонский. — М. : Высш. шк., 1977. — Ч. 1. — 368 с.
3. *Яблонский, А. А.* Курс теоретической механики : учебник : в 2 ч. / А. А. Яблонский, А. В. Никифорова. — М. : Высш. шк., 1977. — Ч. 2. — 432 с.
4. *Бутенин, Н. В.* Курс теоретической механики : учеб. пособие : в 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. — М. : Наука, 1970. — Т. 1. — 240 с.
5. *Лойцянский, Л. Г.* Курс теоретической механики : учеб. пособие / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. — М. : Наука, 1982. — 352 с.
6. *Тарг, С. М.* Краткий курс теоретической механики : учебник / С. М. Тарг. — М. : Высш. шк., 1995. — 415 с.

Вучэбнае выданне

Русан Сяргей Іванавіч

СТАТЫКА

ПРАЕКЦЫЯ І МОМАНТ СІЛЫ

Метадычныя рэкамендацыі
для аўдыторнай і самастойнай работы студэнтаў

Тэхнічны рэдактар *М. Л. Патапчык*
Камп'ютарная вёрстка *Н. В. Іванова*
Карэктар *В. М. Майсюк*

Адказны за выпуск *А. Г. Хахол*

Падпісана ў друк 06.05.2011.
Фармат 60 ✕ 84 1/16. Папера афсетная.
Гарнітура Таймс. Аддрукавана на рызографе.
Ум. друк. арк. 4,42. Ул.-выд. арк. 3,19.
Заказ 10. Тыраж 95 экз.

ЛВ 02330/0133486 ад 09.02.2010

Выдавец і паліграфічнае выкананне:
установа адукацыі
«Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт»,
225404, г. Баранавічы, вул. Войкава, 21.