

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
«БАРАНОВИЧСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

# **КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

**Методические указания и задания  
к лабораторным работам для студентов  
специальности 1-40 01 02  
Информационные системы и технологии**

**Барановичи  
РИО БарГУ  
2012**

УДК 004(076)  
ББК 32.81я73  
К63

Рекомендовано к печати методической комиссией  
инженерного факультета

С о с т а в и т е л ь

*О. И. Наранович*

Р е ц е н з е н т ы:

*Т. Р. Якубович*, кандидат физико-математических наук, доцент (БарГУ);  
*В. О. Гурин*, инженер-программист (ОАО «Атлант» БСЗ)

**Компьютерные методы математического моделирования**  
**К63** [Текст] : метод. указания и задания к лаб. работам для студентов специальности 1-40 01 02 Информационные системы и технологии / сост. О. И. Наранович. — Барановичи : РИО БарГУ, 2012. — 65, [3] с. : ил. — 196 экз.

Производственно-практическое издание включает лабораторные работы и руководство по их выполнению. Даются краткое описание вычислений, порядок выполнения и варианты индивидуальных заданий, а также контрольные вопросы.

Рекомендуется студентам специальности 1-40 01 02 Информационные системы и технологии.

Табл. 14. Рис. 13.

УДК 004(076)  
ББК 32.81я73

© БарГУ, 2012

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Введение</i> .....	4
<i>Лабораторная работа 1.</i> Решение систем линейных алгебраических уравнений прямыми и итерационными методами .....	5
<i>Лабораторная работа 2.</i> Аппроксимация и интерполирование функций .....	20
<i>Лабораторная работа 3.</i> Численное интегрирование и дифференцирование функций .....	36
<i>Лабораторная работа 4.</i> Численное решение задачи Коши .....	45
<i>Лабораторная работа 5.</i> Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка .....	52
<i>Лабораторная работа 6.</i> Решение задач теплопроводности .....	56
Список источников .....	67

## ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных областей применения персонального компьютера (ПК) являются математические и научно-технические расчеты. Сложные вычислительные задачи, возникающие при моделировании технических устройств и процессов, можно разбить на ряд элементарных: вычисление интегралов, решение уравнений, решение дифференциальных уравнений и т. д. Для таких задач уже разработаны методы решения, созданы математические системы, доступные для изучения студентами учреждений высшего образования.

Настоящее пособие содержит шесть лабораторных работ, охватывающих следующие разделы: решение систем линейных алгебраических уравнений, аппроксимация и интерполирование функций, интегрирование и дифференцирование функций, решение обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем, решение задач теплопроводности, сводящихся к уравнениям в частных производных.

Пособие представляет собой руководство к выполнению лабораторных работ по дисциплине «Компьютерные методы математического моделирования». Каждая лабораторная работа содержит краткое описание методов вычислений, примеры, снабженные необходимыми комментариями, порядок выполнения лабораторной работы и варианты индивидуальных заданий, контрольные вопросы для закрепления полученных знаний.

Цель методических указаний — научить пользоваться простейшими методами вычислений с использованием современных информационных технологий. Наиболее подходящей для этой цели является одна из самых мощных и эффективных математических систем — MathCad, которая занимает особое место среди множества таких систем (Matlab, Maple, Mathematica и др.). Mathcad остаётся единственной системой, в которой описание решения математических задач задаётся с помощью привычных математических формул и знаков. Она позволяет выполнять как численные, так и аналитические (символьные) вычисления, имеет чрезвычайно удобный математико-ориентированный интерфейс и прекрасные средства научной графики. Лабораторные работы также снабжены блок-схемами алгоритмов численных методов, которые помогут студентам при разработке компьютерных программных модулей.

Лабораторные работы выполняются на IBM-совместимых ПК класса Pentium-II, оснащённых программным продуктом Mathcad 6.0/PLUS 6.0/7 Pro и средами программирования.

Отчёт по каждой лабораторной работе должен содержать следующие материалы:

1. Постановка задачи.
2. Решение поставленной задачи.
3. Анализ полученных результатов.
4. Графический материал (если необходимо).
5. Тексты программ.
6. Выводы по работе.

# Лабораторная работа 1

## РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРЯМЫМИ И ИТЕРАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ

### Цели:

- изучить точные и приближенные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ);
- научиться разрабатывать алгоритмы реализации методов решения СЛАУ.

## 1 Основные теоретические сведения

### Прямые методы решения СЛАУ

#### Матричный метод

Системой из  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными называются соотношения вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \mathbf{KKKKKKKKKKKK} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1.1)$$

В этой системе  $x_i$  — неизвестные, подлежащие определению;  $a_{ij}$  — числа, называемые коэффициентами при неизвестных;  $b_i$  — числа, называемые свободными членами (или правыми частями).

Решением системы уравнений называется совокупность таких чисел  $x_1 = \dots, x_2 = \dots, \mathbf{K}, x_n = \dots$ , которая обращает все уравнения системы в тождества.

Если система линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной, иначе — несовместной.

Совместная система, имеющая единственное решение, называется определённой, а система, имеющая более одного решения — неопределённой.

Система линейных уравнений имеет очень компактную форму записи в матричном виде.

Составим из коэффициентов системы матрицу:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{K} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{K} & a_{2n} \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ a_{m1} & a_{m2} & \mathbf{K} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Определим ещё две матрицы:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \mathbf{M} \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \mathbf{M} \\ b_m \end{bmatrix},$$

тогда систему можно кратко записать в виде матричного уравнения:

$$AX = B.$$

Рассмотрим частный случай системы, когда число уравнений равно числу неизвестных ( $m = n$ ), тогда матрица  $A$  — квадратная. Если  $\det A \neq 0$ , то система имеет единственное решение. Действительно, в этом случае матрица  $A$  имеет обратную матрицу  $A^{-1}$ . Умножим обе части равенства  $AX = B$  слева на  $A^{-1}$ , получим  $A^{-1}AX = A^{-1}B$ . Но  $A^{-1}A = E$ , а  $EX = X$ , следовательно,  $X = A^{-1}B$ .

Это и есть формула матричного решения системы линейных уравнений. Выполнив матричные операции в правой части, получим численное решение системы.

Отметим, что  $B$  — матрица-столбец, и если  $B$  записана как строка, то при решении по формуле  $X = A^{-1}B$  матрицу  $B$  необходимо транспонировать, и формула матричного решения будет иметь вид:

$$X = A^{-1}B^T.$$

## Метод Гаусса

Этот метод является наиболее распространённым методом решения СЛАУ. В его основе лежит идея последовательного исключения неизвестных, приводящая исходную систему к треугольному виду, в котором все коэффициенты ниже главной диагонали равны нулю. Существуют различные вычислительные схемы, реализующие этот метод. Наибольшее распространение имеют схемы с выбором главного элемента либо по строке, либо по столбцу, либо по всей матрице. С точки зрения простоты реализации, хотя и с потерей точности, перед ними целесообразней применять так называемую схему единственного деления. Рассмотрим её суть.

Посредством первого уравнения системы (1.1) исключается  $x_1$  из последующих уравнений. Далее, посредством второго уравнения, исключается  $x_2$  из последующих уравнений и т. д. Этот процесс называется *прямым ходом Гаусса*. Исключение неизвестных повторяется до тех пор, пока в левой части последнего  $n$ -го уравнения останется одно неизвестное  $x_n$

$$a'_{nn}x_n = b', \quad (1.2)$$

где  $a'_{nn}$  и  $b'$  — коэффициенты, полученные в результате линейных (эквивалентных) преобразований.

Прямой ход реализуется по формулам:

$$\begin{aligned} a^*_{mi} &= a_{mi} - a_{ki} \frac{a_{mk}}{a_{kk}}, \quad k = \overline{1, n-1}; \quad i = \overline{k, n}; \\ b^*_m &= b_m - b_k \frac{a_{mk}}{a_{kk}}, \quad m = \overline{k+1, n}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $m$  — номер уравнения, из которого исключается  $x_k$ ;

$k$  — номер неизвестного, которое исключается из оставшихся  $(n - k)$  уравнений, а также обозначает номер уравнения, с помощью которого исключается  $x_k$ ;

$I$  — номер столбца исходной матрицы;

$a_{kk}$  — главный (ведущий) элемент матрицы.

Во время счёта необходимо следить, чтобы  $a_{kk} \neq 0$ . В противном случае прибегают к перестановке строк матрицы.

**Обратный ход метода Гаусса** состоит в последовательном вычислении  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ , начиная с уравнения (1.2) по алгоритму

$$x_n = b'_n / a'_{nn}$$

$$x_k = \frac{1}{a'_{kk}} \left[ b'_k - \sum_{i=k+1}^n a'_{ki} x_i \right], \quad k = \overline{n-1, 1}. \quad (1.4)$$

Точность полученного решения оценивается посредством невязки (1.5). В векторе невязки  $(r_1, r_2, \dots, r_n)^T$  отыскивается максимальный элемент и сравнивается с заданной точностью  $\varepsilon$ . Приемлемое решение будет, если  $r_{\max} < \varepsilon$ . В противном случае следует применить схему уточнения решения.

Существуют две величины, характеризующие степень отклонения полученного решения от точного, которые появляются в связи с округлением и ограниченностью разрядной сетки ЭВМ, — погрешность  $\varepsilon$  и невязка  $r$ :

$$\begin{cases} e = \bar{x} - \overline{x^*}; \\ r = \bar{B} - A \overline{x^*}; \end{cases} \quad (1.5)$$

где  $\overline{x^*}$  — вектор решения.

Как правило, значения вектора  $\bar{x}$  — неизвестны.

Доказано, что если  $\varepsilon \approx 0$ , то и  $r = 0$ . Обратное утверждение не всегда верно. Однако, если система неплохо обусловлена, для оценки точности решения используют невязку  $r$ .

### **Метод Гаусса с выбором главного элемента**

В данном случае, помимо соблюдения условия  $a_{kk} \neq 0$ , при реализации формул (1.2—1.4) необходимо, чтобы ведущий (главный) элемент в текущем столбце в процессе преобразований исходной

матрицы имел максимальное по модулю значение. Это также достигается перестановкой строк матрицы.

Блок-схема модифицированного метода Гаусса представлена на рисунке 1.1 [11].

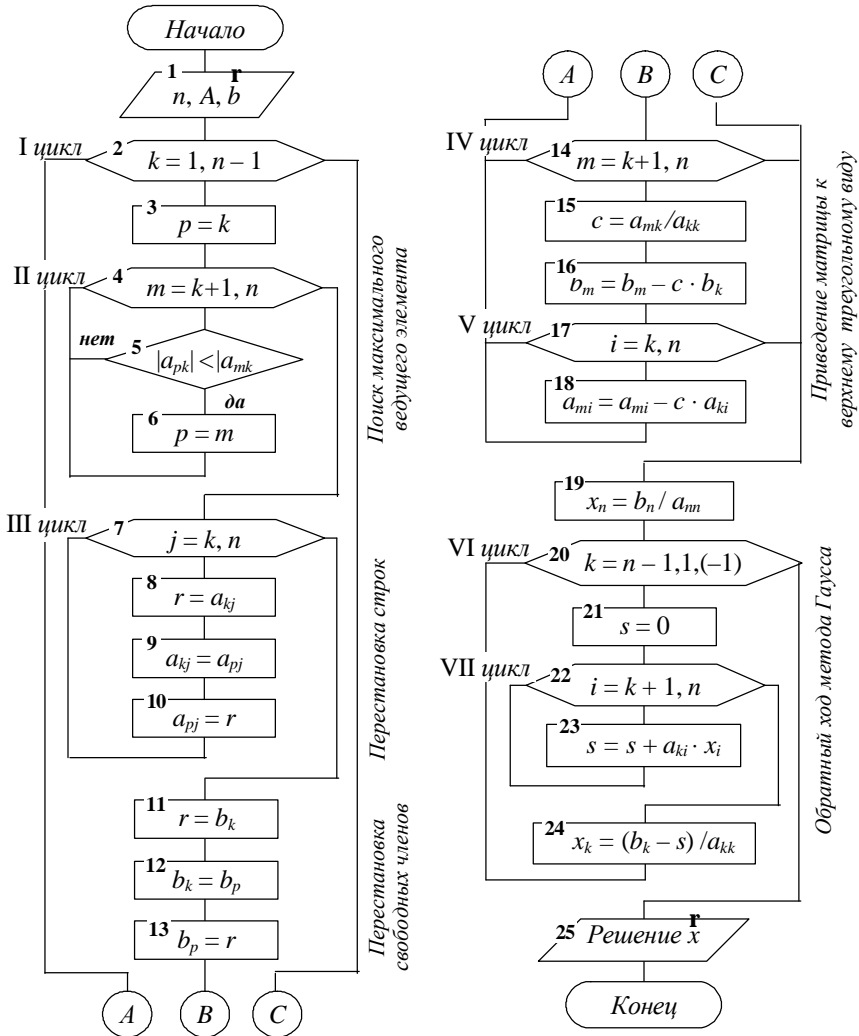


Рисунок 1.1 — Блок-схема модифицированного метода Гаусса

## Метод прогонки

Метод прогонки также является модификацией метода Гаусса для частного случая *разреженных* систем — систем с матрицей трёхдиагонального типа.

Каноническая форма их записи представлена формулой (1.6)

$$a_i x_i + b_i x_{i+1} + c_i x_{i+1} = d_i; \quad i = \overline{1, n}; \quad a_1 = c_n = 0, \quad (1.6)$$

или в развёрнутом виде:

$$\begin{cases} b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1; \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2; \\ a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 = d_3; \\ \dots \\ a_{n-1} x_{n-2} + b_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n = d_{n-1} \\ a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n. \end{cases} \quad (1.7)$$

При этом, как правило, все коэффициенты  $b_i \neq 0$ . Метод реализуется в два этапа — прямым и обратным ходами.

**Прямой ход.** Каждое неизвестное  $x_i$  выражается через  $x_{i+1}$ :

$$x_i = A_i x_{i+1} + B_i \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (1.8)$$

посредством прогоночных коэффициентов  $A_i$  и  $B_i$ . Определим алгоритм их вычисления. Для этого из первого уравнения системы (1.7) находим  $x_1$ :

$$x_1 = -\frac{c_1}{b_1} x_2 + \frac{d_1}{b_1}.$$

Из уравнения (1.8) при  $i = 1$  находим  $x_1 = A_1 x_2 + B_1$ . Следовательно,

$$A_1 = -\frac{c_1}{b_1}; \quad B_1 = \frac{d_1}{b_1}. \quad (1.9)$$

Из второго уравнения системы (1.7) определяем  $x_2$  через  $x_3$ , подставляя найденное значение  $x_1$ :

$$a_2 (A_1 x_2 + B_1) + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2,$$

откуда

$$x_2 = \frac{-c_2 x_3 + d_2 - a_2 B_1}{a_2 A_1 + b_2} \quad (1.10)$$

и согласно уравнению (1.8), при  $i = 2$   $x_2 = A_2 x_3 + B_2$ , следовательно:

$$A_2 = -\frac{c_2}{e_2}; \quad B_2 = \frac{d_2 - a_2 B_1}{e_2},$$

где  $e_2 = a_2 A_1 + b_2$ .

Ориентируясь на соотношения индексов при коэффициентах уравнений (1.9) и (1.10), можно получить эти соотношения для общего случая:

$$A_i = -\frac{c_i}{e_i}; \quad B_i = \frac{d_i - a_i B_{i-1}}{e_i},$$

где  $e_i = a_i A_{i-1} + b_i$  ( $i = 2, 3, \dots, n - 1$ ).

**Обратный ход.** Из последнего уравнения системы (1.7) с использованием данных выражения (1.8) при  $i = n - 1$  получаем формулу (1.11)

$$x_n = \frac{d_n - a_n B_{n-1}}{b_n + a_n A_{n-1}}. \quad (1.11)$$

Далее, посредством системы уравнений (1.7) и прогоночных коэффициентов выражений (1.8) и (1.9) последовательно вычисляем  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$ .

При реализации метода прогонки нужно учитывать, что при условии

$$|b_i| \geq |a_i| + |c_i| \quad (1.12)$$

или хотя бы для одного  $b_i$  имеет место строгое неравенство (1.12), деление на «0» исключается и система имеет единственное решение.

Заметим, что условие (1.12) является достаточным, но не необходимым. В ряде случаев для хорошо обусловленных систем (1.7) метод прогонки может быть устойчивым и при несоблюдении условия (1.12).

Схема алгоритма метода прогонки может иметь вид, представленный на рисунке 1.2 [11].

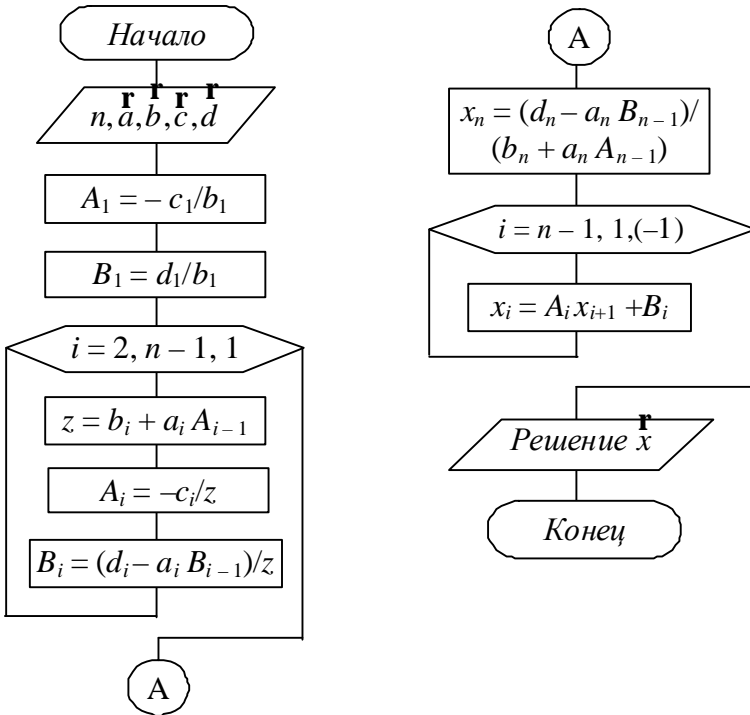


Рисунок 1.2 — Блок-схема метода прогонки

## Итерационные методы решения СЛАУ

### Метод простой итерации

Достоинством итерационных методов является их применимость к плохо обусловленным системам и системам высоких

порядков, самоисправляемость и простота реализации на ЭВМ. Итерационные методы для начала вычисления требуют задания какого-либо начального приближения к искомому решению.

Следует заметить, что условия и скорость сходимости итерационного процесса существенно зависят от свойств матрицы  $A$  системы и от выбора начальных приближений.

Для применения метода итераций исходную систему необходимо привести к итерационному виду

$$\bar{x} = G \bar{x} + \bar{f} \quad (1.13)$$

и затем итерационный процесс выполнить по рекуррентным формулам:

$$\bar{x}^{(k+1)} = G \bar{x}^{(k)} + \bar{f}, \text{ при } k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.13^*)$$

Матрица  $G$  и вектор  $\bar{f}$  получены в результате преобразования исходной системы.

Для сходимости метода (1.13\*) необходимо и достаточно, чтобы  $|\lambda_i(G)| < 1$ , где  $\lambda_i(G)$  — все собственные значения матрицы  $G$ . Сходимость будет и в случае, если  $\|G\| < 1$ , либо  $|\lambda_i(G)| < \forall \|G\|$ , где  $\forall$  — любой.

Символ  $\|\dots\|$  означает норму матрицы. При определении её величины чаще всего останавливаются на проверке двух условий:

$$\|G\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |g_{ij}| \text{ или } \|G\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |g_{ij}|, \quad (1.14)$$

где  $G = \{g_{ij}\}_1^n$ . Сходимость гарантирована также, если исходная матрица  $A$  имеет диагональное преобладание, т. е.

$$|a_{ii}| > \sum_{i,j=1; i \neq j}^n |a_{ij}|, \quad A = \{a_{ij}\}_1^n. \quad (1.15)$$

Когда условия (1.14) или (1.15) выполняются, метод итерации сходится при любом начальном приближении  $\bar{x}^{(0)}$ . Чаще всего

вектор  $\bar{x}^{(0)}$  беруг или нулевым, или единичным, или сам вектор  $\bar{f}$  из системы (1.13).

Если выполняется условие (1.15), тогда преобразование к итерационному виду (1.13) можно осуществить просто, решая каждое  $i$ -е уравнение системы (1.1) относительно  $x_i$  по следующим рекуррентным формулам:

$$x_i^k = -\frac{1}{a_{ii}} \left[ \sum_{j=1; j \neq i}^n a_{ij} x_j^{k-1} - b_i \right] = \sum_{j=1}^n g_{ij} x_j^{k-1} + f_i;$$

$$g_{ij} = -a_{ij} / a_{ii}; \quad g_{ii} = 0; \quad f_i = b_i / a_{ii}, \quad (1.15^*)$$

т. е.  $G = \{ g_{ij} \}_1^n$ .

Если же в матрице  $A$  нет диагонального преобладания, его нужно добиться посредством каких-либо её линейных преобразований, не нарушающих их равносильности.

### **Метод Зейделя**

Метод Зейделя является модификацией метода простой итерации и для системы (1.13)  $\bar{x} = G\bar{x} + \bar{f}$  имеет следующую технологию:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= g_{11}x_1^k + \dots + g_{1n}x_n^k + f_1; \\ x_2^{(k+1)} &= g_{21}x_1^{(k+1)} + \dots + g_{2n}x_n^{(k)} + f_2; \\ x_3^{(k+1)} &= g_{31}x_1^{(k+1)} + \dots + g_{3n}x_n^{(k)} + f_3; \\ &\dots \\ x_n^{(k+1)} &= g_{n1}x_1^{(k+1)} + \dots + g_{nm}x_n^{(k)} + f_n. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Суть его состоит в том, что при вычислении очередного приближения  $x_i^{(k)}$  ( $2 \leq i \leq n$ ) в системе (1.16) и в формуле (1.15\*), если имеет место соотношение (1.15), вместо  $x_i^{k-1}, \dots, x_{i-1}^{k-1}$  используются

уже вычисленные ранее  $x_1^k, \dots, x_{i-1}^k$ , т. е. формула (1.15\*) преобразуется к виду

$$x_i^k = \sum_{j=1}^{i-1} g_{ij} x_j^k + \sum_{j=i+1}^n g_i x_j^{k-1} + f_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Это позволяет ускорить сходимость итераций почти в два раза. Оценка точности аналогична методу простой итерации. Схема алгоритма аналогична схеме метода простой итерации, если  $x_0$  заменить на  $x$  и убрать строки  $x_0 = 1, x_0 = x$ .

## Решение СЛАУ средствами MathCad

ORIGIN := 1 - нумерация массивов начинается с единицы

$$A := \begin{bmatrix} 15 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 16 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 17 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 18 \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} 13 \\ -1 \\ 17 \\ -50 \end{bmatrix}$$

$$x := \text{Isolve}(A, b) \quad x = \begin{bmatrix} 1.452991453 \\ 0.3760683761 \\ 1.7606837607 \\ -3.3931623932 \end{bmatrix} \quad \text{- решение системы } Ax=b, \text{ полученное с помощью встроенной функции Isolve}$$

Преобразование системы  $Ax=b$  к виду  $x=Bx+c$ , удобному для итераций

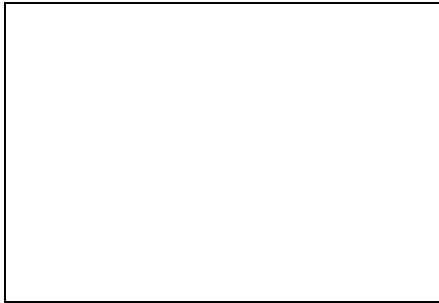
$$PB(A, n) := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \text{for } j \in 1..n \\ \quad \quad B_{i,j} \leftarrow 0 \text{ if } i=j \\ \quad \quad B_{i,j} \leftarrow \frac{-A_{i,j}}{A_{i,i}} \text{ if } i \neq j \end{array} \right\| B$$

$$Pc(A, b, n) := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ c_i \leftarrow \frac{b_i}{A_{i,i}} \end{array} \right\| c$$

$$B := PB(A, 4)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -0.2 & -0.2666666667 & -0.3333333333 \\ -0.125 & 0 & -0.25 & -0.3125 \\ -0.1176470588 & -0.1764705882 & 0 & -0.2941176471 \\ -0.1111111111 & -0.1666666667 & -0.2222222222 & 0 \end{bmatrix}$$

Проверка достаточного условия сходимости метода Зейделя



Достаточное условие выполнено.

#### Метод Зейделя

входные параметры:

$B$  и  $c$  - матрица  $B$  и вектор правой части  $c$  системы  $x=Bx+c$ ;

$n$  - порядок матрицы  $B$ ;

$k$ - число итераций;

$x_0$  - вектор начального приближения.

Функция `zeid` возвращает двумерный массив размерности  $k \times n$ ;  $i$ -ая строка которого это  $i$ -ое приближение.

```

zeid(B, c, n, k, x0) := | y ← x0
                        | for m ∈ 1..k
                        |   x ← y
                        |   for i ∈ 1..n
                        |     u ← 0
                        |     j ← 1
                        |     while 1 ≤ j < i
                        |       | u ← u + Bi,j · yj
                        |       | j ← j + 1
                        |     j ← i + 1
                        |     while i < j ≤ n
                        |       | u ← u + Bi,j · xj
                        |       | j ← j + 1
                        |     yi ← u + ci
                        |   for i ∈ 1..n
                        |     rezm,i ← yi
                        | rez

```

Начальное приближение:

$$x_0 := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1.2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Результат работы функции zeid — 10 первых приближений

	1	2	3	4
1	0.08	-0.9975	0.5783823529	-2.7489460784
2	1.828246732	0.4234192198	1.5187046629	-3.3889760986
3	1.5066536121	0.4285471636	1.7438783399	-3.4041367819
4	1.4506352706	0.3839937506	1.7627901245	-3.3946895717
y = 5	1.4513537406	0.3762237425	1.7612981853	-3.3931428583
6	1.4527900215	0.3759338442	1.7607254539	-3.3931268551
7	1.4529953951	0.3760463543	1.7606767307	-3.3931575987
8	1.4529961338	0.3760680502	1.7606818574	-3.393162436
9	1.45299204	0.3760687919	1.7606836308	-3.3931624988
10	1.4529914397	0.3760684432	1.7606837815	-3.3931624075

Абсолютная погрешность:

$$i := 1..4 \quad d_i := |y_{10,i} - x_i| \quad \max(d) = 6.7149530214 \cdot 10^{-8}$$

## 2 Индивидуальные задания

1. Разработайте алгоритмы и решите систему линейных уравнений (табл. 1.1)  $Ax = b$  методами: а) матричным (MathCad); б) Гаусса с выбором главного элемента; в) простых итераций (MathCad); г) Зейделя. Проанализируйте полученные результаты с точки зрения сходимости (расходимости) метода. Итерационными методами решение задачи найдите с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

*Указание.* Для выполнения достаточного условия сходимости воспользуйтесь перестановкой строк в исходной системе уравнений.

Таблица 1.1 — Варианты индивидуального задания 1

Номер варианта	A				b	Номер варианта	A				b
1	3	12	-1	0	18	11	1	-2	16	0	31
	-5	2	0	32	-15		10	-1	0	1	0
	2	0	16	-3	0		0	12	1	-1	-28
	12	3	0	0	21		0	2	0	16	29
2	4	20	1	0	24	12	2	20	-3	0	39
	16	2	0	-2	-13		4	-2	0	24	0
	-4	0	4	32	0		0	2	16	-1	-25
	2	0	10	0	7		12	0	0	3	18
3	2	16	-3	0	9	13	2	16	-1	0	32
	-8	5	0	40	98		3	-8	0	60	-64
	25	0	-2	3	5		4	0	24	-3	0
	0	-3	20	0	-7		12	3	0	0	45
4	5	-2	32	0	27	14	5	-2	40	0	39
	4	25	0	-3	34		4	32	0	-6	0
	20	0	2	-7	-28		7	0	3	32	21
	0	0	-9	40	5		20	0	4	0	-19
5	-7	2	40	0	21	15	5	30	-3	0	17
	9	-5	0	50	-14		-8	5	0	40	31
	25	0	4	-1	13		24	0	3	-4	39
	0	32	0	9	21		0	7	25	0	8
6	8	40	-3	0	28	16	4	2	32	0	-19
	-7	5	0	50	0		2	30	0	-4	39
	8	0	64	-11	18		36	0	4	-5	40
	32	0	0	5	12		0	0	11	40	31
7	-9	4	64	0	24	17	4	-5	40	0	19
	10	50	0	-4	-5		10	-4	0	50	0
	0	-14	7	80	14		32	0	4	-4	34
	40	9	0	0	29		0	32	0	-9	-49
8	-8	64	5	0	37	18	9	40	2	0	81
	50	-13	0	2	38		12	-4	0	96	119
	0	17	-9	100	0		-4	0	64	8	-15
	-11	0	80	0	115		36	0	0	9	7
9	-13	80	2	0	64	19	7	-5	64	0	18
	64	9	0	-5	29		9	50	0	-4	0
	0	12	-9	128	0		0	9	-7	80	128
	0	27	100	0	231		40	11	0	0	-19
10	-13	100	9	0	-128	20	11	64	-2	0	-34
	80	10	0	-5	34		50	3	0	-12	0
	0	-14	128	7	95		0	13	-9	100	131
	0	0	31	256	-69		17	0	80	0	85

Окончание табл. 1.1

Номер варианта	A				b	Номер варианта	A				b
21	15	80	-4	0	93	26	9	-2	36	0	19
	64	7	0	-5	131		4	25	0	-3	-18
	0	11	-8	128	-34		40	0	5	-4	44
	0	37	100	0	125		0	0	11	40	21
22	17	100	-9	0	0	27	9	-2	40	0	78
	80	-7	0	-5	-79		11	-3	0	50	-114
	0	21	128	-4	139		30	0	-4	5	-21
	0	0	19	256	-54		0	32	0	8	40
23	4	-1	20	0	38	28	2	40	5	0	42
	18	3	0	-2	-14		4	-9	0	72	88
	0	10	1	-1	15		4	0	64	8	119
	0	4	0	20	29		36	0	0	9	54
24	3	20	-2	0	41	29	8	-3	64	0	131
	5	-4	0	20	-19		-7	50	0	5	-84
	0	5	32	-3	34		0	12	-9	80	52
	12	0	0	3	29		40	9	0	0	78
25	4	25	-1	0	17	30	7	64	-2	0	111
	6	5	0	40	0		50	5	0	-8	98
	25	0	3	4	-34		0	18	5	112	219
	0	-5	30	0	9		15	0	80	0	-31

2. Дана система уравнений  $Ax = b$  порядка  $n$  с разреженной матрицей  $A$ . Разработайте проект решения системы (табл. 1.2) методом прогонки.

Указание. Предусмотрите компактное размещение элементов матрицы в памяти ЭВМ.

Т а б л и ц а 1.2 — Варианты индивидуального задания 2

Номер варианта	n	A	$b_i, i = 1, \dots, n$
1	50	На главной диагонали элементы равны 1000, на первой наддиагонали элементы равны 1, на третьей наддиагонали элементы равны 1, на первой поддиагонали элементы равны 1	$b_i = i \cdot e^{\frac{18}{i}}$
2	35	На главной диагонали элементы равны 100, на первой, второй и третьей наддиагоналях элементы равны 1, на первой поддиагонали элементы равны 1	$b_i = i \cdot e^{\frac{22}{i}} \sin\left(\frac{9}{i}\right)$
	40	На главной диагонали элементы равны 100, на первой и второй наддиагоналях элементы равны 1, на второй поддиагонали элементы равны 3	$b_i = i \cdot e^{\frac{10}{i}}$

Окончание табл. 1.2

Номер варианта	$n$	$A$	$b_i, i = 1, \dots, n$
4	50	на главной диагонали элементы равны 100, на первой наддиагонали элементы равны 1, на первой поддиагонали элементы равны 2, $a_{1, n-1} = a_{2, n} = 1$ .	$b_i = i \cdot e^{\frac{10}{i}} \cos\left(\frac{9}{i}\right)$
5	40	На главной диагонали элементы равны 100, на первой наддиагонали элементы равны 2, на первой и второй поддиагоналях элементы равны 7	$b_i = i \cdot e^{\frac{10}{i}}$
6	30	На главной диагонали элементы равны 100, на первой наддиагонали элементы равны 47, на двадцатой наддиагонали равны 1, на первой поддиагонали равны 47, на двадцатой поддиагонали равны 1	$b_i = i \cdot e^{\frac{22}{i}}$

### Контрольные вопросы

1. Метод Гаусса с выбором главного элемента: описание метода, его вычислительная устойчивость.
2. Метод прогонки с трёхдиагональной матрицей: описание метода, условия его применимости и достоинства.
3. В чём заключается трудоёмкость метода прогонки?
4. Какие вам известны итерационные методы решения СЛАУ?

## Лабораторная работа 2 АППРОКСИМАЦИЯ И ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

### Цели:

- изучить методы аппроксимации и интерполирования функций;
- научиться разрабатывать программные модули по предложенным алгоритмам.

## 1 Основные теоретические сведения

### Постановка задачи и методы её решения

Пусть функция  $f(x)$  задана таблично либо вычисление её требует громоздких выкладок. Заменяем приближенно функцию  $f(x)$  на какую-либо функцию  $F(x)$  так, чтобы отклонение  $f(x)$  от  $F(x)$  было

в заданной области в некотором смысле минимальным. Подобная замена называется аппроксимацией функции  $f(x)$ , а функция  $F(x)$  — аппроксимирующей (приближающей) функцией.

Классический подход к решению задачи построения приближающей функции основывается на требовании строгого совпадения значений  $f(x)$  и  $F(x)$  в точках  $x_i$  ( $i=0, 1, 2, \dots, n$ ), т. е.  $F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_n) = y_n$ . В этом случае нахождение приближенной функции называют интерполяцией (или интерполированием), точки  $x_0, x_1, \dots, x_n$  — узлами интерполяции.

### Аппроксимация функции методом наименьших квадратов

В результате эксперимента были получены следующие данные:

$x$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$y$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	...	$y_n$

Аналитическая зависимость  $y_i = f(x_i)$  неизвестна. **Задача аппроксимации** сводится к определению свободного параметра функции заданного вида, который обеспечит наилучшее приближение функции, заданной таблично, к модельной аналитической функции.

Для этого построим аппроксимационный многочлен вида:

$$P_m = \sum_{n=0}^m a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n.$$

Коэффициенты  $a_0 \dots a_n$  определяются по методу наименьших квадратов. Функционал  $S$  рассчитывают по формуле

$$S = \sum_{i=1}^n [P(x_i) - y_i]^2 \rightarrow 0.$$



**Пример.** Нахождение значения  $y = f(x)$  при  $x = 0,4$ , заданной таблицно:

$i$	0	1	2	3
$x_i$	0	0,1	0,3	0,5
$y_i$	-0,5	0	0,2	1

## Локальная интерполяция

### Линейная интерполяция

$$y = a_i x + b_i;$$

$$a_i = (y_i - y_{i-1}) / (x_i - x_{i-1}), \quad b_i = y_{i-1} - a_i x_{i-1};$$

$$x_i = 0,4, \quad 0,3 \leq x_i \leq 0,5; \quad x_{i-1} = 0,3; \quad x_i = 0,5;$$

$$y_{i-1} = 0,2, \quad y_i = 1;$$

$$a_3 = (1 - 0,2) / (0,5 - 0,3) = 0,8 / 0,2 = 4; \quad b_3 = -1;$$

$$y = 4x - 1, \quad \text{при } x = 0,4, \quad y = 4 \cdot 0,4 - 1 = 0,6.$$

### Квадратичная интерполяция

$$y = a_i x^2 + b_i x + c_i.$$

Выбираем три ближайшие точки к  $x_i = 0,4$ :

$$x_{i-1} = 0,1; \quad x_i = 0,3; \quad x_{i+1} = 0,5.$$

$$y_{i-1} = 0; \quad y_i = 0,2; \quad y_{i+1} = 1.$$

$$\left. \begin{aligned} a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i &= y_{i-1}, \\ a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i &= y_i, \\ a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i &= y_{i+1}. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 0,01a_i + 0,1b_i + c_i = 0, \\ 0,09a_i + 0,3b_i + c_i = 0,2, \\ 0,25a_i + 0,5b_i + c_i = 1. \end{cases}$$

$$A = \begin{vmatrix} 0,01 & 0,1 & 1 \\ 0,09 & 0,3 & 1 \\ 0,25 & 0,5 & 1 \end{vmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0,2 \\ 1 \end{vmatrix}; \quad \bar{X} = \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = A^{-1} \bar{B}.$$

$$\text{Найдём } A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{75}{6} & -\frac{75}{3} & \frac{25}{2} \\ -10 & \frac{45}{3} & -5 \\ \frac{15}{8} & -\frac{10}{8} & \frac{3}{8} \end{vmatrix};$$

$$\overline{X} = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{75}{6} & -\frac{75}{3} & \frac{25}{2} \\ -10 & \frac{45}{3} & -5 \\ \frac{15}{8} & -\frac{10}{8} & \frac{3}{8} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0,2 \\ 1 \end{vmatrix};$$

$$a = 0 - \frac{75}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{25}{2} = 7,5; \quad b = -2; \quad c = 0,125;$$

$$y = 7,5x^2 - 2x + 0,125; \quad \text{при } x = 0,4; \quad y = 0,525.$$

## Глобальная интерполяция

### *Интерполяционный многочлен Лагранжа:*

$$L(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j};$$

$$\begin{aligned} L(x) &= \sum_{i=0}^3 y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^3 \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + \\ &+ y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \\ &+ y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_0)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \\ &= \frac{125}{3} x^3 - 30x^2 + \frac{91}{12} x - 0,5 \end{aligned}$$

$$\text{при } x = 0,4, \quad y \approx L(x) = 0,3999.$$

Найдём выражение полинома Лагранжа для данной таблицы при  $n = 1$  и для  $x_T = 0,4$ :

$$L(x) = \sum_{i=0}^1 y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^1 \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = 0,2 \frac{x - 0,5}{0,3 - 0,5} + 1 \frac{(x - 0,3)}{(0,5 - 0,3)} =$$

$$= 5x - 1,5 - x + 0,5 = 4x - 1.$$

Для  $n = 2$  при  $x_T = 0,4$   $y \approx L(x) = \sum_{i=0}^2 y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^2 \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$

Для рассматриваемого интервала  $[x_1, x_3]$  берём  $x_0 = 0,1$ ;  $x_1 = 0,3$ ;  $x_2 = 0,5$ ;  $y_0 = 0$ ;  $y_1 = 0,2$ ;  $y_2 = 1$ . Тогда

$$y \approx L(x) = 0,2 \frac{(x - 0,1)(x - 0,5)}{(0,3 - 0,1)(0,3 - 0,5)} + 1 \frac{(x - 0,1)(x - 0,3)}{(0,5 - 0,1)(0,5 - 0,3)} = 7,5x^2 - 2x + 0,125.$$

Алгоритм расчёта интерполяционного многочлена Лагранжа, реализованный в виде функции *PL* с параметрами:

$x_T$  — значение текущей точки;

$\overset{\cdot}{x}$ ,  $\overset{\cdot}{y}$  — одномерные массивы известных значений  $x$  и  $f(x)$ ;

$n$  — размер массивов  $\overset{\cdot}{x}$ ,  $\overset{\cdot}{y}$

представлен на рисунке 2.1 [11].

В схеме введены следующие обозначения:

$p$  — значение накапливаемой суммы, результат которой равен  $L(x_T)$ ;

$e$  — значение очередного члена произведения;

Результатом функции *PL* является значение  $p$ .

### ***Интерполяционный многочлен Ньютона***

Для случая неравностоящих узлов и  $n = 3$

$$N_3(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f(x_0, x_1, x_2, x_3).$$

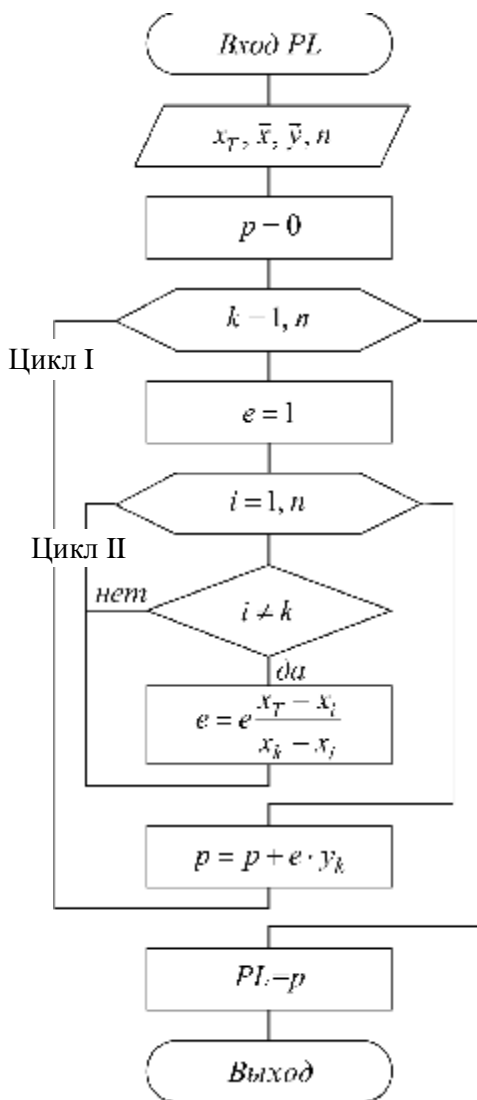


Рисунок 2.1 — Схема расчёта интерполяционного многочлена Лагранжа

Рассчитаем разделенные разности

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{0 - (-0,5)}{0,1} = 5;$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{0,2 - 0}{0,3 - 0,1} = 1;$$

$$f(x_2, x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{1 - 0,2}{0,5 - 0,3} = 4;$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{1 - 5}{0,3 - 0} = -\frac{40}{3};$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1} = \frac{4 - 1}{0,5 - 0,1} = \frac{15}{2};$$

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_1, x_2, x_3) - f(x_0, x_1, x_2)}{x_3 - x_0} = \frac{\frac{15}{2} + \frac{40}{3}}{0,5} = \frac{125}{3}.$$

Получим интерполяционный многочлен Ньютона:

$$\begin{aligned} N_3(x) &= -0,5 + (x - 0) 5 + (x - 0)(x - 0,1)\left(-\frac{40}{3}\right) + (x - 0)(x - 0,1) \times \\ &\times (x - 0,3) \frac{125}{3} = \frac{125}{3} x^3 - 30x^2 + \frac{91}{12} x - 0,5. \end{aligned}$$

Напомним, что расчёты выполняются по формуле

$$N_{n-1}(x_T) = y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (x_T - x_1)(x_T - x_2) \dots (x_T - x_k) \Delta_1^k,$$

где  $x_T$  — текущая точка, в которой надо вычислить значение многочлена;

$\Delta_1^k$  — разделенные разности порядка  $k$ , которые вычисляются по следующим рекуррентным формулам:

$$\Delta_i^1 = \frac{y_i - y_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, \quad i = 1, \dots, (n-1);$$

$$\Delta_i^2 = \frac{\Delta_i^1 - \Delta_{i+1}^1}{x_i - x_{i+2}}, \quad i = 1, \dots, (n-2);$$

$$\Delta_i^k = \frac{\Delta_i^{k-1} - \Delta_{i+1}^{k-1}}{x_i - x_{i+k}}, \quad i = 1, \dots, (n-k).$$

Схема алгоритма расчёта многочлена Ньютона, реализованная в виде функции  $PN$  с параметрами, значения которых аналогичны рассмотренной ранее функции  $PL$ , представлена на рисунке 2.2 [11].

Результатом функции  $PN$  является значение  $N$ .

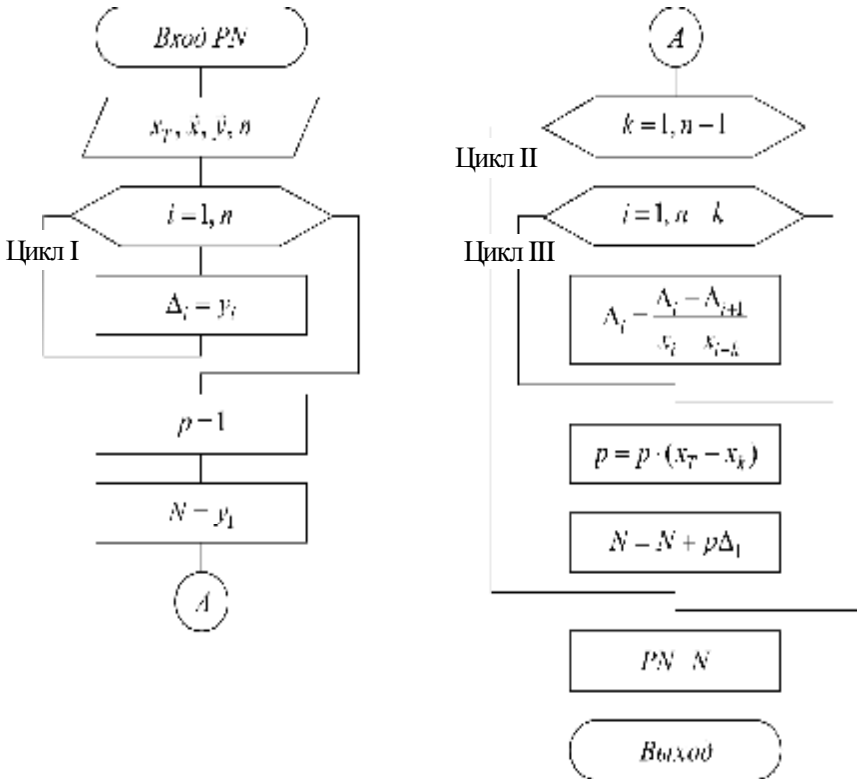


Рисунок 2.2 — Схема расчёта многочлена Ньютона

Часто интерполирование ведётся для функций, заданных таблицами с равноотстоящими значениями аргумента  $x$ . В этом случае шаг таблицы  $h = x_{i+1} - x_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) является величиной постоянной. Для подобных таблиц построение интерполяционных формул заметно упрощается:

$$P_2(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0, \quad (2.2)$$

где  $t = \frac{x - x_0}{h}$ .

Формула (2.2) называется первой интерполяционной формулой Ньютона. Если вычисляемое значение переменной ближе к концу отрезка  $[a; b]$ , то применяют вторую формулу Ньютона (2.3) — интерполирование назад:

$$P_n(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3}, \quad (2.3)$$

где  $t = \frac{x - x_n}{h}$  и  $D = \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} f'''(\xi)$ .

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
$x_0$	$y_0$	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$
$x_1 = x_0 + h$	$y_1$	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	
$x_2 = x_1 + h$	$y_2$	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$		
$x_3 = x_2 + h$	$y_3$			

## Аппроксимация и интерполирование средствами MathCad

Векторы исходных данных:

$$x := \begin{bmatrix} -2.75 \\ -2 \\ -1 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y := \begin{bmatrix} -0.2 \\ -1.1 \\ -2.3 \\ 0.1 \\ 1.1 \end{bmatrix}$$

Функция **mnk**, строящая многочлен степени  $m$  по *методу наименьших квадратов*, возвращает вектор  $a$  коэффициентов многочлена:

$$\text{mnk}(x, y, n, m) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0.. m \\ \left| \begin{array}{l} b_j \leftarrow \sum_{i=0}^n y_i \cdot (x_i)^j \\ \text{for } k \in 0.. m \\ \Gamma_{j,k} \leftarrow \sum_{i=0}^n (x_i)^{k+j} \end{array} \right. \\ a \leftarrow \text{lsolve}(\Gamma, b) \\ a \end{array} \right.$$

*Входные параметры:*

$x, y$  — векторы исходных данных;

$n + 1$  — размерность  $x, y$ .

Вычисление коэффициентов многочленов степени 0, 1, 2, 3 по методу наименьших квадратов:

$$n := 4$$

$$\begin{array}{lll}
a_0 := \text{mnk}(x, y, n, 0) & a_0 = -0.48 & a_1 = \begin{bmatrix} -0.133 \\ 0.408 \end{bmatrix} \\
a_1 := \text{mnk}(x, y, n, 1) & & \\
a_2 := \text{mnk}(x, y, n, 2) & a_2 = \begin{bmatrix} -1.102 \\ 1.598 \\ 0.717 \end{bmatrix} & a_3 = \begin{bmatrix} -1.164 \\ 1.591 \\ 0.792 \\ 0.026 \end{bmatrix} \\
a_3 := \text{mnk}(x, y, n, 3) & & 
\end{array}$$

Функция  $P$  возвращает значение многочлена степени  $m$  в точке  $t$ , многочлен задаётся с помощью вектора коэффициентов  $a$ :

$$P(a, m, t) := \sum_{j=0}^m a_j \cdot t^j$$

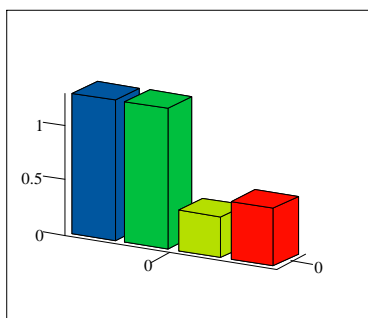
Функция  $\sigma_0$  возвращает значение среднеквадратичного отклонения многочлена  $P(a, m, t)$ :

$$\sigma_0(a, m) := \sqrt{\frac{1}{n-m} \cdot \sum_{k=0}^n (P(a, m, t) - y_k)^2}$$

Вычисление значений  $\sigma_m$ ,  $m = 0, 1, 2, 3$ :

$$\sigma_0 := \sigma_0(a_0, 0) \quad \sigma_1 := \sigma_0(a_1, 1) \quad \sigma_2 := \sigma_0(a_2, 2) \quad \sigma_3 := \sigma_0(a_3, 3)$$

Гистограмма

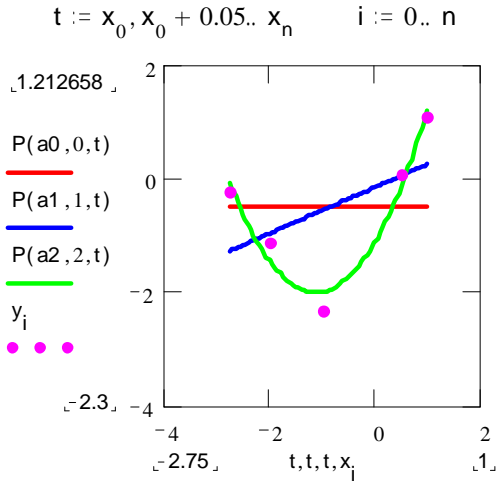


$$\sigma = \begin{bmatrix} 1.285 \\ 1.28 \\ 0.38 \\ 0.532 \end{bmatrix}$$

$\sigma$

*Вывод.* Оптимальная степень  $m^* = 2$ ; многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения:  $P_2(x) = -1,102 + 1,598x + 0,717 x^2$ .

Графики многочленов степени 0, 1, 2 и точечный график исходной функции:



Функция **inter** возвращает значение *интерполяционного многочлена в форме Ньютона* (с разделенными разностями) в точке  $t$ :

```

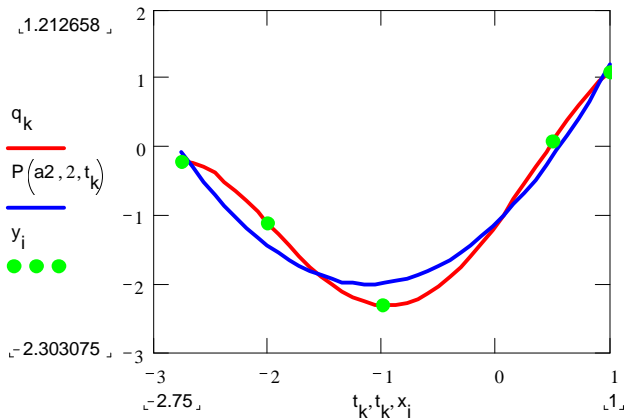
inter(x, y, n, t) :=
  for i ∈ 0.. n
    fi,0 ← yi
  for k ∈ 1.. n
    for i ∈ 0.. n - k
      fi,k ←  $\frac{(f_{i+1,k-1} - f_{i,k-1})}{x_{i+k} - x_i}$ 
  s ← y0
  for k ∈ 1.. n
    r ← 1
    for i ∈ 0.. k - 1
      r ← r · (t - xi)
    s ← f0,k · r + s
  s
  
```

Входные параметры :  
 x, y - векторы  
 исходных данных;  
 n+1 - размерность x,y.

Вычисление значений интерполяционного многочлена в точках  $t_k$ :

$$k := 0..40 \quad t_k := x_0 + \frac{(x_n - x_0) \cdot k}{40} \quad q_k := \text{inter}(x, y, n, t_k)$$

Графики интерполяционного многочлена, многочлена наилучшего приближения P2 и точечный график исходной функции:



## 2 Индивидуальные задания

1. Функция  $y = y(x)$  задана таблицей 2.1 своих значений:

$x$	-2	-1	0	1	2
$y$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$

Используя метод наименьших квадратов, приблизьте функцию многочленами 1-й и 2-й степеней. Для каждого приближения определите величину среднеквадратичной погрешности. Постройте точечный график функции и графики многочленов. Моделирование функций проведите, используя средства MathCad.

Таблица 2.1 — Варианты индивидуального задания 1

Номер варианта	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	Номер варианта	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
1	3,1	1,7	0,9	0,7	1,05	16	5,2	2,4	1,2	0,8	1,5
2	-0,4	0,2	1,0	1,2	0,9	17	4,8	2,6	1,8	1,3	1,0
3	6,4	3,3	1,4	1,3	2,5	18	1,4	3,2	2,8	1,6	0,2
4	7,5	4,5	3,0	1,8	2,5	19	-1,2	0,8	2,8	2,9	0,7
5	5,7	2,9	1,2	0,8	1,8	20	-2,0	0,6	2,2	2,5	0,9
6	-1,3	1,2	2,8	3,0	2,5	21	-0,7	1,6	2,5	1,2	-1,8
7	-0,8	-1,6	-1,3	0,4	3,2	22	1,8	2,5	1,6	0,3	21,5
8	0,8	1,6	1,2	-0,4	-5,7	23	2,6	0,4	-1,2	-1,6	-1,0
9	0,9	0,6	1,2	1,6	3,1	24	-2,4	0,2	1,4	2,2	1,8
10	0,9	1,4	1,1	0,4	-1,2	25	-0,6	1,6	-1,3	-0,5	1,5
11	-4,8	0	3,2	4,0	2,8	26	0,0	-1,4	-1,6	-0,5	1,2
12	11,0	6,5	3,2	1,8	3,5	27	3,2	2,8	2,2	0,6	-1,5
13	1,3	0,7	0,9	1,5	3,5	28	2,4	1,0	0,05	-0,17	0,4
14	0,8	1,1	1,6	2,9	4,5	29	1,8	0,92	0,25	0,12	0,0
15	2,8	1,4	2,1	3,6	4,8	30	1,6	0,88	0,35	0,28	0,2

2. Для функции  $y = y(x)$ , заданной таблицей 2.2 своих значений, постройте интерполяционные многочлены в форме Лагранжа и Ньютона и вычислите приближенное значение функции в точке  $x_0$ . Для реализации методов воспользуйтесь средой программирования и сравните полученные результаты с моделированием средствами MathCad.

Таблица 2.2 — Варианты индивидуального задания 2

Номер варианта	Таблица					$x_0$	Номер варианта	Таблица					$x_0$
	$x$	$y$	$x$	$y$	$x$			$y$	$x$	$y$	$x$	$y$	
1	$x$	-2	-1	0	1	-1,25	5	$x$	2	3	4	5	2,75
	$y$	4	1	-2	-3			$y$	-1	0	7	4	
2	$x$	-1	0	1	2	-0,25	6	$x$	3	4	5	6	3,75
	$y$	1	-2	-3	-1			$y$	0	7	4	1	
3	$x$	0	1	2	3	0,75	7	$x$	1	2	3	4	1,75
	$y$	-2	-3	-1	0			$y$	4	1	-2	-3	
4	$x$	1	2	3	4	1,75	8	$x$	-4	-3	-2	-1	-3,25
	$y$	-3	-1	0	7			$y$	1	-2	-3	-1	

Окончание табл. 2.2

Номер варианта	Таблица					$x_0$	Номер варианта	Таблица					$x_0$
	$x$							$x$					
9	$x$	3	4	5	6	3,75	20	$x$	-4	-3	-2	-1	-3,25
	$y$	-2	-3	-1	0			$y$	-3	-1	0	7	
10	$x$	4	5	6	7	4,75	21	$x$	-5	-4	-3	-2	-4,25
	$y$	-3	-1	0	7			$y$	4	1	-2	-3	
11	$x$	5	6	7	8	5,75	22	$x$	4	5	6	7	4,75
	$y$	-1	0	7	4			$y$	1	-2	-3	-1	
12	$x$	6	7	8	9	6,75	23	$x$	5	6	7	8	5,75
	$y$	0	7	4	1			$y$	-2	-3	-1	0	
13	$x$	-5	-4	-3	-2	-4,25	24	$x$	6	7	8	9	6,75
	$y$	-2	-3	-1	0			$y$	-3	-1	0	7	
14	$x$	3	4	5	6	3,75	25	$x$	-3	-2	-1	0	-2,25
	$y$	4	1	-2	-3			$y$	-1	0	7	4	
15	$x$	2	3	4	5	2,75	26	$x$	-2	-1	0	1	-1,25
	$y$	1	-2	-3	-1			$y$	0	7	4	1	
16	$x$	-3	-2	-1	0	-2,25	27	$x$	0	1	2	3	0,75
	$y$	-2	-3	-1	0			$y$	0	1	2	3	
17	$x$	-2	-1	0	1	-1,25	28	$x$	1	2	3	4	1,75
	$y$	-3	-1	0	7			$y$	1	-2	-3	-1	
18	$x$	-1	0	1	2	-0,25	29	$x$	4	5	6	7	4,75
	$y$	-1	0	7	4			$y$	-1	0	7	4	
19	$x$	0	1	2	3	0,75	30	$x$	5	6	7	8	5,75
	$y$	0	7	4	1			$y$	0	7	4	1	

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте постановку задач приближения функций.
2. В чём суть метода наименьших квадратов?
3. Как выбрать оптимальную степень аппроксимирующего многочлена?
4. Полиномиальная интерполяция. Многочлен в форме Лагранжа.
5. Полиномиальная интерполяция. Многочлен в форме Ньютона.

# Лабораторная работа 3

## ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

**Цель:** изучить и научиться программировать методы приближенного вычисления определенных интегралов, основанные на квадратурных формулах Ньютона-Котеса.

### 1 Основные теоретические сведения

#### Постановка задачи численного интегрирования и методы её решения

Чаще всего для приближенного вычисления определённого интеграла используются квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Погрешность таких формул оценивается порядком их алгебраической точности — порядком полинома, при подстановке которого в качестве подынтегральной функции формула даёт точный результат.

Простой приём построения квадратурных формул состоит в том, что подынтегральная функция  $f(x)$  заменяется на отрезке  $[a, b]$  интерполяционным многочленом, например, многочленом Лагранжа  $L_n(x)$ ; для интеграла имеем приближенное равенство (3.1). Предполагается, что отрезок  $[a, b]$  разбит на  $n$  частей точками (узлами)  $x_i$ , наличие которых подразумевается при построении многочлена  $L_n(x)$ . Для равноотстоящих узлов

$$x_i = x_0 + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad x_0 = a, \quad x_n = b.$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_n(x) dx. \quad (3.1)$$

При определенных допущениях получаем формулу **трапеций**:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right), \quad (3.2)$$

где  $y_i$  — значения функции в узлах интерполяции.

Имеем следующую оценку погрешности метода интегрирования по формуле трапеций (3.2):

$$|R_n| \leq M \frac{|b-a|h^2}{12}, \text{ где } M = \max |f^{(2)}(x)|, x \in [a, b]. \quad (3.3)$$

Во многих случаях более точной оказывается формула **Симпсона** (формула парабол)

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{2h}{3} \left( \frac{y_0 + y_{2m}}{2} + 2y_1 + y_2 + \dots + 2y_{2m-1} \right). \quad (3.4)$$

Для неё имеем следующую оценку погрешности:

$$|R_n| \leq M \frac{|b-a|h^4}{180}, \text{ где } M = \max |f^{(4)}(x)|, x \in [a, b].$$

Блок-схема метода Симпсона приводится на рисунке 3.1.

## Решение задачи средствами MathCad

Задаем функцию:

$$F(x) := \cos(|x|)^3 + \sin(x) + \tan\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \ln(x)^2$$

Задаем пределы интегрирования функции:

$$a := 2 \quad b := 10$$

Прямой способ нахождения интеграла:

$$S := \int_a^b F(x) dx \quad S = 24.1906133$$

Нахождение интеграла с помощью формулы Симпсона:

$$n := 100 \quad h := \frac{b-a}{n} \quad h = 0.08$$

$$i := 0..n \quad x_i := a + h \cdot i$$

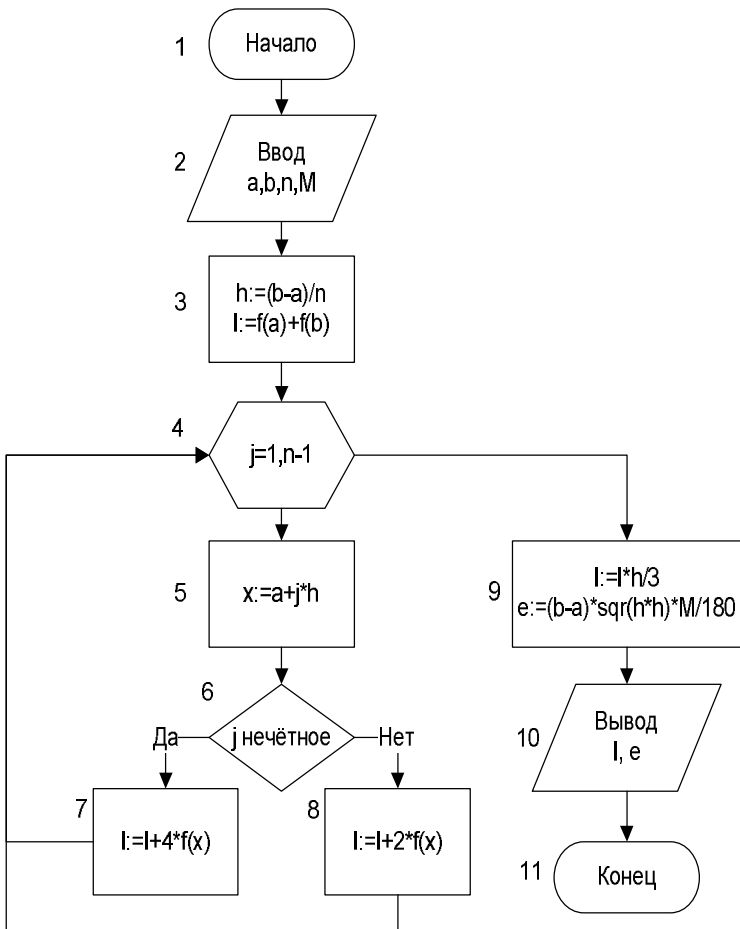


Рисунок 3.1 — Блок-схема алгоритма метода Симпсона

$$SI := \frac{2}{3} \cdot h \cdot \left[ \frac{F(a) + F(b)}{2} + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} F[a + (2i-1) \cdot h] + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} F[a + 2i \cdot h] \right]$$

SI = 24.1906126053

Абсолютная погрешность метода интегрирования функции:

$$\delta_{\text{abs}} = |s - s_1|$$

$$\delta = 6.467 \times 10^{-7}$$

## Постановка задачи численного дифференцирования и методы её решения

К численному дифференцированию (ЧД) прибегают тогда, когда нужно вычислять производные для функций, заданных таблично, или когда непосредственное дифференцирование  $y = f(x)$  затруднительно. Формулы для расчёта  $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$  в точке  $x$  области определения функции получают посредством аппроксимации оператора дифференцирования интерполяционными многочленами как локальной, так и глобальной интерполяций. А именно: к исследуемой точке  $x$  берутся несколько близких к ней узлов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n \geq m + 1$ ), называемых шаблоном. Вычисляются значения  $y_i = f(x_i)$  в узлах шаблона, и строится интерполяционный многочлен

$$y = f(x) \approx j(x; \bar{a}) = P_{n-1}(x).$$

Тогда  $\frac{d^m f}{dx^m} \approx d^m P_{n-1} / dx^m$ .

Для получения рабочих формул с точки зрения упрощения их реализации интерполирование производится на равномерной сетке, и производные обычно находятся в узлах  $x_i$  с соответствующей оценкой их погрешностей. При  $n = m + 1$  формулы ЧД не зависят от положения точки  $x$  внутри шаблона, так как  $m$ -я производная от полинома  $m$ -й степени есть константа. Такие формулы называются простейшими формулами ЧД.

## Аппроксимация производных посредством локальной интерполяции

В случае табличного задания функции производную находят, опираясь на формулы (3.5):

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x), \quad (3.5)$$

полагая, что

$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Это соотношение называется аппроксимацией производной с помощью отношения конечных разностей. При заданных значениях таблицы  $\{x_i, y_i\}$ ,  $i = \overline{0, n}$  и шаге расположения интерполяционных узлов  $h = \text{const}$  в зависимости от способа вычисления конечных разностей для  $i$ -го узла имеют место следующие алгоритмы вычисления. Пусть  $i = 1$ .

*Формула левых разностей*

$$\Delta y_1 = y_1 - y_0; \quad \Delta x = h; \quad y'_1 = \frac{y_1 - y_0}{h}. \quad (3.6)$$

*Формула правых разностей*

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1; \quad \Delta x = h; \quad y'_1 = \frac{y_2 - y_1}{h}. \quad (3.7)$$

*Формула центральных разностей*

$$\Delta y_1 = y_2 - y_0; \quad \Delta x = 2h; \quad y'_1 = \frac{y_2 - y_0}{2h}. \quad (3.8)$$

Используя соотношения (3.6), (3.7), (3.8) последовательно, можно получить выражения для вычисления производных высших порядков. К примеру, используя формулу (3.7), получим:

$$y''_1 = (y'_1)' = (y'_2 - y'_1) / h = ((y_2 - y_1) / h - (y_1 - y_0) / h) / h = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2}.$$

Суть указанных методов проиллюстрирована на рисунке 3.2. Численное значение тангенса угла  $\alpha$ , образованного касательной к графику  $y(x)$  и осью абсцисс, показывает точное значение производной (геометрический смысл производной). Тангенсы углов  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  соответствуют приближенным значениям производных, определённых методами (3.6)—(3.8) соответственно.

Алгоритм вычислений прост, поэтому ограничимся только приведением его блок-схемы (рис. 3.3).

### Погрешность численного дифференцирования

Аппроксимируя исследуемую функцию, её представляют в виде

$$f(x) = j(x) + R(x). \quad (3.9)$$

В качестве  $\varphi(x)$  можно принять либо интерполяционную функцию, либо частичную сумму ряда. Тогда погрешность аппроксимации  $R(x)$  определяется остаточным членом ряда или  $P_{n-1}(x)$ . Дифференцируя функцию (3.9) необходимое число раз, находим:

$$f'(x) = j'(x) + R'(x); \quad f''(x) = j''(x) + R''(x) \text{ и т. д.}$$

Тогда погрешность аппроксимации  $R^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - j^{(k)}(x)$  при численном дифференцировании функции, заданной таблицей с шагом  $h$  зависит от  $h$ , и её записывают в виде  $O(h^k)$ . Показатель степени  $k$  называют порядком погрешности аппроксимации производной. При этом предполагается, что  $|h| < 1$ .

Тогда  $y'_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} + O(h)$  является аппроксимацией первого порядка ( $k = 1$ ). Следовательно, для произвольного узла  $y'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ .

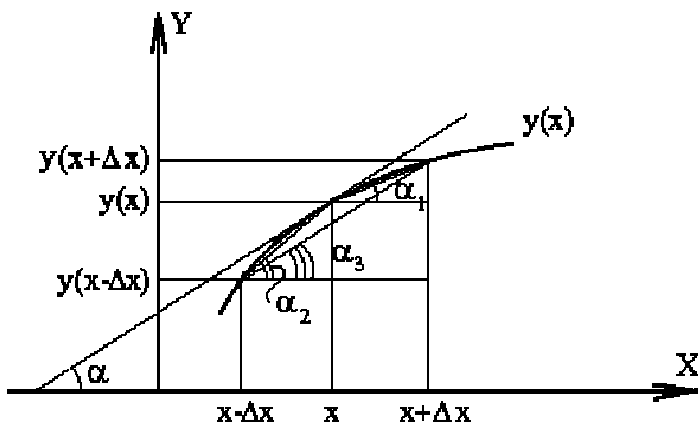


Рисунок 3.2 — Геометрический смысл производной

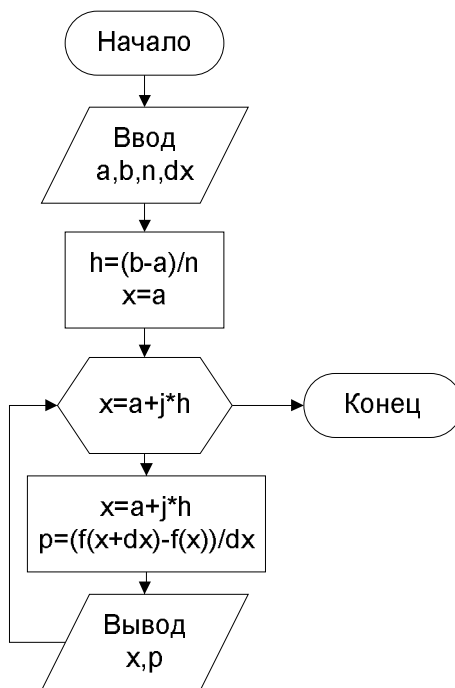


Рисунок 3.3 — Блок-схема алгоритма нахождения производной

А по всему отрезку  $[a; b]$ , где  $h = (b - a) / n$  для  $f'(x)$  погрешность не превысит величины

$$R_1 = \frac{h}{2} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

Погрешность на отрезке  $[a, b]$  для второй производной оценивается соотношением

$$R_2 \leq \frac{h^2}{12} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(IV)}(x)|.$$

Следует отметить, что приближенное дифференцирование представляет собой операцию менее точную, чем интерполирование. Считают, что при численном дифференцировании функции  $y = f(x)$ , заданной таблично, имеют место два типа погрешностей:

а) погрешности усечения, которые вызываются заменой функции  $y = f(x)$  интерполяционным многочленом  $P_n(x)$ ;

б) погрешности округления, которые вызываются неточным заданием исходных значений  $y_i$ .

При этом известно, что с уменьшением шага численного дифференцирования погрешность округления возрастает, а погрешность усечения, как правило, убывает. Поэтому при вычислениях по формулам численного дифференцирования стоит задача и оптимального выбора шага  $h$ .

## 2 Индивидуальное задание

Разработайте программное приложение для вычисления интеграла  $\int_{1.0}^{2.6} f(x)dx$  (табл. 3.1), используя квадратурные формулы:

а) трапеций с шагами  $h = 0,4$  и  $h = 0,2$ , оцените погрешность результата;

б) Симпсона с шагом  $h = 0,4$ , оцените погрешность результата.

Т а б л и ц а 3.1 — Варианты индивидуального задания

Номер варианта	$f(x)$	Номер варианта	$f(x)$	Номер варианта	$f(x)$
1	$e^{-0.5x^2}$	11	$e^{-0.1/x}$	21	$e^{\cos^2 x}$
2	$\sin(0.5x^2)$	12	$\sin(1/x^2)$	22	$\sin(0.5x\sqrt{x})$
3	$e^{\cos(x)}$	13	$e^{\sin^2(x)}$	23	$e^{\sin(1/x)}$
4	$\sin(1/x)$	14	$e^{-0.2\sin x}$	24	$e^{-0.4\cos(1/x)}$
5	$e^{\sin(x)}$	15	$e^{0.3/x^2}$	25	$e^{0.6/(x\sqrt{x})}$
6	$3\sin(0.06x^3)$	16	$\cos(x\sqrt{x})$	26	$e^{-\sin(1/x)}$
7	$e^{1/x}$	17	$\cos(1/x^2)$	27	$e^{-1/(x\sqrt{x})}$
8	$2\cos(0.2x^2)$	18	$e^{-1/x^2}$	28	$e^{\cos(1/x)}$
9	$e^{-\cos(x)}$	19	$\cos(1/x)$	29	$e^{0.5x\sqrt{x}}$
10	$4\cos(0.02x^3)$	20	$e^{-0.02x\sqrt{x}}$	30	$e^{0.3x^2}$

Промежуточные результаты вычислите с шестью значащими цифрами. Аргументы тригонометрических функций вычислите в радианах. Проведите сравнительный анализ результатов вычисления. Представьте полученное решение в графическом виде.

### Контрольные вопросы

1. Каковы преимущества формулы парабол по сравнению с формулой трапеций и следствием чего они являются?
2. Как влияет на точность численного интегрирования величина шага?
3. Каким способом можно прогнозировать примерную величину шага для достижения заданной точности интегрирования?
4. Можно ли добиться неограниченного уменьшения погрешности интегрирования путём последовательного уменьшения шага?

# Лабораторная работа 4

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ

### **Цели:**

- изучить численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ);
- научиться разрабатывать программные модули по предложенным алгоритмам.

## **1 Основные теоретические сведения**

### **Постановка задачи и методы её решения**

Дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y). \quad (4.1)$$

Требуется найти на отрезке  $[a; b]$  решение  $y(x)$ , удовлетворяющее начальному условию

$$y(a) = y_0. \quad (4.2)$$

Классы дифференциальных уравнений, для которых разработаны методы получения точных решений, охватывают только малую часть возникающих на практике задач. Численные же методы применимы к очень широкому классу уравнений и всем типам задач для них.

Рассмотрим простейший численный метод — метод Эйлера.

Пусть требуется решить задачу Коши:  $y' = f(x, y)$ ,  $a \leq x \leq b$ ,  $y(a) = y_0$ . На промежутке  $[a; b]$  введём сетку  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ . В методе Эйлера приближённые значения  $y_i$  искомой функции  $y(x)$  вычисляются последовательно по формуле  $y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , где  $h_i = x_{i+1} - x_i$ . Геометрический смысл метода Эйлера состоит в том, что искомая интегральная кривая  $y(x)$ , проходящая через точку  $(x_0, y_0)$ , заменяется ломаной с вершинами в точках  $(x_i, y_i)$ .

Для оценки погрешности приближённых значений  $y(x_i) \approx y_i$  пользуются двойным пересчётом: расчёт на промежутке  $[x_i, x_{i+1}]$

повторяют с шагом  $h_i/2$  и погрешность более точного решения  $\bar{y}_{i+1}$  (при шаге  $h_i/2$ ) оценивают по формуле  $|\bar{y}_{i+1} - y(x_{i+1})| \approx |\bar{y}_{i+1} - y_{i+1}|$ .

Будем предполагать, что условия теоремы существования и единственности выполнены. Для решения используем метод Эйлера [метод первого порядка точности, расчётные формулы (4.3)] и метод Рунге-Кутты [метод четвёртого порядка точности, расчётные формулы (4.4)] с шагом  $h$  и  $2h$ . Отметим, что результаты могут сильно отличаться ввиду того, что метод Эйлера, имея только первый порядок точности, используется, как правило, для оценочных расчётов. Ориентировочную оценку погрешности метода Рунге-Кутты  $\varepsilon$  вычислим по формуле (4.5).

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad (4.3)$$

где  $h$  — шаг разбиения.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}, \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i), \\ k_2 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= hf(x_i + h, y_i + k_3). \\ \varepsilon &= \frac{|y_{2h} - y_h|}{15}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Если функция  $y(x)$  на каком-нибудь промежутке возрастает очень быстро, то имеет смысл доработать данный алгоритм, добавив в него проверку условия

$$\left| \frac{k_2 - k_3}{k_1 - k_2} \right| \leq 0,05. \quad (4.6)$$

При невыполнении этого условия шаг нужно уменьшить вдвое, повторить вычисление слагаемых  $k_1, k_2, k_3, k_4$  и повторить проверку

условия (4.6) и т. д. Такая модификация метода позволит существенно увеличить его точность.

Блок-схема алгоритма простейшей реализации метода Рунге-Кутты четвёртого порядка точности представлена на рисунке 4.1.

## Решение задачи средствами MathCad

Найти приближённое решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) первого порядка

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, T], \quad y(t_0) = y_0$$

и оценить погрешность решения задачи.

Исходные данные и решение:

$$y'(t) = 2ty, \quad t_0 = 0, \quad T = 1, \quad y(0) = 1.$$

Правая часть  $f(t, y) := 2 \cdot t \cdot y$ ;

начальное значение  $y_0 := 1$ ;

концы отрезка  $t_0 := 0$       $T := 1$ ;

шаг сетки  $h := 0.2$ ;

число узлов сетки:  $N := \frac{T - t_0}{h}$       $N = 5$

Функция, реализующая явный метод Эйлера, возвращает вектор решения:

$$\text{eyler}(f, y_0, t_0, h, N) := \left\| \begin{array}{l} y_0 \leftarrow y_0 \\ \text{for } i \in 0.. N - 1 \\ y_{i+1} \leftarrow y_i + h \cdot f(t_0 + i \cdot h, y_i) \end{array} \right\| y$$

Вычисление решения по методу Эйлера:

$$yE := \text{eyler}(f, y_0, t_0, h, N)$$

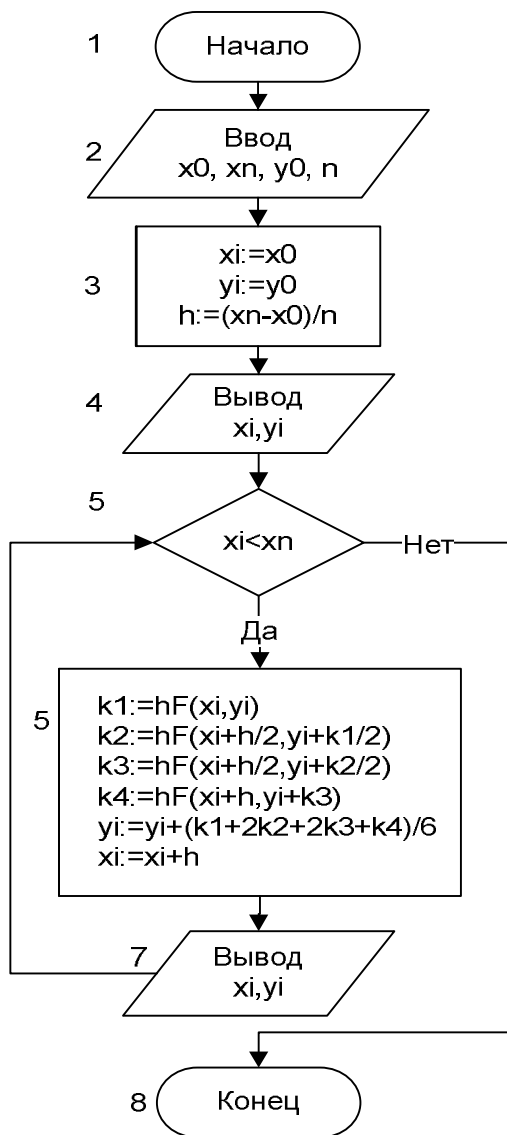


Рисунок 4.1 — Блок-схема алгоритма метода Рунге-Кутты четвёртого порядка точности

Вычисление решения по методу Рунге-Кутта четвёртого порядка точности:

$$y_{RK4} := \text{rkfixed}(y, t_0, T, N, f)$$

Функция **rkfixed** возвращает матрицу, первый столбец которой содержит узлы сетки, а второй — приближенное решение в этих узлах.

Точное решение:

$$Y(t) := e^{t^2}$$

Точное решение в узлах сетки:

$$i := 0..N \quad t_i := t_0 + i \cdot h \quad y_{t_i} := Y(t_i)$$

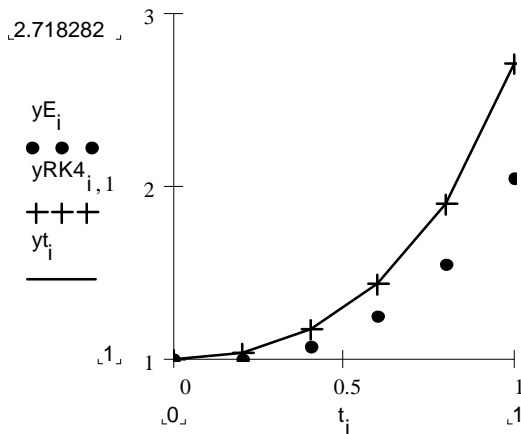
Решение по методу Эйлера, решение по методу Рунге-Кутта, точное решение:

$$y_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1.08 \\ 1.253 \\ 1.553 \\ 2.051 \end{bmatrix}$$

$$y_{RK4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.2 & 1.041 \\ 0.4 & 1.174 \\ 0.6 & 1.433 \\ 0.8 & 1.896 \\ 1 & 2.718 \end{bmatrix}$$

$$y_t = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.040811 \\ 1.173511 \\ 1.433329 \\ 1.896481 \\ 2.718282 \end{bmatrix}$$

Графики приближенного и точного решений:



## Вычисление погрешности по правилу Рунге

Вычисление приближенных решений с шагом  $h/2$ :

$$h_2 := \frac{h}{2} \quad N_2 := \frac{T - t_0}{h_2} \quad N_2 = 10$$

$$y_{Eh_2} := \text{euler}(f, y_0, t_0, h_2, N_2) \quad y_{RK4h_2} := \text{rkfixed}(y, t_0, T, N_2, f)$$

Вычисление погрешностей:

$$i := 0..N$$

$$zE_i := |y_{Ei} - y_{Eh_2i}| \quad zRK4 := \frac{(y_{RK4}^{1>})_i - (y_{RK4h_2}^{1>})_{2i}}{15}$$

Значение погрешностей:

$$\max(zE) = 0.284 \quad \max(zRK4) = 1.088 \cdot 10^{-5}$$

## 2 Индивидуальное задание

Напишите программу численного решения задачи Коши (4.1 и 4.2) для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

на отрезке  $[t_0, T]$ , с шагом  $h = 0,2$ : а) методом Эйлера; б) методом Рунге-Кутты четвёртого порядка точности с оценкой погрешности по правилу Рунге. Найдите точное решение задачи. Постройте на одном чертеже графики точного и приближенных решений. Исходные данные для выполнения задания возьмите из таблицы 4.1. Для реализации методов используйте среду программирования и сравните полученные результаты с моделированием средствами MathCad.

Т а б л и ц а 4.1 — Варианты индивидуального задания

Номер варианта	$f(t,y)$	$t_0$	$T$	$y_0$	Номер варианта	$f(t,y)$	$t_0$	$T$	$y_0$
1	$y/t+t^2$	1	2	0	16	$-y/t+3t$	1	2	1
2	$yctgt+2t\sin t$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}+1$	0	17	$\frac{2ty}{1+t^2}+1+t^2$	1	2	3
3	$-y\cos t+\frac{\sin(2t)}{2}$	0	1	0	18	$\frac{2t-1}{t^2}y+1$	1	2	1
4	$-ytgt+\cos^2 t$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}+1$	0,5	19	$-\frac{3y}{t}+\frac{2}{t^3}$	1	2	1
5	$\frac{y}{t+2}+t^2+2t$	-1	0	1,5	20	$-2ty-2t^3$	1	2	$e^{-1}$
6	$\frac{y}{t+1}+e^t(t+1)$	0	1	1	21	$y/t-2/t^2$	1	2	1
7	$y/t+t\sin t$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}+1$	1	22	$-ty-t^3$	0	1	3
8	$-y/t+\sin t$	$\pi$	$\pi+1$	$\frac{1}{\pi}$	23	$\frac{2}{t+1}y+e^t(t+1)^2$	0	1	1
9	$-\frac{y}{2t}+t^2$	1	2	1	24	$-2ty+te^{-t^2}\sin t$	0	1	1
10	$-\frac{2t}{1+t^2}y+\frac{2t^2}{1+t^2}$	0	1	$\frac{2}{3}$	25	$\frac{2y}{t+1}+(t+1)^3$	0	1	0,5
11	$\frac{2t-5}{t^2}y+5$	2	3	4	26	$y\cos t-\sin 2t$	0	1	3
12	$-y/t+\frac{t+1}{t}e^t$	1	2	$e$	27	$4ty-4t^3$	0	1	-0,5
13	$y/t-2\ln t/t$	1	2	1	28	$y/t-\ln t/t$	1	2	1
14	$y/t-12/t^3$	1	2	4	29	$3t^2y+t^2(1+t^3)/3$	0	1	0
15	$-2y/t+t^3$	1	2	$-\frac{5}{6}$	30	$y\cos t+\sin 2t$	0	1	-1

## Контрольные вопросы

1. На какие основные группы подразделяются приближенные методы решения дифференциальных уравнений?
2. В какой форме можно получить решение дифференциального уравнения по методу Эйлера?
3. В какой форме можно получить решение дифференциального уравнения по методу Рунге-Кутты?
4. Какой способ оценки точности используется при приближенном интегрировании дифференциальных уравнений методами Эйлера и Рунге-Кутты?
5. Как вычислить погрешность по заданной формуле, используя метод двойного пересчёта?

## Лабораторная работа 5 РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*Цель:* изучить методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

### 1 Основные теоретические сведения

#### Основы метода конечных разностей

Метод конечных разностей заключается в том, что система дифференциальных уравнений заменяется соответствующей ему системой алгебраических уравнений. Решение этой системы даёт приближенное решение для искомой функции.

Метод включает следующие основные этапы:

- 1) построение сетки, охватывающей рассматриваемую область, например, элемент конструкции какого-нибудь устройства;
- 2) построение на полученной сетке конечно-разностной аппроксимации, эквивалентной исходному дифференциальному уравнению и дополнительным условиям;
- 3) формирование на основе конечно-разностной аппроксимации системы алгебраических уравнений и её решение.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (5.1)$$

с двухточечными краевыми условиями:

$$\begin{cases} a_0 y(a) + {}_1 y'(a) = A \\ b_0 y(b) + {}_1 y'(b) = B \end{cases} \quad (5.2)$$

$$(|a_0| + |{}_1| \neq 0, |b_0| + |{}_1| \neq 0),$$

где  $p, q, f$  — известные непрерывные функции на некотором отрезке  $[a; b]$ .

Одним из наиболее простых методов решения этой краевой задачи является сведение ее к системе конечно-разностных уравнений.

Основной отрезок  $[a; b]$  делим на  $n$  — равных частей с шагом  $h = (b - a) / n$ , т. е. рассматриваем равномерную сетку  $x_i = x_0 + ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Производные в исходном уравнении (5.1) заменяем конечно-разностными отношениями. Для внутренних точек

$$\begin{aligned} y'_i &= \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}; \\ y''_i &= \frac{y_{i+2} - 2y_i + y_{i-2}}{h^2}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где  $i = 1, \dots, n - 1$ .

Для граничных точек  $x_0 = a$  и  $x_n = b$ , чтобы не выходить за границы отрезка, производные заменяем отношениями:

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad y'_n = \frac{y_{n-1} - y_n}{-h}. \quad (5.4)$$

Используя отношения (5.3) и (5.4), исходное дифференциальное уравнение (5.1) аппроксимируем конечно-разностными уравнениями

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i \cdot y_i = f_i, \quad (5.5)$$

где  $i = 1, \dots, n - 1$ .

Учитывая краевые условия (5.2), получим ещё два уравнения:

$$\begin{cases} y_0 + \frac{-y_2 + 4 \cdot y_1 - 3 \cdot y_0}{2h} = A, \\ y_n + \frac{3 \cdot y_n - 4 \cdot y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} = B. \end{cases}$$

Таким образом, получена линейная система  $n + 1$  уравнений с  $n + 1$  неизвестными  $y_0, y_1, \dots, y_n$ , представляющими собой значения искомой функции  $y = y(x)$  в точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Решив эту систему, получим таблицу значений искомой функции  $y$ .

## 2 Индивидуальное задание

Методом конечных разностей найдите решение краевой задачи

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(a) = ya, \quad y(b) = yb \end{cases}$$

с шагами  $h_1 = (b - a)/5$ ,  $h_2 = (b - a)/10$  и оцените погрешность по правилу Рунге (табл. 5.1). Постройте графики полученных приближенных решений.

Т а б л и ц а 5.1 — Варианты индивидуального задания

Номер варианта	$p(x)$	$q(x)$	$f(x)$	$a$	$b$	$ya$	$yb$
1	0,6	2,6	$15\cos(x)$	0	1	0	-2
2	0,7	4	$7 - 14x^2$	0	1	0	4
3	0,4	5	$-5e^{-x-1}$	1	2	0	-4
4	1	7	$x^2 + 3$	1	2	3	0
5	0,8	4	$1 / (1 + 10x)$	0	1	8	4
6	0,6	12	$20x$	2	3	2	6
7	0,3	$0,6x$	$8\sin(x)$	1	3	2	2

Окончание табл. 5.1

Номер варианта	$p(x)$	$q(x)$	$f(x)$	$a$	$b$	$ya$	$yb$
8	$0,3x$	5	$3/(3-x)$	1	2	0	-2
9	$2x^2$	6	$15+15x$	0	1	7	2
10	0,2	$3x$	$\ln(1+x)$	1	2	1	6
11	$0,4x^2$	$5x$	10	0	1	-2	2
12	1,2	$5x^2$	$10+10\sin(x)$	0	1	-3	2
13	0,8	$8\cos(x)$	$(x-5)^3$	1	2	0	5
14	0,4	6	$1/(1+x)^2$	0	1	1	2
15	0,7	3	$0,5e^x$	3	4	3	0
16	1,4	2,4	$-14\cos(x)$	1	2	0	2
17	1,4	7	$1-0,7x^2$	2	3	1	1
18	0,6	3	$3e^{x+2}$	0	1	3	0
19	$\sin(x)$	6	-5	1,5	3	-3	1
20	$x+3$	5	$1/(1-0,1x)$	1	2	2	3
21	$0,2x$	5	$-5-e^{2x}$	0	1	0	0
22	0,2	$4x^2$	$2+2/\sin(x-5)$	-1	1	1	2
23	0,4	$4\cos(2x)$	$(x+2)^3$	1	2	0	5
24	0,6	$2x^2$	$-2\ln(2-x)$	0	1	2	3
25	$0,2x$	1,8	$2\sin(x-4)$	1	3	1	1
26	0,5	$5x$	$20/(2-x^2)$	0	1,2	1	3
27	$2x^2+1$	6	$15-5x$	-1	1	6	2
28	$0,3e^{x+1}$	6	13	0	1	3	1
29	1,6	$3,6\cos(x-1)$	-10	1	2	0	8
30	0,3	$6x^2$	$30/\ln(x+1)$	1	2	1	1

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте постановку двухточечной краевой задачи.
2. Дискретная двухточечная краевая задача.
3. Аппроксимация и сходимость разностной схемы.
4. Аппроксимация граничных условий со вторым порядком точности.

# Лабораторная работа 6

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

### **Цели:**

- изучить методы решения дифференциальных уравнений в частных производных;
- научиться разрабатывать программные модули по предложенным алгоритмам.

## 1 Основные теоретические сведения

### Постановка задачи и метод её решения

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения теплопроводности, а именно: найдём функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (6.1)$$

начальному условию

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, s) \quad (6.2)$$

и краевым условиям:

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(l, t) = \psi(t), \quad t \in (0, T). \quad (6.3)$$

Задачу будем решать методом сеток (конечных разностей), в основе которого лежит идея замены производных конечно-разностными отношениями. Ограничимся случаем двух независимых переменных. Пусть в плоскости  $xOy$  имеется некоторая область  $G$  с границей  $\Gamma$  (рис. 6.1).

Построим на плоскости два семейства параллельных прямых:

$$x = ih, \quad t = kl, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k = 0, 1, 2, \dots$$

Точки пересечения этих прямых назовём узлами. Два узла называются соседними, если они удалены друг от друга в направлении оси  $Ox$  или  $Oy$  на расстояние, равное шагу сетки  $h$  или  $l$  соответственно. Выделим узлы, принадлежащие области  $G + \Gamma$ , а также некоторые

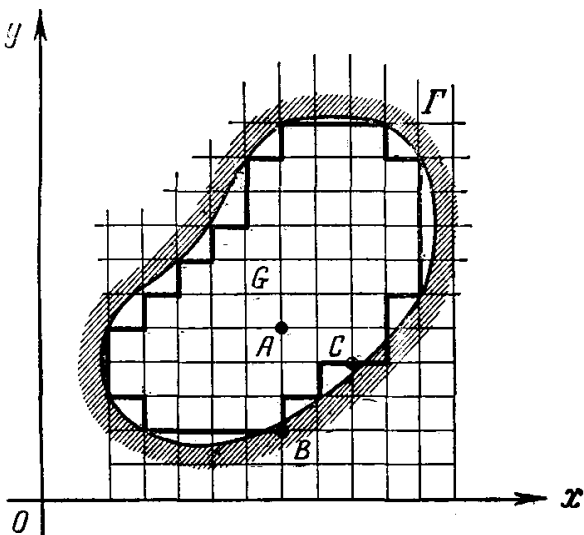


Рисунок 6.1 — Прямоугольная сетка в области  $G$  с границей  $\Gamma$

узлы, не принадлежащие этой области, но расположенные на расстоянии меньше, чем шаг, от границы  $\Gamma$ . Те узлы, у которых все четыре соседних принадлежат выделенному множеству узлов, называются внутренними, например узел  $A$  (рис. 6.1). Оставшиеся из выделенных узлов называются граничными, например узлы  $B$  и  $C$  (см. рис. 6.1). Обозначим  $x_i = ih, y_j = kl$ .

Значения искомой функции  $u = u(x, y)$  в узлах сетки будем обозначать через  $u_{i,k} = u(ih, kl)$ . В каждом внутреннем узле  $(ih, kl)$  заменим частные производные разностными отношениями:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2h};$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2l}.$$

В граничных точках воспользуемся формулами вида:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i+1,k} - u_{i,k}}{h}, \quad \left(\frac{du}{dt}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{l}.$$

Аналогично заменяются частные производные второго порядка

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - 2u_{i,k} + u_{i,k-1}}{l^2}.$$

Сделаем переход от уравнения вида  $\frac{du}{dt} - \frac{d^2u}{dx^2} = 0$  к разностному уравнению

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{l} - \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{h^2} = 0.$$

После замены  $\sigma = \frac{l}{h^2}$  и преобразований получаем уравнение для вычисления внутренних узлов:

$$u_{i,k+1} = (1 - 2\sigma)u_{i,k} + \sigma(u_{i+1,k} + u_{i-1,k}). \quad (6.4)$$

При  $0 \leq \sigma \leq 1/2$  разностное уравнение (6.4) устойчиво. Наиболее простой вид уравнение имеет при  $\sigma = 1/2$ . В этом случае уравнение (6.2) запишется в следующем виде:

$$u_{i,k+1} = \frac{u_{i-1,k} + u_{i+1,k}}{2} \quad (6.5)$$

Пусть  $\bar{u}(x,t)$  — точное решение задачи (6.1)—(6.3),  $|\bar{u} - u|$  — отклонение точного значения от вычисленного по методу сеток. Тогда погрешность вычислений может быть найдена по формуле

$$|\bar{u} - u| \leq \frac{T}{3} m_1 h^2, \quad (6.6)$$

где  $m_1 = \max\{ |f^{(4)}(x)|, |\varphi''(t)|, |\psi''(t)| \}$ ,  
 где  $0 \leq t \leq T$ ,  $0 \leq x \leq s$ .

## 2 Индивидуальные задания

**1.** Используя метод сеток, найдите приближенное решение уравнений (6.1)—(6.3), удовлетворяющее условиям  $u(x,0) = f(x)$ ,  $u(x_0, t) = 0$ ,  $u(x_n, t) = 0$ , для  $0 \leq t \leq 0,03$ ,  $x_0 \leq x \leq x_n$  и  $h = 0,1$ ,  $l = 0,005$ .

Решение должно быть оформлено в виде таблицы 6.1, подсчитанной вручную. Исходные данные заданы в таблице 6.2. Оцените погрешность вычислений по формуле (6.6).

*Комментарий.* Значения  $u_{i_0}$  находим, подставляя значение  $x_0$  в  $f(x)$ . Например,  $f(x_0) = x_0 \sin(2 x_0)$  при  $x_0 = 0$  равна 0. Значения  $u_{0k}$  и  $u_{sk}$  определяются краевыми условиями (в нашем случае нулевые). Далее значение, например,  $u_{11}$  находим, используя формулу (6.5), т. е.  $u_{11} = \frac{u_{00} + u_{20}}{2}$ .

Т а б л и ц а 6.1 — Решение задания 1

j	x	x <sub>0</sub>	x <sub>0</sub> + h	x <sub>0</sub> + 2h	x <sub>0</sub> + 3h	x <sub>0</sub> + 4h	x <sub>n</sub>
	l						
0	0	u <sub>00</sub>	u <sub>10</sub>	u <sub>20</sub>	u <sub>30</sub>	u <sub>40</sub>	u <sub>50</sub>
1	0,005	u <sub>01</sub>	u <sub>11</sub>	u <sub>21</sub>	u <sub>31</sub>	u <sub>41</sub>	u <sub>51</sub>
2	0,010	u <sub>02</sub>	u <sub>12</sub>	u <sub>22</sub>	u <sub>32</sub>	u <sub>42</sub>	u <sub>52</sub>
3	0,015	u <sub>03</sub>	u <sub>13</sub>	u <sub>23</sub>	u <sub>33</sub>	u <sub>43</sub>	u <sub>53</sub>
4	0,020	u <sub>04</sub>	u <sub>14</sub>	u <sub>24</sub>	u <sub>34</sub>	u <sub>44</sub>	u <sub>54</sub>
5	0,025	u <sub>05</sub>	u <sub>15</sub>	u <sub>25</sub>	u <sub>35</sub>	u <sub>45</sub>	u <sub>55</sub>
6	0,03	u <sub>06</sub>	u <sub>16</sub>	u <sub>26</sub>	u <sub>36</sub>	u <sub>46</sub>	u <sub>56</sub>

Т а б л и ц а 6.2 — Варианты индивидуального задания 1

Номер варианта	$x_0$	$x_n$	$f(x)$
1	0,1	0,6	$(1.1x^2 + 1,1)\sin(2\pi(x - 0,1))$
2	0	0,5	$x \sin(2\pi x)$
3	0,2	0,7	$(1.5x + 1,1)\sin(2\pi(x - 0,2))$
4	0	0,5	$(x^2 + 3)\sin(2\pi x)$
5	0,1	0,6	$(1.1x^2 - 1,3)\sin(2\pi(x - 0,1))$
6	0,2	0,7	$(x^3 + 1)\sin(2\pi(x - 0,2))$
7	0	0,5	$(1,5x^2 + 1)\sin(2\pi x)$
8	0,2	0,7	$(3x^2 + 2)\sin(2\pi(x - 0,2))$
9	0	0,5	$(x^2 - 1,3)\sin(2\pi x)$
10	0,1	0,6	$(3x^2 - 1)\sin(2\pi(x - 0,1))$
11	0	0,5	$x \cos(2\pi x)$
12	0	0,6	$x \sin(\pi x)$

***Решение задачи средствами MathCad***

$$f(x) := x \cdot \cos(2 + 3 \cdot x) \quad i := 0..5 \quad j := 0..4$$

$$x_0 := 0.1 \quad x_5 := 0.6$$

$$x_i := x_0 + \frac{(x_0 + x_5)}{6}$$

$$u_{i,0} := f(x_i) \quad u_{0,j+1} := 0 \quad u_{5,j+1} := 0$$

$$i := 1..4$$

$$u_{i,1} := \frac{(u_{i-1,0} + u_{i+1,0})}{2}$$

$$u_{i,2} := \frac{(u_{i-1,1} + u_{i+1,1})}{2}$$

$$u_{i,3} := \frac{(u_{i-1,2} + u_{i+1,2})}{2}$$

$$u_{i,4} := \frac{(u_{i-1,3} + u_{i+1,3})}{2}$$

$$u_{i,5} := \frac{(u_{i-1,4} + u_{i+1,4})}{2}$$

$$u = \begin{bmatrix} -0.191 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.352 & -0.271 & -0.176 & -0.156 & -0.132 & -0.1 \\ -0.352 & -0.352 & -0.311 & -0.264 & -0.2 & -0.176 \\ -0.352 & -0.352 & -0.352 & -0.244 & -0.22 & -0.161 \\ -0.352 & -0.352 & -0.176 & -0.176 & -0.122 & -0.11 \\ -0.352 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Промоделируйте нестационарные процессы теплопроводности в зависимости от входных данных задачи — коэффициента теплопроводности  $k(x)$  и начальной температуры  $\varphi(x)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x)(1 - e^{-t}), & 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \\ u(0, t) = UA, \quad u(l, t) = UB, & 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Входные данные  $k(x)$ ,  $f(x)$ ,  $ua$ ,  $ub$  возьмите из таблицы 6.3

$$f(x) = (ub - ua)(x - a) / l + ua, \quad l = b - a.$$

## Порядок решения задачи

1. Найти приближенное решение задачи с шагами  $\tau = 0,05$  и  $h = 0,1$ , используя явную разностную схему. Строим графики решений при значениях  $t = 0,5\tau, 10\tau, 20\tau$ .

2. Используя результаты задачи, полученные в предыдущем пункте, экспериментально определяем момент времени  $t$ , при котором происходит установление процесса (визуально).

3. Производим анимацию процесса установления.

4. Исследуем, как влияет начальная температура на процесс установления, взяв другие функции  $\phi(x)$  (согласованные с граничными условиями).

*Указание.* Для создания анимационного клипа необходимо:

- выбрать пункт меню **Animate**;
- заключить в выделяющий пунктирный прямоугольник поле графика, который нужно анимировать;
- в диалоговом окне установить значение переменной **FRAME**, например, 10;
- нажать кнопку **Create** (или **Animate**);
- воспроизвести анимацию.

Т а б л и ц а 6.3 — Варианты индивидуального задания 2

Номер варианта	$k(x)$	$f(x)$	$a$	$UA$	$b$	$UB$
1	$x^3$	$10x^{1/4}$	1	3	2	0
2	$x$	$\sqrt{x}+4$	0,5	0	1,5	5
3	$x^{-2}$	$-2x^2-2x$	0,5	2	1,5	6
4	$x^3$	$1+x^{1/3}$	0,2	4	1,2	1
5	$x$	$x^3+2$	0,1	2	1,1	4
6	$e^x$	$e^{2x}$	0,5	1	1,5	5
7	$x$	$3x+x^2$	1	3	2	3
8	$x$	$x+x^{1/3}$	0,1	6	0,8	0,6
9	$\cos(x)$	$10\sin(x)$	0,1	3	0,8	1

Окончание табл. 6.3

Номер варианта	$k(x)$	$f(x)$	$a$	UA	$b$	UB
10	$x$	$\ln(x)$	0,1	1	0,6	5
11	$\cos(x)$	$10\cos(x)$	1	2	1,5	1
12	$x$	$x^{-1}$	1	3	2	3
13	$x^{-2}$	$6x^2 - 3x$	1	-2	2,2	2
14	$e^x$	$x + e^x$	1	2	2,5	-2
15	$x^{-1/3}$	$x + \sqrt{x}$	1,5	3	2,5	-3
16	$x^3$	$10x^{-1/4}$	0,1	3	1,1	0
17	$x^{-1}$	$4 - \sqrt{x}$	1,5	-2	2,5	-4
18	$x^2$	$2x^2 + 2x$	0,5	2	1,6	6
19	$x^{-3}$	$4x^3 + 6$	0,2	4	1,2	1
20	$x^{-2}$	$5x^4 - 5$	1,5	-1	2,5	4
21	$e^x$	$2 - e^{2x}$	0,3	-1	2,3	1
22	$x^{-1}$	$x$	1	3	2	3
23	$1/\cos(x)$	$5\sin(x)$	0,5	1	1,5	1
24	$1/\cos^2(x)$	$6\cos^3(x)$	0,5	2	1,3	2
25	$1/\sin^2(x)$	$15\sin^3(x)$	0,2	-1	1,2	-1
26	$x^{-1}$	$3\ln(x)$	0,3	3	2,3	1
27	$x^{-1}$	$2x^2 - x$	2	-4	3	2
28	$x^{-2}$	$3x^2 + 4$	1,2	-4	2,4	1
29	$x^{1/2}$	$15(x - \sqrt{x})$	0,5	1	1,5	1
30	$e^{-x}$	$3 + e^{3x}$	0,3	3	2,3	1

### Пример решения задания

Для нахождения решения уравнения  $-\frac{d}{dx}\left(k(x,c)\frac{du}{dx}\right) = f(x)$  дважды проинтегрируем его. Первое интегрирование даёт такой результат:

$$u'(x) = -\frac{1}{k(x,c)} \int f(x) dx + c_1.$$

Проинтегрируем полученное соотношение ещё раз:

$$u(x) = -\int \left( \frac{\int f(x) dx}{k(x,c)} \right) dx + c_1 x + c_2.$$

Константы  $c_1$  и  $c_2$  находятся из граничных условий:

$$u(a) = ua, \quad u(b) = ub.$$

Пусть  $k(x,c) = cx$ . Тогда

$$-\frac{d}{dx}\left(cx \frac{du}{dx}\right) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}},$$
$$u(0.5) = 1, \quad u(1) = 2.$$

Проинтегрируем исходное уравнение, получим  $cxu' = -x^{\frac{4}{3}} + c_1$ . Второе интегрирование даёт соотношение  $u(x) = -\frac{3}{4c}x^{\frac{4}{3}} + \frac{c_1}{c} \ln x + c_2$ .

Найдём константы  $c_1$  и  $c_2$  при условии, что  $c=1$ :  
 $u(1) = -\frac{3}{4} + c_2 = 2$ ;  $c_2 = 2.75$ ,  $u(0.5) = -\frac{3}{4}(0.5)^{4/3} + c_1 \ln(0.5) + 2.75 = 1$ ,  
поэтому  $c_1 = 1.780827$ .

Окончательно решение примет вид:

$$u(x, k(x,1)) = -\frac{3}{4}x^{4/3} + 1,780827 \ln x + 2,75.$$

Для проверки можно подставить найденное решение в исходное уравнение и проверить выполнение граничных условий.

### *Решение задачи средствами MathCad*

Плотность источников тепла  $f(x) := \frac{4}{3} \cdot x^3$

Коэффициенты теплопроводности  $k1(x, c) := c \cdot x$

Граничные условия  $a := 0.5 \cdot ua := 1$   $b := 1$   $ub := 2$

Символьное вычисление точного решения краевой задачи для 1-го случая  $k1(x,c) = cx$

$$\int \left[ \int \frac{-f(x) dx}{k1(x,c)} dx + \int \frac{c1}{k1(x,c)} dx + c2 \right] \rightarrow \frac{4}{4} \cdot \frac{x^3}{c} + \frac{c1}{c} \cdot \ln(x) + c2$$

$$u(x, c, c1, c2) := \frac{-3}{4} \cdot \frac{x^4}{c} + \frac{c1}{c} \cdot \ln(x) + c2$$

Нахождение констант для случая  $k1(x,1)$

Given

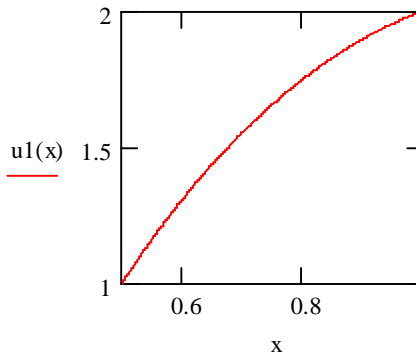
$$u(a, 1, c1, c2) = ua$$

$$u(b, 1, c1, c2) = ub$$

$$\text{Find}(c1, c2) \rightarrow \begin{pmatrix} 1.7808266910973142060 \\ 2.2500000000000000000 \end{pmatrix}$$

$$s1 := 1.78082669109731420 \quad s2 := 2.2500000000000000000$$

$$u1(x) := u(x, 1, s1, s2)$$



### Контрольные вопросы

1. В чём суть метода сеток?
2. Какие точки называются узлами?
3. Что такое шаг сетки?
4. Какие узлы называются внутренними и какие граничными?
5. Как перейти от дифференциального уравнения к разностному (на примере уравнения теплопроводности)?
6. Какое уравнение используется для вычисления текущего слоя?
7. Как вычислить отклонение значений точного решения от приближенного по методу сеток?

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. *Аляев, Ю. А.* Алгоритмизация и языки программирования Pascal, C++, Visual Basic / Ю. А. Аляев, О. А. Козлов — М. : Финансы и статистика, 2004. — 320 с.
2. *Амосов, А. А.* Вычислительные методы для инженеров / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. — М. : Высш. шк., 1994.
3. *Дьяконов, В. П.* MATLAB 6.5 SP 1\7 + Simulink 5\6. Основы применения. Серия «Библиотека профессионала» / В. П. Дьяконов. — М. : СОЛОН-Пресс, 2005. — 800 с.
4. *Копченова, Н. В.* Вычислительная математика в примерах и задачах / Н. В. Кочеткова, И. А. Марон. — М. : Наука. — 1972. — 366 с.
5. *Культин, Н. Б.* Delphi в задачах и примерах / Н. Б. Культин. — СПб. : БХВ, 2003. — 288 с.
6. *Лапчик, М. П.* Численные методы : учеб. пособие для студентов вузов / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. Е. Хеннер ; под ред. М. П. Лапчика. — М. : Академия, 2004.
7. *Макаров, Е. Г.* Инженерные расчеты в MathCad : учеб. курс / Е. Г. Макаров. — СПб. : Питер, 2003.
8. *Наранович, О. И.* Информатика : метод. указания к лаб. работам : в 4 ч. / О. И. Наранович, С. Г. Скобля. — Барановичи : БарГУ, 2005. — Ч. 3. — 36 с.
9. *Петров, В. Н.* Информационные системы / В. Н. Петров. — СПб. : Питер, 2002. — 688 с.: ил.
10. *Плис, А. И.* MathCad. Математический практикум для инженеров и экономистов : учеб. пособие / А. И. Плис, Н. А. Сливина. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Финансы и статистика, 2003.
11. *Синицын, А. К.* Практикум по курсу «Алгоритмы вычислительной математики» : учеб. пособие для студентов 1—2-го курсов всех специальностей / А. К. Синицын. — Минск : БГУИР, 1996. — 73 с.
12. *Соловьев, В. П.* Основы алгоритмизации и программирования : конспект лекций : в 2 ч. / В. П. Соловьев, Т. Н. Кривоносова. — Минск : БГУИР, 2008. — Ч. 2 : Основы численных методов. — 125 с.
13. *Труб, И. И.* Объектно-ориентированное моделирование на C++ : учеб. курс / И. И. Труб. — СПб. : Питер, 2006. — 411 с.: ил.
14. *Туркина, Е. П.* Математическая обработка данных с помощью пакета MathCad : сб. лаб. работ для студентов эконом. специальностей / Е. П. Туркина. — Минск : БГЭУ, 2002. — 24 с.
15. *Турчак, Л. И.* Основы численных методов / Л. И. Турчак. — М. : Наука. — 1987. — 318 с.
16. *Фаронов, В. В.* Delphi: программирование на языке высокого уровня : учеб. для вузов / В. В. Фаронов. — СПб. : Питер, 2005. — 640 с.

*Производственно-практическое издание*

**КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

**Методические указания и задания  
к лабораторным работам для студентов  
специальности 1-40 01 02  
Информационные системы и технологии**

Составитель *О. И. Наранович*

Ведущий редактор *Е. Г. Хохол*  
Технический редактор *М. Л. Потапчик*  
Корректор *Е. П. Сенько*  
Компьютерная вёрстка *Н. В. Ивановой*

Подписано в печать 18.06.2012.  
Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная.  
Гарнитура Таймс. Отпечатано на ризографе.  
Усл. печ. л. 3,95. Уч.-изд. л. 2,05.  
Заказ 110. Тираж 196 экз.

ЛИ 02330/0552803 от 09.02.2010

Издатель и полиграфическое исполнение:  
учреждение образования  
«Барановичский государственный университет»,  
225404, г. Барановичи, ул. Войкова, 21.