

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования «Барановичский государственный университет»

# **СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ**

Методические рекомендации  
по проведению практических занятий

Барановичи  
БарГУ  
2019

УДК 51(075.8)  
ББК 22.1я73  
С71

Составитель  
*Ю. П. Нерода*

Рецензенты:

доцент кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений учреждения образования «Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина», кандидат физико-математических наук *А. И. Басик*;  
заведующий кафедрой технического обеспечения сельскохозяйственного производства и агрономии учреждения образования «Барановичский государственный университет», кандидат технических наук *А. К. Гаврилена*

**С71** **Специальные главы высшей математики** : метод. рекомендации по проведению практ. занятий / Ю. П. Нерода ; М-во образования Респ. Беларусь, Баранович. гос. уни-т. — Барановичи : БарГУ, 2019. — 41 с.  
ISBN 978-985-498-881-8.

Методические рекомендации содержат материал для проведения практических занятий по темам дисциплины «Специальные главы высшей математики» и включают вопросы для подготовки к занятиям, примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения.

Издание предназначено для студентов инженерных специальностей.

УДК 51(075.8)  
ББК 22.1я73

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|  |    |
|--|----|
| <i>Введение</i> .....  | 4  |
| <i>Тема 1</i> Элементы теории множеств .....                                   | 5  |
| <i>Тема 2</i> Элементы комбинаторики .....                                     | 10 |
| <i>Тема 3</i> Элементы математической логики .....                             | 13 |
| <i>Тема 4</i> Булевы функции .....   | 17 |
| <i>Тема 5</i> Элементы теории графов .....                                     | 21 |
| <i>Тема 6</i> Деревья. Свойства деревьев .....                                 | 24 |
| <i>Тема 7</i> Остовы. Алгоритмы построения минимального остовного дерева ..... | 26 |
| <i>Тема 8</i> Циклы. Эйлеровы и гамильтоновы графы. Двудольные графы .....     | 32 |
| <i>Тема 9</i> Целочисленное программирование .....                             | 35 |
| <i>Тема 10</i> Сети. Потоки в сетях .....                                      | 38 |
| Список использованных источников .....   | 43 |
| Список рекомендованных источников .....  | 43 |

Репозиторий БарГУ

## ВВЕДЕНИЕ

Специальные главы высшей математики — учебная дисциплина, завершающая общую математическую подготовку обучающихся. Поскольку математические методы решения различных задач широко применяются в различных дисциплинах, то актуальность изучения этой дисциплины очевидна.

Данные методические рекомендации призваны помочь студентам на практических занятиях дополнить теоретические знания практическими и прикладными знаниями, овладеть навыками использования методов дискретной математики при решении различного рода задач. Они содержат материал по теории множеств, комбинаторике, алгебре логики, теории графов, целочисленному программированию, потокам в сетях. Данные разделы дискретной математики являются методологической основой самых разнообразных задач. Так, элементы теории множеств могут применяться в компьютерном моделировании, для создания реальных объектов. Комбинаторика является древнейшей ветвью математики, располагает столь разнообразными методами, решает столь разнообразные задачи, что трудно четко обозначить ее границы. Булевы функции (функции алгебры логики) описывают логику работы цифровых устройств, называемых комбинационными схемами. Язык графов используется в ряде математических разделов, таких, например, как теория управляющих автоматов, теория алгоритмов, теория цепей Маркова. Широко применяется язык теории графов при описании моделей в экономике, биологии и других областях. Задача целочисленного программирования, например, о назначениях, имеет большое значение в исследовании операций с приложениями к назначению людей на работу, размещению вспомогательных служб, составлению маршрутов транспортных средств и т. д.

На нынешнем этапе инженерно-технического образования в области современных информационных технологий дискретная математика предстает как язык общения «цивилизованных» инженеров. Современный специалист обязан владеть основами математического моделирования и его реализации в компьютерных информационных технологиях, чтобы быть конкурентоспособным и выдерживать темпы научно-технического прогресса. Математические методы выступают в этой связи как возможность дать научный подход к изучению различных физических и социальных явлений реального мира путем составления их математических моделей, которые во многих случаях описываются одними и теми же математическими структурами. Таким образом, математическое моделирование на основе дискретной математики и теории алгоритмов позволяет не только изучить общие закономерности различных производственных задач, но и дать универсальные рекомендации по их решению.

По каждой теме сформулированы вопросы для подготовки к занятию, даются примеры решения задач. Закрепить изученный материал помогут задачи для самостоятельного решения.

Издание рекомендуется студентам инженерных специальностей.

# Т Е М А 1

## ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

### Вопросы для подготовки к занятию

1. Какие два множества являются равными?
2. Как называется множество, в котором нет ни одного элемента?
3. Составьте множество и запишите два элемента, принадлежащие этому множеству, и два элемента, не принадлежащие ему.
4. Какое множество является подмножеством данного множества?
5. Приведите примеры конечных и бесконечных множеств.
6. Перечислите способы задания множеств.
7. Декартово произведение множеств. Бинарное отношение. Свойства бинарных отношений. Примеры.
8. Какое множество является пересечением двух множеств? Приведите пример.
9. Какое множество является объединением двух множеств? Приведите пример.
10. Как вычитаются множества? Приведите пример.
11. Найти объединение, пересечение, разность и симметрическую разность множеств  $A$  и  $B$ , если:
  - а)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ;
  - б)  $A = \{а, б, в, г, д, е\}$ ,  $B = \{а, в, д, к, и\}$ ;
  - в)  $A = \{а, в, д, ж, и, м, н, о\}$ ,  $B = \{в, к, и, о, м, п, с, ф\}$ ;
  - г)  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ .

### Примеры решения задач

1. Доказать, что для любых множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$  выполняется соотношение  $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ .

*Решение.* Покажем решение с помощью диаграмм Эйлера—Венна. На рисунке 1.1,  $a$  и  $b$ , изображено формирование левой части равенства —  $A \vee (B \wedge C)$ .

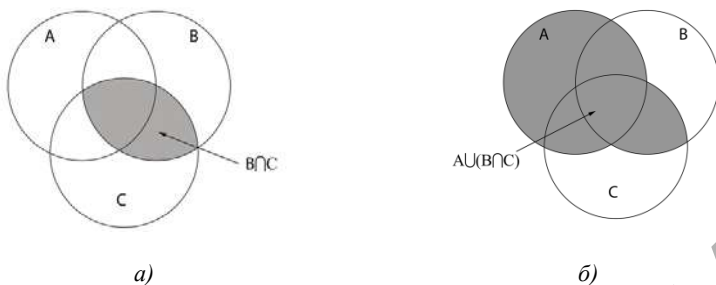


Рисунок 1.1

На рисунке 1.2, а, б и в, изображено формирование правой части —  $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ .

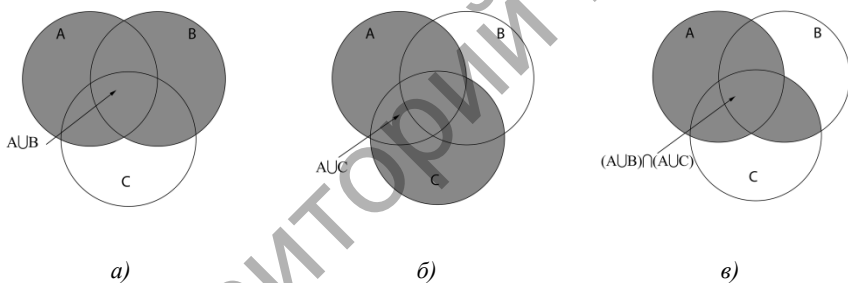


Рисунок 1.2

Видно, что заштрихованные области совпадают. Следовательно,

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

2. В классе учатся 40 человек. Из них по русскому языку имеют «тройки» 19 человек, по математике — 17 и по истории — 22 человека. Только по одному предмету имеют «тройки»: по русскому языку — 4 человека, по математике — 4 человека, по истории — 11 человек. «Тройки» и по математике, и по истории имеют 7 учеников, а 5 учеников — «тройки» по всем предметам (рис. 1.3).

а) Сколько человек учится без «троек»?

б) Сколько человек имеют «тройки» по двум из трёх предметов?

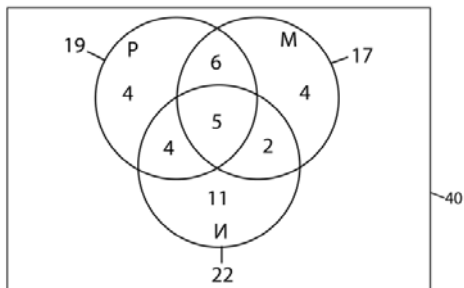


Рисунок 1.3

*Решение.*

$$1) \quad 40 - (4 + 6 + 4 + 4 + 5 + 2 + 11) = 4;$$

$$2) \quad 6 + 4 + 2 = 12.$$

*Ответ:* 4 человека учится без «троек»; 12 человек имеют «тройки» по двум из трех предметов.

3. Из сотрудников фирмы 16 побывали во Франции, 10 — в Италии, 6 — в Англии; в Англии и Италии — 5; в Англии и Франции — 6; во всех трех странах — 5 сотрудников (рис. 1.4). Сколько человек посетили и Италию, и Францию, если всего в фирме работают 19 человек и каждый из них побывал хотя бы в одной из названных стран? [1].

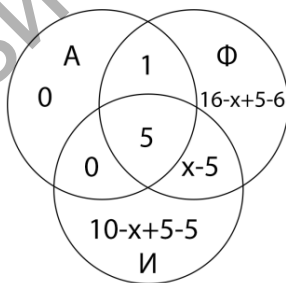


Рисунок 1.4

*Решение.* Нам известно, что во всех трех странах было 5 сотрудников. В Англии и Италии тоже 5, значит эти же сотрудники были и во Франции и поэтому в пересечении кругов А и И ставим 0. Во Франции и Италии нам неизвестно, поэтому пишем  $(x - 5)$

в пересечении кругов А и Ф. Так как в Англии было 6 человек, то  $6 - 5 - 1 = 0$ , пишем 0, во Франции  $(16 - x + 5 - 6)$  и Италии  $(10 - x + 5 - 5)$ . Всего в фирме 19 сотрудников, то остается составить и решить уравнение:

$$1 + (16 - x + 5 - 6) + 5 + (x - 5) + (10 - x + 5 - 5) = 19.$$

Отсюда  $x = 7$ , значит, в Италии и Франции побывало  $7 - 5 = 2$  сотрудника фирмы.

*Ответ:* 2 сотрудника.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите для каждой тройки множеств  $A, B, C$  результаты операций:  $A \cap (B \cup C)$ ;  $A \cup (B \cap C)$ ;  $(A \cup B) \cap C$ ;  $(A \cap C) \cup (A \cap B)$ ;  $(A \cup C) \cap B$ ;  $(A \cap B) \cup C$ , если:

- а)  $A = \{2; 3; 4\}$ ,  $B = \{3; 6\}$ ,  $C = N$ ;
- б)  $A = \{1; 2; 3\}$ ,  $B = \{2; 4\}$ ,  $C = [2; 8]$ ;
- в)  $A = [2; 3]$ ,  $B = (0; 4]$ ,  $C = \{1; 2; 3; 4\}$ ;
- г)  $A = (2; 5)$ ,  $B = (0; 6]$ ,  $C = [-1; 3]$ ;
- д)  $A = [2; \infty)$ ,  $B = (-3; 4]$ ,  $C = (0; 6)$ .

2. Перечислите элементы множеств  $A \times B$ ,  $B \times A$ :

- а)  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{3; 4, 5\}$ ;
- б)  $A = \emptyset$ ,  $B = \{1, 2, 3; 4\}$ .

3. Для каждого из следующих бинарных отношений выясните, какими свойствами (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) оно обладает и какими не обладает:

- а)  $\rho = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (1, 3), (3, 2), (3, 3)\}$  на множестве  $X = \{1, 2; 3\}$ ;
- б)  $\rho = \{(x, y) : x - y \in Z\}$  на множестве  $X = R$ .

4. Пусть даны множества  $A, B, C$  и  $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$  — дополнения соответствующих множеств  $A, B, C$  до универсального множества  $U$  ( $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ ). Изобразите с помощью кругов Эйлера следующие множества:

1)  $(\bar{A} \vee \bar{B}) \wedge C$ ;

2)  $(\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C})$ ;

3)  $(A \setminus B) \wedge C$ ;

4)  $(A \vee B) \setminus \bar{C}$ ;

5)  $(\overline{A \vee B}) \wedge C$ ;

6)  $(\bar{B} \setminus \bar{A}) \wedge \bar{C}$ ;

7)  $\bar{A} \setminus (B \wedge C)$ ;

8)  $(B \vee \bar{C}) \setminus A$ ;

9)  $(A \setminus \bar{C}) \vee B$ ;

10)  $(\overline{A \vee B \vee C})$ ;

11)  $(B \setminus \bar{C}) \vee A$ ;

12)  $(A \vee \bar{B}) \wedge \bar{C}$ ;

13)  $(\overline{A \vee B}) \wedge C$ ;

14)  $(\bar{B} \setminus \bar{A}) \wedge \bar{C}$ .

5. В двух группах учатся 50 курсантов. Для прибытия в институт 12 из них пользуются автобусом, 18 добираются пешком, 7 и идут, и едут в автобусе. Используя теорию множеств, найдите:

а) Сколько человек или добираются пешком или пользуются автобусом?

б) Сколько человек пользуются только автобусом?

в) Сколько человек пользуются другим транспортом?

6. Первая рота 1-го курса состоит из 70 курсантов. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 курсантов из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок, и хор.

Найти:

а) Сколько курсантов не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке?

б) Сколько человек, занимающихся в драмкружке и в хоре, не занимаются спортом?

в) Сколько спортсменов драмкружка не поют в хоре?

г) Сколько поющих спортсменов не посещают драмкружок?

д) Сколько спортсменов посещают хор или драмкружок?

е) Сколько увлекаются только спортом?

7. Из 100 семиклассников, выполнивших практическое задание по физике, 75 сделали модели, 65 — эскиз фонтана, 10 человек ничего не сделали. Сколько учеников сделали модель и эскиз?

8. В классе 38 человек. Из них 16 играют в баскетбол, 17 — в хоккей, 18 — в футбол. Увлекаются двумя видами спорта — баскетболом и хоккеем — четверо, баскетболом и футболом — трое, футболом

и хоккеем — пятеро. Трое не увлекаются ни баскетболом, ни хоккеем, ни футболом.

- а) Сколько ребят увлекаются одновременно тремя видами спорта?
- б) Сколько ребят увлекаются лишь одним из этих видов спорта?

## Т Е М А 2 ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

### Вопросы для подготовки к занятию

1. Чем занимается комбинаторный анализ?
2. Понятие факториала. Чему равно  $0!$ ,  $1!$ ,  $5!$  ?
3. Основные формулы комбинаторики (без повторений и с повторениями элементов).
4. Вычислите  $A_n^1$ ,  $A_6^4$ ,  $A_6^6$ ,  $\bar{A}_n^1$ ,  $\bar{A}_6^4$ ,  $C_n^1$ ,  $C_n^0$ ,  $C_6^3$ ,  $\bar{C}_2^4$ .
5. Применение формул комбинаторики.
6. Правила сложения и умножения в комбинаторике.

### Примеры решения задач

1. В шахматном турнире принимают участие 12 человек. Сколько будет сыграно партий, если любые два участника встретятся между собой один раз?

*Решение.* Имеем множество, состоящее из 12 элементов. Так как нам нужно определить количество партий, т. е. подмножеств, куда входят 2 элемента, то речь идет о сочетании без повторений из 12 элементов по 2 элемента. Это можно подсчитать следующим образом:

$$C_{12}^2 = \frac{12!}{(12-2)! \cdot 2!} = \frac{10! \cdot 11 \cdot 12}{10! \cdot 2} = 66.$$

*Ответ:* 66 партий.

2. Студенческая группа состоит из 23 человек, среди которых 10 юношей и 13 девушек. Сколькими способами можно выбрать двух человек одного пола?

*Решение.* Условие «выбрать двух человек одного пола» подразумевает, что необходимо выбрать двух юношей *или* двух девушек:

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{8! \cdot 2} = 45$$

способами можно выбрать 2 юношей;

$$C_{13}^2 = \frac{13!}{11! \cdot 2!} = \frac{11! \cdot 12 \cdot 13}{11! \cdot 2} = 78$$

способами можно выбрать 2 девушек.

Таким образом, двух человек одного пола (без разницы — юношей *или* девушек) можно выбрать:

$$C_{10}^2 + C_{13}^2 = 45 + 78 = 123.$$

*Ответ:* 123 способами.

3. Согласно государственному стандарту, автомобильный номерной знак состоит из 3 цифр и 3 букв. При этом недопустим номер с тремя нулями, а буквы выбираются из набора А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х (*используются только те буквы кириллицы, написание которых совпадает с латинскими буквами*) [2].

Сколько различных номерных знаков можно составить для региона?

*Решение.*

$\overline{A}_{10}^3 = 10^3 = 1000$  способами можно составить цифровую комбинацию автомобильного номера, при этом одну из них (000) следует исключить:  $\overline{A}_{10}^3 - 1 = 1000 - 1 = 999$ .

$\overline{A}_{12}^3 = 12^3 = 1728$  способами можно составить буквенную комбинацию автомобильного номера.

По правилу умножения комбинаций всего можно составить:

$$(\overline{A}_{10}^3 - 1) \cdot \overline{A}_{12}^3 = 999 \cdot 1728 = 1726272$$

автомобильных номера (каждая цифровая комбинация сочетается с каждой буквенной комбинацией).

Ответ: 1 726 272 способов.

### Задачи для самостоятельного решения

1. В соревнованиях по фигурному катанию принимали участие россияне, итальянцы, украинцы, немцы, китайцы и французы.

Сколькими способами могут распределиться места по окончании соревнований?

2. Сколько четных двузначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 3, 6, 7, 9?

3. В студенческой столовой на первое можно заказать борщ, солянку, грибной суп, на второе — мясо с макаронами, рыбу с картошкой, курицу с рисом, а на третье — чай и компот. Сколько различных вариантов обедов можно составить из указанных блюд?

4. Мисс Марпл, расследуя убийство, заметила отъезжающее от дома мистера Дэвидсона такси. Она запомнила первую цифру «2». В городке номера машин были трехзначные и состояли из цифр 1, 2, 3, 4 и 5. Скольких водителей, в худшем случае, ей придется опросить, чтобы найти настоящего убийцу?

5. В ювелирную мастерскую привезли 6 изумрудов, 9 алмазов и 7 сапфиров. Ювелиру заказали браслет, в котором 3 изумруда, 5 алмазов и 2 сапфира. Сколькими способами он может выбрать камни на браслет?

6. В студенческом общежитии в одной комнате живут трое студентов — Петя, Вася и Коля. У них есть 6 чашек, 8 блюдец и 10 чайных ложек (все принадлежности отличаются друг от друга). Сколькими способами ребята могут накрыть стол для чаепития (так, что каждый получит чашку, блюдце и ложку)?

7. В кабинете заведующего ювелирным магазином имеется код, состоящий из двух различных гласных букв русского алфавита, за

которыми следуют 3 различные цифры. Сколько вариантов придется перебрать мошеннику, чтобы раздобыть драгоценности, которые там хранятся?

8. Пете на день рождения подарили 7 новых дисков с играми, а Вале папа привез 9 дисков из командировки. Сколькими способами они могут обменять 4 любых диска одного на 4 диска другого?

9. Буквы азбуки Морзе состоят из символов — точка и тире. Сколько букв получим, если потребуем, чтобы каждая буква состояла не более чем из пяти указанных символов?

10. Сколько различных перестановок букв можно сделать в словах: а) диплом; б) математика?

11. Сколько существует различных четырехзначных чисел, в записи которых используются только четные цифры?

12. Сколько существует четырехзначных чисел, в записи которых все цифры различны?

13. Сколько существует различных четырехзначных чисел, в записи которых ровно две девятки, стоящие рядом?

### Т Е М А 3

## ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

### Вопросы для подготовки к занятию

1. Методы решения логических задач.
2. Математическая логика: понятия, история развития.
3. Высказывания.
4. Предикаты.
5. Квантор общности.
6. Квантор существования.
7. Логические операции: отрицание. Таблица истинности.
8. Логические операции: конъюнкция. Таблица истинности.

9. Логические операции: дизъюнкция. Таблица истинности.
10. Логические операции: импликация. Таблица истинности.
11. Логические операции: эквиваленция. Таблица истинности.
12. Приоритет логических операций.
13. Тавтологии и противоречия.
14. Важнейшие тавтологии логики высказываний.

### Примеры решения задач

1. Представить логической формулой следующее высказывание:

Если идет дождь, то крыши мокрые. Дождя нет, а крыши мокрые.

*Решение.* Сложное высказывание «Если идет дождь, то крыши мокрые. Дождя нет, а крыши мокрые» включает два простых высказывания:  $A$  — «Идет дождь»,  $B$  — «Крыши мокрые».

В первом предложении «Если идет дождь, то крыши мокрые» высказывания  $A$ ,  $B$  соединены связкой «если ..., то...»:  $A \rightarrow B$ ;

Во втором «Дождя нет, а крыши мокрые» союз «а» имеет смысл связки «и» ( $\wedge$ ), и, кроме того, высказывание  $A$  следует взять с отрицанием:  $\bar{A} \wedge B$ ;

Остается объединить представленные выше два высказывания в одно связкой  $\wedge$ :

$$(A \rightarrow B) \wedge (\bar{A} \wedge B);$$

*Ответ:*  $(A \rightarrow B) \wedge (\bar{A} \wedge B)$ .

2. Упростить выражения:

а)  $A \vee (\overline{A \vee B})$ ;

б)  $(A \rightarrow B) \vee (A \wedge A)$ .

*Решение:* а)  $A \vee (\overline{A \vee B}) = A \vee (\bar{A} \wedge \bar{B}) = A \vee (\bar{A} \wedge B) = A \vee B$ ;

б)  $(A \rightarrow B) \vee (A \wedge A) = (\bar{A} \vee B) \vee A = (\bar{A} \vee A) \vee B = 1 \vee B = 1$ .

*Ответ:* а)  $A \vee B$ ; б) 1.

3. Задача о синоптике. На вопрос, какая завтра будет погода, синоптик ответил:

а) Если не будет ветра, то будет пасмурная погода без дождя.

б) Если будет дождь, то будет пасмурно и без ветра.

в) Если будет пасмурная погода, то будет дождь и не будет ветра.

Так какая же погода будет завтра? [3].

*Решение.*

а) Выделим простые высказывания и запишем их через переменные:  $A$  — «Ветра нет»,  $B$  — «Пасмурно»,  $C$  — «Дождь»;

б) Запишем логические функции (сложные высказывания) через введенные переменные:

Если не будет ветра, то будет пасмурная погода без дождя:

$$A \rightarrow B \wedge \bar{C}.$$

Если будет дождь, то будет пасмурно и без ветра:  $C \rightarrow B \wedge A$ .

Если будет пасмурная погода, то будет дождь и не будет ветра:  $B \rightarrow C \wedge A$ .

Запишем произведение указанных функций:

$$F = (A \rightarrow B \wedge \bar{C}) \wedge (C \rightarrow B \wedge A) \wedge (B \rightarrow C \wedge A).$$

Упростим формулу согласно законам логики:

$$\begin{aligned} F &= (A \rightarrow B \wedge \bar{C}) \wedge (C \rightarrow B \wedge A) \wedge (B \rightarrow C \wedge A) = \\ &= (\bar{A} \vee B \wedge \bar{C}) \wedge (\bar{C} \vee B \wedge A) \wedge (\bar{B} \vee C \wedge A) = \\ &= (\bar{A} \vee B \wedge \bar{C}) \wedge (\bar{B} \vee C \wedge A) \wedge (\bar{C} \vee B \wedge A) = \\ &= \bar{A} \wedge \bar{B} \vee B \wedge \bar{C} \wedge \bar{B} \vee \bar{A} \wedge C \wedge A \vee B \wedge \bar{C} \wedge C \wedge A) \wedge \\ &\wedge (\bar{C} \vee B \wedge A) = \bar{A} \wedge \bar{B} \wedge (\bar{C} \vee B \wedge A) = \\ &= \bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C} \vee \bar{A} \wedge \bar{B} \wedge B \wedge A = \bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}; \end{aligned}$$

в) Приравняем результат к единице, т. е. наше выражение должно быть истинным  $F = \bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C} = 1$ . Проанализируем результат: логическое произведение равно 1, если каждый множитель равен 1.

$\bar{A} = 1; \bar{B} = 1; \bar{C} = 1$ . Значит  $A = 0; B = 0; C = 0$ .

*Ответ:* погода будет ясная, без дождя, но ветреная.

## Задачи для самостоятельного решения

1. Представить логическими формулами следующие высказывания:

- а) Сегодня понедельник или вторник.
- б) Идет снег или дождь.
- в) Что в лоб, что по лбу.
- г) Если я куплю яблоки или абрикосы, то приготовлю фруктовый пирог.
- д) Катя самая высокая девочка в классе, и в классе есть девочки выше Кати.
- е) Если Игорь знает английский или японский язык, то он получит место переводчика.

2. Перевести каждое из следующих рассуждений в логическую символику и проанализировать результат рассуждений:

а) Намеченная атака удастся, только если захватить противника врасплох или же если позиции его плохо защищены. Захватить его врасплох можно только, если он беспечен. Он не будет беспечен, если его позиции плохо защищены. Значит, атака не удастся.

б) В бюджете возникнет дефицит, если не повысят пошлины. Если в бюджете имеется дефицит, то государственные расходы на общественные нужды сократятся. Значит, если повысят пошлины, то государственные расходы на общественные нужды не сократятся.

в) Если подозреваемый совершил эту кражу, то либо она была тщательно подготовлена, либо он имел соучастника. Если бы кража была подготовлена тщательно, то, если бы был соучастник, украдено было бы гораздо больше. Значит, подозреваемый невиновен.

г) Если сегодня вечером будет мороз, то я пойду на каток. Если завтра будет оттепель, то я пойду в музей. Сегодня вечером будет мороз или завтра будет оттепель. Следовательно, я пойду на каток и в музей.

д) Если он автор этого слуха, то он глуп или беспринципен. Он не глуп и не лишен принципов. Значит, не он автор этого слуха.

е) Для того чтобы сдать экзамен, мне необходимо достать учебник или конспект (лекций). Я достану конспект только в том случае, если мой приятель не уедет. Он уедет, только если я достану учебник. Значит, я сдам экзамен.

ж) Зарботная плата возрастет, если только будет инфляция. Если будет инфляция, то увеличится стоимость жизни. Зарботная плата возрастет. Следовательно, увеличится стоимость жизни.

3. По подозрению в совершенном преступлении задержали Иванова, Петрова и Сидорова. Один из них был уважаемым в городе стариком, другой был малоизвестным чиновником, третий — известным мошенником. В процессе следствия старик говорил правду, мошенник лгал, а третий задержанный в одном случае говорил правду, а в другом — ложь. Вот что они утверждали:

*Иванов:* «Я совершил это. Петров не виноват».

*Петров:* «Иванов не виноват. Преступление совершил Сидоров».

*Сидоров:* «Я не виноват. Виноват Иванов».

Требуется определить фамилии старика, мошенника и чиновника, и кто из них виноват, если известно, что преступник один.

4. Определить, является ли формула тавтологией, противоречием или ни тем, ни другим:

а)  $A \wedge (\bar{A} \vee \bar{B})$ ; б)  $A \rightarrow (A \wedge B)$ ; в)  $\bar{A} \rightarrow (A \rightarrow B)$ .

5. Было совершено преступление.

Первый свидетель заявил: «Преступник — брюнет, одетый в черное пальто».

Второй возразил: «Неправда, преступник — блондин в синем пальто».

Третий сказал: «Преступник — человек с рыжими волосами в нечерном пальто».

Какого цвета волосы и пальто преступника, если известно, что в каждом утверждении есть хотя бы одно истинное высказывание?

## Т Е М А 4 БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

### Вопросы для подготовки к занятию

1. Дайте определение основных логических операций булевой алгебры.
2. Дайте определение булевой функции.
3. Что такое таблицы истинности булевой функции?
4. Правила построения таблицы истинности.

5. Сколько существует различных булевых функций  $n$  переменных?

6. Булевы функции от одного аргумента.

7. Булевы функции от двух аргументов.

8. Равносильные формулы алгебры логики.

9. Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ).

Правила построения СКНФ по таблице истинности.

10. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ).

Правила построения СДНФ по таблице истинности.

### Примеры решения задач

1. С помощью таблицы истинности убедиться в справедливости законов де Моргана  $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$ .

*Решение.* Построим таблицу истинности для  $\overline{x \wedge y}$  и  $\bar{x} \vee \bar{y}$ :

| $x$ | $y$ | $x \wedge y$ | $\overline{x \wedge y}$ | $\bar{x}$ | $\bar{y}$ | $\bar{x} \vee \bar{y}$ |
|-----|-----|--------------|-------------------------|-----------|-----------|------------------------|
| 0   | 0   | 0            | 1                       | 1         | 1         | 1                      |
| 0   | 1   | 0            | 1                       | 1         | 0         | 1                      |
| 1   | 0   | 0            | 1                       | 0         | 1         | 1                      |
| 1   | 1   | 1            | 0                       | 0         | 0         | 0                      |

Так как в таблице истинности булевым функциям  $\overline{x \wedge y}$  и  $\bar{x} \vee \bar{y}$  соответствуют одинаковые столбцы, то формулы  $\overline{x \wedge y}$  и  $\bar{x} \vee \bar{y}$  равносильны.

2. Построить СКНФ и СДНФ по таблице истинности:  $(X \rightarrow Y) \wedge Z \vee \bar{X}$ .

*Решение.*

Составим таблицу истинности для функции  $F = (X \rightarrow Y) \wedge Z \vee \bar{X}$ .

| $X$ | $Y$ | $Z$ | $X \rightarrow Y$ | $(X \rightarrow Y) \wedge Z$ | $\bar{X}$ | $F$ |
|-----|-----|-----|-------------------|------------------------------|-----------|-----|
| 0   | 0   | 0   | 1                 | 0                            | 1         | 1   |
| 0   | 0   | 1   | 1                 | 1                            | 1         | 1   |
| 0   | 1   | 0   | 1                 | 0                            | 1         | 1   |
| 0   | 1   | 1   | 1                 | 1                            | 1         | 1   |
| 1   | 0   | 0   | 0                 | 0                            | 0         | 0   |
| 1   | 0   | 1   | 0                 | 0                            | 0         | 0   |
| 1   | 1   | 0   | 1                 | 0                            | 0         | 0   |
| 1   | 1   | 1   | 1                 | 1                            | 0         | 1   |

Ответ:

$F = (\bar{X} \vee Y \vee Z) \wedge (\bar{X} \vee Y \vee \bar{Z}) \wedge (\bar{X} \vee \bar{Y} \vee Z)$  — СКНФ;

$F = (\bar{X} \wedge \bar{Y} \wedge \bar{Z}) \vee (\bar{X} \wedge \bar{Y} \wedge Z) \vee (\bar{X} \wedge Y \wedge \bar{Z}) \vee (\bar{X} \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z)$  — СДНФ.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Построить таблицы истинности для формул:

- а)  $(x \wedge y \vee \bar{z}) \leftrightarrow (\bar{y} \rightarrow z)$ ;
- б)  $(x \vee y \vee \bar{z}) \rightarrow (x \downarrow \bar{y})$ ;
- в)  $(x \vee y \vee \bar{z})(x \downarrow y) \rightarrow \bar{z}$ ;
- г)  $x \wedge y \wedge \bar{z} \vee \bar{x} \wedge \bar{y} \vee (y \rightarrow \bar{z})$ ;
- д)  $(x \rightarrow y) \leftrightarrow (x \vee y \wedge \bar{z})$ ;
- е)  $(x \leftrightarrow \bar{y})(x \rightarrow z) \vee \bar{x}$ ;
- ж)  $(x \vee \bar{y} \vee z) \rightarrow (x \vee y \wedge \bar{z})$ .

2. Является ли формула  $[(A \rightarrow B) \wedge A] \rightarrow (A \leftrightarrow B)$  абсолютно истинной?

3. Вернувшись домой, Мегрэ позвонил на набережную Орфевр.

– Говорит Мегрэ. Есть новости?

– Да, шеф. Поступили сообщения от инспекторов. Торранс установил, что если Франсуа был пьян, то либо Этьен убийца, либо Фран-

суа лжет. Жюсьен считает, что или Этьен убийца, или Франсуа не был пьян, и убийство произошло после полуночи. Люка (инспектор) просил передать, что если убийство произошло после полуночи, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Затем звонил...

– Все, спасибо. Этого достаточно. — Комиссар положил трубку. Он знал, что трезвый Франсуа никогда не лжет. Теперь он знал все.

Кто убийца?

4. Упростить выражения  $\overline{A \wedge B} \vee \overline{B}$ ,  $\overline{B \wedge C} \vee C$ ,  $\overline{A \wedge C} \vee B \wedge \overline{C}$  так, чтобы в полученных формулах не содержалось отрицания сложных высказываний.

5. На множестве  $A = \{1, 2; 3; 4 \dots 25\}$  заданы предикаты  $A(x)$ : «Число  $x$  делится на 3»,  $B(x)$ : «Число  $x$  — нечетное»,  $C(x)$ : «Число  $x$  делится на 7». Сформулируйте следующие предикаты и найдите их множества истинности:

а)  $A(x) \wedge B(x)$ ; б)  $A(x) \vee B(x)$ ; в)  $A(x) \wedge C(x)$ ; г)  $B(x) \vee C(x)$ .

6. Построить СКНФ и СДНФ по таблице истинности:

| $x$ | $y$ | $z$ | $F$ |
|-----|-----|-----|-----|
| 0   | 0   | 0   | 1   |
| 0   | 0   | 1   | 1   |
| 0   | 1   | 0   | 0   |
| 0   | 1   | 1   | 0   |
| 1   | 0   | 0   | 1   |
| 1   | 0   | 1   | 1   |
| 1   | 1   | 0   | 0   |
| 1   | 1   | 1   | 1   |

## Т Е М А 5 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

### Вопросы для подготовки к занятию

1. Что называется графом? Ориентированным графом?
2. Что называется вершинами графа? Ребрами?
3. Какие ребра и какие вершины графа называются смежными?
4. Какой граф называется мультиграфом?
5. Какой граф называется полным? Дополнением?
6. Что называется петлей? Цепью? Циклом? Путем в графе?
7. Какой граф называется деревом?
8. Что называется суммой графов? Пересечением? Композицией?
9. Что называется декартовым произведением графов?
10. Что называется степенью графа?
11. С помощью каких матриц можно задать граф?

### Примеры решения задач

1. Между 9 планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля — Меркурий, Плутон — Венера, Земля — Плутон, Плутон — Меркурий, Меркурий — Венера, Уран — Нептун, Нептун — Сатурн, Сатурн — Юпитер, Юпитер — Марс и Марс — Уран. Можно ли добраться (возможны пересадки) с Земли до Марса?

*Решение.* Нарисуем схему: планетам будут соответствовать точки, а соединяющим их маршрутам — непересекающиеся между собой линии (рис. 5.1).

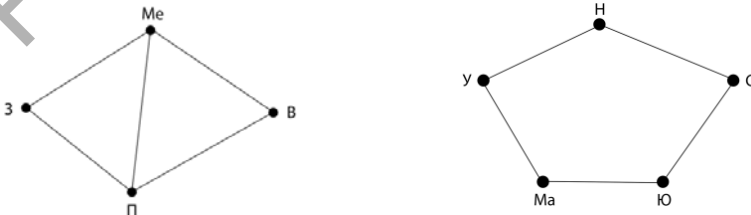


Рисунок 5.1

Сделав набросок рисунка маршрутов, мы нарисовали граф, соответствующий условию задачи. Видно, что все планеты Солнечной системы разделились на две не связанных между собой группы. Земля принадлежит одной группе, а Марс — второй. Долететь с Земли до Марса нельзя.

*Ответ:* нельзя.

2. В деревне есть 15 телефонов, а АТС отсутствует. Можно ли телефоны соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими?

*Решение.* Предположим, что это возможно. Рассмотрим граф, вершины которого соответствуют телефонам, а ребра — соединяющим их проводам. В этом графе 15 вершин, степень каждой из которых равна пяти. Подсчитаем количество ребер в этом графе. Для этого сначала просуммируем степени всех его вершин. Ясно, что при таком подсчете каждое ребро учтено дважды (оно ведь соединяет две вершины!). Поэтому число ребер графа должно быть равно  $(15 \cdot 5) / 2$ . Но это число нецелое. Следовательно, такого графа не существует, а значит, и соединить телефоны требуемым образом невозможно.

*Ответ:* нельзя.

3. На концерте каждую песню исполняли двое артистов, и никакая пара не выступала вместе более одного раза. Всего было 12 артистов, каждый выступил по 5 раз. Сколько было песен?

*Решение.* Рассмотрим граф, вершинами которого являются выступавшие артисты. Соединим пару артистов ребром, если они вместе пели. Получим граф с 12 вершинами степени 5, каждой песне соответствует ребро. Аналогично предыдущему примеру, в графе  $(12 \cdot 5) / 2 = 30$  ребер, т. е. было 30 песен.

*Ответ:* 30 песен.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Изобразите графически:
  - а) неориентированное и ориентированное ребро;
  - б) плоский граф;
  - в) полный неориентированный граф на трех, четырех и пяти вершинах;
  - г) неполный ориентированный граф на пяти вершинах;

- д) петлю графа;
- е) неориентированный и ориентированный мультиграф.

2. Сколько диагоналей в 17-угольнике?

3. Ваня и Миша играют в такую игру. Они по очереди связывают 5 столбиков ленточками попарно. Кто свяжет последнюю пару столбиков, тот выиграл. Кто победит — тот, кто завяжет первую ленточку, или его соперник?

4. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией тогда и только тогда, когда двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли из города 1 добраться в город 9?

5. На остров Коневец завезли 13 телефонов. Настоятель хочет организовать такую схему телефонной связи, чтобы соединить каждый телефон ровно с семью другими. Удастся ли ему это?

6. Один из ребят сказал: «А у нас в классе 25 человек, и каждый дружит ровно с семью одноклассниками!» «Не может быть этого», — ответил приятелю Витя Иванов, победитель олимпиады. Почему он так ответил?

7. В классе 28 человек. Каждая девочка дружит с 4 мальчиками, а каждый мальчик — с 3 девочками. Сколько в классе мальчиков и девочек?

8. Необходимо составить фрагмент расписания для одного дня с учетом следующих обстоятельств:

а) учитель истории может дать либо первый, либо второй, либо третий урок, но только один;

б) учитель литературы может дать только один урок, либо второй, либо третий;

в) математик готов дать либо только первый, либо только третий урок;

г) преподаватель физкультуры согласен дать только последний урок.

Сколько и каких вариантов расписания, удовлетворяющего всем вышеперечисленным условиям одновременно, можно составить?

## Т Е М А 6 ДЕРЕВЬЯ. СВОЙСТВА ДЕРЕВЬЕВ

### Вопросы для подготовки к занятию

1. Что называется графом? Приведите примеры.
2. Что такое дерево? Лес?
3. Какими свойствами обладают деревья?

### Примеры решения задач

1. На пришкольном участке растут 8 деревьев: яблоня, тополь, береза, рябина, дуб, клен, лиственница и сосна. Рябина выше лиственницы, яблоня выше клена, дуб ниже березы, но выше сосны, сосна выше рябины, береза ниже тополя, а лиственница выше яблони. Расположите деревья от самого низкого к самому высокому.

*Решение.* Вершины графа — это деревья, обозначенные первой буквой названия дерева. В данной задаче два отношения: «быть ниже» и «быть выше». Рассмотрим отношение «быть ниже» и проведем стрелки от более низкого дерева к более высокому. Если в задаче сказано, что рябина выше лиственницы, то стрелку ставим от лиственницы к рябине и т. д. Получаем граф, на котором видно, что самое низкое дерево — клен, затем идут яблоня, лиственница, рябина, сосна, дуб, береза и тополь (рис. 6.1).

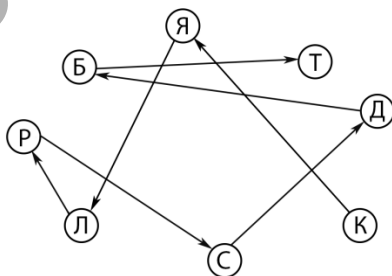


Рисунок 6.1

*Ответ:* самое низкое дерево — клен, самое высокое — тополь.

2. У Наташи есть 2 конверта: обычный и авиа, и 3 марки: прямоугольная, квадратная и треугольная (рис. 6.2). Сколькими способами Наташа может выбрать конверт и марку, чтобы отправить письмо?

*Решение.*

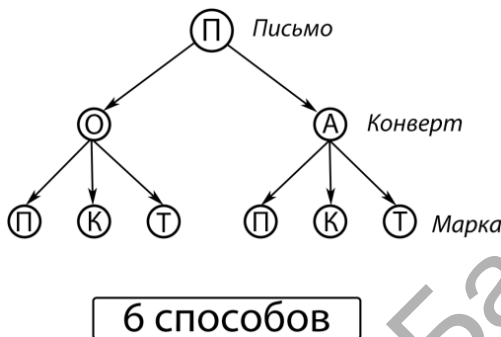


Рисунок 6.2

*Ответ:* 6 способов.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Построить вероятностное дерево исходов двух подбрасываний монеты на твердую поверхность.

2. Поступающий на физмат должен сдать три вступительных экзамена по десятибалльной системе. Сколькими способами он может сдать экзамены, чтобы быть принятым в университет, если проходной балл в тот год составил 28 баллов?

3. Сколько различных обедов П. И. Чичиков мог насчитать из блюд, выставленных на столе у П. П. Петуха, если бы на каждый обед выбирать только одно холодное блюдо, одно первое блюдо и одно второе блюдо? На столе у П. П. Петуха на этот раз были выставлены из холодных блюд студень с хреном, свежая икра, свежепросоленная белужина; на первое — уха из стерлядей, щи с грибами; на второе — осетрина жареная, теленок, жаренный на вертеле.

4. Какое наибольшее количество разрезов можно сделать в волейбольной сетке  $5 \times 10$  так, чтобы она не распалась? [4].

5. В рыболовной прямоугольной сетке размером  $4 \times 5$  ячеек по очереди перерезают по одной веревочке так, чтобы сетка не распалась на куски. Победитель тот, кто разрежет последнюю веревочку. Кто выиграет при правильной игре? (А размером  $5 \times 20$ )

6. Дерево имеет три вершины степени 3 и четыре вершины степени 2. Остальные вершины дерева имеют степень 1. Сколько вершин дерева имеет степень 1?

7. В шахматном турнире по олимпийской системе участвуют 8 человек. Сколько всего встреч будет проведено?

8. Пять учеников — Алик, Витя, Степа, Дима и Леня — приехали из разных городов: Москвы, Риги, Нижнего Новгорода, Киева и Ярославля. О том, кто откуда приехал, получено четыре ответа, в каждом из которых одна половина ответа верна, а другая — нет: Алик приехал из Риги, а Дима — из Нижнего Новгорода; Витя приехал из Риги, а Степа — из Киева; Степа приехал из Риги, а Дима — из Москвы; Леня приехал из Ярославля, а Алик — из Москвы.

Назвать город, из которого приехал каждый из учеников.

## Т Е М А 7

### **ОСТОВЫ. АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ОСТОВОВ МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА**

#### **Вопросы для подготовки к занятию**

1. Задача о построении минимального остовного (порождающего) дерева.

2. Алгоритм Краскала.

3. Алгоритм Прима.

4. Алгоритм Борувки.

## Примеры решения задач

1. Дан взвешенный связный неориентированный граф, состоящий из пяти вершин (рис. 7.1). Необходимо найти остов минимального веса с помощью алгоритма Краскала [5].

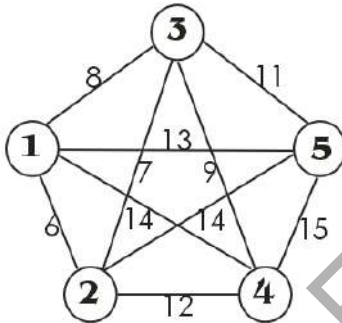


Рисунок 7.1

*Решение.* Выбираем вершину начала построения остова минимального веса, например, первую вершину.

Шаг 1. Найдено ребро минимального веса:  $1-2 = 6$ . Полученный остов на рисунке 7.2

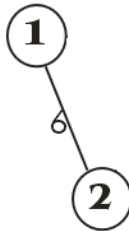


Рисунок 7.2

Шаг 2. Найдено ребро минимального веса:  $2-3 = 7$ . Полученный остов на рисунке 7.3.

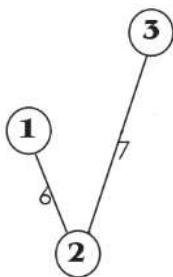


Рисунок 7.3

Шаг 3. Найдено ребро минимального веса:  $3-4 = 9$ . Полученный осто́в на рисунке 7.4.

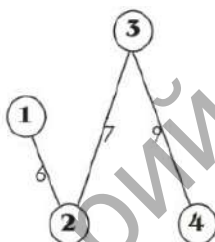


Рисунок 7.4

Шаг 4. Найдено ребро минимального веса:  $3-5 = 11$ .

Рассмотрены все вершины и инцидентные ребра этим вершинам, оставшиеся образуют цикл в полученном минимальном осто́ве. А это не удовлетворяет условиям поставленной задачи.

На четвертом шаге получили окончательный осто́в минимального веса, который представлен на рисунке 7.5

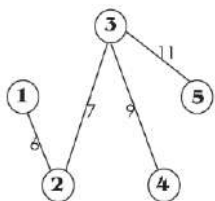


Рисунок 7.5

При изменении вершины начала построения конфигурация остова минимального веса не изменится, а изменится лишь последовательность построения ребер остова.

Например, если в качестве начальной вершины выбрать четвертую вершину, то последовательность этапов построения остова минимального веса будет выглядеть следующим образом:

Шаг 1.  $4-3 = 9$ ;

Шаг 2.  $3-2 = 7$ ;

Шаг 3.  $2-1 = 6$ ;

Шаг 4.  $3-5 = 11$ .

При этом конфигурация остова останется прежней.

*Ответ:* 33.

2. На территории некоего города  $N$  размещены заводы и магазины, в которые поставляется продукция с этих заводов. В результате разработки были определены возможные трассы для прокладки коммуникаций и оценена стоимость их создания для каждой трассы. Стоимость прокладки коммуникаций для трассы между заводом № 1 и магазином № 1 составляет 15 у. е., между заводом № 1 и заводом № 3 — 85 у. е., между заводом № 1 и хлебозаводом — 20 у. е. Между магазином № 1 и заводом № 2 составит 25 у. е., между магазином № 1 и обувной фабрикой — 65 у. е. Стоимость прокладки коммуникаций для трассы, соединяющей хлебозавод и магазин № 2 — 5 у. е., между хлебозаводом и кафе — 50 у. е., между заводом № 2 и кафе — 20 у. е., между магазином № 2 и продуктовым магазином — 20 у. е., между продуктовым магазином и обувной фабрикой — 25 у. е, между продуктовым магазином и кафе — 35 у. е., между обувной фабрикой и магазином № 3 — 15 у. е, между обувной фабрикой и аптекой — 40 у. е., между кафе и аптекой — 10 у. е., между магазином № 3 и торговым центром — 20 у. е., между аптекой и заводом № 3 составит 30 у. е, между аптекой и торговым центром — 45 у. е., между заводом № 3 и торговым центром — 25 у. е. Необходимо, чтобы коммуникации связали все объекты, затраты на прокладку данных коммуникаций должны быть минимальны.

Для удобства записи вводятся следующие обозначения:  $V_1$  — завод № 1,  $V_2$  — магазин № 1,  $V_3$  — хлебозавод,  $V_4$  — завод № 2,  $V_5$  — магазин № 2,  $V_6$  — продуктовый магазин,  $V_7$  —обувная фабрика,  $V_8$  — кафе,  $V_9$  — магазин №3,  $V_{10}$  — аптека,  $V_{11}$  — завод № 3,  $V_{12}$  — торговый центр.

*Решение.*

Если создать графическую интерпретацию данной модели, то видно, что получился граф с 12 вершинами и 18 ребрами (рис. 7.6).

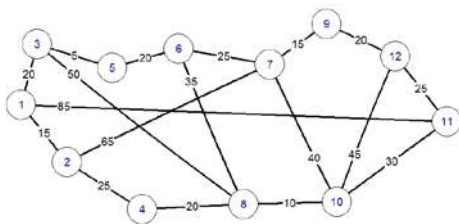


Рисунок 7.6

Из вышесказанного следует, что данную экономическую задачу можно решить с помощью теории графов. Требуется найти дерево покрытия минимального веса.

Задача решается с помощью разновидности «жадного» алгоритма, алгоритма Краскала.

Сопоставим каждому пункту сети вершину графа  $G$ . А каждому ребру этого графа сопоставим число, равное стоимости строительства соответствующей коммуникации.

Согласно алгоритму Краскала, выбирается ребро минимального веса. В данном случае это будет ребро  $e_1 = \{3, 5\}$ , получаем граф  $T_1$ .

Строится граф  $T_2 = T_1 + e_2$ , где  $e_2$  — ребро, имеющее минимальный вес среди ребер, не входящих в  $T_1$ , и не составляющий циклов с ребрами  $T_1$ ,  $e_2 \{8, 10\}$ .

$T_3 = T_2 + e_3$ , где  $e_3 = \{7, 9\}$ .  $T_4 = T_3 + e_4$ , где  $e_4 = \{1, 2\}$ .  $T_5 = T_4 + e_5$ , где  $e_5 = \{1, 3\}$ .  $T_6 = T_5 + e_6$ , где  $e_6 = \{5, 6\}$ .  $T_7 = T_6 + e_7$ , где  $e_7 = \{4, 8\}$ .  $T_8 = T_7 + e_8$ , где  $e_8 = \{9, 12\}$ .  $T_9 = T_8 + e_9$ , где  $e_9 = \{2, 4\}$ .  $T_{10} = T_9 + e_{10}$ , где  $e_{10} = \{6, 7\}$ .  $T_{11} = T_{10} + e_{11}$ , где  $e_{11} = \{11, 12\}$ .

Найдено минимальное дерево покрытия взвешенного графа, следовательно, найдена и оптимальная структура сети (рис. 7.7), где общая стоимость, затраченная на прокладку коммуникаций, составит

$$5 + 10 + 15 + 15 + 20 + 20 + 20 + 20 + 25 + 25 + 25 = 200,$$

и это минимальная сумма затрат из всех возможных.

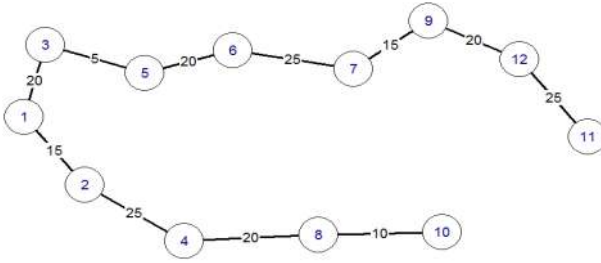


Рисунок 7.7

Ответ: 200 у. е.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Дан взвешенный, связный, неориентированный граф, состоящий из девяти вершин. Необходимо найти остов минимального веса с помощью алгоритмов: а) Краскала, б) Прима, в) Борувки. Исходные графы изображены на рисунках 7.8, 7.9.

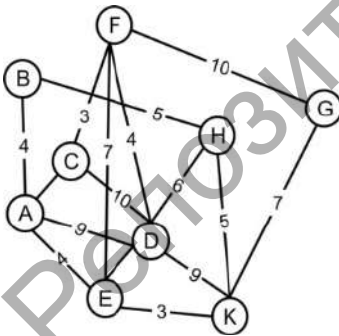


Рисунок 7.8

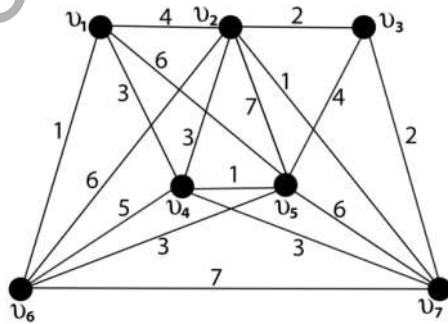


Рисунок 7.9

Т Е М А 8  
**ЦИКЛЫ. ЭЙЛЕРОВЫ И ГАМИЛЬТОНОВЫ ГРАФЫ.  
ДВУДОЛЬНЫЕ ГРАФЫ**

**Вопросы для подготовки к занятию**

1. Что такое полный граф?
2. Дайте определение степени вершины графа.
3. Какая вершина графа называется четной?
4. Какая вершина графа называется нечетной?
5. Сформулируйте теорему о сумме степеней вершин графа.
6. Дайте определение эйлерова графа.
7. Понятия «эйлеров путь», «эйлеров цикл».
8. Свойства эйлеровых графов.
9. Дайте определение гамильтонова графа.
10. Понятия «гамильтонов путь», «гамильтонов цикл».
11. Свойства гамильтоновых графов.
12. Задача китайского почтальона.
13. Задачи, связанные с поиском гамильтоновых циклов.

**Примеры решения задач**

1. Марина, Лариса, Жанна и Катя умеют играть на разных инструментах (пианино, виолончели, гитаре, скрипке), но каждая только на одном. Они же знают иностранные языки (английский, французский, немецкий и испанский), но каждая только один. Известно:

- 1) Девушка, которая играет на гитаре, говорит по-испански.
- 2) Лариса не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка.
- 3) Марина не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает ни немецкого, ни английского.
- 4) Девушка, которая говорит по-немецки, не играет на виолончели.
- 5) Жанна знает французский язык, но не играет на скрипке.

Кто на каком инструменте играет и какой иностранный язык знает? [6].

*Решение.* Из пятого условия, что Жанна знает французский язык, рисуем стрелку. Из третьего условия, что Марина не знает ни немецкого, ни английского, а французский знает Жанна, то Марина знает испанский и, рассматривая первое условие, она играет на гитаре. Из условия № 2 видим, что Лариса играет на пианино, так как Марина играет на гитаре, а на других инструментах она играть не умеет, и значит, она говорит по-немецки.

Так как Жанна не играет на скрипке, то остается один инструмент, на котором она может играть, — это виолончель. Тогда Катя играет на скрипке и знает английский язык (рис. 8.1).

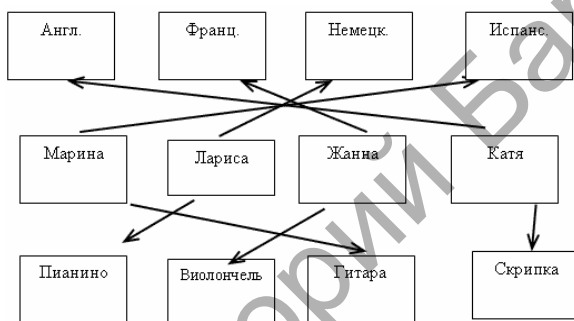


Рисунок 8.1

*Ответ:* Марина знает испанский язык и играет на гитаре; Лариса знает немецкий язык и играет на пианино; Жанна знает французский язык и играет на виолончели; Катя знает английский язык и играет на скрипке.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Три товарища — Иван, Дмитрий и Степан — преподают различные предметы (химию, биологию, физику) в школах Москвы, Ленинграда и Киева. Известно:

- а) Иван работает не в Москве, а Дмитрий не в Ленинграде;
- б) Москвич преподает не физику;

в) Тот, кто работает в Ленинграде, преподает химию;

г) Дмитрий преподает не биологию.

Какой предмет и в каком городе преподает каждый из товарищей?

2. В одном общежитии в разных комнатах на одном этаже живут четыре друга-студента: Алексей, Егор, Виктор и Михаил. Известно, что каждый из них учится в университете на разных факультетах: технологии, славянской филологии, художественно-графическом и обществознания, но неизвестно, кто на каком факультете, и неизвестно, кто в какой комнате. Однако известно, что:

а) студент факультета технологии живет левее студента славянской филологии;

б) студент художественно-графического факультета живет правее студента факультета обществознания;

в) студент факультета обществознания живет рядом со студентом факультета славянской филологии;

г) студент факультета технологии живет не рядом со студентом факультета славянской филологии;

д) Виктор живет правее студента факультета обществознания;

е) Михаил не учится на факультете технологии;

ж) Егор живет рядом с учащимся факультета славянской филологии;

з) Виктор живет левее Егора.

Выясните, кто на каком факультете учится и кто где живет.

3. Директор, завуч и завхоз школы имеют фамилии Антонов, Борисов и Гриднев. Такие же фамилии и у учителей истории, физики и иностранного языка.

Учитель Гриднев живет на улице Докучаева. Завуч и учитель физики живут в новом доме на улице Победы. Учитель Борисов просил своего коллегу сделать перевод небольшой научной статьи. Однофамилец завуча — учитель иностранного языка — недавно получил квартиру в том же доме по улице Первомайской, в котором живет завхоз.

Оказалось так, что в каждом доме живут коллеги с разными сочетаниями фамилий.

Как фамилия директора школы?

4. В загородном лагере встретились три мальчика, приехавшие из Минска, Киева и Екатеринбурга. При знакомстве оказалось, что они разного возраста и увлекаются спортом. В теннис играют только Коля

и минчанин. В футбол — только Сережа и киевлянин. Олег играет в шахматы, и он старше киевлянина. Теннисисты в шахматы не играют. Шахматист не самый старший.

В каком городе живет каждый из мальчиков, и каким видом спорта он увлекается? Каковы они по возрасту?

5. Можно ли нарисовать графы (рис. 8.2), не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждое ребро один раз?

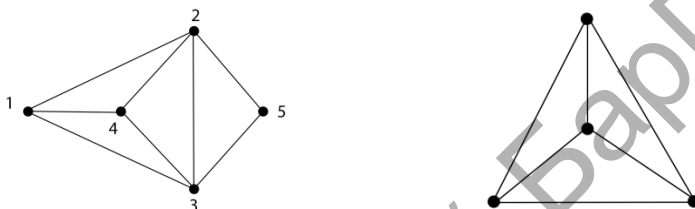


Рисунок 8.2

6. Можно ли обрисовать фигуру, называемую «саблями Магомета», не прерывая и не повторяя линии? [4].

## Т Е М А 9

### ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

#### Вопросы для подготовки к занятию

1. Какая задача линейного программирования называется целочисленной?
2. Структура экономико-математической модели задачи целочисленного программирования?
3. Какие существуют методы решения задач целочисленного программирования?
4. Задача коммивояжера.
5. Транспортная задача. Задача о назначениях.

## Примеры решения задач [7]

1. Требуется расставить 5 рабочих по технологической цепочке так, чтобы время выполнения всего цикла операций было минимальным. Время, затрачиваемое каждым рабочим при выполнении любой операции, приведено в таблице:

|     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|     | 1-я | 2-я | 3-я | 4-я | 5-я |
| 1-я | 4   | 5   | 7   | 8   | 6   |
| 2-я | 5   | 7   | 9   | 7   | 6   |
| 3-я | 9   | 6   | 8   | 7   | 5   |
| 4-я | 6   | 7   | 5   | 8   | 9   |
| 5-я | 6   | 8   | 7   | 9   | 5   |

*Решение.*

|        |     |     |     |     |     |        |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|--------|
|        | 1-я | 2-я | 3-я | 4-я | 5-я | Pi min |
| 1-я    | 4   | 5   | 7   | 8   | 6   | 4      |
| 2-я    | 5   | 7   | 9   | 7   | 6   | 5      |
| 3-я    | 9   | 6   | 8   | 7   | 5   | 5      |
| 4-я    | 6   | 7   | 5   | 8   | 9   | 5      |
| 5-я    | 6   | 8   | 7   | 9   | 5   | 5      |
| qj min | 4   | 5   | 5   | 7   | 5   |        |

|          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|          | <b>1</b> | <b>2</b> | <b>3</b> | <b>4</b> | <b>5</b> |
| <b>1</b> | 0        | 0        | 2        | 1        | 1        |
| <b>2</b> | 1        | 2        | 4        | 0        | 1        |
| <b>3</b> | 5        | 1        | 3        | 0        | 0        |
| <b>4</b> | 2        | 2        | 0        | 1        | 4        |
| <b>5</b> | 2        | 3        | 2        | 2        | 0        |

$$Z_{\min} = 1$$

|   |          |          |          |          |          |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|
|   | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        |
| 1 | <u>0</u> | 0        | 2        | 2        | 2        |
| 2 | 0        | 1        | 3        | <u>0</u> | 1        |
| 3 | 4        | <u>0</u> | 2        | 0        | 0        |
| 4 | 2        | 2        | <u>0</u> | 2        | 5        |
| 5 | 1        | 2        | 1        | 2        | <u>0</u> |

$$\text{Ответ: } x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$F(x) = 4 + 6 + 5 + 7 + 5 = 27.$$

### Задачи для самостоятельного решения

1. Решить задачу о назначениях на максимум венгерским методом:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 6 & 15 & 3 & 12 & 4 & 2 \\ 14 & 3 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 8 & 15 & 8 & 12 \\ 3 & 14 & 3 & 15 & 11 & 10 \\ 3 & 13 & 1 & 9 & 6 & 6 \\ 15 & 10 & 3 & 4 & 5 & 10 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 16 \\ 2 & 8 & 8 & 6 & 17 \\ 2 & 2 & 2 & 8 & 18 \\ 4 & 6 & 7 & 8 & 19 \end{pmatrix}.$$

## Т Е М А 10 СЕТИ. ПОТОКИ В СЕТЯХ

### Вопросы для подготовки к занятию

1. Дайте определения терминов «сеть» и «поток».
2. Какие задачи организационного управления приводят к задаче нахождения максимального потока в сети?
3. Дайте содержательную (словесную) постановку задачи нахождения максимального потока в сети.
4. Почему в сети может существовать несколько максимальных потоков одинаковой величины и чем они отличаются друг от друга?
5. Сформулируйте теорему Форда—Фалкерсона и поясните её использование для нахождения максимального потока в сети.
6. Перечислите и поясните основные шаги алгоритма Форда—Фалкерсона нахождения максимального потока в сети.

### Примеры решения задач

1. Дана сеть. Определить максимальный поток в сети (рис. 10.1).

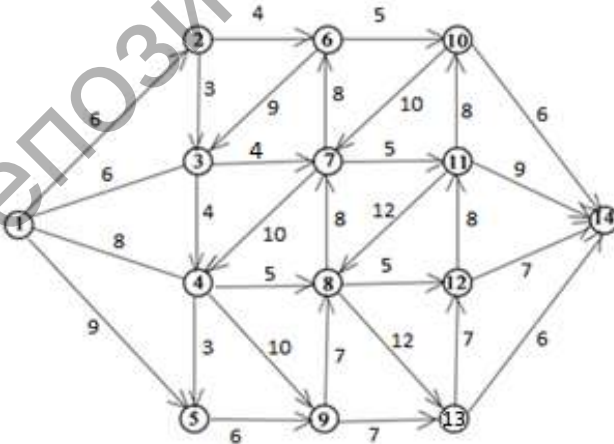


Рисунок 10.1

Решение.

Следуя алгоритму, рассмотрим следующие цепи:

1-5-9-13-14;

1-4-8-12-14;

1-3-7-11-14;

1-2-6-10-14.

Расставив потоки  $u$  соответствующих дуг, получим (рис. 10.2):

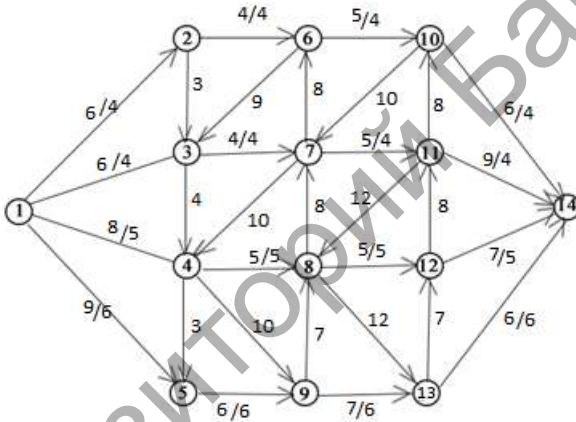


Рисунок 10.2

Далее будем выбирать цепи так, чтобы насыщались дуги, инцидентные истоку.

1-4-9-13-12-14 (здесь поток каждой дуги увеличивается на единицу);

1-4-9-8-13-12-14 (здесь также на единицу);

1-4-9-8-13-12-11-14 (и здесь тоже на единицу).

После этой последовательности цепей получим насыщенную дугу 1-4 (рис. 10.3):

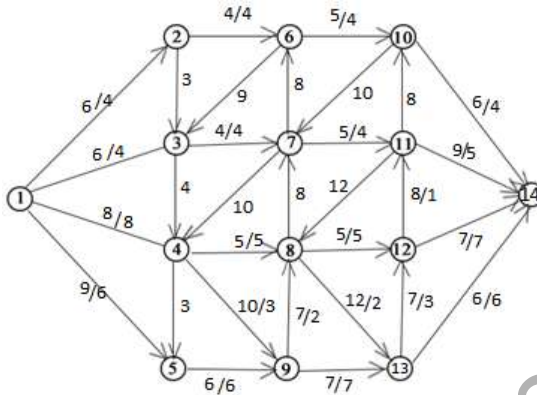


Рисунок 10.3

Следующая последовательность цепей дает нам окончательный результат:

1-3-4-9-8-13-12-11-14 (здесь поток каждой дуги увеличивается на двойку);

1-2-3-4-9-8-13-12-11-14 (здесь поток каждой дуги опять увеличивается на двойку).

Поток в сети равен  $4 + 9 + 7 + 6 = 6 + 6 + 8 + 6 = 26$ .

Насыщенные дуги: 1-4, 1-3, 1-2, 5-9, 9-13, 13-14, 13-12, 4-8, 8-12, 12-14, 3-7, 11-14, 2-6, 3-4 (рис. 10.4).

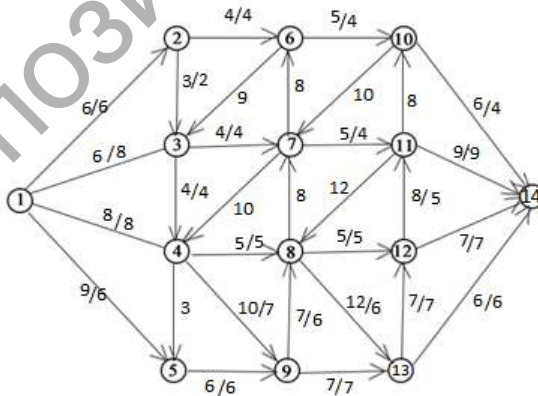


Рисунок 10.4

Ответ: 26.

2. Найти максимальный поток в транспортной сети, используя алгоритм Форда-Фалкерсона (алгоритм расстановки пометок). Источник — вершина 1, сток — вершина 8 (рис. 10.5). [8].

*Решение.*

С помощью алгоритма Форда—Фалкерсона найдем наибольший поток из 1 в 8:

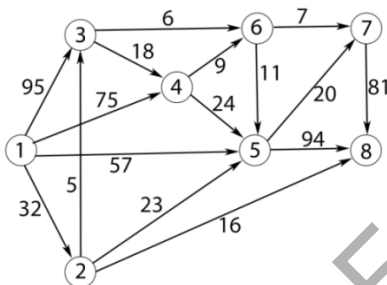


Рисунок 10.5

Шаг 1. Выбираем произвольный поток, например, 1–3–6–7–8. Его пропускная способность равна минимальной из всех пропускных способностей входящих в него дуг, то есть 6. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 6, насыщенную дугу 3–6 вычеркиваем.

Шаг 2. Выбираем 1–4–5–8. Его пропускная способность равна 24. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 24, насыщенную дугу 4–5 вычеркиваем.

Шаг 3. Выбираем произвольный поток, например, 1–5–8. Его пропускная способность равна 57. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 57, насыщенную дугу 1–5 вычеркиваем.

Шаг 4. Выбираем произвольный поток, например, 1–2–8. Его пропускная способность равна 16. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 16, насыщенную дугу 2–8 вычеркиваем.

Шаг 5. Выбираем произвольный поток, например, 1–2–5–8. Его пропускная способность равна 13. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 13, насыщенную дугу 5–8 вычеркиваем.

Шаг 6. Выбираем произвольный поток, например, 1–2–5–7–8. Его пропускная способность равна 3. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 3, насыщенную дугу 1–2 вычеркиваем.

Шаг 7. Выбираем произвольный поток, например, 1–4–6–7–8. Его пропускная способность равна 1. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 1, насыщенную дугу 6–7 вычеркиваем.

Шаг 8. Выбираем произвольный поток, например, 1–4–6–5–7–8. Его пропускная способность равна 8. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 8, насыщенную дугу 4–6 вычеркиваем. Больше путей нет. Суммарный поток  $6 + 24 + 57 + 16 + 13 + 3 + 1 + 8 = 128$ .

Ответ: 128.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Задана пропускная способность дуг транспортной сети с началом в вершине 1 и концом в вершине 8. Используя алгоритм Форда–Фалкерсона, найти максимальный поток в сети (рис. 10.6)

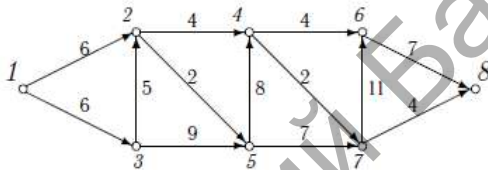
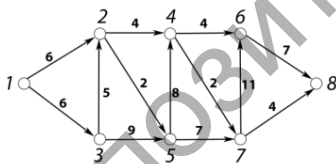
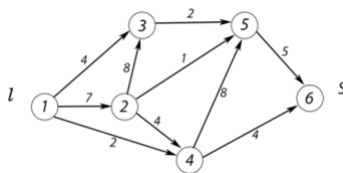


Рисунок 10.6

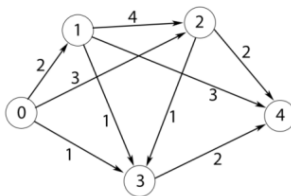
2. Дана сеть. Определить максимальный поток в ней (рис. 10.7, а, б, в).



а)



б)



в)

Рисунок 10.7

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Школьные знания [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://znaniya.com/task/3501055/>. — Дата доступа: 14.03.2016.
2. Задачи по комбинаторике [Электронный ресурс]. — Режим доступа: [http://mathprofi.ru/zadachi\\_po\\_kombinatorike\\_primery\\_reshenij.html/](http://mathprofi.ru/zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij.html/). — Дата доступа: 14.05.2019.
3. Решение логических задач: решение с помощью алгебры логики [Электронный ресурс]. — Режим доступа: [http://inf61.blogspot.com.by/p/blog-page\\_7805.html/](http://inf61.blogspot.com.by/p/blog-page_7805.html/). — Дата доступа: 14.03.2016.
4. Мельников, О. И. Занимательные задачи по теории графов / О. И. Мельников. — Минск : ТетраСистемс, 2001. — 144 с.
5. MeraПредмет [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://megapredmet.ru/1-79140.html/>. — Дата доступа: 20.05.2019.
6. Логические задачи и головоломки [Электронный ресурс]. — Режим доступа: [http://www.smekalka.pp.ru/math/answer\\_math\\_accord\\_11.html/](http://www.smekalka.pp.ru/math/answer_math_accord_11.html/). — Дата доступа: 14.03.2016
7. Задача о назначениях [Электронный ресурс].— Режим доступа: <http://bankzadach.ru/issledovanie-operatsiy/zadacha-o-naznacheniyah-000086.html/>. — Дата доступа: 21.05.2019.
8. Инженерный вестник Дона [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1666/>. — Дата доступа: 22.02.2015.

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

### *Основная литература*

1. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. — М. : Академия, 2003. — 464 с.
2. Джеймс, А. Дискретная математика и комбинаторика / А. Джеймс. — М. : Вильямс, 2004. — 960 с.
3. Ерусалимский, Я. М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения / Я. М. Ерусалимский. — 3-е изд. — М. : Вуз. кн., 2000. — 280 с.
4. Лыскова, В. Логика в информатике / В. Лыскова. — М. : ЛБЗ, 2006. — 160 с.
5. Новиков, Ф. А. Дискретная математика для программистов / Ф. А. Новиков. — СПб. : Питер, 2006. — 399 с.
6. Плотников, А. Д. Дискретная математика / А. Д. Плотников. — М. : Новое знание, 2006. — 304 с.
7. Торгонский, Е. А. Исчисление высказываний / Е. А. Торгонский. — Витебск : ВГУ им. П. М. Машерова, 2004. — 28 с.

### *Дополнительная литература*

1. Ершов, Ю. Л. Математическая логика / Ю. Л. Ершов. — СПб. : Лань, 2004. — 336 с.
2. Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари. — М. : Едиториал УРСС, 2003. — 296 с.

0+

*Учебное издание*

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ  
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Методические рекомендации  
по проведению практических занятий

Составитель  
**Нерода Юлия Павловна**

Ответственный за выпуск С. А. Березнюк  
Технический редактор А. Ю. Сидоренко  
Компьютерная вёрстка С. А. Березнюк  
Корректор С. А. Березнюк

Подписано в печать 27.09.2019. Формат 60 × 84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.

Отпечатано на копировально-множительной технике.

Усл. печ. л. 2,60. Уч.-изд. л. 1,40. Тираж 30 экз. Заказ 477.

Учреждение образования «Барановичский государственный университет»

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 1/424 от 09.09.2016.

Ул. Войкова, 21, 21225404, г. Барановичи. Тел. 8 (0163) 64 34 77, e-mail: rig@barsu.by .