Теорема 2. *Задача типа Римана—Гильберта* (2) *имеет не более одного решения.*

Доказательство. Достаточно показать, что однородная задача (2) имеет только нулевое решение. Пусть $\Lambda U = 0$. Тогда из неравенства (3) следует, что $\|U\|_{W_1^2(\Omega)} = 0$ и, значит, $U = 0$, что и требовалось доказать.

Заключение. В работе доказана тривиальность ядра оператора Λ. Открытым остаётся вопрос о размерности коядра этого оператора.

Список цитируемых источников

1. Виноградов В. С. Граничная задача для псевдосимметрических систем // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С. 161—163.
2. Басик А. И., Усс А. Т. О краевых задачах для эллиптических псевдосимметрических систем первого порядка в $\mathbf{R}^4$ // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 38, № 3. С. 410—412.
3. Агранович М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20. Вып. 5. С. 3—120.
4. Ошоров Б. Б. Об одном четырёхмерном аналоге системы уравнений Коши—Римана // Неклассич. уравнения мат. физики. 2007. С. 212—220.
5. Шевченко В. И. Гомотопическая классификация краевых задач Гильберта для голоморфного вектора // Докл. АН СССР. 1971. Т. 201, № 5. С. 1067—1069.
6. Ошоров Б. Б. Об одном четырёхмерном аналоге системы уравнений Коши—Римана.
7. Усс А. Т. Гомотопическая классификация трёх- и четырёхмерных аналогов системы Коши—Римана // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 8. С. 1118—1125.

УДК 517.518.456

И. Н. Бруй,
кандидат физико-математических наук, доцент
Учреждение образования «Барановичский государственный университет», Барановичи

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ТИПА С. Н. БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ КРАТНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Доказана асимптотическая формула типа С. Н. Бернштейна для отклонения кратно дифференцируемой периодической функции от матричных средних её тригонометрического ряда Фурье.

We prove the asymptotical formula of S. N. Bernstein type for difference multiple differentiable periodic function from matrix means of its trigonometric Fourier series.

Введение. Используем обозначения двухтомной монографии Р. Эдвардса [1]. Отличия: символ « $:=$ » означает, что правой части присвоено обозначение слева, а символ « $\equiv$ » — тождественное равенство.

Функция $f \in \mathbf{L}^1(T)$ порождает, во-первых, двустороннюю числовую последовательность $\left(f^\wedge(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt \right)_{n=-\infty}^{\infty}$ тригонометрических коэффициентов Фурье функции *f* и, во-вторых, двусторонний функциональный

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f^\wedge(n) e^{inx} \tag{1}$$

тригонометрический ряд Фурье функции *f*.

Если периодическая с периодом 2π функция f удовлетворяет условию Липшица первого порядка, т. е. если [2]

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le \|f'\|_\infty \cdot |x_1 - x_2|,$$

то, как показал С. Н. Бернштейн, отклонение функции f от средних Фейера её тригонометрического ряда Фурье [3, с. 205]

$$\max_{-\pi \le x \le \pi} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \left|\frac{n}{N+1}\right|\right) f^\wedge(n) e^{inx} \right| = O\left(\frac{\ln N}{N}\right),\ N \to \infty. \tag{2}$$

С. Н. Бернштейн также установил неулучшаемость порядка оценки (2): если функция $f \in \mathbf{C}(T)$ имеет в точке x_0 конечные левостороннюю $f'(x_0-0)$ и правостороннюю $f'(x_0+0)$ производные, то справедлива асимптотическая формула [4]

$$f(x_0)-\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\left|\frac{n}{N+1}\right|\right)f^{\wedge}(n)e^{inx_0}=\frac{f'(x_0-0)-f'(x_0+0)}{\pi}\cdot\frac{\ln N}{N}+o\left(\frac{\ln N}{N}\right),\ N\to\infty. \tag{3}$$

Асимптотическую формулу для отклонения функции $f\in\mathbf{C}^2[0,\,1]$ от её многочленов С. Н. Бернштейна [5, с. 113]

$$B_N f(x):=\sum_{n=0}^{N} f\left(\frac{n}{N}\right)\frac{N!}{n!(N-n)!}x^n(1-x)^{N-n}$$

получила Е. В. Вороновская ([6] или [7]):

$$\forall x\in[0,1]\quad f(x)-B_N f(x)=-\frac{x(1-x)}{2N}f''(x)+o\left(\frac{1}{N}\right),\ N\to\infty, \tag{4}$$

при этом сходимость равномерна на отрезке [0, 1]:

$$\lim_{N\to\infty}\max_{0\le x\le 1}\left|N\left[f(x)-B_N f(x)\right]+\frac{x(1-x)}{2}f''(x)\right|=0.$$

Статью Е. В. Вороновской [8] представлял С. Н. Бернштейн, который увидел, что её результат «может быть получен несколько иным способом и в более общем виде» [9, с. 155]: для функции $f\in\mathbf{C}^{2k}[0,\,1]$, где $k=1,\,2,\,3,\,\ldots,$ отклонение ([10, с. 156] или [11, с. 23])

$$f(x)-B_N f(x)=-\sum_{n=1}^{2k-1}\left[\sum_{m=0}^{N}\left(\frac{m}{N}-x\right)^n\frac{N!}{m!(N-m)!}x^m(1-x)^{N-m}\right]\frac{f^{(n)}(x)}{n!}-$$

$$-\left[\frac{x(1-x)}{2N}\right]^k\frac{f^{(2k)}(x)}{k!}+o\left(\frac{1}{N^k}\right),\ N\to\infty. \tag{5}$$

Так как $\sum_{m=0}^{N}\left(\frac{m}{N}-x\right)\frac{N!}{m!(N-m)!}x^m(1-x)^{N-m}\equiv 0$ [12, с. 20], то в случае $f\in\mathbf{C}^2[0,1]$, т. е. в случае $k=1$ из асимптотической формулы С. Н. Бернштейна (5) имеем асимптотическую формулу Е. В. Вороновской (4).

В настоящей работе получен аналог асимптотических формул С. Н. Бернштейна (3) и (5) для кратно дифференцируемых 2π-периодических функций.

Основной результат. Пусть $d_\nu(N)$ есть двойная комплексная последовательность, в которой номер строки N принимает неотрицательные целые значения 0, 1, 2, …, а номер столбца ν принимает натуральные значения 1, 2, 3, ... И пусть

$$\forall N\in Z_+\quad M_N f(x):=\sum_{n=-N}^{N}\left[1-\sum_{\nu=1}^{\infty}d_\nu(N)\left|\frac{n}{N+1}\right|^\nu\right]f^{\wedge}(n)e^{inx} \tag{6}$$

суть матричные средние тригонометрического ряда Фурье (1) функции $f\in\mathbf{L}^1(T)$.

Частные случаи матричных средних (6):

1) если все $(\nu\in Z_1:=\{1,\,2,\,3,\,\ldots\})$ коэффициенты $d_\nu(N)=0,$ то имеем симметричные частичные суммы

$$\forall N\in Z_+\quad s_N f(x):=\sum_{n=-N}^{N}f^{\wedge}(n)e^{inx} \tag{7}$$

тригонометрического ряда Фурье (1) функции $f\in\mathbf{L}^1(T)$;

2) если коэффициент $d_1(N)=1$, а остальные $(\nu \geq 2)$ коэффициенты $d_\nu(N)=0$, то получаем средние Фейера

$$\forall N \in Z_+ \quad \sigma_N f(x) \;:=\; \sum_{n=-N}^{N}\left(1-\left|\frac{n}{N+1}\right|\right) f^\wedge(n) e^{inx}, \tag{8}$$

которые в литературе также называют средними арифметическими первых симметричных частичных сумм, средними Чезаро первого порядка, средними Гёльдера первого порядка;

3) если для натурального r коэффициент $d_r(N)=1$, а остальные $(\nu \in Z_1 \setminus \{r\})$ коэффициенты $d_\nu(N)=0$, то имеем средние Зигмунда

$$\forall N \in Z_+ \quad Z_N^r f(x) := \sum_{n=-N}^{N}\left(1-\left|\frac{n}{N+1}\right|^r\right) f^\wedge(n) e^{inx}, \tag{9}$$

которые ещё называют нормальными средними, типическими средними, эталонными средними, средними М. Рисса. Очевидно: $Z_N^1 f(x) \equiv \sigma_N f(x)$.

Матричные средние вида (6) впервые встретились в работе А. К. Покало [13, с. 24], посвящённой проблеме С. М. Никольского ([14, с. 260] или [15]) о нахождении эффективных условий на метод суммирования тригонометрических рядов Фурье, достаточных для ограниченности последовательности констант Лебега рассматриваемого метода. Заметим, что другой подход к получению результата А. К. Покало [16, с. 24—25] указан в работе автора [17, с. 53]. К средним вида (6) приходили в своих исследованиях А. Кивинукк [18] и В. А. Баскаков [19, с. 516]. Прямоугольное обобщение средних (6) на двойные тригонометрические ряды Фурье дал П. И. Кибалко ([20] или [21, с. 32—34]). Аналоги средних (6) для тригонометрических интегралов Фурье рассматривал Н. П. Семенчук ([22] или [23]).

Тригонометрический ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i \cdot \operatorname{sgn} n) f^\wedge(n) e^{inx} \tag{10}$$

называется сопряжённым с тригонометрическим рядом Фурье (1) функции $f \in \mathbf{L}^1(T)$. Если тригонометрический ряд (10) является рядом Фурье некоторой функции, то её называют тригонометрически сопряжённой к функции f и обозначают через $\tilde{f}$ [24].

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. *Предположение о методе суммирования: двойная комплексная последовательность* $d_\nu(N)$, *где номер строки* N *принимает значения 0, 1, 2, … , а номер столбца ν принимает значения 1, 2, 3, … , такова, что конечна верхняя грань*

$$c_1 := \sup_{N \in Z_+} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \,|\, d_\nu(N) \,| < \infty. \tag{11}$$

Предположение о приближаемой функции: функция $f \in \mathbf{C}^{2k}(T)$, *где* $k = 1, 2, 3, \ldots$, *такова, что*

$$\max_{-\pi \leq x \leq \pi}\left| f^{2k}(x+h) + f^{(2k)}(x-h) - 2f^{(2k)}(x)\right| = O(h), \; h \to 0, \tag{12}$$

и в точке x_0 *существуют конечные левосторонняя* $f^{(2k+1)}(x_0-0)$ *и правосторонняя* $f^{(2k+1)}(x_0+0)$ *производные* $(2k+1)$*-го порядка функции f.*

Утверждение: при двух указанных выше предположениях справедлива асимптотическая формула

$$f(x_0) - M_N f(x_0) = -\sum_{l=1}^{k-1} (-1)^l \left[d_{2l-1}(N) \frac{\tilde{f}^{(2l-1)}(x_0)}{(N+1)^{2l-1}} - d_{2l}(N) \frac{f^{(2l)}(x_0)}{(N+1)^{2l}} \right] -$$

$$-(-1)^k d_{2k-1}(N) \frac{\tilde{f}^{(2k-1)}(x_0)}{(N+1)^{2k-1}} + (-1)^k \mu_{N+1}^{(N)} \frac{f^{(2k)}(x_0) - s_N f^{(2k)}(x_0)}{(N+1)^{2k}} +$$

$$+(-1)^k d_{2k}(N)\frac{f^{(2k+1)}(x_0-0)-f^{(2k+1)}(x_0+0)}{\pi}\cdot\frac{\ln N}{N^{2k+1}}-$$

$$-(-1)^k \frac{2\left[d_{2k}(N)-d_{2k+1}(N)\right]}{(N+1)^{2k+1}}\sum_{n=0}^{N-2}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}\left[f^{(2k)}(x_0)-Z_n^2 f^{(2k)}(x_0)\right]+$$

$$+o\left(\frac{\ln N}{N^{2k+1}}\right),\quad N\to\infty, \tag{13}$$

в которой элементы $\mu_{N+1}^{(N)}$ *определены соглашениями*

$$\forall N\in Z_+\quad \mu_{N+1}^{(N)}:=1-\sum_{\nu=1}^{\infty}d_\nu(N). \tag{14}$$

Первые две компоненты правой части асимптотической формулы (13) ниже в (25), в стартовом представлении (29) и в рабочем представлении (41) мы будем заменять словами «главная часть», чтобы уменьшить объём статьи. В (25), (29) и (41) будем помнить, что главная часть содержит две компоненты. Указанную в (13) главную часть автор ранее привёл без доказательства в [25, с. 29].

Если верхний индекс суммирования строго меньше нижнего индекса суммирования, то соответствующая сумма считается пустой.

1. Замечания к основному результату. 1.1. Предположение (11) влечёт абсолютную сходимость рядов (14) и рядов в квадратных скобках в матричных средних (6). Следовательно, законно изменение порядка суммирования в процессе доказательства основного результата.

1.2. В настоящем замечании значение аргумента x фиксировано. Тогда (1) есть числовой ряд, а (6)—(9) суть числовые последовательности. В теории суммируемости числовых рядов матричные средние (6) называют регулярными, если из существования конечного предела $\lim\limits_{N\to\infty} s_N f(x)=:s$ всегда следует существование $\lim\limits_{N\to\infty} M_N f(x)=s,$ т. е. если для каждого сходящегося числового ряда матричные средние сходятся к его обыкновенной сумме [26]. Предположение (11) заведомо гарантирует регулярность матричных средних (6) [27]. В той же теории суммируемости числовых рядов говорят, что матричные средние (6) включают средние Зигмунда (9), если из существования конечного предела $\lim\limits_{N\to\infty} Z_N^r f(x)=:\tau$ всегда следует существование $\lim\limits_{N\to\infty} M_N f(x)=\tau,$ т. е. если для каждого суммируемого методом Зигмунда числового ряда матричные средние сходятся к его сумме Зигмунда [28, с. 91]. Предположение (11) вместе с предположением $\mu_{N+1}^{(N)}=O(1/N),\ N\to\infty$ гарантируют, что матричные средние (6) включают средние Зигмунда (9) [29].

1.3. Если функция $f\in\mathbf{C}(T)$ удовлетворяет условию Липшица первого порядка, то она, во-первых, абсолютно непрерывна: $f\in\mathbf{AC}(T),$ во-вторых, удовлетворяет условию $\forall h>0\quad |f(x+h)+$ $+f(x-h)-2f(x)|\le 2\|f'\|_\infty\cdot h.$

1.4. Разрывная в точке $x=0$ функция

$$\forall x\in R\ \ \operatorname{sgn}x:=\begin{cases}1,\ \text{когда}\ x>0,\\ 0,\ \text{когда}\ x=0,\\ -1,\ \text{когда}\ x<0,\end{cases}$$

удовлетворяет в этой точке условию $\forall h>0\quad |\operatorname{sgn}(0+h)+\operatorname{sgn}(0-h)-2\operatorname{sgn}0|=0<h.$ Поэтому предположение $f\in\mathbf{C}^{2k}(T)\wedge(12)$ существенно. В асимптотической формуле С. Н. Бернштейна (3) функция $f\in\mathbf{C}(T).$ В основном результате предположение $f\in\mathbf{C}^{2k}(T)\wedge(12)$, где $k=1,\,2,\,3,\,\dots$, отражает также используемый метод доказательства.

1.5. Непрерывная на действительной прямой R функция К. Вейерштрасса $W_0(x):=\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{-n}\cos 3^n x$ удовлетворяет условию $\max\limits_{-\pi\le x\le\pi}\left|W_0(x+h)+W_0(x-h)-2W_0(x)\right|=O(h),\ h\to 0,$ однако ни в одной точке R не имеет производной [30]. Очевидно, что функция $W_{2k}(x):=(-1)^k\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{-(n+2k)}\cos 3^n x$, где $k=1,\,2,\,3,\,\dots$, имеет непрерывную на R производную порядка $2k,$ которая удовлетворяет условию

$\max\limits_{-\pi\le x\le\pi}\left|W_{2k}^{(2k)}(x+h)+W_{2k}^{(2k)}(x-h)-2W_{2k}^{(2k)}(x)\right|=O(h),\ h\to 0$ и нигде не дифференцируема. Поэтому в основном результате помимо $f\in\mathbf{C}^{2k}(T)\wedge(12)$ предполагается существование в точке x_0 конечных левосторонней $f^{(2k+1)}(x_0-0)$ и правосторонней $f^{(2k+1)}(x_0+0)$ производных $(2k+1)$-го порядка функции *f*.

1.6. Название «асимптотическая формула» объясняется тем, что каждая последующая дробь $\dfrac{1}{(N+1)^{\nu+1}}$ в главной части [31, с. 496] правой части (13) есть *o* малое по сравнению с предыдущей дробью $\dfrac{1}{(N+1)^{\nu}}$ при $N\to\infty$.

1.7. Обозначим выражения в квадратных скобках в матричных средних (6) через $\mu_{|n|}^{(N)}$. Тогда эти элементы вместе с элементами (14) образуют бесконечную нижнюю комплексную матрицу Хессенберга

$$M:=\begin{bmatrix}1 & \mu_1^{(0)} & 0 & 0 & \dots\\ 1 & \mu_1^{(1)} & \mu_2^{(1)} & 0 & \dots\\ 1 & \mu_1^{(2)} & \mu_2^{(2)} & \mu_3^{(2)} & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\end{bmatrix}.$$

Хотя элементы $\mu_{N+1}^{(N)}$ над главной диагональю этой матрицы и не входят в определение матричных средних (6), но они влияют на аппроксимативные свойства средних (6). Аналогия: в комплексной плоскости геометрические свойства границы области влияют на аппроксимацию внутри области; классические примеры — круг и разрезанный по радиусу круг.

1.8. Если периодическая с периодом 2π функция *f* удовлетворяет условию Липшица первого порядка, то при её приближении средними Зигмунда (9) в случае $r=1$ [$\Leftrightarrow$ средними Фейера (8)] имеет место скорость (2), а в случае $r=2$, согласно теореме А. Зигмунда ([32, с. 697] или [33, с. 591), наличествует скорость

$$\max_{-\pi\le x\le\pi}\left|f(x)-Z_N^2 f(x)\right|\le\frac{c_2\,\|f'\|_\infty}{N+1},\qquad(15)$$

т. е. средние Зигмунда порядка $r=2$ осуществляют приближение рассматриваемой функции f порядка наилучшего.

1.9. Укажем, что В. А. Баскаков структурировал остаток асимптотических формул в своих работах [34].

2. Частные случаи основного результата. 2.1. В случае средних Фейера (8) коэффициент $d_1(N)=1$, $\forall\nu\in Z_2:=\{2,3,4,\dots\}$ коэффициенты $d_\nu(N)=0$ и $\forall N\in Z_+$ элементы $\mu_{N+1}^{(N)}=0$. Если функция $f\in\mathbf{AC}^{2k}(T)$, где $k=1,2,3,\dots$, и $f^{(2k)}$ удовлетворяет условию Липшица первого порядка (тогда $f^{(2k+1)}$ существует почти всюду на действительной прямой R и $f^{(2k+1)}\in\mathbf{L}^\infty(T)$), то из нашей асимптотической формулы (13) получаем

$$f(x)-\sigma_N f(x)=\frac{\tilde f'(x)}{N+1}+o\left(\frac{\ln N}{N^{2k+1}}\right)_{\text{п. в.}},\quad N\to\infty,\qquad(16)$$

где буквы «п. в.» означают выполнение *o*-оценки почти всюду на *R*. При указанном выше предположении о приближаемой функции, которое в силу замечания 1.3 превосходит предположение нашей теоремы, М. Заманский [35, с. 169] доказал, что остаток есть $O\left(\dfrac{1}{N^{2k+1}}\right)$ при $N\to\infty$. Укажем, что асимптотическая формула (16) наводит на следующий результат: приближение средними Фейера (8) насыщаемо в пространстве $\mathbf{C}(T)$ с порядком насыщения (saturated in $\mathbf{C}(T)$ with order) $1/N$ при $N\to\infty$ и классом насыщения (saturation class), состоящим из всех тех функций $f\in\mathbf{C}(T)$, для которых функция $\tilde f$, тригонометрически сопряжённая к f, удовлетворяет условию Липшица первого порядка [36]. Теорема о насыщении в пространстве $\mathbf{C}(T)$ для матричных средних (6) получена автором [37, с. 119—120]. Сингулярный интеграл Валле Пуссена [38, с. 28], согласно А. Кивинукку [39, с. 245], и сингулярный интеграл Джексона [40, с. 114], согласно А. К. Покало [41, с. 48—49], являются матричными средними (6). Для них из нашей асимптотической формулы (13) получаем аналоги асимптотических формул И. П. Натансона [42] и аналоги их последующих уточнений для сингулярного интеграла Джексона [43]. Средние Фейера (8) и сингулярные интегралы Валле Пуссена и Джексона суть положительные средние, т. е. такие средние, для которых $f \ge 0$ всегда влечёт $M_N f \ge 0.$ Как показал П. П. Коровкин [44, с. 125], порядок приближения функций положительными матричными средними не выше $1/N^2$ даже для аналитических функций *f*. Укажем, что теорема П. П. Коровкина о трёх тест-фукциях $f_1(x) := 1,$ $f_2(x) := x$ и $f_3(x) := x^2$ [45] даёт следующую наводку на асимптотическую формулу Е. В. Вороновской (4): $B_N f_1(x) \equiv 1,$ $B_N f_2(x) \equiv x$ и $B_N f_3(x) \equiv x^2 + \dfrac{x(1-x)}{N}$ $\Leftrightarrow$ $f_3(x) - B_N f_3(x) \equiv -\dfrac{x(1-x)}{2N} f_3''(x).$ Для рядов Фабера аналог асимптотической формулы (16) приведён в работе автора и Г. Шмидэра [46, с. 168].

2.2. Для средних Зигмунда (9) натурального порядка $r = 1, 2, 3, \ldots$ коэффициент $d_r(N) = 1,$ $\forall \nu \in Z_1 \setminus \{r\}$ коэффициенты $d_\nu(N) = 0$ и $\forall N \in Z_+$ элементы $\mu_{N+1}^{(N)} = 0.$ Напомним, что средние Зигмунда $Z_N^r f(x)$ порядка $r = 2, 3, 4, \ldots$, в отличие от средних $Z_N^1 f(x) \equiv \sigma_N f(x),$ уже не являются положительными [47]. Если функция $f \in \mathbf{AC}^{2k}(T)$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$, и $f^{(2k)}$ удовлетворяет условию Липшица первого порядка (следовательно, почти всюду на R равны односторонние производные $f^{(2k+1)}(x-0) = f^{(2k+1)}(x+0) = f^{(2k+1)}(x)$ и $f^{(2k+1)} \in \mathbf{L}^\infty(T)$), то из нашей асимптотической формулы (13) в случае нечётного порядка $r = 2l - 1 < 2k$ получаем

$$f(x) - Z_N^{2l-1} f(x) = -(-1)^l \frac{\tilde{f}^{(2l-1)}(x)}{(N+1)^{2l-1}} + o\left(\frac{\ln N}{N^{2k+1}}\right)_{\text{п. в.}}, \quad N \to \infty, \tag{17}$$

а в случае чётного порядка $r = 2l < 2k$ получаем

$$f(x) - Z_N^{2l} f(x) = (-1)^l \frac{f^{(2l)}(x)}{(N+1)^{2l}} + o\left(\frac{\ln N}{N^{2k+1}}\right)_{\text{п. в.}}, \quad N \to \infty. \tag{18}$$

Ясно, что асимптотическая формула (16) является частным случаем (17) при $r = 2 \cdot 1 - 1 < 2k.$ Асимптотические формулы (17) и (18) наводят на результат М. Заманского [48], который установил в пространстве $\mathbf{C}(T)$ зависимость структурной характеристики (characterization of the saturation class by structural properties upon *f*) класса насыщения приближения средними Зигмунда $Z_N^r f(x)$ от нечётности или чётности порядка r этих средних. В случае же чётного порядка $r = 2k$ коэффициент $d_{2k}(N) = 1$ и для предпоследней компоненты правой части (13) согласно (15) имеем

$$\max_{-\pi \le x \le \pi} \left| \frac{2\left[d_{2k}(N) - d_{2k+1}(N)\right]}{(N+1)^{2k+1}} \sum_{n=0}^{N-2} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} \left[f^{(2k)}(x) - Z_n^2 f^{(2k)}(x) \right] \right| \overset{(15)}{\le}$$

$$\overset{(15)}{\le} \frac{2}{(N+1)^{2k+1}} \sum_{n=0}^{N-2} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{c_2 \left\| f^{(2k+1)} \right\|_\infty}{n+1} \le \frac{O(1)}{N^{2k+1}} \int_1^N \frac{dt}{t} = O\left(\frac{\ln N}{N^{2k+1}}\right)$$

при $N \to \infty.$ Очевидно, что четвёртая компонента правой части (13)

$$\left| d_{2k}(N) \frac{f^{(2k+1)}(x-0) - f^{(2k+1)}(x+0)}{\pi} \cdot \frac{\ln N}{N^{2k+1}} \right| \underset{R}{\overset{\text{п. в.}}{=}} 0,$$

где символ « $\underset{R}{\overset{\text{п. в.}}{=}}$ » означает равенство почти всюду на действительной прямой R. Поэтому в случае $r = 2k$ из нашей асимптотической формулы (13) получаем

$$f(x) - Z_N^{2k} f(x) = O\left(\frac{\ln N}{N^{2k+1}}\right)_{\text{п. в.}}, \quad N \to \infty. \tag{19}$$

Наконец, в случае порядка $r \geq 2k+1$ из нашей асимптотической формулы (13) имеем

$$f(x) - Z_N^r f(x) = o\left(\frac{\ln N}{N^{2k+1}}\right)_{\text{п. в.}}, \quad N \to \infty. \tag{20}$$

При указанном в 2.1 и 2.2 предположении о приближаемой функции, которое превосходит предположение нашей теоремы, А. Зигмунд [49] доказал, что при $r = 2k+1$ правая часть (20) есть $O\left(\frac{\ln N}{N^{2k+1}}\right)$ при $N \to \infty$. Для рядов Фабера аналоги асимптотических формул (17)—(20) приведены в [50, с. 168—169].

3. Доказательство основного результата. *Шаг 1.* В силу предположения $f \in \mathbf{C}^{2k}(T)$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$, приближаемая функция разлагается в ряд Фурье вида [51]

$$f(x) = f^{\wedge}(0) + \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\right) \frac{\left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(n)}{(in)^{2k}} e^{inx}, \tag{21}$$

который сходится абсолютно и равномерно на действительной прямой R [52]. Тогда матричные средние (6) тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ суть

$$M_N f(x) = f^{\wedge}(0) + \left(\sum_{n=-N}^{-1} + \sum_{n=1}^{N}\right)\left[1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu(N)\left|\frac{n}{N+1}\right|^{\nu}\right] \frac{\left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(n)}{(in)^{2k}} e^{inx}.$$

И для отклонения функции $f(x)$ от её матричных средних $M_N f(x)$ получаем первое представление

$$f(x) - M_N f(x) = \left(\sum_{n=-\infty}^{-(N+1)} + \sum_{n=N+1}^{\infty}\right) \frac{\left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(n)}{(in)^{2k}} e^{inx} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_\nu(N)}{(N+1)^{\nu}} \left(\sum_{n=-N}^{-1} + \sum_{n=1}^{N}\right) |n|^{\nu} \frac{\left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(n)}{(in)^{2k}} e^{inx}. \tag{22}$$

В последней второй компоненте правой части (22) было произведено изменение порядка суммирования, которое законно в силу замечания 1.1.

Шаг 2. Из ряда Фурье (21) следует, что производные чётных порядков $\nu = 2l$, где натуральные l удовлетворяют двойному неравенству $1 \leq l < k$, суть

$$f^{(2l)}(x) = \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\right) \frac{\left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(n)}{(in)^{2k-2l}} e^{inx}.$$

Отсюда, так как $|n|^{2l} = n^{2l} = (-1)^l (in)^{2l}$, получаем

$$\left(\sum_{n=-N}^{-1} + \sum_{n=1}^{N}\right) |n|^{2l} \frac{\left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(n)}{(in)^{2k}} e^{inx} =$$

$$= (-1)^l f^{(2l)}(x) - (-1)^k \left(\sum_{n=-\infty}^{-(N+1)} + \sum_{n=N+1}^{\infty}\right) \frac{\left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(n)}{|n|^{2k-2l}} e^{inx}. \tag{23}$$

Из ряда Фурье (21) и определения (10) следует, что тригонометрически сопряжённая функция

$$\tilde{f}(x) = \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\right)(-i \cdot \operatorname{sgn} n) \frac{\left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(n)}{(in)^{2k}} e^{inx}.$$

Тогда её производные нечётных порядков $\nu = 2l-1$, где натуральные l удовлетворяют нестрогому двойному неравенству $1 \le l \le k$, суть

$$\tilde{f}^{(2l-1)}(x) = \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\right)(-i\cdot\operatorname{sgn} n)\frac{\left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(n)}{(in)^{2k-(2l-1)}}e^{inx}.$$

Отсюда, поскольку $|n|^{2l-1} = (n\cdot\operatorname{sgn} n)^{2l-1} = (\operatorname{sgn} n)\, n^{2l-1} = -(-1)^l\,(-i\cdot\operatorname{sgn} n)(in)^{2l-1}$, имеем

$$\left(\sum_{n=-N}^{-1} + \sum_{n=1}^{N}\right)|\,n\,|^{2l-1}\frac{\left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(n)}{(in)^{2k}}e^{inx} =$$

$$= -(-1)^l\,\tilde{f}^{(2l-1)}(x) - (-1)^k\left(\sum_{n=-\infty}^{-(N+1)} + \sum_{n=N+1}^{\infty}\right)\frac{\left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(n)}{|n|^{2k-(2l-1)}}. \qquad (24)$$

Ради уменьшения числа компонент положим $d_0(N) := -1.$ Тогда подстановка (23) и (24) во вторую компоненту правой части первого представления (22) приводит ко второму представлению

$$f(x) - M_N f(x) = \text{главная часть} -$$

$$-(-1)^k\sum_{\nu=0}^{2k-1}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu}\left(\sum_{n=-\infty}^{-(N+1)} + \sum_{n=N+1}^{\infty}\right)\frac{\left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(n)}{|n|^{2k-\nu}}e^{inx} +$$

$$+(-1)^k\sum_{\nu=0}^{2k-1}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu}\left(\sum_{n=-N}^{-1} + \sum_{n=1}^{N}\right)|\,n\,|^{\nu-2k}\left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(n)e^{inx}. \qquad (25)$$

Шаг 3. Согласно определению (7)

$$\forall N \in Z_+ \quad s_N f^{(2k)}(x) := \sum_{n=-N}^{N}\left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(n)e^{inx}, \qquad (26)$$

а согласно определению (8)

$$\forall N \in Z_+ \quad \sigma_N f^{(2k)}(x) := \sum_{n=-N}^{N}\left(1-\left|\frac{n}{N+1}\right|\right)\left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(n)e^{inx}. \qquad (27)$$

Из (27) с учётом (26) получаем очевидные тождества

$$\forall N \in Z_+ \quad 0 \equiv -\sigma_N f^{(2k)}(x) + s_N f^{(2k)}(x) - \frac{1}{N+1}\sum_{n=-N}^{N}|n|\left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(n)e^{inx}. \qquad (28)$$

Сложение второго представления (25) с (28) даёт для отклонения функции $f(x)$ от её матричных средних $M_N f(x)$ следующее стартовое представление:

$$f(x) - M_N f(x) = \text{главная часть} + (-1)^k\frac{d_{2k}(N)}{(N+1)^{2k}}\left[f^{(2k)}(x) - \sigma_N f^{(2k)}(x)\right] -$$

$$-(-1)^k\frac{d_{2k}(N)}{(N+1)^{2k}}\left[f^{(2k)}(x) - s_N f^{(2k)}(x)\right] - (-1)^k\frac{d_{2k}(N)}{(N+1)^{2k+1}}\sum_{n=-N}^{N}|n|\left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(n)e^{inx} -$$

$$-(-1)^k\sum_{\nu=0}^{2k-1}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu}\left(\sum_{n=-\infty}^{-(N+1)} + \sum_{n=N+1}^{\infty}\right)\frac{\left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(n)}{|n|^{2k-\nu}}e^{inx} +$$

$$+(-1)^k\sum_{\nu=2k}^{\infty}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu}\left(\sum_{n=-N}^{-1} + \sum_{n=1}^{N}\right)|\,n\,|^{\nu-2k}\left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(n)e^{inx}. \qquad (29)$$

Напомним, что главная часть содержит две компоненты. К третьей и четвёртой компонентам правой части (29) мы соответственно добавили и вычли $f^{(2k)}(x)$.

Шаг 4. Перед (7) через Z_1 мы обозначили множество всех натуральных чисел $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Из определения (26) вытекает, что

$$\forall N \in Z_1 \ \left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(-N)\, e^{-iNx} + \left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(N)\, e^{iNx} = s_N f^{(2k)}(x) - s_{N-1} f^{(2k)}(x)\,, \tag{30}$$

где $s_0 f^{(2k)}(x) \equiv 0.$ Следуя А. Н. Колмогорову [53, с. 524—525], применим преобразование Абеля (формулу суммирования по частям) [54, с. 135] к внутренней составляющей последней компоненты правой части стартового представления (29):

$$\left(\sum_{n=-N}^{-1} + \sum_{n=1}^{N}\right) |n|^{\nu-2k}\left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(n)\, e^{inx} = \sum_{n=1}^{N} n^{\nu-2k}\left\{\left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(-n)\, e^{-inx} + \left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(n)\, e^{inx}\right\} \overset{(30)}{=}$$

$$\overset{(30)}{=} \sum_{n=1}^{N} n^{\nu-2k}\left[s_n f^{(2k)}(x) - s_{n-1} f^{(2k)}(x)\right] =$$

$$= N^{\nu-2k} s_N f^{(2k)}(x) - \sum_{n=0}^{N-1}\left[(n+1)^{\nu-2k} - n^{\nu-2k}\right] s_n f^{(2k)}(x)\,. \tag{31}$$

А. Н. Колмогоров [55, с. 524—525], В. Т. Пинкевич [56], С. М. Никольский [57], С. Б. Стечкин [58, с. 463], А. К. Покало [59, с. 46] в нашем контексте при втором применении преобразования Абеля к последней компоненте правой части (31) использовали представление

$$\forall N \in Z_1 \ \ s_N f^{(2k)}(x) = (N+1)\sigma_N f^{(2k)}(x) - N\sigma_{N-1} f^{(2k)}(x)\,, \tag{32}$$

в котором $\sigma_0 f^{(2k)}(x) \equiv 0.$

Мы же воспользуемся представлением [60]

$$\forall N \in Z_1 \ \ s_N f^{(2k)}(x) = \frac{(N+1)^2 Z_N^2 f^{(2k)}(x) - N^2 Z_{N-1}^2 f^{(2k)}(x)}{2N+1}\,, \tag{33}$$

где $Z_0^2 f^{(2k)}(x) \equiv 0$. Мотивировка этого действия будет дана нами ниже на шаге 7 (42). Тогда применение преобразования Абеля (сумматорного аналога формулы интегрирования по частям) к последней компоненте правой части (31) даёт

$$\sum_{n=0}^{N-1}\left[(n+1)^{\nu-2k} - n^{\nu-2k}\right] s_n f^{(2k)}(x) \overset{(33)}{=}$$

$$\overset{(33)}{=} \sum_{n=0}^{N-1}\left[(n+1)^{\nu-2k} - n^{\nu-2k}\right] \frac{(n+1)^2 Z_n^2 f^{(2k)}(x) - n^2 Z_{n-1}^2 f^{(2k)}(x)}{2n+1} =$$

$$= \frac{N^{\nu-2k} - (N-1)^{\nu-2k}}{2N-1} N^2 Z_{N-1}^2 f^{(2k)}(x) -$$

$$- \sum_{n=0}^{N-2}\left[\frac{(n+2)^{\nu-2k} - (n+1)^{\nu-2k}}{2n+3} - \frac{(n+1)^{\nu-2k} - n^{\nu-2k}}{2n+1}\right](n+1)^2 Z_n^2 f^{(2k)}(x)\,. \tag{34}$$

Выше $0^2 Z_{0-1}^2 f^{(2k)}(x) := 0.$

Представления (32) и (33) суть частные случаи представления [61]

$$\forall N \in Z_1 \ \ s_N f^{(2k)}(x) = \frac{(N+1)^r Z_N^r f^{(2k)}(x) - N^r Z_{N-1}^r f^{(2k)}(x)}{(N+1)^r - N^r}\,, \tag{35}$$

в котором согласно нашему контексту $Z_0^r f^{(2k)}(x) \equiv 0.$ Укажем, что представление (35) использовалось автором в работах [62].

Подстановка (34) в (31) приводит к следующему выражению для внутренней составляющей последней компоненты правой части стартового представления (29):

$$\left(\sum_{n=-N}^{-1}+\sum_{n=1}^{N}\right)|n|^{\nu-2k}\left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(n)e^{inx}=$$

$$=N^{\nu-2k}s_N f^{(2k)}(x)-\frac{N^{\nu-2k}-(N-1)^{\nu-2k}}{2N-1}N^2 Z_{N-1}^2 f^{(2k)}(x)+$$

$$+\sum_{n=0}^{N-2}\left[\frac{(n+2)^{\nu-2k}-(n+1)^{\nu-2k}}{2n+3}-\frac{(n+1)^{\nu-2k}-n^{\nu-2k}}{2n+1}\right](n+1)^2 Z_n^2 f^{(2k)}(x). \qquad (36)$$

Функциональное тождество (36) остаётся справедливым, если в нём производную $2k$-го порядка $f^{(2k)}(x)$ заменить произвольной функцией $f\in\mathbf{L}^1(T)$. В частности, заменить функцией 1, тождественно равной единице: $\forall x\in R\ \ 1(x):=1$. Для тождественной единицы нулевой коэффициент Фурье равен единице: $1^{\wedge}(0):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot e^{-i0t}\,dt=1,$ а все её ненулевые коэффициенты Фурье равны нулю: $\forall n\in Z\setminus\{0\}\quad 1^{\wedge}(n):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot e^{-int}\,dt=-\frac{1}{2\pi in}e^{-int}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0.$ Тогда $\forall N\in Z_+\quad s_N 1(x)\equiv Z_N^2 1(x)\equiv 1$ и из функционального тождества (36) имеем числовое тождество

$$0\equiv N^{\nu-2k}-\frac{N^{\nu-2k}-(N-1)^{\nu-2k}}{2N-1}N^2+$$

$$+\sum_{n=0}^{N-2}\left[\frac{(n+2)^{\nu-2k}-(n+1)^{\nu-2k}}{2n+3}-\frac{(n+1)^{\nu-2k}-n^{\nu-2k}}{2n+1}\right](n+1)^2, \qquad (37)$$

которое, впрочем, может быть доказано и непосредственно путём показа, что правая часть (37) равна нулю.

Умножим числовое тождество (37) на $-f^{(2k)}(x)$ и получившееся произведение сложим с функциональным тождеством (36):

$$\left(\sum_{n=-N}^{-1}+\sum_{n=1}^{N}\right)|n|^{\nu-2k}\left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(n)e^{inx}=-N^{\nu-2k}\left[f^{(2k)}(x)-s_N f^{(2k)}(x)\right]+$$

$$+\frac{N^{\nu-2k}-(N-1)^{\nu-2k}}{2N-1}N^2\left[f^{(2k)}(x)-Z_{N-1}^2 f^{(2k)}(x)\right]-$$

$$-\sum_{n=0}^{N-2}\left[\frac{(n+2)^{\nu-2k}-(n+1)^{\nu-2k}}{2n+3}-\frac{(n+1)^{\nu-2k}-n^{\nu-2k}}{2n+1}\right](n+1)^2\left[f^{(2k)}(x)-Z_n^2 f^{(2k)}(x)\right]. \qquad (38)$$

Аналогично предыдущему убеждаемся, что

$$\sum_{n=-N}^{N}|n|\left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(n)e^{inx}=-N\left[f^{(2k)}(x)-s_N f^{(2k)}(x)\right]+$$

$$+\frac{N^2}{2N-1}\left[f^{(2k)}(x)-Z_{N-1}^2 f^{(2k)}(x)\right]+2\sum_{n=0}^{N-2}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}\left[f^{(2k)}(x)-Z_n^2 f^{(2k)}(x)\right]. \qquad (39)$$

Для рядов Фабера аналоги выражений (38) и (39) без доказательства приведены в [63, с. 172].

Шаг 5. Для внутренней составляющей предпоследней компоненты правой части стартового представления (29) с помощью двукратного применения преобразования Абеля, опирающегося при первом применении на представление (30), а при втором применении — на представление (33), получаем

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{-(N+1)}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\right)\frac{\left[f^{(2k)}\right]^{\wedge}(n)}{|n|^{2k-\nu}}e^{inx}=\frac{f^{(2k)}(x)-s_N f^{(2k)}(x)}{(N+1)^{2k-\nu}}+$$

$$+\left[\frac{1}{(N+1)^{2k-\nu}}-\frac{1}{(N+2)^{2k-\nu}}\right]\frac{(N+1)^2}{2N+3}\left[f^{(2k)}(x)-Z_N^2 f^{(2k)}(x)\right]-$$

$$-\sum_{n=N+1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{n^{2k-\nu}}-\frac{1}{(n+1)^{2k-\nu}}\right]\frac{1}{2n+1}-\left[\frac{1}{(n+1)^{2k-\nu}}-\frac{1}{(n+2)^{2k-\nu}}\right]\frac{1}{2n+3}\right\}\times$$

$$\times(n+1)^2\left[f^{(2k)}(x)-Z_n^2 f^{(2k)}(x)\right]. \qquad (40)$$

Доказательство аналога выражения (40) для рядов Фабера имеется в [64].

Шаг 6. Подставим выражения (38)—(40) в правую часть стартового представления (29). Во-первых, учтём, что в силу соглашений (14) и определения $d_0(N):=-1$ сумма компонент

$$-(-1)^k\frac{d_{2k}(N)}{(N+1)^{2k}}\left[f^{(2k)}(x)-s_N f^{(2k)}(x)\right]+$$

$$+(-1)^k\frac{N}{N+1}\frac{d_{2k}(N)}{(N+1)^{2k}}\left[f^{(2k)}(x)-s_N f^{(2k)}(x)\right]-(-1)^k\frac{f^{(2k)}(x)-s_N f^{(2k)}(x)}{(N+1)^{2k}}\sum_{\nu=0}^{2k-1}d_\nu(N)-$$

$$-(-1)^k\frac{f^{(2k)}(x)-s_N f^{(2k)}(x)}{(N+1)^{2k}}\sum_{\nu=2k}^{\infty}\left(\frac{N}{N+1}\right)^{\nu-2k}d_\nu(N)=$$

$$=(-1)^k\mu_{N+1}^{(N)}\frac{f^{(2k)}(x)-s_N f^{(2k)}(x)}{(N+1)^{2k}}-(-1)^k\frac{f^{(2k)}(x)-s_N f^{(2k)}(x)}{(N+1)^{2k+1}}d_{2k}(N)+$$

$$+(-1)^k\frac{f^{(2k)}(x)-s_N f^{(2k)}(x)}{(N+1)^{2k}}\sum_{\nu=2k+1}^{\infty}\left[1-\left(\frac{N}{N+1}\right)^{\nu-2k}\right]d_\nu(N).$$

Констатируем, что выделять элементы $\mu_{N+1}^{(N)}$ первым начал А. К. Покало [65]. Значение элементов $\mu_{N+1}^{(N)}$ над главной диагональю бесконечной нижней комплексной матрицы Хессенберга *M* было разъяснено нами в замечании 1.7 к основному результату. Во-вторых, учтём, что выражения в квадратных скобках для $\nu=2k$ и $\nu=2k+2$ равны нулю и тогда ряд

$$-(-1)^k\sum_{\nu=2k}^{\infty}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu}\sum_{n=0}^{N-2}\left[\frac{(n+2)^{\nu-2k}-(n+1)^{\nu-2k}}{2n+3}-\frac{(n+1)^{\nu-2k}-n^{\nu-2k}}{2n+1}\right]\times$$

$$\times(n+1)^2\left[f^{(2k)}(x)-f^{(2k)}(x)\right]=$$

$$=(-1)^k\frac{2d_{2k+1}(N)}{(N+1)^{2k+1}}\sum_{n=0}^{N-2}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}\left[f^{(2k)}(x)-Z_n^2 f^{(2k)}(x)\right]-$$

$$-(-1)^k\sum_{\nu=2k+3}^{\infty}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu}\sum_{n=0}^{N-2}\left[\frac{(n+2)^{\nu-2k}-(n+1)^{\nu-2k}}{2n+3}-\frac{(n+1)^{\nu-2k}-n^{\nu-2k}}{2n+1}\right]\times$$

$$\times(n+1)^2\left[f^{(2k)}(x)-Z_n^2 f^{(2k)}(x)\right].$$

В итоге от стартового представления (29) приходим к следующему рабочему представлению:

$$f(x)-M_N f(x)=\text{главная часть}+$$

$$+(-1)^k\mu_{N+1}^{(N)}\frac{f^{(2k)}(x)-s_N f^{(2k)}(x)}{(N+1)^{2k}}+(-1)^k\frac{d_{2k}(N)}{(N+1)^{2k}}\left[f^{(2k)}(x)-\sigma_N f^{(2k)}(x)\right]-$$

$$-(-1)^k \frac{2\left[d_{2k}(N)-d_{2k+1}(N)\right]}{(N+1)^{2k+1}} \sum_{n=0}^{N-2} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}\left[f^{(2k)}(x)-Z_n^2 f^{(2k)}(x)\right]-$$

$$-(-1)^k \frac{N^2}{2N-1} \frac{d_{2k}(N)}{(N+1)^{2k+1}}\left[f^{(2k)}(x)-Z_{N-1}^2 f^{(2k)}(x)\right]-$$

$$-(-1)^k \frac{(N+1)^2}{2N+3}\left[f^{(2k)}(x)-Z_N^2 f^{(2k)}(x)\right] \sum_{\nu=0}^{2k-1} \frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu}\left[\frac{1}{(N+1)^{2k-\nu}}-\frac{1}{(N+2)^{2k-\nu}}\right]+$$

$$+(-1)^k \frac{N^2}{2N-1}\left[f^{(2k)}(x)-Z_{N-1}^2 f^{(2k)}(x)\right] \sum_{\nu=2k+1}^{\infty} \frac{N^{\nu-2k}-(N-1)^{\nu-2k}}{(N+1)^\nu} d_\nu(N)+$$

$$+(-1)^k \sum_{\nu=0}^{2k-1} \frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu} \sum_{n=N+1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{n^{2k-\nu}}-\frac{1}{(n+1)^{2k-\nu}}\right] \frac{1}{2n+1}-\left[\frac{1}{(n+1)^{2k-\nu}}-\frac{1}{(n+2)^{2k-\nu}}\right] \frac{1}{2n+3}\right\} \times$$

$$\times(n+1)^2\left[f^{(2k)}(x)-Z_n^2 f^{(2k)}(x)\right]-$$

$$-(-1)^k \sum_{\nu=2k+3}^{\infty} \frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu} \sum_{n=0}^{N-2}\left[\frac{(n+2)^{\nu-2k}-(n+1)^{\nu-2k}}{2n+3}-\frac{(n+1)^{\nu-2k}-n^{\nu-2k}}{2n+1}\right] \times$$

$$\times(n+1)^2\left[f^{(2k)}(x)-Z_n^2 f^{(2k)}(x)\right]-$$

$$-(-1)^k \frac{f^{(2k)}(x)-s_N f^{(2k)}(x)}{(N+1)^{2k+1}} d_{2k}(N)+$$

$$+(-1)^k \frac{f^{(2k)}(x)-s_N f^{(2k)}(x)}{(N+1)^{2k}} \sum_{\nu=2k+1}^{\infty}\left[1-\left(\frac{N}{N+1}\right)^{\nu-2k}\right] d_\nu(N). \qquad (41)$$

В правой части рабочего представления (41) насчитывается двенадцать компонент с учётом того, что в главной части две компоненты.

Шаг 7. Согласно предположению приближаемая 2π-периодическая функция $f(x)$ имеет непрерывную производную 2*k*-го порядка $f^{(2k)}(x)$, удовлетворяющую условию (12). Тогда отклонение производной $f^{(2k)}(x)$ от средних Зигмунда второго порядка $Z_N^2 f^{(2k)}(x)$ её тригонометрического ряда Фурье [66]

$$\max_{-\pi \le x \le \pi}\left|f^{(2k)}(x)-Z_N^2 f^{(2k)}(x)\right|=O\left(\frac{1}{N}\right),\ N \to \infty. \qquad (42)$$

В силу замечания 1.3 оценка (15) является частным случаем (42).

Из (42) с учётом предположения о методе суммирования (11) для шестой компоненты правой части рабочего представления (41) имеем

$$\max_{-\pi \le x \le \pi}\left|\frac{N^2}{2N-1} \frac{d_{2k}(N)}{(N+1)^{2k+1}}\left[f^{(2k)}(x)-Z_{N-1}^2 f^{(2k)}(x)\right]\right|=O\left(\frac{1}{N^{2k+1}}\right),\ N \to \infty. \qquad (43)$$

Чтобы не увеличивать ниже длину строк для вспомогательных неравенств (44), (47), (51), (55), (61), мы не указываем значения параметров, при которых они справедливы. Значения параметров ясны из оценок (46), (49), (53), (57), (62) компонент правой части рабочего представления (41), для получения которых эти вспомогательные неравенства используются.

На основании теоремы о монотонной зависимости интеграла от подынтегральной функции получаем

$$0<\frac{1}{(N+1)^{2k-\nu}}-\frac{1}{(N+2)^{2k-\nu}}=(2k-\nu) \int_{N+1}^{N+2} \frac{dt}{t^{2k-\nu+1}} \leq(2k-\nu) \int_{N+1}^{N+2} \frac{dt}{(N+1)^{2k-\nu+1}}=\frac{2k-\nu}{(N+1)^{2k-\nu+1}}. \qquad (44)$$

В силу (44) для суммы в седьмой компоненте правой части рабочего представления (41) имеем

$$\left|\sum_{\nu=0}^{2k-1}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu}\left[\frac{1}{(N+1)^{2k-\nu}}-\frac{1}{(N+2)^{2k-\nu}}\right]\right|\overset{(44)}{\le}\sum_{\nu=0}^{2k-1}\frac{|d_\nu(N)|}{(N+1)^\nu}\frac{2k-\nu}{(N+1)^{2k-\nu+1}}\le$$

$$\le\frac{2k}{(N+1)^{2k+1}}\sum_{\nu=0}^{2k-1}|d_\nu(N)|\le\frac{2k}{(N+1)^{2k+1}}\left(1+\sum_{\nu=1}^{2k-1}\nu|d_\nu(N)|\right)\overset{(11)}{\le}\frac{2k\,(1+c_1)}{(N+1)^{2k+1}}. \quad (45)$$

Из (42) и (45) для седьмой компоненты правой части рабочего представления (41) получаем

$$\max_{-\pi\le x\le\pi}\left|\frac{(N+1)^2}{2N+3}\left[f^{(2k)}(x)-Z_N^2f^{(2k)}(x)\right]\sum_{\nu=0}^{2k-1}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu}\left[\frac{1}{(N+1)^{2k-\nu}}-\frac{1}{(N+2)^{2k-\nu}}\right]\right|=$$

$$=O\left(\frac{1}{N^{2k+1}}\right),\ N\to\infty. \quad (46)$$

Аналогично предыдущему из вспомогательного неравенства

$$0<N^{\nu-2k}-(N-1)^{\nu-2k}=(\nu-2k)\int_{N-1}^{N}t^{\nu-2k-1}\,dt\le$$

$$\le(\nu-2k)\int_{N-1}^{N}N^{\nu-2k-1}\,dt=(\nu-2k)N^{\nu-2k-1} \quad (47)$$

для ряда в восьмой компоненте правой части рабочего представления (41) имеем

$$\left|\sum_{\nu=2k+1}^{\infty}\frac{N^{\nu-2k}-(N-1)^{\nu-2k}}{(N+1)^\nu}d_\nu(N)\right|\overset{(47)}{\le}\sum_{\nu=2k+1}^{\infty}\frac{(\nu-2k)N^{\nu-2k-1}}{(N+1)^\nu}|d_\nu(N)|=$$

$$=\frac{1}{N^{2k+1}}\sum_{\nu=2k+1}^{\infty}(\nu-2k)\left(\frac{N}{N+1}\right)^\nu|d_\nu(N)|\le\frac{1}{N^{2k+1}}\sum_{\nu=2k+1}^{\infty}\nu|d_\nu(N)|\overset{(11)}{\le}\frac{c_1}{N^{2k+1}}. \quad (48)$$

Тогда из (42) и (48) для восьмой компоненты правой части рабочего представления (41) получаем

$$\max_{-\pi\le x\le\pi}\left|\frac{N^2}{2N-1}\left[f^{(2k)}(x)-Z_{N-1}^2f^{(2k)}(x)\right]\sum_{\nu=2k+1}^{\infty}\frac{N^{\nu-2k}-(N-1)^{\nu-2k}}{(N+1)^\nu}d_\nu(N)\right|=O\left(\frac{1}{N^{2k+1}}\right) \quad (49)$$

при $N\to\infty$.

Шаг 8. Так как производная

$$\left\{\left[\frac{1}{t^{2k-\nu}}-\frac{1}{(t+1)^{2k-\nu}}\right]\frac{1}{2t+1}\right\}'=$$

$$=-\left[\frac{1}{t^{2k-\nu+1}}-\frac{1}{(t+1)^{2k-\nu+1}}\right]\frac{2k-\nu}{2t+1}-\left[\frac{1}{t^{2k-\nu}}-\frac{1}{(t+1)^{2k-\nu}}\right]\frac{2}{(2t+1)^2}<0,$$

то для её модуля с учётом неравенства (44) имеем

$$\left|\left\{\left[\frac{1}{t^{2k-\nu}}-\frac{1}{(t+1)^{2k-\nu}}\right]\frac{1}{2t+1}\right\}'\right|\overset{(44)}{\le}\frac{2k-\nu+1}{t^{2k-\nu+2}}\frac{2k-\nu}{2t+1}+\frac{2k-\nu}{t^{2k-\nu+1}}\frac{2}{(2t+1)^2}\le$$

$$\le\frac{2k-\nu+1}{t^{2k-\nu+2}}\frac{2k-\nu}{2t}+\frac{2k-\nu}{t^{2k-\nu+1}}\frac{1}{2t^2}=\frac{(2k-\nu)(2k-\nu+2)}{2t^{2k-\nu+3}}. \quad (50)$$

С помощью (50) и теоремы о монотонной зависимости интеграла от подынтегральной функции получаем

$$0<\left[\frac{1}{n^{2k-\nu}}-\frac{1}{(n+1)^{2k-\nu}}\right]\frac{1}{2n+1}-\left[\frac{1}{(n+1)^{2k-\nu}}-\frac{1}{(n+2)^{2k-\nu}}\right]\frac{1}{2n+3}=$$

$$=\int_{n+1}^{n}\left\{\left[\frac{1}{t^{2k-\nu}}-\frac{1}{(t+1)^{2k-\nu}}\right]\frac{1}{2t+1}\right\}'dt\overset{(50)}{\le}\int_{n}^{n+1}\frac{(2k-\nu)(2k-\nu+2)}{2t^{2k-\nu+3}}dt\le$$

$$\le\int_{n}^{n+1}\frac{(2k-\nu)(2k-\nu+2)}{2n^{2k-\nu+3}}dt=\frac{(2k-\nu)(2k-\nu+2)}{2n^{2k-\nu+3}}. \qquad (51)$$

Из (42) и (51) для ряда в девятой компоненте правой части рабочего представления (41) имеем

$$\max_{-\pi\le x\le\pi}\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\ \{\ldots\}\ (n+1)^2\left[f^{(2k)}(x)-Z_n^2 f^{(2k)}(x)\right]\right|\le$$

$$\le\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(2k-\nu)(2k-\nu+2)}{2n^{2k-\nu+3}}(n+1)^2\cdot O\left(\frac{1}{n}\right)=$$

$$=(2k-\nu)(2k-\nu+2)O(1)\int_{N}^{\infty}\frac{dt}{t^{2k-\nu+2}}=(2k-\nu+2)\frac{O(1)}{N^{2k-\nu+1}}. \qquad (52)$$

В силу (52) для девятой компоненты правой части рабочего представления (41) аналогично (45) получаем

$$\max_{-\pi\le x\le\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{2k-1}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu}\sum_{n=N+1}^{\infty}\ldots\right|\overset{(52)}{\le}\sum_{\nu=0}^{2k-1}\frac{|d_\nu(N)|}{(N+1)^\nu}(2k-\nu+2)\frac{O(1)}{N^{2k-\nu+1}}=$$

$$=\frac{O(1)}{N^{2k+1}}\sum_{\nu=0}^{2k-1}(2k-\nu+2)\left(\frac{N}{N+1}\right)^\nu|d_\nu(N)|=O\left(\frac{1}{N^{2k+1}}\right),\ N\to\infty. \qquad (53)$$

Аналогично предыдущему для производной

$$\left[\frac{(t+1)^{\nu-2k}-t^{\nu-2k}}{2t+1}\right]'=$$

$$=\frac{(\nu-2k)\left[(t+1)^{\nu-2k-1}-t^{\nu-2k-1}\right](2t+1)-2\left[(t+1)^{\nu-2k}-t^{\nu-2k}\right]}{(2t+1)^2}$$

с помощью неравенства (47) имеем следующую оценку её модуля:

$$\left|\left[\frac{(t+1)^{\nu-2k}-t^{\nu-2k}}{2t+1}\right]'\right|\overset{(47)}{\le}$$

$$\overset{(47)}{\le}\frac{(\nu-2k)(\nu-2k-1)(t+1)^{\nu-2k-2}(2t+1)+2(\nu-2k)(t+1)^{\nu-2k-1}}{(2t+1)^2}\le$$

$$\le\frac{(\nu-2k)\left[(\nu-2k-1)(t+1)^{\nu-2k-2}(2t+2)+2(t+1)^{\nu-2k-1}\right]}{(2t+1)^2}=\frac{2(\nu-2k)^2(t+1)^{\nu-2k-1}}{(2t+1)^2}. \qquad (54)$$

Оценка (54) и теорема о монотонной зависимости интеграла от подынтегральной функции влекут

$$\left|\frac{(n+2)^{\nu-2k}-(n+1)^{\nu-2k}}{2n+3}-\frac{(n+1)^{\nu-2k}-n^{\nu-2k}}{2n+1}\right|=$$

$$=\left|\int\limits_{n}^{n+1}\left[\frac{(t+1)^{\nu-2k}-t^{\nu-2k}}{2t+1}\right]' dt\right| \overset{(54)}{\leq} \int\limits_{n}^{n+1}\frac{2(\nu-2k)^2(t+1)^{\nu-2k-1}}{(2t+1)^2}dt \leq$$

$$\leq \int\limits_{n}^{n+1}\frac{2(\nu-2k)^2(n+2)^{\nu-2k-1}}{(2n+1)^2}dt=\frac{2(\nu-2k)^2(n+2)^{\nu-2k-1}}{(2n+1)^2}. \tag{55}$$

Для суммы в десятой компоненте правой части рабочего представления (41) с помощью неравенств (42) и (55) получаем

$$\max_{-\pi\leq x\leq\pi}\left|\sum_{n=0}^{N-2}\,[\ldots]\,(n+1)^2\left[f^{(2k)}(x)-Z_n^2 f^{(2k)}(x)\right]\right|\leq$$

$$\leq\sum_{n=0}^{N-2}\frac{2(\nu-2k)^2(n+2)^{\nu-2k-1}}{(2n+1)^2}(n+1)^2\,\frac{c_3\left(f^{(2k)}\right)}{n+2}\leq 2(\nu-2k)^2\,c_3\left(f^{(2k)}\right)\sum_{n=0}^{N-2}(n+2)^{\nu-2k-2}\leq$$

$$\leq 2(\nu-2k)^2\,c_3\left(f^{(2k)}\right)\int\limits_{0}^{N-1}(t+2)^{\nu-2k-2}\,dt\leq 2\left(1+\frac{1}{\nu-2k-1}\right)(\nu-2k)\,c_3\left(f^{(2k)}\right)(N+1)^{\nu-2k-1}\leq$$

$$\leq 4(\nu-2k)\,c_3\left(f^{(2k)}\right)(N+1)^{\nu-2k-1}. \tag{56}$$

Тогда для десятой компоненты правой части рабочего представления (41) в силу (56) имеем

$$\max_{-\pi\leq x\leq\pi}\left|\sum_{\nu=2k+3}^{\infty}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu}\sum_{n=0}^{N-2}\ldots\right|\overset{(56)}{\leq}\sum_{\nu=2k+3}^{\infty}\frac{|d_\nu(N)|}{(N+1)^\nu}4(\nu-2k)\,c_3\left(f^{(2k)}\right)(N+1)^{\nu-2k-1}\leq$$

$$\leq\frac{4c_3\left(f^{(2k)}\right)}{(N+1)^{2k+1}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu\,|d_\nu(N)|\overset{(11)}{\leq}\frac{4c_1\,c_3\left(f^{(2k)}\right)}{(N+1)^{2k+1}}. \tag{57}$$

Шаг 9. Как установил А. Лебег [67], от непрерывной 2π-периодической функции $f^{(2k)}(x)$ частичные суммы $s_N f^{(2k)}(x)$ её тригонометрического ряда Фурье отклоняются не более чем в $O(\ln N)$ раз хуже по сравнению с наилучшим приближением функции $f^{(2k)}(x)$ тригонометрическими полиномами степени не выше N:

$$\max_{-\pi\leq x\leq\pi}\left|f^{(2k)}(x)-s_N f^{(2k)}(x)\right|\leq O(\ln N)\cdot\inf_{\gamma_n\in C}\max_{-\pi\leq x\leq\pi}\left|f^{(2k)}(x)-\sum_{n=-N}^{N}\gamma_n\,e^{inx}\right|. \tag{58}$$

В (58) $O(\ln N)$ есть оценка констант Лебега тригонометрической системы [68]. Укажем, что соответствующие функции Лебега находят применение в теории ортогональных рядов [69] и в теории рядов Фабера [70]. Из неравенства Лебега (58), очевидного неравенства

$$\inf_{\gamma_n\in C}\max_{-\pi\leq x\leq\pi}\left|f^{(2k)}(x)-\sum_{n=-N}^{N}\gamma_n\,e^{inx}\right|\leq\max_{-\pi\leq x\leq\pi}\left|f^{(2k)}(x)-Z_N^2 f^{(2k)}(x)\right|$$

и оценки (42) следует, что когда приближаемая 2π-периодическая функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $2k$-го порядка $f^{(2k)}(x)$, удовлетворяющую условию (12), то

$$\max_{-\pi\leq x\leq\pi}\left|f^{(2k)}(x)-s_N f^{(2k)}(x)\right|=O\left(\frac{\ln N}{N}\right),\ N\to\infty. \tag{59}$$

Из (59) с учётом предположения о методе суммирования (11) для предпоследней одиннадцатой компоненты правой части рабочего представления (41) получаем

$$\max_{-\pi\le x\le\pi}\left|\frac{f^{(2k)}(x)-s_N f^{(2k)}(x)}{(N+1)^{2k+1}}d_{2k}(N)\right|=O\left(\frac{\ln N}{N^{2k+2}}\right),\ N\to\infty. \tag{60}$$

Как известно, методом математической индукции доказывается неравенство Я. Бернулли

$$\forall n\in Z_+\ \ \forall x>-1\ \ (1+x)^n\ge 1+nx\,.$$

С его помощью имеем вспомогательное неравенство

$$1-\left(\frac{N}{N+1}\right)^{\nu-2k}=1-\left(1-\frac{1}{N+1}\right)^{\nu-2k}\le 1-\left(1-\frac{\nu-2k}{N+1}\right)=\frac{\nu-2k}{N+1}\,. \tag{61}$$

Тогда для последней двенадцатой компоненты правой части рабочего представления (41) в силу неравенств (59) и (61) получаем

$$\max_{-\pi\le x\le\pi}\left|\frac{f^{(2k)}(x)-s_N f^{(2k)}(x)}{(N+1)^{2k}}\sum_{\nu=2k+1}^{\infty}\left[1-\left(\frac{N}{N+1}\right)^{\nu-2k}\right]d_\nu(N)\right|\le$$

$$\le\frac{c_4\left(f^{(2k)}\right)\ln(N+2)}{(N+1)^{2k+1}}\sum_{\nu=2k+1}^{\infty}\frac{\nu-2k}{N+1}\left|d_\nu(N)\right|\le$$

$$\le\frac{c_4\left(f^{(2k)}\right)\ln(N+2)}{(N+1)^{2k+2}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu\left|d_\nu(N)\right|\overset{(11)}{\le}\frac{c_1c_4\left(f^{(2k)}\right)\ln(N+2)}{(N+1)^{2k+2}}\,. \tag{62}$$

Просуммируем равномерные на действительной прямой R оценки (43), (46), (49), (53), (57), (60) и (62):

$$5\cdot O\left(\frac{1}{N^{2k+1}}\right)+2\cdot O\left(\frac{\ln N}{N^{2k+2}}\right)=O\left(\frac{1}{N^{2k+1}}\right),\ N\to\infty. \tag{63}$$

В асимптотической формуле С. Н. Бернштейна (3) предполагается, что приближаемая функция $f\in\mathbf{C}(T)$, а оценка (63) получена в предположении, что производная $2k$-го порядка $f^{(2k)}\in\mathbf{C}(T)$ и, кроме того, удовлетворяет условию (12). На последнее обстоятельство было указано нами выше в конце замечания 1.4 к основному результату.

Шаг 10. Приближаемой функции f производная $2k$-го порядка $f^{(2k)}\in\mathbf{C}(T)$ имеет в точке x_0 конечные левостороннюю $f^{(2k+1)}(x_0-0)$ и правостороннюю $f^{(2k+1)}(x_0+0)$ производные $(2k+1)$-го порядка. Согласно асимптотической формуле С. Н. Бернштейна (3)

$$f^{(2k)}(x_0)-\sigma_N f^{(2k)}(x_0)=\frac{f^{(2k+1)}(x_0-0)-f^{(2k+1)}(x_0+0)}{\pi}\cdot\frac{\ln N}{N}+o\left(\frac{\ln N}{N}\right) \tag{64}$$

при $N\to\infty$. Тогда для четвёртой компоненты правой части рабочего представления (41) в точке x_0 в силу (64) имеем

$$(-1)^k\frac{d_{2k}(N)}{(N+1)^{2k}}\left[f^{(2k)}(x_0)-\sigma_N f^{(2k)}(x_0)\right]=$$

$$=(-1)^k d_{2k}(N)\frac{f^{(2k+1)}(x_0-0)-f^{(2k+1)}(x_0+0)}{\pi}\cdot\frac{\ln N}{N^{2k+1}}+o\left(\frac{\ln N}{N^{2k+1}}\right),\ N\to\infty. \tag{65}$$

Складывая глобальную оценку (63) с локальным результатом (65) получаем нашу асимптотическую формулу (13) с локальным остатком $o\left(\dfrac{\ln N}{N^{2k+1}}\right)$ при $N \to \infty$.

Доказательство основного результата закончено.

Ряды Фабера неоднократно упоминались выше. Классическими примерами рядов Фабера являются ряды Тейлора [71, с. 24] и ряды Фурье по системе многочленов Чебышёва первого рода [72].

Если при натуральном $r \in Z_1$ аналитическая в единичном круге $|z| < 1$ функции $g(z)$ имеет производную *r*-го порядка, которая удовлетворяет на замкнутом единичном круге $|z| \le 1$ условию Липшица первого порядка

$$\left|g^{(r)}(z_1) - g^{(r)}(z_2)\right| \le \sup_{|z|<1}\left|g^{(r+1)}(z)\right| \cdot |z_1 - z_2|\,,$$

то, как показал С. Б. Стечкин [73, с. 466], на $|z| \le 1$ справедлива асимптотическая формула

$$g(z) - \sum_{n=0}^{N}\left(1 - \frac{n}{N+1}\right) \cdot \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{g(\tau)}{\tau^{n+1}}d\tau \cdot z^n = \frac{z\,g'(z)}{N+1} + O\left(\frac{1}{N^{r+1}}\right),\ N \to \infty. \tag{66}$$

В этом случае граничная функция $f(x) := g\left(e^{ix}\right)$ имеет тригонометрический ряд Фурье степенного типа и, следовательно, тригонометрически сопряжённая функция $\tilde{f}(x) = -i\left[f(x) - f^{\wedge}(0)\right]$. Асимптотическая формула (66) была обобщена на другие матричные средние рядов Тейлора в представленной А. Н. Колмогоровым статье А. К. Покало [74, с. 751].

С помощью понятия производной Фабера [75] асимптотические формулы типа (66) распространены с $|z| \le 1$ на ряды Фабера на замкнутых жордановых областях с усиленно гладкой (stark glatt) границей [76] и с границей ограниченного вращения (bounded rotation) [77]. Классы таких областей различны в том смысле, что каждый из классов содержит область, не входящую в другой класс. Иными словами, в существенном используется разный математический аппарат. В случае единичного круга производные *r*-го порядка Фабера и обычные выражаются одни через другие [78, с. 164].

Если функция $f(z)$ непрерывна на отрезке $-1 \le z \le 1$, то

$$f(z) \underset{-1\le z\le 1}{\overset{\text{п. в.}}{=}} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}d\zeta + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos(n\arccos\zeta)\,d\zeta \cdot \cos(n\arccos z)\,,$$

где символ «$\underset{-1\le z\le 1}{\overset{\text{п. в.}}{=}}$» означает равенство почти всюду на отрезке $-1 \le z \le 1$. П. Л. Бутцер и Р. Л. Штэнс ввели понятие чебышёвски сопряжённой функции [79, с. 56]:

$$\overset{<\sim>}{f}(z) \underset{-1\le z\le 1}{\overset{\text{п.в.}}{=}} \lim_{r\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cdot \frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos(n\arccos\zeta)\,d\zeta \cdot \sin(n\arccos z)\,.$$

Так как $\overset{<\sim>}{f}(\cos\theta) = [f(\cos\theta)]^{\sim}$, то при соответствующем предположении о $f^{(r)}(z)$ из асимптотической формулы М. Заманского [80, с. 169] имеем

$$f(z) - \left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}d\zeta + \sum_{n=1}^{N}\left(1-\frac{n}{N+1}\right)\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos(n\arccos\zeta)\,d\zeta \cdot \cos(n\arccos z)\right] =$$

$$\underset{-1\le z\le 1}{=} -\sqrt{1-z^2}\,\frac{\left(\overset{<\sim>}{f}\right)'(z)}{N+1} + O\left(\frac{1}{N^{r+1}}\right),\ N \to \infty\,.$$

Отсюда видна особая роль точек $z = -1$ и $z = 1$ в аппроксимации на отрезке $-1 \le z \le 1$ [81].

Заключение. Асимптотическую формулу Е. В. Вороновской (4) для отклонения функции $f \in \mathbf{C}^2[0,1]$ от её многочленов С. Н. Бернштейна $B_N f(x)$ обобщил сам С. Н. Бернштейн (5) на функции $f \in \mathbf{C}^{2k}[0,1]$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$. Аналогично в настоящей работе асимптотическая формула С. Н. Бернштейна (3) для отклонения функции $f \in \mathbf{C}(T)$, которая имеет в точке x_0 конечные левостороннюю $f'(x_0 - 0)$ и правостороннюю $f'(x_0 + 0)$ производные, от средних Фейера (8) её тригонометрического ряда Фурье (1), обобщена нами (13) для отклонения функции $f \in \mathbf{C}^{2k}(T) \wedge (12)$, которая имеет в точке x_0 конечные односторонние производные $(2k+1)$-го порядка, от матричных средних (6) её тригонометрического ряда Фурье (1). Полученная нами асимптотическая формула (13) имеет в главной части производные чётного порядка приближаемой функции f и в случае нечётного порядка производные уже функции $\tilde{f}$, тригонометрически сопряжённой к функции *f*. В последнем заключается отличие главной части нашей асимптотической формулы (13) от главной части асимптотической формулы С. Н. Бернштейна (5). Само собой понятно, что в процессе доказательства (13) мы использовали результаты, которые первопроходцам в момент получения ими своих асимптотических формул не были известны. Напомним, что подобные исследования Ж. Дьёдонне относил к «жёсткому» анализу (“hard” analysis). Внимание молодых математиков обратим на то, что понятие сопряжённой функции ввели: для ультрасферических рядов — Макенхоупт и Стейн [82, с. 24], для рядов Эрмита — Макенхоупт [83], для рядов Лагерра — Макенхоупт [84, с. 416], для рядов Уолша — Хант [85], для рядов Фурье по системе многочленов Чебышёва первого рода — уже упоминавшиеся выше П. Л. Бутцер и Р. Л. Штэнс [86, с. 56], И. Йо — для рядов Дирихле [87] и разложений Штурма—Лиувилля [88].

Список цитируемых источников

1. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении : в 2 т. М. : Мир, 1985. Т. 1. 264 с. ; Т. 2. 400 с.
2. Шварц Л. Анализ : в 2 т. М. : Мир, 1972. Т. 1. С. 711 ; Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М. : Наука, 1977. С. 155 ; Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. М. : Наука, 1987. С. 38.
3. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1949. 688 с.
4. Там же. С. 206.
5. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1.
6. Вороновская Е. В. Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. Сер. А. 1932. № 4. С. 79—85 ; Бернштейн С. Н. Добавление к статье Е. В. Вороновской «Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна» // Собр. соч. / С. Н. Бернштейн. М. : Изд-во АН СССР, 1954. Т/ 2 : Конструктивная теория функций. С. 153.
7. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. С. 317 ; Натансон И. П. Конструктивная теория функций. С. 246 ; Lorentz G. G. Bernstein Polynomials // Mathematical Expositions. Toronto : University of Toronto Press, 1953. № 8. P. 22 ; Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М. : ГИФМЛ, 1960. С. 593 ; DeVore R. A., Lorentz G. G. Constructive Approximation. Berlin [et. al.] : Springer, 1993. P. 307.
8. Вороновская Е. В. Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. Сер. А. 1932. № 4. С. 79—85.
9. Бернштейн С. Н. Добавление к статье Е. В. Вороновской «Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна» С. 155—158.
10. Там же.
11. Lorentz G. G. Bernstein Polynomials // Mathematical Expositions. Toronto : University of Toronto Press, 1953. № 8. P. 23.
12. Натансон И. П. Конструктивная теория функций.
13. Покало А. К. Об одном классе линейных методов суммирования // Вес. АН Беларус. ССР. Сер. фіз.-тэхн. навук. 1962. № 1. С. 24—27.
14. Никольский С. М. О линейных методах суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1948. Т. 12, № 3. С. 259—278.
15. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. С. 281—282 ; Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. С. 485 ; Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М. : ГИФМЛ, 1961. С. 475.
16. Покало А. К. Об одном классе линейных методов суммирования.
17. Бруй И. Н. О включении метода Фейера в одну совокупность методов суммирования числовых рядов // Техника и технологии: инновации и качество : материалы II Междунар. науч.-практ. конф., 24—25 окт. 2013 г., г. Барановичи, Респ. Беларусь. Барановичи : РИО БарГУ, 2013. С. 41—56.
18. Кивинукк А.: 1) О порядке приближения периодических функций // Уч. зап. Тартус. гос. ун-та. 1972. Вып. 305. С. 239 ; 2) Теоремы сравнения методов суммирования разложений Фурье в пространстве Банаха // Уч. зап. Тартус. гос. ун-та. 1978. Вып. 448. С. 32.
19. Baskakov V. A. On the degree of approximation of smooth functions by linear saturated operators // East Journal on Approximations. 1995. Vol. 1, № 4. P. 513—520.
20. Кибалко П. И. О приближении периодических функций двух переменных одним классом линейных методов суммирования двойных рядов Фурье // Вес. АН Беларус. ССР. Сер. фіз.-матэм. навук. 1977. № 1. С. 34—43.
21. Линейные методы суммирования рядов и интегралов Фурье : отчёт о НИР (заключ.) / МГПИ им. А. М. Горького ; рук. А. К. Покало ; исполн.: И. Н. Бруй [и др.]. Минск, 1980. 47 с. Библиогр.: с. 43—47. Инв. № 0282.7045881.
22. Семенчук Н. П. Обобщённый метод суммирования интегралов Фурье дифференцируемых функций // Вес. АН Беларус. ССР. Сер. фіз.-матэм. навук. 1977. № 1. С. 19—24.

23. Линейные методы суммирования рядов и интегралов Фурье : отчёт о НИР (заключ.) / МГПИ им. А. М. Горького ; рук. А. К. Покало ; исполн.: И. Н. Бруй [и др.]. Минск, 1980. С. 34—36 ; Об одном классе методов суммирования интегралов и сопряжённых интегралов Фурье : отчёт о НИР (заключ.) / БрГПИ им.А. С. Пушкина ; рук. Н. П. Семенчук. Брест, 1986. 14 с. Библиогр.: с. 14. Инв. № 0286.0074543.

24. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. С. 168 ; Бари Н. К. Тригонометрические ряды. С. 518 ; Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М. : Наука, 1965. С. 170.

25. Бруй И. Н. Асимптотические формулы типа С. Н. Бернштейна // Наука. Образование. Технологии — 2009 : материалы II Междунар. науч.-практ. конф., 10—11 сент. 2009 г., Барановичи, Респ. Беларусь. Барановичи : РИО БарГУ, 2009. Ч. 2. С. 28—30.

26. Харди Г. Расходящиеся ряды. М. : ИИЛ, 1951. С. 24, 62.

27. Бруй И. Н.: 1) О включении метода Фейера в одну совокупность методов суммирования числовых рядов. С. 42—43 ; 2) Оценка скорости суммируемости через скорость приближения частичными суммами и средними Зигмунда // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. 2014. № 3 (180). С. 17 ; 3) Памяти моего научного руководителя А. К. Покало: его идеи // Технологии, экономика и право: актуальные проблемы и инновации : материалы Междунар. науч.-практ. конф., 20 нояб. 2014 г., г. Барановичи, Респ. Беларусь. Барановичи : РИО БарГУ, 2014. С. 18.

28. Харди Г. Расходящиеся ряды.

29. Бруй И. Н.: 1) Оценка скорости суммируемости через скорость приближения частичными суммами и средними Зигмунда. С. 19 ; 2) Памяти моего научного руководителя А. К. Покало: его идеи. С. 18.

30. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. С. 221 ; Зигмунд А. Тригонометрические ряды : в 2 т. М. : Мир, 1965. Т. 1. С. 82—83.

31. Пизо Ш., Заманский М. Курс математики: алгебра и анализ. М. : Наука, 1971. 656 с.

32. Zygmund A. The approximation of functions by typical means of their Fourier series // Duke Mathematical Journal. 1945. Vol. 12. P. 695—704.

33. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного.

34. Baskakov V. A. On the degree of approximation of smooth functions by linear saturated operators ; Баскаков В. А.: 1) Вокруг одной асимптотической формулы С. М. Никольского и аккуратные оценки приближений // Функцион. пространства, теория приближений, нелинейн. анализ : тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 90-летию акад. С. М. Никольского, 27 апр. — 3 мая 1995 г., Москва. М., 1995. С. 36—38 ; 2) О насыщении высших порядков // Теория функций и приближений : тр. 7-й Сарат. зим. шк. 30 янв. — 4 февр. 1994 г. (памяти проф. А. А. Привалова). Саратов, 1995. Ч. 1. С. 41—50 ; 3) Асимптотика приближения индивидуальных функций обобщёнными операторами Фейера // Analysis Mathematica. 1997. Vol. 23. P. 189—204.

35. Zamansky M. Classes de saturation des procédés de sommation des séries de Fourier et applications aux séries trigonométriques // Annales scientifiques de l'École normale supérieure. 3 série. 1950. T. 67, № 2. P. 161—198.

36. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. С. 202 ; Alexits G. On the order of approximation by the Cesàro means of Fourier series // Approximation theory : selected papers. Budapest : Académiai kiadó, 1983. P. 48 ; Никольский С. М. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1945. Т. 15. С. 25 ; Zygmund A. On the degree of approximation of functions by Fejér means // Bull. Amer. Math. Soc. 1945. Vol. 51. P. 274 ; Zamansky M. Classes de saturation de certains procédés d'approximation des séries de Fourier des fonctions continues et applications à quelques problèmes d'approximation // Annales scientifiques de l'École normale supérieure. 3 série. 1949. T. 66, № 1. P. 35.

37. Бруй И. Н. Эффективные условия на метод суммирования тригонометрических рядов Фурье в задаче о насыщении // Наука и технологии: инновации и качество : материалы Междунар. науч.-практ. конф., 24—25 нояб. 2011 г., г. Барановичи, Респ. Беларусь. Барановичи : РИО БарГУ, 2011. С. 117—123.

38. Натансон И. П. Конструктивная теория функций.

39. Кивинукк А. О порядке приближения периодических функций.

40. Натансон И. П. Конструктивная теория функций.

41. Покало А. К. Об одном классе линейных методов суммирования рядов Фурье дифференцируемых функций // Вес. АН Беларус. ССР. Сер. фiз.-матэм. навук. 1969. № 2. С. 43—50.

42. Натансон И. П.: 1) Конструктивная теория функций. С. 263 ; 2) Некоторые оценки, связанные с сингулярным интегралом Валле-Пуссена // Докл. АН СССР. 1944. Т. 45. С. 290—293 ; 3) О точности представления непрерывных периодических функций сингулярными интегралами // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73, № 2. С. 275 ; Коровкин П. П. Линейные операторы и теория приближений. М. : ГИФМЛ, 1959. С. 131 ; Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. С. 593.

43. Покало А. К. Об одном классе линейных методов суммирования рядов Фурье дифференцируемых функций. С. 49 ; Баскаков В. А. Асимптотика приближения индивидуальных функций обобщёнными операторами Фейера. С. 200.

44. Коровкин П. П. Линейные операторы и теория приближений. С. 125.

45. Там же. С. 21—22.

46. Bruj I., Schmieder G. Best Approximation and Saturation on Domains Bounded by Curves of Bounded Rotation // Journal of Approximation Theory. 1999. Vol. 100, № 1. P. 157—182.

47. Турецкий А. Х. О классах насыщения в пространстве C // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1961. Т. 25, № 3. С. 431, 433 ; Бруй И. Н. О классе насыщения метода Рисса суммирования рядов Фабера / И. Н. Бруй ; Ред. ж. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.». Минск, 1989. 60 с. Деп. в ВИНИТИ АН СССР 16.08.1989. № 5514-В89. С. 21 // Вес. АН БССР. Сер. фiз.-матэм. навук. 1990. № 3. С. 115 ; Bruj I., Müller J. The concept of Faber derivative in saturation theory // Jean Journal on Approximation. 2011. Vol. 3, № 2. P. 234 ; Бруй И. Н. Оценка скорости суммируемости через скорость приближения частичными суммами и средними Зигмунда С. 20—21.

48. Zamansky M. Classes de saturation des procédés de sommation des séries de Fourier et applications aux séries trigonométriques. P. 170 ; Турецкий А. Х. О классах насыщения в пространстве C. С. 433—434.

49. Zygmund A. The approximation of functions by typical means of their Fourier series. P. 697 ; Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. С. 591.

50. Bruj I., Schmieder G. Best Approximation and Saturation on Domains Bounded by Curves of Bounded Rotation. P. 168—169.

51. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. С. 45 ; Бари Н. К. Тригонометрические ряды. С. 88 ; Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. С. 105—106 ; Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. С. 72.

52. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. С. 45—46 ; Бари Н. К. Тригонометрические ряды. С. 92 ; Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. С. 101.

53. Kolmogoroff A. Zur Grössenordnung des Restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen // Annals of Mathematics. 1935. Vol. 36, № 2. P. 521—526.

54. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1.

55. Kolmogoroff A. Zur Grössenordnung des Restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen.

56. Пинкевич В. Т. О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4, № 6. С. 521—528.

57. Никольский С. М. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1945. Т. 15. С. 14, 23.

58. Стечкин С. Б. Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1953. Т. 17, № 5. С. 461—472.

59. Покало А. К. Об одном классе линейных методов суммирования рядов Фурье дифференцируемых функций.

60. Butzer P. L., Pawelke S. Ableitungen von trigonometrischen Approximationsprozessen // Acta Sci. Math. (Szeged). 1967. Vol. 28. P. 181 ; Бруй И. Н. О классе насыщения метода Рисса суммирования рядов Фабера. С. 30.

61. Там же.

62. Бруй И. Н. Оценка скорости суммируемости через скорость приближения частичными суммами и средними Зигмунда С. 18 ; Бруй І. М. Пашырэнне тэарэмы Алексіча—Kраліка на рэгулярныя метады сумавання // Вес. Беларус. дзярж. пед. ун-та. Сер. 3. 2004. № 1 (39). С. 21 ; Бруй И. Н. Регулярные методы суммирования тригонометрических рядов и классы дифференцируемых функций // Весн. Гродз. дзяржа. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. 2004. № 2 (28). С. 39.

63. Bruj I., Schmieder G. Best Approximation and Saturation on Domains Bounded by Curves of Bounded Rotation.

64. Ibid. P. 170—171.

65. Покало А. К. Об одном классе линейных методов суммирования рядов Фурье дифференцируемых функций. С. 44.

66. Тиман М. Ф. О порядке приближения функции нормальными средними Зигмунда // Докл. АН СССР. 1968. Т. 181, № 1. С. 29 ; Gaier D. Approximation durch Fejér-Mittel in der Klasse A // Mitteilungen aus dem mathem. Seminar Giessen. 1977. № 123. S. 4 ; Жук В. В. Аппроксимация периодических функций. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1982. С. 236 ; Гайер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. М. : Мир, 1986. С. 65.

67. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. С. 116 ; Натансон И. П. Конструктивная теория функций. С. 193 ; Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. С. 198.

68. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. С. 112 ; Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. С. 61 ; Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М. : ГИФМЛ, 1961. С. 115 ; Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. С. 115.

69. Тюрнпу Х. О значении функции Лебега для сходимости и суммируемости функциональных рядов почти всюду // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös. Sect. Math. 1973. T. 16. P. 125 ; Türnpu H. Lebesgue functions and summability of functional series with speed almost everywhere // Acta Comment. Univ. Tartuensis Math. 1996. T. 1. P. 39—54.

70. Kövari T., Pommerenke Ch. On Faber polynomials and Faber expansions // Mathem. Zeitschr. 1967. Bd. 99, № 3. S. 199 ; Суетин П. К. Ряды по многочленам Фабера. М. : Наука, 1984. С. 235.

71. Бруй И. Н. Памяти моего научного руководителя А. К. Покало: его идеи.

72. Там же. С. 26—27.

73. Стечкин С. Б. Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций.

74. Покало А. К. К вопросу о суммировании функций классов $B^{(r)}$ // Докл. АН СССР. 1957. Т. 116, № 5. С. 750—753.

75. Бруй И. Н. Памяти моего научного руководителя А. К. Покало: его идеи. С. 25 ; Bruj I., Müller J. The concept of Faber derivative in saturation theory. P. 230.

76. Бруй И. Н.: 1) Памяти моего научного руководителя А. К. Покало: его идеи. С. 25 ; 2) Приближение одного класса регулярных функций обобщёнными средними их рядов по полиномам Фабера // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1974. № 5. С. 46.

77. Бруй И. Н. Памяти моего научного руководителя А. К. Покало: его идеи. С. 25 ; Bruj I., Schmieder G. Best Approximation and Saturation on Domains Bounded by Curves of Bounded Rotation. P. 168.

78. Bruj I., Schmieder G. Best Approximation and Saturation on Domains Bounded by Curves of Bounded Rotation.

79. Butzer P. L., Stens R. L. The Operational Properties of the Chebyshev Transform. II. Fractional Derivatives // Теория приближения функций : Междунар. конф. по теории приближения функций, Калуга, 24—28 июля 1975 г. : тр. М. : Наука, 1977. С. 49—61.

80. Zamansky M. Classes de saturation des procédés de sommation des séries de Fourier et applications aux séries trigonométriques.

81. Дзядык В. К.: 1) Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. С. 334 ; 2) О конструктивной теории функций на замкнутых множествах комплексной плоскости // Теория приближения функций : Междунар. конф. по теории приближения функций, Калуга, 24—28 июля 1975 г. : тр. М. : Наука, 1977. С. 158.

82. Muckenhoupt B., Stein E. M. Classical expansions and their relation to conjugate harmonic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 118, № 6. P. 24.

83. Muckenhoupt B. Hermite conjugate expansions // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 139. P. 256 ; Joó I.: 1) Saturation theorems for Hermite—Fourier series // Acta Math. Hungar. 1991. Vol. 57, № 1—2. P. 170 ; 2) On Hermite—Fourier series // Period. Math. Hungar. 1992. Vol. 24, № 2. P. 112.

84. Muckenhoupt B. Conjugate functions for Laguerre expansions / B. Muckenhoupt // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. Vol. 147. P. 403—418.

85. Hunt R. A. Developments related to the a. e. convergence of Fourier series // Studies in harmonic analysis : Proc. of the Conf., Chicago, 1974. Washington, DC : Mathematical Association of America, 1976. P. 29 ; Joó I. On some problems of M. Horváth (saturation theorems for Walsh—Fourier expansions) // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 1988. T. 31. P. 248.

86. Butzer P. L., Stens R. L. The Operational Properties of the Chebyshev Transform. II. Fractional Derivatives. P. 56.

87. Joó I. On the conjugate function of Dirichlet series // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 1992. T. 35. P. 59—67.

88. Joó I. On some notions of harmonic analysis for Sturm—Liouville expansions // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 1992. T. 35. P. 77—98.