

Закключение. Доказательство того, что $M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ лежит в точности в одной однопараметрической подгруппе группы Ли $SL(2, R)$ при $\lambda > 0$, а при $\lambda = -1$ M , лежит в бесконечном числе однопараметрических подгрупп группы $SL(2, R)$, будет использоваться при дальнейших исследованиях матрицы M для случая $-1 \neq \lambda < 0$.

Список цитируемых источников

1. Сергеева Ю. В., Покровский М. А. Экспоненциальное отображение группы Ли $SL(2, R)$ для специального вида матриц / Ю. В. Сергеева, М. А. Покровский // НАУКА – ПРАКТИКЕ: материалы III Международной научно-практической конференции Барановичи, 19 мая 2022 г: в 2 ч.— Барановичи: РИО БарГУ, 2022. — Ч. 2 — С.100—102.
2. Сергеева Ю. В., Пачук А. А. Действие экспоненциального отображения для специального вида матриц группы Ли $SL(2, R)$ / Ю. В. Сергеева, А. А. Пачук // НАУКА – ПРАКТИКЕ: материалы IV Международной научно – практической конференции Барановичи, 19 мая 2023 г: в 2 ч.— Барановичи: РИО БарГУ, 2023. — Ч. 2 — С. 23—26.

УДК 537.6+539.1

А. И. Серый

учреждение образования «Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина»,
Брест, Республика Беларусь

О СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ВЫРОЖДЕННОГО ЭЛЕКТРОННО-ЯДЕРНОГО ВЕЩЕСТВА В СОСТОЯНИИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Введение. Модель электронно-ядерного вещества в приближении Ферми-газа для электронов в пределе крайнего вырождения представляет интерес при моделировании сверхплотных астрофизических объектов [1, с. 73–86, 133–135; 2, с. 56–67; 3, с. 105–128]. Несмотря на то, что температуры таких объектов в действительности не равны абсолютному нулю, указанный предельный случай удобнее исследовать с математической точки зрения, а получаемые результаты удобнее использовать в качестве начальных приближений для более точных расчетов при учете конечных температур. Основным предметом исследования является совокупность параметров, характеризующих электронно-ядерное вещество. Значения этих параметров зависят (помимо температуры) от состава атомных ядер, плотности вещества (в том числе плотности электронного газа), индукции внешнего магнитного поля (которое может быть квантующим). При выборе модели для численных расчетов параметров результаты также могут зависеть от: а) значений коэффициентов в формуле Бете-Вайцзеккера (обзор различных наборов таких значений можно найти, например, в [4, с. 28]); б) выбора предельного случая (нерелятивистского или ультрарелятивистского) для электронного газа; в) выбора приближения для степени спиновой поляризации электронного газа (квантовый предел, полная поляризация, частичная поляризация); г) учета аномального магнитного момента электрона; д) учета кинетической энергии и спиновой поляризации ядер. Ответ на вопрос об учете спиновой поляризации ядер во внешнем магнитном поле может быть неоднозначным, поскольку при заданном значении массового числа собственные магнитные моменты ядер (если они вообще отличны от нуля) различны при разных зарядовых числах. Также важно, какой тип состояния подразумевается — относительно устойчивое (по отношению только к бета-процессам) или абсолютно устойчивое (по отношению и к бета-процессам, и к пикноядерным реакциям).

В [1, с. 73–76] вырожденное электронно-ядерное вещество исследовалось без учета внешнего магнитного поля; в [3, с. 105–128] такое влияние было учтено. В обоих случаях кинетическая энергия атомных ядер приближенно считалась равно нулю. В данной работе предполагается дальнейшее исследование модели с магнитным полем с учетом факторов, которые не рассматривались в [3, с. 105–128].

Основная часть. Рассмотрим модель вырожденного электронно-ядерного вещества (Ae -вещества), где кинетическая энергия ядер не учитывается, массовое число A считается заданным, а электроны – свободными. Плотность вещества ρ , которая задается как параметр, в такой модели можно представить в виде суммы:

$$\rho = n_A m_A + n_e m_e, \quad (1)$$

где m_e — масса электрона;

n_A — концентрация ядер, связанная с концентрацией электронов n_e соотношениями (Z — зарядовое число ядер):

$$n_A = n_e / (A\xi), \quad (2)$$

$$\xi = Z/A. \quad (3)$$

Масса ядра m_A дается выражением [3, с. 118], которое можно переписать с учетом (3):

$$m_A = A((1-\xi)m_n + \xi m_p + W/(Ac^2)), \quad (4)$$

где c — скорость света в вакууме;

m_n и m_p — масса нейтрона и протона, соответственно.

Энергия связи ядра W может быть найдена по формуле Бете-Вайцзеккера с учетом магнитного поля [3, с. 122], которую с учетом (3) можно переписать в виде

$$W = -c_0 A + c_1 A^{2/3} + c_2 \xi^2 A^{5/3} + c_3 A(1-2\xi)^2 + c_4 A(1-2\xi)^4 + c_5 B^2 \xi A^{5/3}. \quad (5)$$

Здесь $c_0 = 15,75$ МэВ, $c_1 = 17,8$ МэВ, $c_2 = 0,71$ МэВ, $c_3 = 23,7$ МэВ, $c_4 = c_3/27$, $c_5 = 6,9 \cdot 10^{-38}$ МэВ/Гс² [3, с. 118, 122]. Возможны и другие наборы значений коэффициентов [4, с. 28], что должно приводить к изменениям расчетных значений параметров электронно-ядерного вещества. Индукция магнитного поля B определяется выражением [3, с. 123].

$$B = B_0(\rho/\rho_0)^{2/3}, \quad (6)$$

где $\rho_0 = 10^6$ г/см³, а значение параметра B_0 , как и ρ , задается. Если значения всех величин в правой части (6) заданы, то значение левой части определяется непосредственным вычислением.

Для нахождения n_e воспользуемся соотношениями, которые легко получить из формул, приведенных в [3, с. 39, 40]:

$$\chi_e(B) = \sqrt{m_e^2 c^4 + (3\pi^2)^{2/3} c^2 \hbar^2 n_e^{2/3} \frac{X_e^2}{R_2^{2/3}}}, \quad (7)$$

$$R_2 = \frac{3}{2} \sum_s \sum_n \sqrt{X_e^2 - \left(2n+1+2s + \frac{(\sigma_e-1)^2}{4Y_e} + 2s(\sigma_e-1) \right) \sqrt{1 + \frac{2n+1+2s}{Y_e}}}. \quad (8)$$

$$X_e^2 = \frac{\chi_e^2(B) - m_e^2 c^4}{2m_e c^2 \mu_B B}; \quad Y_e = \frac{m_e c^2}{2\mu_B B}. \quad (9)$$

В (7) и (9) $\chi_e(B)$ — химический потенциал крайне вырожденного электронного газа, $\hbar$ — постоянная Планка, μ_B — магнетон Бора, $s = \pm 1/2$ — спиновое квантовое число, n — номер уровня Ландау, причем суммирование по n в (8) выполняется до тех пор, пока значение выражения под радикалом не станет отрицательным. Если пренебречь аномальным магнитным моментом электрона, то $\sigma_e = 1$, и тогда (8) существенно упрощается. В противном случае [5, с. 570—571]

$$\sigma_e = 1 + \frac{\alpha}{2\pi} - 0,328 \frac{\alpha^2}{\pi^2}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}, \quad (10)$$

где e — элементарный заряд.

Из (7) несложно получить:

$$n_e = \frac{(2m_e c^2 \mu_B B)^{3/2} R_2}{3\pi^2 c^3 \hbar^3}. \quad (11)$$

С другой стороны, в случае относительно устойчивого состояния электронно-ядерного замагниченного вещества для $\chi_e(B)$ справедливо соотношение [3, с. 122], которое можно переписать с учетом (3):

$$\chi_e(B) = m_n c^2 - m_p c^2 + 4c_3 - 2\xi(4c_3 + c_2 A^{2/3}) + 8c_4(1-2\xi)^3 - c_5 B^2 A^{2/3}. \quad (12)$$

Подставляя (2) и (4) в (1), с учетом (5), (6), (11) и (12) получаем:

$$\rho = \left(\left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) m_n + m_p + \frac{c_1 A^{-1/3} - c_0 + c_2 \xi^2 A^{2/3} + c_3 (1 - 2\xi)^2 + c_4 (1 - 2\xi)^4 + c_5 B_0^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{4/3} \xi A^{2/3}}{\xi c^2} + m_e \right) \times$$

$$\times \sum_s \sum_n \left(\frac{\left((m_n - m_p) c^2 + 4c_3 - 2\xi (4c_3 + c_2 A^{2/3}) + 8c_4 (1 - 2\xi)^3 - c_5 B_0^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{4/3} A^{2/3} \right)^2}{2m_e c^2 \mu_B B_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2/3}} - \right.$$

$$- 2n - 1 - 2s - \frac{\left(\frac{\alpha}{2\pi} - 0,328 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \right)^2 2\mu_B B_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2/3}}{4m_e c^2} - 2s \left(\frac{\alpha}{2\pi} - 0,328 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \right) \sqrt{1 + 2\mu_B B_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2/3} \frac{2n + 1 + 2s}{m_e c^2}} -$$

$$\left. - \frac{m_e^2 c^4}{2m_e c^2 \mu_B B_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2/3}} \right)^{1/2} \times \frac{(2m_e c^2 \mu_B B_0)^{3/2} \rho}{2\pi^2 c^3 \hbar^3 \rho_0}. \quad (13)$$

Все величины в (13), кроме ξ , считаются известными. Решая (13) численно относительно ξ , можно затем найти n_e с учетом (8)–(12), а затем n_A с учетом (2). Также можно найти давление электронов по формулам, приведенным в [3, с. 39–40].

При $\rho \sim 10^9$ г/см³, $B_0 \sim 10^{13}$ Гс, что дает в (6) значения B , еще встречающиеся в нейтронных звездах, получаем (при $A = 64$) $\xi \sim 0,4$, $n_e \sim 2,6 \cdot 10^{32}$ см⁻³, $n_A \sim 9,3 \cdot 10^{30}$ см⁻³.

Заключение. Получены уравнения для параметров электронно-нуклонного вещества в квантующем для электронов магнитном поле в приближении крайнего вырождения. При заданных значениях массового числа, плотности и индукции магнитного поля численное решение системы позволяет найти значения зарядового числа, концентрации электронов и ядер в относительно равновесном состоянии. При $\rho \sim 10^9$ г/см³, $B_0 \sim 10^{13}$ Гс, и $A = 64$ получаются значения $\xi \sim 0,4$, $n_e \sim 2,6 \cdot 10^{32}$ см⁻³, $n_A \sim 9,3 \cdot 10^{30}$ см⁻³.

Список цитируемых источников

1. Саакян, Г. С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс. / Г. С. Саакян. — М.: Наука, 1972. — 344 с.
2. Шапиро, С. Л. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды: В 2-х ч.: пер. с англ. / С. Л. Шапиро, С. А. Тьюколски. — М.: Мир, 1985. — Ч. 1. — 256 с., ил.
3. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях: монография / В. С. Секержицкий; Брест. гос. ун-т имени А. С. Пушкина. — Брест: Издательство БрГУ, 2008. — 198 с.
4. Кац, П. Б. Формула Бете–Вайцзеккера. Обзор и подбор коэффициентов / П. Б. Кац, С. М. Удовенко // Веснік Брэскага ўніверсітэта. Серыя 4 «Фізіка. Матэматыка». — 2021. — № 2. — С. 26–45.
5. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: учеб. пособие для вузов: в 10 т. / В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. — 2-е изд., перераб. — М.: Наука, 1980. — Т. IV: Квантовая электродинамика. — 704 с.

УДК 519.642

В. С. Фаворская, Д. Д. Ревидович, Ю. Ф. Мирошникова
 Учреждение образования «Барановичский государственный университет»,
 Барановичи, Республика Беларусь

ПРИЛОЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ИСЧИСЛЕНИЙ

Введение. Интегральное исчисление имеет достаточно широкий спектр применения: математика, физика, экономика, инженерия, медицина, астрономия, программирование и другие области. Особый интерес представляет нахождение площадей фигур, изучаемых в школьном курсе математики, с помощью определённого и двойного интегралов.