Баранавіцкі дзяржаўны універсітэт, г. Баранавічы, Рэспубліка Беларусь

ВЫВУЧЭННЕ РАЎНАВАГІ МЕХАНІЧНЫХ СІСТЭМ СА СЛІЗГАЛЬНЫМІ ЗАМАЦОЎКАМІ НА ПАДСТАВЕ ПРЫНЦЫПА МАГЧЫМЫХ ПЕРАМЯШЧЭННЯЎ

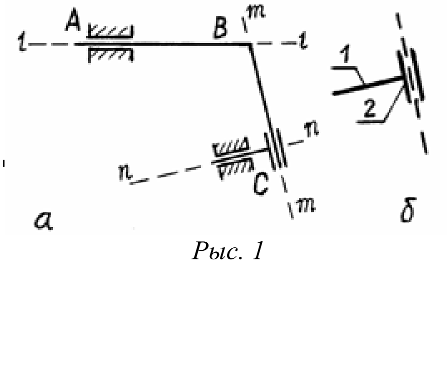
Русан С. І.

In article possibility of practical application of the general equation of a statics to the analysis of balance of flat mechanical systems with sliding fastenings and sliding connections of their parts is shown. On many examples the technique of application of a principle of possible movings to definition of reactions of external relations is considered. Work can be used in educational process on the theoretical mechanics.

Агульныя заўвагі.

У тэарэтычным плане прынцып магчымых перамяшчэнняў – найбольш распрацаваны раздзел аналітычнай механікі. Змест прынцыпа выкладзены амаль ва ўсіх падручніках па тэарэтычнай механіцы. Яго перавагі перад ураўненнямі геаметрычнай статыкі пры аналізе раўнавагі сістэм з ідэальнымі сувязямі адзначаны ў артыкуле [1]. Варта падкрэсліць, што прымяненне прынцыпа магчымых перамяшчэнняў у той версіі, якая развіваецца ў рабоце [1], патрабуе ад студэнтаў выразнага разумення структуры складаных сістэм і уласцівасцей накладзеных на іх сувязей. Таму рашэнне задач з дапамогай названага прынцыпа механікі, як, мабыць, ніякая іншая вучэбная праца па тэарэтычнай механіцы, стымулюе фарміраванне так неабходных інжынеру творчых якасцей. Уцешна, што гэты працэс пачынаецца ўжо на малодшых курсах і можа быць развіты і замацаваны ў навучальнай установе пры вывучэнні наступных дысцыплін. Да таго ж, засваенне прынцыпа магчымых перамяшчэнняў стварае падмурак для вывучэння структуры рычажных механізмаў і робатаў-маніпулятараў у тэорыі механізмаў і машын.

Не гледзячы на ўсе перавагі прынцыпа магчымых перамяшчэнняў, па шырацы прымянення ён саступае ўраўненням геаметрычнай статыкі. Гэта тлумачыцца адсутнасцю досведа яго практычнага прымянення да рашэння некаторых тыпаў задач. Тут разглядаецца адзін з іх – раўнавага сістэм са слізгальнымі відамі сувязей. У тэорыі механізмаў і машын такія злучэнні звенняў называюць паступальнымі кінематычнымі парамі. Знешнія сувязі апісанага тыпу будзем далей называць *слізгальнымі замацоўкамі*, унутраныя – *слізгальнымі злучэннямі.* На рысунку 1, а паказан стрыжань *ABC* са слізгальнай замацоўкай *A* і падвойнай слізгальнай замацоўкай *C*. Першая з іх дапускае лінейнае перамяшчэнне стрыжня па напрамку *l-l*, другая – па напрамках *m-m* і *n-n*. Злучальнае звяно замацоўкі *C* уяўляе сабою жорсткае спалучэнне штока 1 і ўтулкі 2 (рыс. 1, б). Прыклады рашэння апісаных задач з дапамогай прынцыпа магчымых перамяшчэнняў у вучэбнай літаратуры адсутнічаюць. Гэта стварае ўражанне яго абмежаванасці, што, як паказана ніжэй, не адпавядае рэчаіснасці.

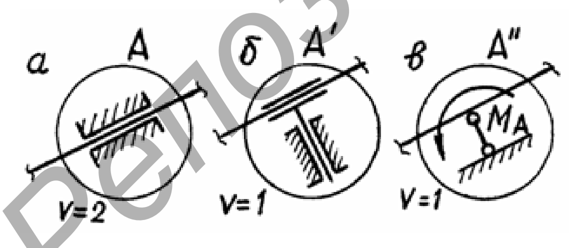


Рыс. 1

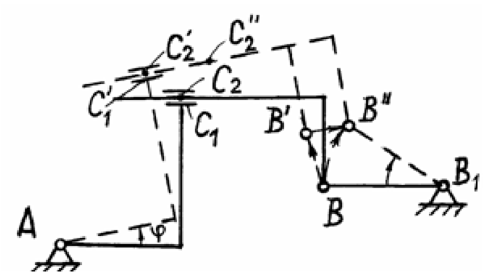
Методыка прымянення прынцыпа магчымых перамяшчэнняў да рашэння задач.

Спынімся спачатку на ўласцівасцях плоскіх механічных сувязей. Будзем разглядаць, толькі ідэальныя двухбаковыя сувязі. У агульным выпадку сувязь можа накладваць на матэрыяльны аб’ект адно, два альбо тры геаметрычная абмежаванні. У адпаведнасці з гэтым будзем называць іх *адно-*, *двух-* альбо *трохвалентнымі*. Да трохвалентных плоскіх сувязей адносіцца жорсткая замацоўка. Аднавалентныя сувязі інакш называюць *простымі.* Сувязі са слізгальным злучэннем частак сістэмы могуць быць толькі простымі і двухвалентнымі. Да іх адносяцца згаданыя вышэй звычайная (са слізганнем у адным і супрацьдзеяннем у двух напрамках) і падвойная (са слізганнем у двух напрамках і супрацьдзеяннем у адным) слізгальныя замацоўкі. Падвойнае слізгальнае злучэнне ў якасці ўнутранай сувязі выкарыстана далей у механічнай сістэме, паказанай на рысунку 16. Валентнасць сувязі будзем абазначаць літарай v.

Для рацыянальнага прымянення прынцыпа магчымых перамяшчэнняў неабходна паніжаць валентнасць сувязей. У падручніках па тэарэтычнай механіцы адсутнічаюць аксіёмы, якія дазвалялі б выконваць такую трасфармацыю абгрунтавана. Паводле асноўнай *аксіёмы аб сувязях* можна вызваляцца толькі ад *усіх* накладзеных на матэрыяльны об’ект сувязей адначасова. У артыкуле [1] адпаведная аксіёма сфармуліравана ў больш агульным выглядзе пад назваю: *Аксіёма аб паніжэнні валентнасці сістэмы сувязей.* Прыводзім яе змест: *Валентнасць сувязі альбо сістэмы сувязей, накладзеных на матэрыяльны абьект, можна панізіць, уводзячы адпаведныя знятым сувязям рэакцыі.* Калі валентнасць сістэмы сувязей панізіць да нуля, то атрымаем свабодны матэрыяльны аб’ект, як і на падставе вядомай аксіёмы аб сувязях. Больш падрабязна аб уласцівасцях і трансфармацыі сувязей напісана ў работах [1,2]. На рысунку 2 паказана пераўтварэнне сувязі *A* – слізгальнай замацоўкі – пры розных варыянтах паніжэння яе валентнасці на адзінку. Для вызначэння рэакцыі R_A яна пераўтвараецца ў падвойную слізгальную замацоўку A' (рыс. 2, *б*), а для вызначэння рэактыўнай пары M_A – у бязважкі стрыжань A'' (рыс. 2, *в*). Калі на матэрыяльны аб’ект накладзена падвойная слізгальная замацоўка, напрыклад, сувязь *C* на рыс. 1, *а*, то пры вызначэнні рэактыўнай пары M_C неабходна вызваляцца ад сувязі цалкам.



Рыс. 2



Рыс. 3

Спынімся на ўмовах сумеснасці слізгальных злучэнняў частак складанай сістэмы. Яны істотна адрозніваюцца ад умоў сумеснасці шарнірных злучэнняў і могуць стаць крыніцай памылак пры рашэнні задач. У адрозненне ад шарнірных злучэнняў, у якіх магчымы адносныя *вярчальныя* перамяшчэнні, слізгальныя злучэнні дапускаюць адносныя *паступальныя* перамяшчэнні частак сістэмы. Для высвятлення паходжання такіх перамяшчэнняў будзем прадстаўляць іх у павялічаным выглядзе. На рысунку 3 суцэльнымі лініямі паказан механізм з адной ступенню свабоды ў пачатковым становішчы. Утулку, змацаваную з левай часткай сістэмы, абазначым праз C_1. Пункт правага стрыжня, які знаходзіцца ў цэнтры ўтулкі, абазначым праз C_2. Уявім спачатку, што сувязь BB_1 адсутнічае. Тады пры павароце левай часткі AC_1 на вугал φ правая, дзякуючы ўтулцы, павернецца на той самы вугал; пры гэтым утулка C_1 займе палажэнне C_1', а пункт C_2 апыніцца ў становішчы C_2'. Нагадаем, такое перамяшчэнне пункт C_2 атрымаў бы пры адсутнасці стрыжня BB_1. Пры яго наяўнасці пункт B перамяшчаецца не ў палажэнне B', а ў палажэнне B''. Вектар $\overline{B'B''}$ і вызначае велічыню адноснага пастунальнага перамяшчэння ўсёй левай часткі сістэмы 2, у выніку якога ў слізгальным злучэнні пункт C_2 пераходзіць у палажэнне C_2''. Тут варта звярнуць увагу, што велічыня адноснага слізгальнага перамяшчэння пункта C_2 у слізгальным злучэнні C вызначаецца з аналізу перамяшчэння пункта B і роўна $\overline{C_2'C_2''} = \overline{B'B''}$.

Прынцып магчымых перамяшчэнняў матэматычна выражаецца агульным ураўненнем статыкі:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = 0 \tag{1}$$

або

$$\sum_{i=1}^{n} \left(X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i \right) = 0, \tag{2}$$

дзе $\vec{F}_i$, $\delta \vec{r}_i$ – сіла і магчымае перамяшчэнне пункта яе прылажэння;

X_i, Y_i, Z_i і δx_i, δy_i, δz_i – праекцыі сілы F_i і магчымага перамяшчэння $\delta \vec{r}_i$ на восі каардынат.

Для абазначэння магчымых перамяшчэнняў у выпадку складнага руху будзем выкарыстоўваць індэксы «*e*» і «*r*», уведзеныя ў кінематыцы, і улічваць, што абсалютнае магчымае перамяшчэнне пункта роўна геаметрычнай суме пераноснага і адноснага. Напрыклад, для некаторага пункта *A*: $\delta \vec{s}_A = \delta \vec{s}_A^{\,e} + \delta \vec{s}_A^{\,r}$.

Метад рашэння задач, заснаваны на ўраўненні (1), называецца *геаметрычным,* а на (2) — *каардынатным*. Апошні ў значнай ступені фармалізаваны. Яго можна паспяхова прымяняць, не аналізуючы структуру механічнай сістэмы. Паколькі мы ставім на мэце развіццё інтэлекта і інжынернай інтуіцыі, то для рашэння задач будзем прымяняць геаметрычны метад. Нагадаем паслядоўнасць дзеянняў пры вызначэнні рэакцый сувязей.

1. Паніжаем на адзінку валентнасць сувязі, рэакцыю каторай неабходна знайсці. Пры гэтым механічная сістэма ператвараецца ва ўраўнаважаны механізм з адной ступенню свабоды.

2. Выбіраем незалежнае перамяшчэнне і паказваем на рысунку (пункцірам) механізм у зрушаным становішчы. Абазначаем магчымыя перамяшчэнні ўсіх пунктаў і вуглавыя перамяшчэнні частак сістэмы, да якіх прыкладзены дадзеныя сілы, пары сіл і невядомая рэакцыя. У складаных сістэмах паказваем таксама магчымыя перамяшчэнні ўнутраных сувязей.

3. Для атрыманай сістэмы запісваем агульнае ўраўненне статыкі (1).

4. Выражаем усе магчымыя перамяшчэнні пунктаў і цел праз незалежнае магчымае перамяшчэнне і падстаўляем іх у атрыманае агульнае ўраўненне.

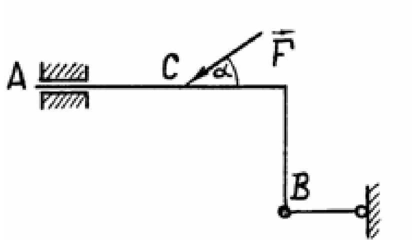
5. У левай яго частцы выносім за дужкі незалежнае магчымае перамяшчэнне і прыходзім да ўраўнення з адной невядомай рэакцыяй сувязі.

6. Вызначаем рэакцыю.

Апісаная методыка паўтараецца пры вызначэнні кожнай рэакцыі. Пры гэтым, як правіла, выбіраецца іншае незалежнае магчымае перамяшчэнне.

Раўнавага аднаго цела.

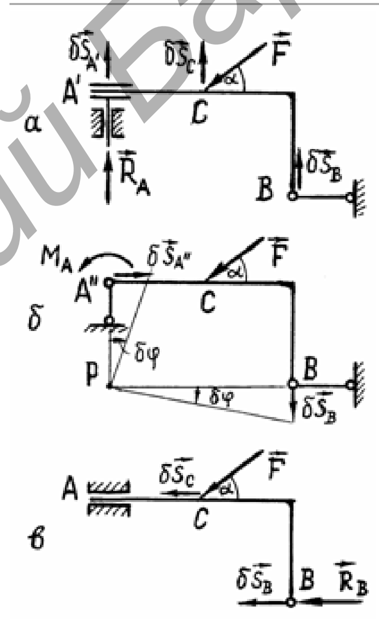
Пад дзеяннем плоскай сістэмы сіл цела будзе заставацца ў раўнавазе, калі на яго накладзена трохвалентная карэктная сістэма сувязей. Ніжэй разглядаюцца механічныя сістэмы з рознай структурай сувязей. Для вызначэння рэакцый выкарыстана апісаная вышэй методыка.



Рыс. 4

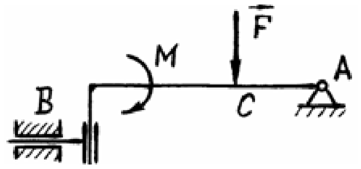
Прыклад 1. Дадзеная сістэма (рыс. 4) уяўляе сабою ломаны стрыжань *ACB*, нагружаны сілай *F*. Неабходна вызначыць рэакцыі R_A, M_A, R_B.*Вызначэнне* R_A. Паніжаем валентнасць слізгальнай замацоўкі *A*. Атрыманы механізм паказаны на рысунку 5, а. За незалежнае магчымае перамяшчэнне прымаем $\delta s_{A'}$, дзе літарай A' абазначаны пункт стрыжня $A'CB$, змешчаны ў цэнтры ўтулкі. Запісваем ураўненне работ: $R_A \delta s_A - F \sin\alpha \delta s_C = 0$. Паколькі падвойная слізгальная замацоўка не дапускае павароту, то стрыжань $A'CB$ перамяшчаецца паступальна і $\delta s_C = \delta s_{A'}$. Ураўненне работ прымае выгляд: $(R_A - F \sin\alpha)\delta s_{A'} = 0$. Адсюль $R_A - F \sin\alpha = 0$ і $R_A = F \sin\alpha$.

Вызначэнне M_A. Пераўтвараем сувязь *A*, як паказана на рысунку 5, б. Стрыжань $A''CB$ атрымлівае магчымасць плоскага павароту вакол імгненнага цэнтра *P*. На рысунку літарамі $\delta s_{A''}$ і δs_B абазначаны магчымыя перамяшчэнні пунктаў A'' і *B*. За незалежнае прымаем магчымае перамяшчэнне $\delta\varphi$ стрыжня $A''CB$. Ураўненне работ мае выгляд: $M_P(\vec{F})\delta\varphi - M_A\delta\varphi = 0$. Адгэтуль знаходзім $(M_P(\vec{F}) - M_A)\delta\varphi = 0$, $M_P(\vec{F}) - M_A = 0$ і $M_A = M_P(\vec{F})$, дзе $M_P(\vec{F})$ — момант сілы *F* адносна цэнтра *P*.



Рыс. 5

Вызначэнне R_B. Вызваляемся ад сувязі *B* (рыс. 5, в). За незалежнае магчымае перамяшчэнне прымаем δs_B. Паколькі стрыжань *ACB* можа здзяйсняць паступальнае перамяшчэнне, то $\delta s_C = \delta s_B$. Ураўненне работ прымае выгляд:



Рыс. 6

$$(R_B + F\cos\alpha)\delta s_B = 0.$$

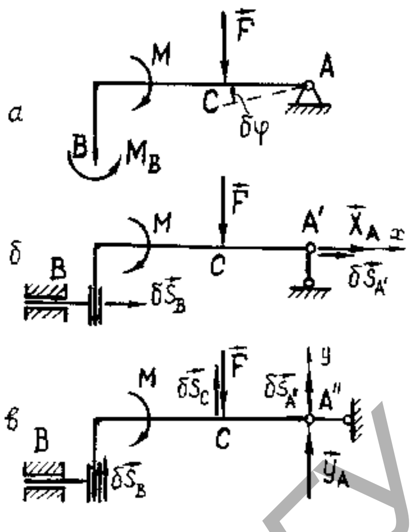
Адсюль знаходзім $R_B = -F\cos\alpha$.

Прыклад 2. Стрыжань *ACB* нагружаны сілай *F* і парай *M*. Сістэма сувязей складаецца з ідэальнага нерухомага цыліндра *A* і падвойнай слізгальнай замацоўкі *B* (рыс. 6). Вызначыць рэакцыі сувязей.

Вызначэнне M_B. Вызваляемся ад сувязі *B* (рыс. 7, а). Стрыжань *ACB* можа здзяйсняць паварот вакол нерухомага цэнтра *A*. За незалежнае прымаем магчымае вуглавое перамяшчэнне стрыжня $\delta\varphi$. Запісваем ураўненне работ: $\left(M_B + M_A\left(\vec{F}\right) - M\right)\delta\varphi = 0$. Знаходзім $M_B = M - M_A\left(\vec{F}\right)$, дзе $M_A\left(\vec{F}\right)$ — момант сілы *F* адносна цэнтра *A*.

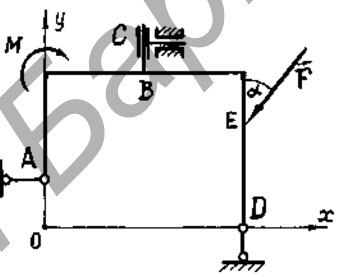
Вызначэнне X_A. Паніжаем валентнасць сувязі *A* (рыс. 7, б). Паколькі сувязь *B* не дапускае павароту стрыжня $A'CB$, то ён атрымлівае магчымасць здзяйсняць паступальнае гарызантальнае перамяшчэнне, пры якім пара *M* і сіла *F* работы не выконваюць. Таму $X_A \delta s_{A'} = 0$, адкуль $X_A = 0$.

Вызначэнне Y_A. Трансфармуем сувязь *A*, як паказана на рысунку 7, в. Стрыжань $A''CB$ атрымлівае магчымасць вертыкальнага перамяшчэння; пры гэтым $\delta s_B = \delta s_C = \delta s_{A''}$. Ураўненне работ прыводзіцца да выгляду: $\left(Y_A - F\right)\delta s_{A''} = 0$, адкуль $Y_A = F$.



Рыс. 7

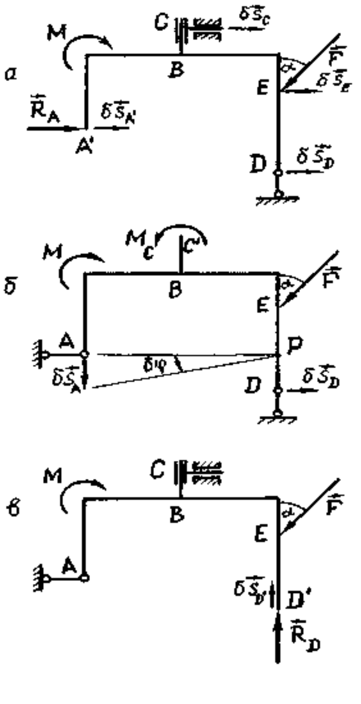
Прыклад 3. Рамная сістэма *ABCD* (рыс. 8) нагружана сілай *F* і парай *M*. На яе накладзена сістэма аднавалентных сувязей *A*, *C*, *D*. Вызначыць іх рэакцыі.



Рыс. 8

Вызначэнне R_A. Вызваляем раму ад сувязі *A* (рыс. 9, а). Цяпер яна атрымлівае магчымае гарызантальнае паступальнае перамяшчэнне. За незалежнае прымаем $\delta s_{A'}$. Паколькі $\delta s_E = \delta s_C = \delta s_{A'}$, то ўраўненне работ прыводзіцца да выгляду: $\left(R_A - F\sin\alpha\right)\delta s_{A'} = 0$. Атрымліваем: $R_A - F\sin\alpha = 0$ і $R_A = F\sin\alpha$.

Вызначэнне M_C. Вызваляемся ад сувязі *C* (рыс. 9, б). Атрыманы механізм можа паварочвацца вакол імгненнага цэнтра павароту *P*. За незалежнае прымаем вуглавое перамяшчэнне $\delta\varphi$. Запісваем ураўненне работ: $\left(M_A - M + M_P\left(\vec{F}\right)\right)\delta\varphi = 0$. Атрымліваем: $M_A - M + M_P\left(\vec{F}\right) = 0$ і $M_A = M - M_P\left(\vec{F}\right)$, дзе $M_P\left(\vec{F}\right)$ — момант сілы *F* адносна цэнтра *P*.



Рыс. 9

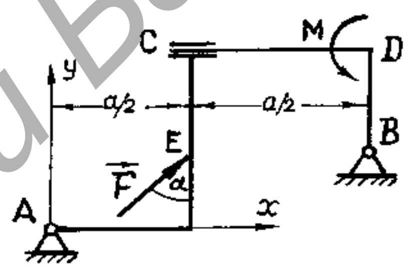
Вызначэнне R_D. Вызваляемся ад сувязі D (рыс. 9, в). За незалежнае магчымае перамяшчэнне прымаем $\delta s_{D'}$. Паколькі магчымае перамяшчэнне рамы пастувальнае, то пара M работы не выконвае. Канчаткова знаходзім: $R_D = F\cos\alpha$.

Раўнавага складаных сістэм са слізгальнымі злучэннямі і замацоўкамі.

Звернемся да механічных сістэм, якія ўтвораны з двух целаў. Сумарная валентнасць знешніх і ўнутраных сувязей такіх сістэм роўна шасці. У большасці сістэм унутраная сувязь двухвалентная – цыліндрычны шарнір або слізгальнае злучэнне. У такім выпадку агульная валентнасць знешніх сувязей роўна чатыром. У статычна вызначальных сістэмах, якія тут разглядаюцца, магчымы два варыянты размеркавання валентнасці знешніх сувязей паміж целамі. У *першым* варыянце на кожнае цела накладзена двухвалентная сістэма сувязей; гэта могуць быць дзве простыя сувязі або адна двухвалентная. У *другім* — адно цела замацавана з дапамогай трохвалентнай сістэмы сувязей, на другое накладзена адна простая сувязь. У апошнім варыянце дзеянне нагрузкі, прыкладзенай да першага цела, не распаўсюджваецца на другое. Больш складаным з'яўляецца аналіз раўнавагі сістэм, якія належаць да першага варыянта.

Прыклад 1. Механічная сістэма і нагрузкі на яе паказаны на рысунку 10. Вызначыць рэакцыі знешніх сувязей A і B.

Рашэнне. Як бачым, на кожную частку сістэмы накладзены двухвалентныя сувязі A, B. Таму яна адносіцца да першага варыянта размеркавання валентнасці сувязей.



Рыс. 10

Вызначэнне X_A. Паніжаем авлентнасць сувязі A (рыс. 11, *а*). Атрымліваем механізм з адной ступенню свабоды. Надамо шарніру A' магчымае перамяшчэнне $\delta s_{A'}$. Тады другі канец стрыжня $A'C$ — утулка C — атрымае перамяшчэнне δs_C (утулка можа слізгаць па стрыжню CD). Паколькі $\delta s_C \parallel \delta s_{A'}$, то заключаем, што магчымае перамяшчэнне ўсёй левай часткі сістэмы паступальнае; таму $\delta s_C = \delta s_E = \delta s_{A'}$. Пры гэтым правая частка BC застаецца нерухомай. Запісваем ураўненне: $X_A \delta s_{A'} + F\sin\alpha\delta s_E = 0$. Адсюль $X_A + F\sin\alpha = 0$ і $X_A = -F\sin\alpha$.

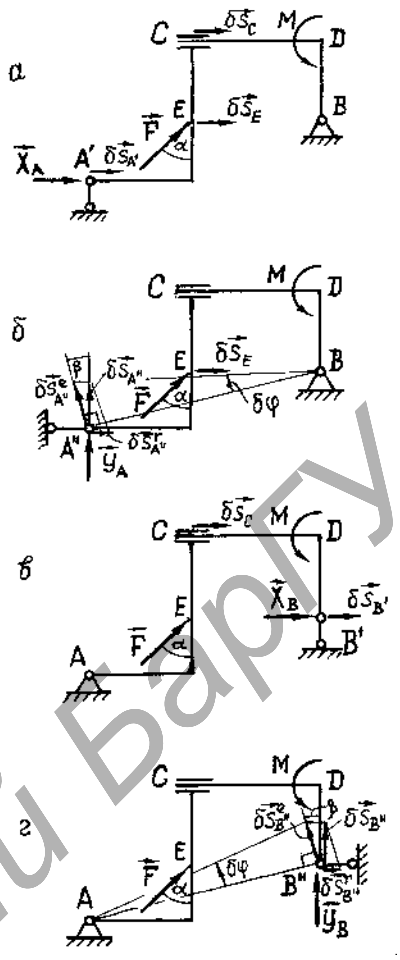
Вызначэнне Y_A. Паніжаем валентнасць сувязі A, як паказана на рысунку 11, *б*. У атрыманым механізме абсалютнае магчымае перамяшчэнне правай часткі BC сістэмы вярчальнае вакол цэнтра B, левай $A''C$ – складанае. Апошняя можа ў пераносным перамяшчэнні паварочвацца разам з правай часткай вакол пункта B і адначасова перамяшчацца паступальна; пры гэтым утулка C у адносным руху слізгае ўправа па стрыжню CD. За незалежнае магчымае перамяшчэнне прымаем вугал павароту $\delta\varphi$. Сувязь паміж адносным магчымым перамяшчэннем $\delta\vec{s}^{\,r}_{A''}$ і $\delta\varphi$ устанаўліваем, аналізуючы перамяшчэнні шарніра A'', для якога вядомы напрамкі адноснага $\delta\vec{s}^{\,r}_{A''}$, пераноснага $\delta\vec{s}^{\,e}_{A''}$ і абсалютнага $\delta\vec{s}_{A''}$ перамяшчэнняў і справядліва залежнасць: $\delta\vec{s}_{A''} = \delta\vec{s}^{\,e}_{A''} + \delta\vec{s}^{\,r}_{A''}$. На рысунку 11, *б* $\delta\vec{s}^{\,e}_{A''} \perp A''B$, $\delta s^r_{A''} = \delta s_E = \delta s^e_{A''}\sin\beta = A''B\sin\beta\delta\varphi$. Запісваем ураўненне работ:

$$M_B\left(\vec{Y}_A\right)\delta\varphi + M_B\left(\vec{F}\right)\delta\varphi + F\sin\alpha\delta s_E - M\delta\varphi = 0$$

або

$$\left(Y_A a + F\cos\alpha\frac{a}{2} + F\sin\alpha\sin\beta A''B - M\right)\delta\varphi = 0$$

.



Рыс. 11

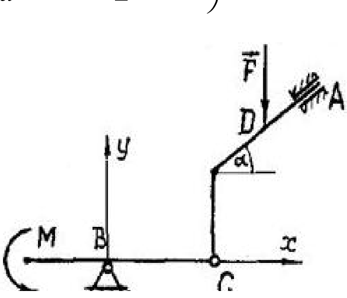
Адсюль знаходзім:

$$Y_A = \frac{1}{a}\left(M - F\cos\alpha\frac{a}{2} - F\sin\alpha\sin\beta A''B\right).$$

Вызначэнне X_B. Паніжаем валентнасць сувязі *B* (рыс. 11, в). Аналіз атрыманага механізма паказвае, што яго правая частка $B'C$ атрымлівае паступальнае магчымае перамяшчэнне (паколькі $\delta\vec{s}_{B'} \parallel \delta\vec{s}_C$), а левая застаецца нерухомай. Таму знешнія сілы работы не выконваюць і ўраўненне работ запісваецца ў выглядзе $X_B\delta s_{B'} = 0$, адкуль $X_B = 0$.

Вызначэнне Y_B. Атрыманы пасля пераўтварэння сувязі *B* механізм паказаны на рысунку 11, г. Магчымае перамяшчэнне яго левай часкі *AC* — паварот вакол цэнтра *A*; правая $B''C$ можа выконваць складаны рух: вярчальны пераносны разам з левай часткай вакол цэнтра *A* і паступальны адносна левай часткі. Пры гэтым стрыжань *CD* слізгае гарызантальна ва ўтулцы *C*. За незалежнае магчымае перамяшчэнне прымаем $\delta\varphi$. Тады пераноснае магчымае перамяшчэнне $\delta s^e_{B''} = AB''\delta\varphi$. Раскладваем яго на абсалютнае $\delta\vec{s}_{B''}$, перпендыкулярнае да сувязі $B''B_1$, і адноснае $\delta\vec{s}^{\,r}_{B''}$, паралельнае да стрыжня *CD* (рыс. 11, г). На правую частку сістэмы дзейнічаюць рэакцыя Y_B і пара M, якія на яе адносным гарызантальным перамяшчэнні работы не выконваюць. Таму ўраўненне работ запісваем толькі на пераносным перамяшчэнні ўсей сістэмы: $M_A\left(\vec{Y}_B\right)\delta\varphi + M\delta\varphi + M_A\left(\vec{F}\right)\delta\varphi = 0$ або $\left(Y_B a + M + F\cos\alpha\frac{a}{2} - F\sin\alpha\frac{h}{2}\right)\delta\varphi = 0$. Адсюль $Y_B = \left(\frac{h}{2a}\sin\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha\right)F - M/a$.

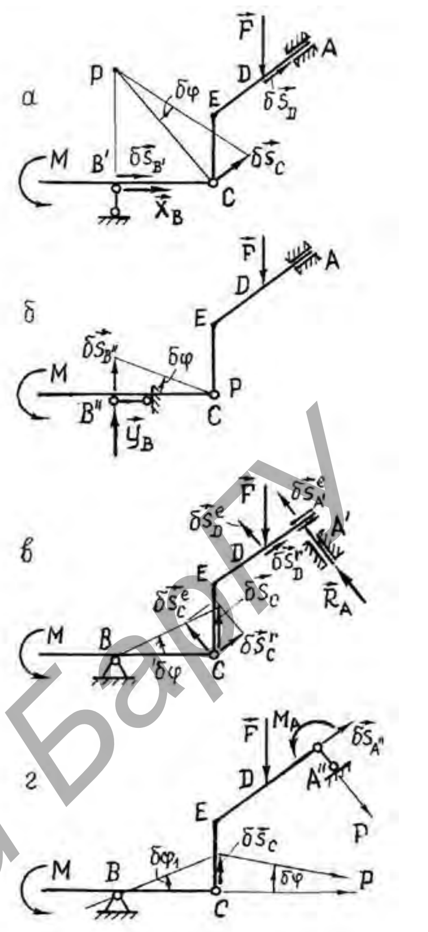
Прыклад 2. Механічная сістэма і нагрузка на яе паказаны на рысунку 12. Неабходна вызначыць рэакцыі сувязей *A* і *B*.



Рыс. 12

Вызначэнне X_B. Паніжаем валентнасць сувязі *B* (рыс 13, а). У атрыманым механізме левая частка $B'C$ можа здзяйсняць плоскае перамяшчэнне вакол імгненнага цэнтра *P*, правая *AE* – паступальнае ўздоўж напрамку *EA*. Прымем у якасці незалежнага вуглавое магчымае перамяшчэнне $\delta\varphi$. Запішам ураўненне работ: $M_P\left(\vec{X}_B\right)\delta\varphi + M\delta\varphi - F\sin\alpha\delta s_D = 0$. З улікам $\delta s_D = \delta s_C = \delta\varphi\cdot PC$ атрымаем: $\left(X_B\cdot B'P + M - F\sin\alpha\cdot PC\right)\delta\varphi = 0$, адкуль $X_B = \frac{1}{B'P}\left(F\sin\alpha PC - M\right)$.

Вызначэнне Y_B. Пераўтвараем сувязь B (рыс 13, б). Левая частка атрымлівае магчымасць плоскага перамяшчэння з цэнтрам павароту P, які супадае з пунктам C, правая можа перамяшчацца паступальна. За незалежнае прымаем вуглавое перамяшчэнне $\delta\varphi$. Паколькі нерухомы пункт C належыць і стрыжню CEA, то апошні таксама будзе заставацца нерухомым. Работу выконваюць толькі сілы, прыкладзеныя да левага стрыжня. Ураўненне работ мае выгляд: $M_C(\vec{Y}_B)\delta\varphi - M\delta\varphi = 0$, альбо $(Y_B \cdot B'C - M)\delta\varphi = 0$, адкуль $Y_B = M/B'C$.



Рыс. 13

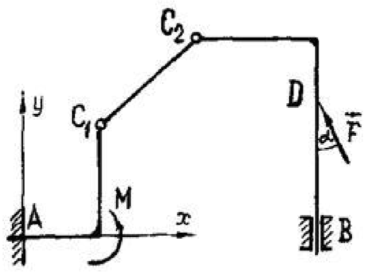
Вызначэнне R_A. Паніжаем валентнасць слізгальнай замацоўкі A. Атрымліваем падвойную слізгальную замацоўку A' (рыс. 13, в). Левая частка ўтворанага механізма можа паварочвацца вакол цэнтра A, правая здольна здзяйсняць складаны рух: паступальны ў напрамку рэакцыі R_A і адносны ўздоўж участка EA'. За незалежнае магчымае перамяшчэнне прымем абсалютнае перамяшчэнне δs_C. Яно раскладваецца на пераноснае $\delta s_C^e = \delta s_D^e = \delta s_{A'}^e = \delta s_C \cos\alpha$ і адноснае $\delta s_C^r = \delta s_D^r = \delta s_C \sin\alpha$; магчымае вуглавое перамяшчэнне стрыжня BC роўна $\delta\varphi = \delta s_C / BC$. Запісваем ураўнене работ: $M\delta\varphi - F\sin\alpha\,\delta s_D^r - F\cos\alpha\,\delta s_D^e + R_A\delta s_{A'}^e = 0$ альбо $\left(M/BC - F\sin^2\alpha - F\cos^2\alpha + R_A\cos\alpha\right)\delta s_C = 0$; адгэтуль $R_A = \left(F - M/BC\right)/\cos\alpha$.

Вызначэнне M_A. Пераўтвараем сувязь A ў A'' (рыс. 13, г). Тады звенні механізма атрымліваюць абсалютныя парамяшчэнні: левы — вярчальнае вакол цэнтра A, правы — плоскае вакол імгненнага цэнтра P. У якасці незалежнага магчымага перамяшчэння прымаем $\delta\varphi$. Для агульнага шарніра C відавочны залежнасці: $\delta s_C = \delta\varphi_1 \cdot BC$ і $\delta s_C = \delta\varphi \cdot CP$, адкуль $\delta\varphi_1 \cdot BC = \delta\varphi \cdot CP$ і $\delta\varphi_1 = \dfrac{PC}{BC}\delta\varphi$. Складаем ураўненне работ: $M\delta\varphi_1 - M_P(\vec{F})\delta\varphi - M_A\delta\varphi = 0$ альбо $\left(M\dfrac{PC}{BC} - M_P(\vec{F}) - M_A\right)\delta\varphi = 0$. Адгэтуль знаходзім: $M_A = \dfrac{PC}{BC}M - M_P(\vec{F})$.

Аналіз складаных сістэм з аднавалентнай унутранай сувяззю.

Як раней адзначалася, сумарная валентнасць сувязей, накладзеных на механічную сістэму, што ўтворана з двух цел, роўна шасці. Таму пры аднавалентнай унутранай сувязі валентнасць знешняй сістэмы сувязей роўна пяці. Пры гэтым магчымы толькі адзін варыянт размеркавання яе валентнасцей паміж целамі: адно цела з двухвалентнай сістэмай сувязей, другое — з трохвалентнай.

Прыклад 1. Механічная сістэма і нагрузка паказаны на рысунку 14. Унутраная сувязь уяўляе сабою ненагружаны стрыжань C_1C_2. Знайсці рэакцыі X_A, M_A, X_B.



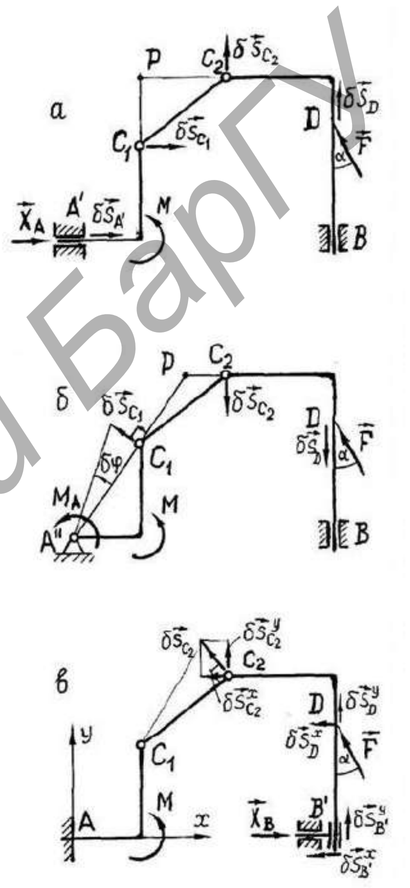
Рыс. 14

Вызначэнне X_A. Паніжаем валентнасць сувязі A (рыс. 15, а). Пасля гэтага левы стрыжань атрымлівае магчымае гарызантальнае паступальнае перамяшчэнне, правы — вертыкальнае. За незалежнае магчымае перамяшчэнне прымаем $\delta s_{A'}$. Запісваем ураўненне работ: $X_A\delta s_{A'} + F\cos\alpha\delta s_D = 0$.

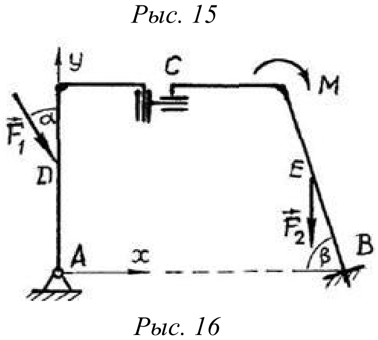
Паколькі тут $\delta s_D = \delta s_{C_2} = \dfrac{PC_2}{PC_1}\delta s_{C_1} = \dfrac{PC_2}{PC_1}\delta s_{A'}$,

то $$\left(X_A + F\cos\alpha\frac{PC_2}{PC_1}\right)\delta s_{A'} = 0,$$ адкуль $X_A = -F\cos\alpha\, PC_2/PC_1$.

Вызначэнне M_A. Замяняем жорсткую замацоўку A на нерухомы цыліндрычны шарнір (рыс. 15, б). У атрыманым механізме стрыжань $A'C_1$ можа паварочвацца вакол нерухомага цэнтра A'', стрыжань BC_2 — здзяйсняць вертыкальны паступальны рух, а сувязь C_1C_2 — плоскі рух вакол імгненнага цэнтра P. За незалежнае магчымае перамяшчэнне прымаем $\delta\varphi$. Ураўненне работ мае выгляд: $M_A\delta\varphi + M\delta\varphi - F\cos\alpha\delta s_D = 0$. Тут $\delta s_D = \delta s_{C_2} = \dfrac{PC_2}{PC_1}\delta s_{C_1} = \dfrac{PC_2\cdot A''C_1}{PC_1}\delta\varphi$. Канчаткова знаходзім: $M_A = \dfrac{PC_2\cdot A''C_1}{PC_1}F\cos\alpha - M$.


Рыс. 15

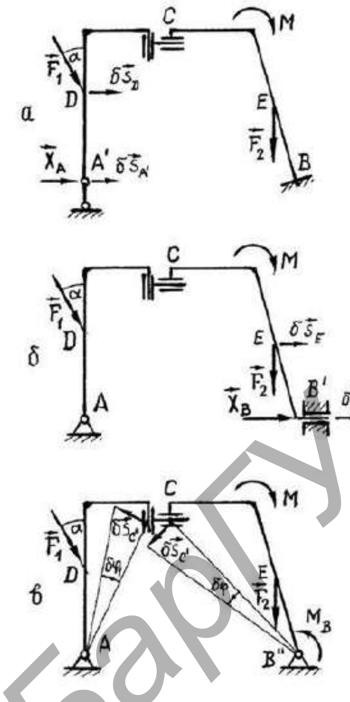
Вызначэнне X_B. Паніжаем валентнасць сувязі B (рыс. 15, в). У атрыманай сістэме стрыжань AC_1 нерухомы. Сувязь C_1C_2 можа паварочвацца вакол цэнтра C_1, а стрыжань C_2B' выконвае паступальны рух (паколькі сувязь B' не дапускае павароту). Работу могуць выконваць толькі сілы, прыкладзеныя да рухомай правай часткі сістэмы. У якасці незалежнага магчымага перамяшчэння прымаем δs_{C_2}. Запісваем ураўненне работ: $F\sin\alpha\delta s_D^X + F\cos\alpha\delta s_D^Y - X_B\delta s_{B'}^X = 0$. Падстаўляем сюды $\delta s_{B'}^X = \delta s_D^X = \delta s_{C_2}^X = \delta s_{C_2}\cdot\sin\beta$, $\delta s_D^Y = \delta s_{C_2}^Y = \delta s_{C_2}\cos\beta$. Атрымліваем: $(F\sin\alpha\cdot\sin\beta + F\cos\alpha\cos\beta - X_B\sin\beta)\delta s_{C_2} = 0$, адкуль $X_B = F\cos(\alpha-\beta)/\sin\beta$.


Рыс. 16

Прыклад 2. Дадзена механічная сістэма, унутраная сувязь C у якой уяўляе сабою падвойную слізгальную замацоўку (рыс. 16). Знайсці рэакцыі сувязей X_A, X_B, M_B.

Вызначэнне X_A. Паніжаем валентнасць сувязі A (рыс. 17, а). Аналіз сувязей атрыманага механізма паказвае, што яго левая частка $A'C$ можа перамяшчацца паступальна, а правая застаецца нерухомай. Прымем у якасці незалежнага магчымае перамяшчэнне $\delta s_{A'}$. Складаем ураўненне работ: $X_A \delta s_{A'} + F \sin\alpha \delta s_D = 0$. Тут $\delta s_D = \delta s_{A'}$. Таму $(X_A + F\sin\alpha)\delta s_{A'} = 0$; адгэтуль $X_A = -F\sin\alpha$.

Вызначэнне X_B. Пераўтвараем жорсткую замацоўку B у слізгальную B' (рыс. 17, б). У атрыманай сістэме правая частка можа перамяшчацца паступальна, левая – нерухомая. За незалежнае магчымае перамяшчэнне прымаем $\delta s_{B'}$. Запісваем ураўненне работ: $X_B \delta s_{B'} = 0$. Адгэтуль $X_B = 0$.



Рыс. 17

Вызначэнне M_B. Паніжаем валентнасць сувязі B (рыс. 17, в). Левая і правая часткі атрыманай сістэмы могуць паварочвацца вакол нерухомых цэнтраў A і B''. Няхай $\delta\varphi$ — незалежне магчымае перамяшчэнне. Паколькі сувязь C выключае ўзаемны паварот частак сітэмы, то $\delta\varphi_1 = \delta\varphi$, г.зн. магчымыя вуглавыя перамяшчэнні для правай і левай частак сістэмы аднолькавы. Ураўненне работ запісваецца ў выглядзе: $\left(M_B + M_{B''}(\vec{F}_2) - M - M_A(\vec{F}_1)\right)\delta\varphi = 0$.

Адгэтуль знаходзім: $M_B = M + M_A(\vec{F}_1) - M_{B''}(\vec{F}_2)$.

Заключэнне.

У артукуле паказана магчымасць прымянення агульнага ўраўнення статыкі да аналізу раўнавагі распаўсюджанага тыпу механічных сістэм, якія традыцыйна даследуюцца з дапамогай ўраўненняў геаметрычнай статыкі. Методыка рашэння задач падрабязна праілюстравана на сямі прыкладах, кожны з якіх можа ўспрымацца аўтаномна. Кола закранутых тут пытанняў адпавядае вучэбнай праграме тэхнічнай ВНУ. Вынікі работы даступны для ўкаранення ў вучэбны працэс па агульнатэхнічных дысцыплінах.

ЛІТАРАТУРА

1. Русан, С. І. Асаблівасці методыкі выкладання прынцыпа магчымых перамяшчэнняў у тэхнічных універсітэтах / С. І. Русан // Теоретическая и прикладная механика: Международ. науч.-техн. сб. — Мінск : БНТУ, 2005. — №18. — С. 234—240.
2. Русан, С. І. Структура плоскіх статычна вызначальных механічных сістэм. / С. І. Русан — Баранавічы : РВА БарДУ, 2007. — 69 с.