Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования «Барановичский государственный университет»

МАТЕМАТИКА

Практикум
для студентов инженерных специальностей

В 2 частях
Часть 1

Барановичи
БарГУ
2017

УДК 514.12, 512.64, 517.1, 517.2, 517.3, 517.91
ББК 22.1
М11

Составители:
Е. Н. Кирюхова, Ю. В. Сергеева

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет» О. Н. Поддубная,
кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой информационных систем и технологий учреждения образования «Барановичский государственный университет» О. И. Наранович

Математика : практикум для студентов инженер. специальностей : в 2 ч. / сост.
М11 Е. Н. Кирюхова, Ю. В. Сергеева ; М-во образования Респ. Беларусь, Барановичский гос. ун-т. — Барановичи : БарГУ, 2017. — Ч. 1. — 102 с.
ISBN 978-985-498-773-6.

Изложены основные понятия, теоремы и формулы, необходимые для решения задач, примеры решения типовых задач, задачи для аудиторной работы и самостоятельного решения, вопросы для самоконтроля по темам, изучаемым на I курсе инженерных специальностей по дисциплине «Математика».

Для студентов I курса инженерных специальностей.

УДК 514.12, 512.64, 517.1, 517.2, 517.3, 517.91
ББК 22.1

Учебное издание

0+

МАТЕМАТИКА

Практикум
для студентов инженерных специальностей

В 2 частях
Часть 1

Составители:
Е. Н. Кирюхова, Ю. В. Сергеева

Ответственный за выпуск С. А. Березнюк
Технический редактор А. Ю. Сидоренко
Компьютерная вёрстка С. М. Глушак
Корректор Н. Н. Колодко

Подписано в печать 09.11.2017. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 6,30. Уч.-изд. л. 3,50. Тираж 70 экз. Заказ 707.

Учреждение образования «Барановичский государственный университет». Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/424 от 09.09.2016. Ул. Войкова, 21, 225404, г. Барановичи. Тел. 8 (0163) 45 46 28, e-mail: rio@barsu.by .

ISBN 978-985-498-773-6

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в связи с возросшей ролью математики в современной науке и технике будущие инженеры нуждаются в серьезной математической подготовке, которая давала бы им возможность математическими методами исследовать широкий круг новых проблем, использовать теоретические достижения на практике, применять современные информационные технологии. Стремительное развитие и внедрение новых технологий, их конкуренция на мировом рынке, прогресс средств вычислительной техники, а также научно-технический прогресс в целом предъявляют повышенные требования к качеству подготовки специалистов и, в частности, к их математическому образованию.

Математизация знаний — важнейшее направление процесса развития прикладных исследований. Она обеспечивает четкость и непротиворечивость предпосылок, логическую строгость умозаключений и выводов; позволяет за счет абстракции упорядочить теоретические конструкции и получить новые, не лежащие на поверхности научные результаты. Знания, полученные при изучении математики, необходимы студентам для дальнейшего изучения таких дисциплин, как физика, химия, инженерная графика, теоретическая механика, а также других специальных дисциплин инженерного профиля.

Для студентов инженерных специальностей наиболее важен практический аспект математики, т. е. возможность грамотно построить математическую модель, произвести необходимые вычисления, обнаружить и исследовать соотношения между данными, полученными в результате исследования объектов, поэтому в учебном процессе отводится особая роль практическим занятиям и самостоятельной работе студентов. В этой связи практикум может быть использован как на практических занятиях, так и во внеаудиторной самостоятельной работе студентов I курса инженерных специальностей.

Часть 1 практикума включает в себя темы, изучаемые студентами инженерных специальностей в 1-м семестре первого года обучения. В основной части практикума изучение курса математики разбито на восемь тем. В каждой теме приведены краткие теоретические сведения: основные определения, теоремы, формулы, необходимые для решения практических задач. По каждой теме приведено достаточно примеров решения практических задач. Для проведения практических занятий предложены задания разных уровней сложности для аудиторной работы. Для осуществления контроля и самоконтроля знаний по изучаемой теме предложены четыре варианта заданий. Большинство задач снабжено ответами. В конце каждой темы вынесены вопросы для самоконтроля.

Авторы выражают глубокую благодарность доценту кафедры высшей математики Белорусского государственного экономического университета кандидату физико-математических наук О. Н. Поддубной за ценные советы и замечания.

1 МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Основные теоретические сведения

Прямоугольная таблица чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

содержащая m строк и n столбцов, называется ***матрицей.***

Числа a_{ij} ($i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$) называются ***элементами*** матрицы.

Матрица называется ***квадратной***, если количество строк равно количеству столбцов, т. е. $m = n$. Число n называется *порядком* матрицы.

Единичной называется матрица вида

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы A на число k называется матрица $B = kA$, каждый элемент которой имеет вид: $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ ($i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$).

Суммой матриц A и B одинаковой размерности $m \times n$ называется матрица C, каждый элемент которой имеет вид: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$).

Матрицы A и B называются ***согласованными***, если количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B.

Произведением матрицы A размерности $m \times n$ на согласованную ей матрицу B размерности $n \times k$ называется матрица C размерности $m \times k$, каждый элемент которой имеет вид: $c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot b_{sj}$ ($i = 1, 2, ..., m; \quad j = 1, 2, ..., n$).

Транспонированием матрицы называется операция, в результате которой строки и столбцы матрицы меняются местами с сохранением порядка следования элементов, т. е. $a_{ij}^{T} = a_{ji}$ ($i = 1, 2, ..., m; \quad j = 1, 2, ..., n$).

Элементарными преобразованиями матрицы называют следующие преобразования:

1) умножение элементов любой строки (столбца) на отличное от нуля число;

2) прибавление к элементом одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца);

3) перестановку строк (столбцов) местами;

4) прибавление к элементам любой строки (столбца) линейной комбинации элементов другой строки (столбца) (комбинация элементарных преобразований вида 1. и 2. называется линейной комбинацией строк (столбцов)).

Матрица B называется ***эквивалентной*** матрице A, если B получена из A с помощью конечного числа элементарных преобразований. Обозначение: $A \sim B$.

О0пределителем квадратной матрицы A n-го порядка (определителем n-го порядка) является число, которое принято обозначать символами:

$$|A| = \Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2i} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ii} \end{vmatrix}, \; n = 1, 2, ...$$

Приведем правила вычисления определителей матриц различных порядков:

– определитель первого порядка: $\Delta_1 = |\mathrm{a}_{11}| = \mathrm{a}_{11}$;

– определитель второго порядка:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21};$$

– определитель третьего порядка (правило Саррюса):

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} +$$

$$+ a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}.$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n - 1)$-го порядка, образованный из исходного определителя вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} к элементу a_{ij} определителя n-го порядка называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Определитель n-го порядка $(n > 2)$ равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) определителя на соответствующие им алгебраические дополнения: $\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj}$.

Если $|A| \neq 0$, то матрица называется ***невырожденной***.

Матрица $\tilde{A}$, элементы которой равны алгебраическим дополнениям соответствующих элементов транспонированной квадратной матрицы A, называется ***присоединенной*** (союзной) к матрице A:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица A^{-1}, удовлетворяющая вместе с заданной невырожденной матрицей A равенствам $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, называется ***обратной*** к матрице A.

Обратная матрица может быть найдена по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \widetilde{A}$ (метод присоединенной матрицы).

Совокупность столбцов (строк) $A_1, A_2, ..., A_m$ матрицы A называется ***линейно зависимой***, если найдутся такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, среди которых хотя бы одно не равно нулю, что $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + ... + \lambda_m A_m = O$ (здесь O — нуль-столбец, т. е. столбец, все элементы которого равны нулю). Если равенство возможно только в случае, когда все $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$, то столбцы (строки) называются ***линейно независимыми***.

Рангом матрицы А называется максимальное число линейно независимых строк (столбцов) матрицы. Обозначение ранга: $r(A)$ или $rang(A)$.

Минором k-го порядка матрицы A называется определитель квадратной матрицы k-го порядка, составленной из элементов матрицы A, которые находятся в заранее выбранных k строках и k столбцах, причем расположение элементов матрицы A сохраняется.

Ранг матрицы А равен максимальному порядку r ненулевого минора M матрицы, т. е. любой минор порядка $r + 1$ и выше равен нулю или не существует. Минор M называется *базисным* или *ранговым*.

Основные свойства ранга матрицы:

1) ранг не превосходит числа m строк и числа n столбцов матрицы, т.е. верно неравенство $0 \le rang(A) \le \min(m, n)$;

2) $rang(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$ — нулевая матрица;

3) $rang(A) = rang(A^T)$;

4) если матрица $A \sim B$, то $rang(A) = rang(B)$, т. е. ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы;

5) для квадратной матрицы A n-го порядка $rang(A) = n$ тогда и только тогда, когда $|A| \ne 0$.

Примеры решения практических задач

Пример 1.1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&4\\3&2&3\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}1&3&4\\5&7&8\\1&2&4\end{pmatrix}.$$

Найти $2A+B$.

Решение.

$$2A=2\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&4\\3&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&6\\4&2&8\\6&4&6\end{pmatrix},$$

$$2A+B=\begin{pmatrix}2&4&6\\4&2&8\\6&4&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&3&4\\5&7&8\\1&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&7&10\\9&9&16\\7&6&10\end{pmatrix}.$$

Пример 1.2. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&4&1\\1&-4&2\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}.$$

Найти $A^T B$.

Решение. Транспонируем матрицу A:

$$A^T=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&4&-4\\3&1&2\end{pmatrix}.$$

$$A^T B=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&4&-4\\3&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot3+1\cdot2\\0\cdot1+4\cdot3-4\cdot2\\3\cdot1+1\cdot3+2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\4\\10\end{pmatrix}.$$

Пример 1.3. Найти произведение *AB* и *BA* матриц

$$A=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$AB=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1\\ 4\cdot 2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 1\\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 8 & 16 & 4\\ 6 & 12 & 3\end{pmatrix}.$$

$$BA=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1+4\cdot 4+1\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\end{pmatrix}.$$

Пример 1.4. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$. Найти A^3.

Решение. $A^3 = A\cdot A\cdot A$.

$$A^2 = A\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 14\\ 7 & 18\end{pmatrix};$$

$$A^3 = A^2\cdot A=\begin{pmatrix}11 & 14\\ 7 & 18\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}47 & 78\\ 39 & 86\end{pmatrix}.$$

Пример 1.5. Найти определитель матрицы:

а) $\begin{vmatrix}2 & 7\\ 5 & 8\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ -6 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 8\end{vmatrix}$.

Решение. А) $\begin{vmatrix}2 & 7\\ 5 & 8\end{vmatrix}=2\cdot 8-5\cdot 7=16-35=-19$;

Б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -6 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot 4\cdot 8 + 2\cdot 3\cdot 1 + (-6)\cdot 3\cdot 5 - 5\cdot 4\cdot 1 - (-6)\cdot 2\cdot 8 -$

$-3\cdot 3\cdot 1 = 32 + 6 - 90 - 20 + 96 - 9 = 15$.

Пример 1.6. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Воспользуемся определением определителя, разложив его по элементам первой строки: $\Delta = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + $ $+ a_{13}\cdot A_{13} + a_{14}\cdot A_{14}$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+3\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^5\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Вычислим определители:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1\cdot(6-4) - 1\cdot(9-1) + 2\cdot(12-2) = -2 - 8 + 20 = 10;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(9-1)+1\cdot(0-2)+2\cdot(0-6)=16-2-12=2;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot(12-2)+1\cdot(0-4)+1\cdot(0-6)=20-4-6=10\,.$$

Тогда определитель $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 10 + 3\cdot 2 - 4\cdot 10 = -4$.

Пример 1.7. Найти обратную матрицу к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ и сделать проверку.

Решение. Найдем обратную матрицу методом присоединенной матрицы.

Вычислим определитель матрицы A: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 4-(-6)=10 \neq 0$,

значит, матрица — невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.

Составим матрицу алгебраических дополнений элементов матрицы A:

$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot 4 = 4$; $\quad A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot(-3) = 3$;

$A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot 2 = -2$; $\quad A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot 1 = 1$.

Транспонируем полученную матрицу: $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \tilde{A}$ — присоединенная матрица.

Тогда $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$.

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 4+6 & -2+2 \\ -12+12 & 6+4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$$

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 4+6 & 8-8 \\ 3-3 & 6+4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Пример 1.8. Найти обратную матрицу к матрице $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и сделать проверку.

Решение. Вычислим определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (4-9) + 1 \cdot (2-12) - 1 \cdot (3-8) = -25 - 10 + 5 = -30 \neq 0,$$

значит, матрица — невырожденная, и обратная матрица A^{-1} существует.

Составим матрицу алгебраических дополнений элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}-1;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}5 & -1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=14;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}5 & -1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=-19;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-1;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-16;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=11.$$

Транспонируем полученную матрицу:

$$\begin{pmatrix}-5 & 10 & -5\\ -1 & 14 & -19\\ -1 & -16 & 11\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-5 & -1 & -1\\ 10 & 14 & -16\\ -5 & -19 & 11\end{pmatrix}=\tilde{A}$$ — присоединенная матрица.

Тогда $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot\tilde{A}=\dfrac{1}{-30}\cdot\begin{pmatrix}-5 & -1 & -1\\ 10 & 14 & -16\\ -5 & -19 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15}\\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30}\end{pmatrix}$.

Сделаем проверку:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{30}\right)\cdot\begin{pmatrix}-5 & -1 & -1\\ 10 & 14 & -16\\ -5 & -19 & 11\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix}-25-10+5 & -5-14+19 & -5+16-11\\ -5+20-15 & -1+28-57 & -1-32+33\\ -20+30-10 & -4+42-38 & -4-48+22\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{30}\begin{pmatrix}-30 & 0 & 0\\ 0 & -30 & 0\\ 0 & 0 & -30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E;$$

$$A^{-1}\cdot A=-\frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix}-5 & -1 & -1\\ 10 & 14 & -16\\ -5 & -19 & 11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}=$$

$$= -\frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix} -25-1-4 & 5-2-3 & 5-3-2 \\ 50+14-64 & -10+28-48 & -10+42-32 \\ -25-19+44 & 5-38+33 & 5-57+22 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{30}\begin{pmatrix} -30 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{pmatrix} = E.$$

Пример 1.9. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ 7 & 1 & -2 & -1 & 12 \\ 11 & 1 & -3 & 0 & 16 \\ 2 & 2 & -1 & -5 & 12 \end{pmatrix}.$$

Решение. Ранг матрицы $A_{4\times 5}$ заведомо не больше, чем 4. С помощью элементарных преобразований, не меняющих ранг матрицы, приведем матрицу A к ступенчатому виду. Для этого необходимо получить нули ниже диагональных элементов.

К первой строке прибавим четвертую строку, умноженную на (–1).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ 7 & 1 & -2 & -1 & 12 \\ 11 & 1 & -3 & 0 & 16 \\ 2 & 2 & -1 & -5 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 7 & 1 & -2 & -1 & 12 \\ 11 & 1 & -3 & 0 & 16 \\ 2 & 2 & -1 & -5 & 12 \end{pmatrix}.$$

Добьемся нулей в первом столбце матрицы. Для этого ко второй строке прибавим первую строку, умноженную на –7; к третьей строке прибавим первую строку, умноженную на –11; к четвертой строке прибавим первую строку, умноженную на –2:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 7 & 1 & -2 & -1 & 12 \\ 11 & 1 & -3 & 0 & 16 \\ 2 & 2 & -1 & -5 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 8 & -2 & -22 & 40 \\ 0 & 12 & -3 & -33 & 60 \\ 0 & 4 & -1 & -11 & 20 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ :2 \\ :3 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & -11 & 20 \\ 0 & 4 & -1 & -11 & 20 \\ 0 & 4 & -1 & -11 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & -11 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim B.$$

Ранг матрицы $rang(B) = 2$. Так, наивысший порядок минора матрицы, отличного от нуля, равен двум. Так как матрица $A \sim B$, то $rang(A) = rang(B) = 2$.

Задания для аудиторной работы

1.1. Даны матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу $C = A - 4B$.

1.2. Вычислить матрицу $D = 3 \cdot A + 4 \cdot B - 2 \cdot C$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \\ 8 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

1.3. Вычислить матрицу $D = A \cdot B + C$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.4. Доказать, что матрицы $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ перестановочные.

1.5. Показать, что хотя $P\neq S$, но $P\cdot X=S\cdot X$, где

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix},\ S=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 4 & -1\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}6 & 5 & 7\\ 2 & 2 & 4\\ 3 & 3 & 6\end{bmatrix}.$$

1.6. Решить матричные уравнения:

а) $X-\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$; б) $2\cdot\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}-3X=(-3)E$.

1.7. Вычислить определитель второго порядка:

а) $\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & 6\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}12 & 13\\ 11 & 12\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}134 & 137\\ 223 & 226\end{vmatrix}$.

1.8. Вычислить определитель матрицы A третьего порядка по правилу Саррюса:

а) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 4 & 2\\ 5 & 3 & 2\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}2 & 4 & 5\\ 0 & -3 & 8\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix}-3 & 8 & 2\\ 1 & -5 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix}-3 & 9 & 0\\ 3 & -3 & -4\\ 0 & 6 & 7\end{bmatrix}$.

1.9. Вычислить определитель третьего порядка:

а) $\begin{vmatrix}-3 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 2\\ -3 & 0 & 2\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}3 & 4 & -2\\ 1 & 4 & -2\\ 4 & 2 & 1\end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix}22 & 45 & 2\\ 11 & 23 & 2\\ 4 & 9 & 2\end{vmatrix}$.

б) $\begin{vmatrix}-1 & 2 & -4\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & 5 & 2\end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix}378 & 266 & 125\\ 377 & 265 & 124\\ 3 & 3 & 3\end{vmatrix}$;

1.10. Вычислить миноры элементов a_{12} и a_{23} определителя

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

1.11. Вычислить алгебраические дополнения A_{13} и A_{32} элементов матрицы $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -6 & 8 & -3 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$.

1.12. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов a_{12} и a_{31} матрицы $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 2 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.

1.13. Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам: а) первой строки; б) второго столбца.

1.14. Вычислить определитель четвертого порядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

1.15. Найти обратную матрицу к матрице и сделать проверку:

а) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$;

г) $\begin{bmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$;

д) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

1.16. Решить матричные уравнения:

а) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

б) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 80 \\ 30 & 27 \end{bmatrix}$;

1.17. Найти ранг матриц:

а) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & -4 \\ 5 & -2 & 8 & -5 \end{bmatrix}$.

б) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} -1 & 10 & 8 \\ 2 & 3 & 5 \\ -3 & 7 & 3 \end{bmatrix}$;

1.18. При каких значениях ранг α матрицы $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & \alpha & 6 \end{bmatrix}$ равен 2?

1.19. При каких значениях α ранг матрицы $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & \alpha & -2 \\ 3 & -6 & -3 \end{bmatrix}$ равен: а) 3; б) 2; в) 1?

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить определитель матрицы A третьего порядка по правилу Саррюса:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \\ -1 & 9 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить алгебраические дополнения:

а) A_{12} и A_{31} матрицы $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 8 \\ -6 & 7 & 9 \\ 5 & -6 & 8 \end{bmatrix}$;

б) A_{13} и A_{32} матрицы $\begin{bmatrix} -5 & 7 & 5 \\ 8 & 6 & 2 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$;

в) A_{22} и A_{12} матрицы $\begin{bmatrix} 5 & -5 & 8 \\ 9 & -4 & 7 \\ 6 & -8 & 10 \end{bmatrix}$;

г) A_{13} и A_{21} матрицы $\begin{bmatrix} -5 & 7 & 4 \\ 6 & 2 & 4 \\ -8 & -9 & 11 \end{bmatrix}$.

3. Найти обратную матрицу к матрице A и сделать проверку:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 7 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & -3 \end{bmatrix}$; 3) $A = \begin{bmatrix} -5 & 7 & 5 \\ 8 & 6 & 2 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$;

2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -6 & 8 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$; 4) $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -4 & 7 \\ 6 & -8 & 1 \end{bmatrix}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется матрицей?
2. Какие виды матриц вы знаете?
3. Какие матрицы называются согласованными?
4. Сформулируйте определения операций сложения, разности, умножения матриц, возведения в степень и умножения на число.
5. Какие матрицы называются перестановочными?
6. Что называется определителем 1-го порядка?
7. Что называется определителем 2-го порядка?
8. Что называется определителем 3-го порядка?
9. Что называется минором и алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы A?
10. Сформулируйте определение определителя n-го порядка.
11. Сформулируйте основные свойства определителей.
12. Какая матрица называется обратной для матрицы A?
13. Сформулируйте теорему о единственности матрицы, обратной данной.
14. Опишите алгоритм нахождения матрицы, обратной данной.
15. Что называется рангом матрицы?
16. Перечислите основные свойства ранга матрицы.
17. Какие элементарные преобразования матрицы сохраняют ранг матрицы?

2 СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Основные теоретические сведения

Система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

называется ***системой линейных алгебраических уравнений*** (СЛАУ).

Систему уравнений можно записать в матричном виде:

$$A \cdot X = B,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ — матрица системы;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ — матрица-столбец свободных членов;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ — матрица-столбец неизвестных (переменных).

Матрица

$$A\,|\,B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

называется *расширенной матрицей* системы.

Система уравнений называется ***однородной***, если все ее свободные члены $b_1, b_2, ..., b_m$ равны нулю; если хотя бы один из свободных членов системы отличен от нуля, система называется ***неоднородной***.

Упорядоченный набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, обращающий каждое уравнение системы в верное равенство, называется ***решением*** системы.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется ***совместной***. При этом если совместная система имеет только одно решение, то она называется ***определенной***. Совместная система, имеющая более, чем одно решение, называется ***неопределенной***. Если система не имеет решений, то она называется ***несовместной***.

Решить систему — значит найти все ее решения или доказать, что их нет.

Теорема Кронекера—Капелли. Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, т. е. $rang(A) = rang(A|B)$. При этом, если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение. Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то множество ее решений является бесконечным.

Однородная система линейных алгебраических уравнений всегда совместна, так как она всегда имеет, по крайней мере, нулевое решение. Однородная СЛАУ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг её матрицы меньше числа неизвестных, т. е. при $rang(A) < n$.

Рассмотрим неоднородную СЛАУ, матрица A которой невырожденная ($|A| \neq 0$). Домножим левую и правую часть равенства

$A \cdot X = B$ на обратную матрицу A^{-1} слева: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Так как $A^{-1} \cdot A \cdot = E$ и $E \cdot X \cdot = X$, то получим решение системы линейных управлений (далее — СЛУ) в матричном виде $X = A^{-1} \cdot B$.

Правило Крамера. Система из n уравнений с n неизвестными в случае, когда определитель матрицы системы отличен от нуля ($|A| \neq 0$), имеет единственное решение: $x_j = \dfrac{\Delta_j}{|A|}$ ($j = \overline{1,n}$), где Δ_j — определитель, получаемый из определителя $|A|$ заменой j-го столбца столбцом свободных членов.

Две СЛАУ называются ***эквивалентными***, если каждое решение одной из них является решением другой. Элементарные преобразования строк матрицы системы преобразуют СЛУ в эквивалентную систему. ***Метод Гаусса***, называемый также методом последовательного исключения неизвестных, состоит в том, что с помощью элементарных преобразований матрицу СЛУ приводят к ступенчатому виду, тем самым последовательно исключая неизвестные из уравнений системы. В результате преобразований получаем СЛУ, эквивалентную данной. В отличие от матричного метода и метода Крамера, метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных.

Матрица-столбец

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

называется ***собственным вектором*** квадратной матрицы A n-го порядка, если она удовлетворяет матричному уравнению $A \cdot X = \lambda \cdot X$ или $\left(A - \lambda E \right) \cdot X = 0$. Число λ называется ***собственным значением*** матрицы A. Уравнение $|A - \lambda E| = 0$ называется ***характеристическим уравнением***.

Координаты собственного вектора X_k, соответствующего собственному значению λ_k, определяются в результате решения однородной системы уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_1)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda_2)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda_n)x_n = 0. \end{cases}$$

Примеры решения практических задач

Пример 2.1. Решить систему уравнений матричным методом:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$$

Решение. Для системы составим матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$ — матрица системы;

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$$ — матрица свободных членов,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ — матрица неизвестных.

Тогда в матричном виде СЛУ имеет вид: $A \cdot X = B$, а решение системы в матричном виде: $X = A^{-1} \cdot B$.

Найдем обратную матрицу A^{-1} к матрице A.

Для этого вычислим определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot(4-9)+1\cdot(2-12)-1\cdot(3-8) = -25-10+5 = -30 \neq 0,$$

значит, матрица A^{-1} существует.

Составим матрицу алгебраических дополнений элементов матрицы A: $A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10$; $A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5$;

$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} -1$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -19$;

$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -16$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11$.

Транспонируем полученную матрицу:

$$\begin{pmatrix} -5 & 10 & -5 \\ -1 & 14 & -19 \\ -1 & -16 & 11 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix} = \tilde{A} \text{ — союзная матрица.}$$

Тогда $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\cdot\tilde{A} = \dfrac{1}{-30}\cdot\begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix}$.

Находим матрицу X:

$$X = A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}0+\frac{14}{30}+\frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3}0-\frac{98}{15}+\frac{128}{15} \\ \frac{1}{6}0+\frac{266}{30}-\frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.2. Найти решение системы уравнений методом Крамера: $\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$

Решение. Вычислим определитель матрицы системы

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot(4-9)+1\cdot(2-12)-1\cdot(3-8) = -25-10+5 = -30 \neq 0,$$

значит, можно найти решение системы по формулам Крамера.

Вычислим определители Δ_j, $j = \overline{1,3}$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot\left(28-48\right) - 1\cdot\left(42-32\right) = -20-10 = -30;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot\left(28-48\right) - 1\cdot\left(16-56\right) = -100+40 = -60;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5\cdot\left(32-42\right) + 1\cdot\left(16-56\right) = -50-40 = -90.$$

Тогда по формулам Крамера $x_j = \dfrac{\Delta_j}{|A|}$, $j = \overline{1,3}$:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|} = \frac{-30}{-30} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|} = \frac{-60}{-30} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{|A|} = \frac{-90}{-30} = 3.$$

Пример 2.3. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$A|B=\begin{pmatrix}2&1&-1&5\\1&-2&3&-3\\7&1&-1&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&-3\\2&1&-1&5\\7&1&-1&10\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&-3\\0&5&-7&11\\0&15&-22&31\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&-3\\0&5&-7&11\\0&0&-1&-2\end{pmatrix}.$$

Запишем последнюю матрицу в виде системы уравнений

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=-3,\\5x_2-7x_3=11,\\-x_3=-2.\end{cases}$$

решая которую снизу вверх последовательно, получаем: $x_3=2$, $5x_2-7\cdot2=11\Rightarrow x_2=5$, $x_1-2\cdot5+3\cdot2= =-3\Rightarrow x_1=1$.

Пример 2.4. Решить однородную СЛУ: $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0,\\2x_1-x_2+2x_3=0,\\3x_1+x_2+x_3=0.\end{cases}$

Решение. Имеем однородную СЛУ, которая имеет нулевое (тривиальное) решение: $x_1=0, x_2=0, x_3=0.$ Проверим, имеет ли система ненулевые решения. Для этого составим матрицу системы и найдем ее определитель:

$$\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&-1&2\\3&1&1\end{vmatrix}=-1+6-2-3-2-2= =-4\neq0,$$

значит, система имеет единственное нулевое решение $x_1=0, x_2=0, x_3=0.$

Пример 2.5. Решить однородную СЛУ: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$

Решение. Имеем однородную СЛУ, которая имеет нулевое (тривиальное) решение: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0.$

Составим матрицу системы и найдем ее определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 6 + 0 - 3 - 2 - 0 = 0,$$

значит, система имеет нетривиальные решения.

С помощью элементарных преобразований приведем матрицу к ступенчатому виду: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Запишем последнюю матрицу в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения $-3x_2 + 4x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{4}{3}x_3$.

Подставим в первое уравнение $x_1 + \frac{4}{3}x_3 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}x_3$.

Пусть $x_3 = t$, тогда

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}t \\ \frac{4}{3}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t,\ t \in R.$$

Пример 2.6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Характеристическое уравнение для данной матрицы имеет вид $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Получаем квадратное уравнение $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$, решением которого являются значения $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = -1$.

Собственный вектор X_1, соответствующий $\lambda_1 = 4$, определяем из системы уравнений

$$\begin{cases} (1-4)x_1 + 6x_2 = 0, \\ x_1 + (2-4)x_2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + 6x_2 = 0, \\ x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2x_2 .$$

Пусть $x_2 = t$, тогда решение системы $\begin{cases} x_2 = t, \\ x_1 = 2t \end{cases}$, $t \in R$. Отсюда

$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t$, $t \in R$.

Собственный вектор X_2, соответствующий $\lambda_2 = -1$, определяем из системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = t, \\ x_1 = -3t \end{cases}, \ t \in R .$$

Отсюда $X_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} t, \ t \in R$.

Задания для аудиторной работы

2.1. Проверить совместность СЛАУ и в случае совместности решить ее методом Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - 7x_3 = -12; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

2.2. Решить СЛАУ методом обратной матрицы:

а) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -2, \\ x_2 + x_3 = -2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_2 - 4x_3 = -6, \\ x_1 + x_3 = 1; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

2.3. Решить СЛАУ методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6\,, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = -7, \\ 3x_1 + 10x_2 - 4x_3 = -3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -4, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 6. \end{cases}$

2.4. Решить однородную СЛАУ:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 5x_4 = 0, \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

2.5. Решить неоднородную СЛАУ:

а) $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = -3, \\ -x_1 + x_2 - 7x_3 = 4. \end{cases}$

2.6. Определить собственные значения и собственные векторы матрицы третьего порядка:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Проверить совместность СЛАУ и в случае совместности решить ее: а) методом Крамера; б) матричным методом (с помощью обратной матрицы); в) методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33, \\ 4x_1 + x_3 = -7. \end{cases}$

2. Решить однородную СЛАУ:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение СЛАУ с m уравнениями и n неизвестными.
2. Какая СЛАУ называется совместной?
3. Какая система уравнений называется совместной определенной (неопределенной)?
4. Сформулируйте теорему Кронекера—Капелли.
5. В чем сущность матричного метода решения СЛАУ (метод обратной матрицы)?
6. Напишите формулы Крамера. В каком случае они применимы?
7. В чем сущность метода Гаусса для решения СЛАУ?
8. Какая СЛАУ называется однородной?
9. Сформулируйте теорему о наличии нетривиальных решений однородной СЛАУ.

3 ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Основные теоретические сведения

Геометрическим вектором (вектором) $\overrightarrow{AB}$ (или $\vec{a}$) называется направленный отрезок прямой с началом в точке A и концом в точке B.

Модулем (длиной) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина соответствующего ему отрезка AB: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{a}\right| = AB$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Обозначение: $\vec{a} \parallel \vec{b}$ или $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ *(сонаправлены)*, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ *(противоположно направлены).*

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называются ***компланарными***, если они лежат на одной плоскости или на параллельных плоскостях.

Векторы называются ***равными,*** т. е. $\vec{a} = \vec{b}$, если: 1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, 2) $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, направленный из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$, если конец вектора $\vec{a}$ и начало вектора $\vec{b}$ совмещены (правило треугольника (рис. 3.1)).

Это определение может быть распределено на любое конечное число векторов. Пусть в пространстве даны n свободных векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$. При сложении нескольких векторов за их сумму принимают замыкающий вектор, начало которого совпадает с началом первого вектора, а конец — с концом последнего вектора (правило многоугольника (рис. 3.2)).

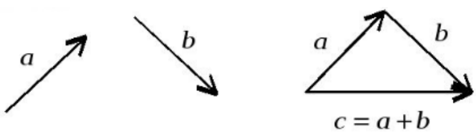

Рисунок 3.1 — Операция суммы двух векторов (правило треугольника)

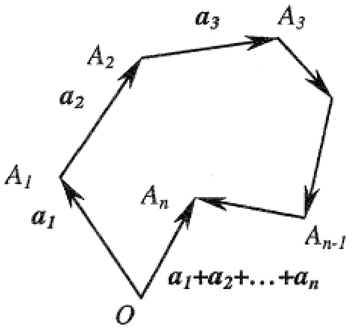

Рисунок 3.2 — Операция суммы
n векторов (правило многоугольника)

Сложение векторов по правилу параллелограмма: сумма двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, начала которых совмещены в точке *A* (рис. 3.3), есть вектор $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, имеющий начало в точке *A* и равный диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

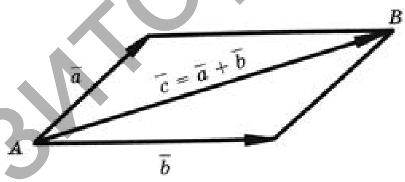

Рисунок 3.3 — Операция суммы двух векторов
(правило параллелограмма)

Произведением вектора $\vec{a}$ на число k называется вектор $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$, обладающий свойствами: 1) $\left|\vec{b}\right| = k\left|\vec{a}\right|$; б) $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$; в) вектор $\vec{b}$ сонаправлен с вектором $\vec{a}$ ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$), если $k > 0$, и вектор $\vec{b}$ противоположно направлен с вектором $\vec{a}$ ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$), если $k < 0$ (рис. 3.4).

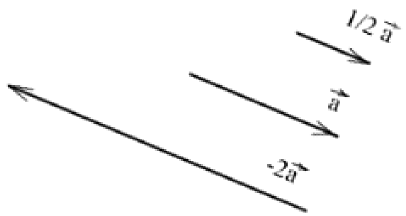

Рисунок 3.4 — Операция произведения вектора на число

Базисом на плоскости называются любые два неколлинеарные вектора $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$, взятые в определенном порядке. Эти векторы называются базисными. Любой вектор $\vec{a}$, принадлежащий плоскости, может быть разложен по базису на этой плоскости, т. е. представлен в виде $\vec{a} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2}$, где числа α_1 и α_2 определяются однозначно и называются ***координатами вектора относительно базиса.***

Базисом в пространстве называются любые три некомпланарные вектора $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$, взятые в определенном порядке, тогда любой вектор $\vec{a}$ в пространстве может быть разложен по базису пространства, т. е. представлен в виде $\vec{a} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \alpha_3\overrightarrow{e_3}$, где числа α_1, α_2 и α_3 определяются однозначно.

Вектор $\vec{a} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n}$, где $\alpha_i \in R$, $i = 1, 2, ... n$, называется ***линейной комбинацией векторов*** $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_3}$.

Векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_3}$ называются ***линейно зависимыми***, если существуют числа α_i, не все равные нулю одновременно, для которых выполняется равенство $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = \vec{0}$. Если же равенство выполняется только при всех α_i, равных нулю, то векторы называются ***линейно независимыми***.

Понятие базиса непосредственно связано с понятием линейной независимости. Базис представляет собой упорядоченную совокупность линейно независимых векторов:

а) на прямой — это один линейно независимый вектор;

б) на плоскости — это два линейно независимых вектора на этой плоскости, взятые в определённом порядке;

в) в пространстве — это три линейно независимых вектора, взятые в определённом порядке.

Ортонормированный базис — это базис, состоящий из единичных (нормированных) и взаимно перпендикулярных (ортогональных) векторов. В этом случае базисные векторы имеют особые обозначения: $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ — на плоскости, $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ — в пространстве.

Разложение вектора $\vec{a}$ в ортонормированном базисе $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ имеет вид $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, заданного координатами начала $A(x_1, y_1, z_1)$ и конца $B(x_2, y_2, z_2)$, определяются по формуле $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Модуль вектора $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ определяется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ можно определить как расстояние между точками начала $A(x_1, y_1, z_1)$ и конца $B(x_2, y_2, z_2)$ вектора, т. е. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т. е. $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi$.

Если $\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$ и $\vec{b} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}$, то скалярное произведение равно $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$.

Углом между двумя векторами, имеющими общее начало, называется кратчайший угол, на который нужно повернуть один из векторов вокруг своего начала до положения, когда он станет сонаправленным с другим вектором.

Используя формулы скалярного произведения векторов, можно получить формулу для вычисления *косинуса угла* между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}.$$

Осью l называется прямая с выбранным на ней направлением. Углом между вектором $\vec{a}$ и осью l понимают угол $(\vec{a}, l)$ между векторами $\vec{a}$ и единичным вектором этой оси. ***Проекция вектора*** $\vec{a}$ на ось ***l*** есть скалярная величина, равная произведению модуля вектора $\vec{a}$ на косинус угла между положительными направлениями оси и вектора, т. е. $\text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, l)$.

Три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, приведенных к общему началу, образуют так называемую **связку трех векторов** (**тройку векторов**). Тройка векторов называется **упорядоченной**, если в ней однозначно определен порядок векторов. Тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется **левой**, если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$, видимый с конца третьего вектора $\vec{c}$, осуществляется по ходу часовой стрелки (рис. 3.5). Тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется **правой**, если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$, видимый с конца третьего вектора $\vec{c}$, осуществляется против хода часовой стрелки (рис. 3.6).

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, удовлетворяющий следующим условиям: 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\sin\varphi \geq 0$; $0 \leq \varphi \leq \pi$; 2) вектор $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$; 3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

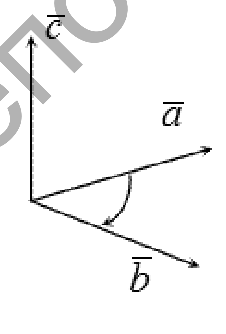

Рисунок 3.5 — Левая тройка векторов

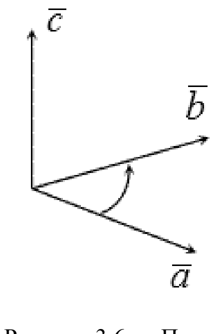

Рисунок 3.6 — Правая тройка векторов

Если $\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$ и $\vec{b} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}$, то векторное произведение вычисляется по формуле:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}.$$

Геометрически $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$ равен площади S параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. $S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$.

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на векторное произведение векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Если $\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$, $\vec{b} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}$ и $\vec{c} = x_c\vec{i} + y_c\vec{j} + z_c\vec{k}$, то смешанное произведение вычисляется по формуле:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}.$$

Модуль смешанного произведения трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, т. е. $V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$.

Координаты точки $M(x, y, z)$, которая делит отрезок AB, где $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, в соотношении k, считая от A, определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + k \cdot x_2}{1 + k}, \quad y = \frac{y_1 + k \cdot y_2}{1 + k}, \quad z = \frac{z_1 + k \cdot z_2}{1 + k}.$$

Координаты *середины отрезка* $(k = 1)$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Примеры решения практических задач

Пример 3.1. Найти расстояние между точками $M_1(0, -2, -3)$ и $M_2(-3, 2, 1)$.

Решение. Используя формулу

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

получим $M_1M_2 = \sqrt{(-3-0)^2 + (2+2)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{41}$.

Пример 3.2. Определить координаты точки C, делящей отрезок M_1M_2 в отношении 2 : 3, если $M_1(0, 2, -3)$ и $M_2(-3, 2, 3)$.

Решение. Координаты точки $M(x, y, z)$, которая делит отрезок AB в соотношении k, считая от A, определяются по формулам $x = \dfrac{x_1 + k \cdot x_2}{1+k}$, $y = \dfrac{y_1 + k \cdot y_2}{1+k}$, $z = \dfrac{z_1 + k \cdot z_2}{1+k}$. В нашем случае $\lambda = \dfrac{2}{3}$;

$$x = \frac{0 + {}^2\!/_3 \cdot (-3)}{1 + {}^2\!/_3} = -\frac{6}{5},\quad y = \frac{-2 + {}^2\!/_3 \cdot 2}{1 + {}^2\!/_3} = -\frac{2}{5},\quad z = \frac{-3 + {}^2\!/_3 \cdot 3}{1 + {}^2\!/_3} = -\frac{3}{5}.$$

Пример 3.3. Даны точки M_1 (0, –2, 1), M_2 (–3, 1, 2). Найти длину вектора $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

Решение. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (-3-0, 1+2, 2-1) = (-3, 3, 1)$.

Следовательно, $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{9+9+1} = \sqrt{19}$.

Пример 3.4. Найти угол φ между векторами $\vec{a} = (1, -2, 2)$ и $\vec{b} = (0, -6, 8)$.

Решение. Для нахождения косинуса угла между векторами воспользуемся формулой $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, где $\vec{a} \cdot \vec{b}$ — скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

В нашем случае $\cos\varphi = \dfrac{1\cdot 0 + (-2)\cdot(-6) + 2\cdot 8}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}\cdot\sqrt{0^2 + (-6)^2 + 8^2}} =$

$= \dfrac{28}{30} = \dfrac{14}{15}$, тогда $\cos\varphi = \arccos\left(\dfrac{14}{15}\right)$.

Пример 3.5. Найти $\left(3\vec{a} + 2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$; $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Решение. Так как $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2 = 3^2$, $\vec{b}^{\,2} = |\vec{b}|^2 = 2^2$, $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \vec{b}\vec{a} = \vec{a}\vec{b} = 0$, тогда $\left(3\vec{a} + 2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = 3\vec{a}^{\,2} + 2\vec{b}\vec{a} + 3\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}^{\,2} =$ $= 3\cdot 3^2 + 2\cdot 2^2 = 35$.

Пример 3.6. При каком m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ ортогональны?

Решение. Найдем скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b} = m\cdot 2 + 2\cdot 3 +$ $+(-1)\cdot 4 = 2m + 6 - 4 = 2m + 2 = 0 \Rightarrow m = -1$.

Пример 3.7. Вычислить, какую работу производит сила $\vec{F} = (1,\ 4,\ -3)$, когда точка ее приложения перемещается из точки $A(3,\ 0,\ 3)$ в точку $B(-1,\ 2,\ 1)$.

Решение. Используем формулу для вычисления работы $A = \vec{F}\cdot\vec{S}$, где $\vec{S} = \overrightarrow{AB} = (-4,\ 2,\ -2)$ — вектор перемещения.

Тогда $A = \vec{F}\cdot\vec{S} = 1\cdot(-4) + 4\cdot 2 + (-3)\cdot(-2) = 10$.

Пример 3.8. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Решение.

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\cdot\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}\vec{k} =.$$

$$= 11\vec{i} - 13\vec{j} - 4\vec{k} = (11,\ -13,\ -4).$$

Пример 3.9. Проверить, компланарны ли векторы $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{c} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Решение. Найдем смешанное произведение векторов:

$$\vec{a}\overleftarrow{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}4 & -3 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ 5 & 3 & 4\end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}-(-3)\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 5 & 4\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ 5 & 3\end{vmatrix}=$$

$$=4\cdot 11+3\cdot 13+2\cdot(-4)=75.$$

Пример 3.10. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(1,-2,-3)$, $A_2(-3,1,1)$, $A_3(4,\ 3,-1)$, $A_4(0,1,1)$. Найти площадь грани $A_1A_2A_3$ и объем пирамиды.

Решение. Площадь грани $A_1A_2A_3$ найдем, используя геометрический смысл векторного произведения векторов: $S_{\Delta A_1A_2A_3}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|$, где $\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}$ — векторное произведение векторов.

Координаты векторов

$\overrightarrow{A_1A_2}=(-3-1,\ 1+2,\ 1+3)=(-4,3,4)$,

$\overrightarrow{A_1A_3}=(4-1,3+2,-1+3)=(3,5,2)$,

$\overrightarrow{A_1A_3}=(0-1,1+2,1+3)=(-1,\ 3,\ 4)$.

Тогда

$$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & 3 & 4\\ 3 & 5 & 2\end{vmatrix}=-14\vec{i}+20\vec{j}-29\vec{k}=(-14,\ 20,\ -29),$$

а затем $S_{\Delta A_1A_2A_3}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-14)^2+20^2+(-29)^2}=\dfrac{\sqrt{1437}}{2}$ ед^2.

Объем пирамиды найдем, используя геометрический смысл смешанного произведения векторов:

$$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\times\overrightarrow{A_1A_4}=\begin{vmatrix}-4 & 3 & 4\\ 3 & 5 & 2\\ -1 & 3 & 4\end{vmatrix}=-42,$$

следовательно, $V_{\text{пир}}=\dfrac{1}{6}\left|-42\right|=7.$ ед^3.

Задания для аудиторной работы

3.1. По данным векторам a и b построить следующие их линейные комбинации: $\vec{a}-\vec{b}$; $2\vec{a}+3\vec{b}$; $-\vec{a}-\dfrac{\vec{b}}{2}$.

3.2. Векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b},\overrightarrow{CA}=\vec{c}$ служат сторонами треугольника ABC. Выразить через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$, совпадающие с медианами треугольника ABC.

3.3. Даны векторы $\vec{a}=(3,5,-2),\vec{b}=(-9,3,6)$. Найти координаты векторов $2\vec{a}-\vec{b};\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$.

3.4. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A=(2,1,-4)$, $B=(-4,6,4)$.

3.5. Найти модуль вектора $\vec{a}=(2,-3,7)$.

3.6. Найти модуль вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A=(3,5,4)$, $B=(5,8,3)$.

3.7. Найти расстояние между точками A и B, если $A=(2,-1,-6)$, $B=(-1,6,0)$.

3.8. Найти периметр треугольника ABC с вершинами в точках $A(-1, 1)$, $B(-4, 1)$, $C(-1, 5)$.

3.9. На оси Оy найти точку, одинаково удаленную от начала координат и от точки $M(4, 5)$.

3.10. На координатных осях найти точки, удаленные от точки $M(4, 3)$ на 5 единиц.

3.11. Отрезок, ограниченный точками $A(-1, 8, -3)$ и $B(9, -7, 2)$, разделен точками M_1, M_2, M_3 и M_4 на пять равных частей. Найти координаты точки M_3.

3.12. Определить координаты концов A и B отрезка, который точками $C(2, 0, 2)$ и $D(5, -2, 0)$ разделен на три равные части.

3.13. Даны вершины треугольника: $A(1, 4)$, $B(3, -9)$, $C(-5, 2)$. Найти длину медианы BM.

3.14. Даны вершины $A(1, -2)$, $B(3, 2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка пересечения его диагоналей $O(5, -1)$. Найти координаты остальных вершин параллелограмма.

3.15. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (3,\ 5,\ -2)$, $\vec{b} = (-1, 4, 6)$.

3.16. Найти проекцию вектора $\vec{a} = (1,\ 2,\ -2)$ на ось l, если угол между вектором и осью равен 60°.

3.17. Даны векторы $\vec{a} = (2,\ -3, 1)$, $\vec{b} = (-3, 1, 2)$, $\vec{c} = (1, 2, 3)$. Найти $\text{пр}_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$.

3.18. Найти проекцию вектора $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ на вектор $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$.

3.19. Найти скалярное произведение векторов: а) $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$; б) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

3.20. Найти косинус угла между векторами а) $\vec{a} = 8\vec{j} - 6\vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$; б) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

3.21. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: а) $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (-3, 4, 1)$; б) $\vec{a} = 3\vec{j} - 6\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j}$.

3.22. Векторы a и b образуют угол $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$, $|a| = 3$, $|b| = 4$. Вычислить: a^2; b^2; $(a+b)^2$; $(3a-2b)(a+2b)$.

3.23. При каком значении m векторы $\vec{a} = m\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - m\vec{k}$ ортогональны?

3.24. При каком значении m векторы $\vec{a} = m\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$ и $\vec{b} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ коллинеарны?

3.25. Даны вершины треугольника ABC: $A(-1,\ -2)$, $B(-3,\ 4)$, $C(3,\ 1)$. Вычислить: а) площадь треугольника; б) угол при вершине A.

3.26. Вычислить, какую работу производит сила $\vec{F} = (3, -5, 2)$, когда точка ее приложения перемещается из начала в конец вектора $\vec{S} = (2,\ -5,\ 7)$.

3.27. Даны три силы: $\vec{F_1} = (3,\ -4,\ 2)$, $\vec{F_1} = (2,\ 3, -5)$, $\vec{F_1} = (-3,\ -2,\ 4)$, приложенные к одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $A(5,\ 3,\ -7)$ в положение $B(4, -1, -4)$.

3.28. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\overline{b} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$.

3.29. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

3.30. Вычислить площадь треугольника *ABC*, если вершины треугольника находятся в точках $A(2;\, 4;\, 1)$, $B(-3;\, -2;\, 4)$, $C(4;\, 2;\, -3)$.

3.31. Сила $\vec{F} = (3, 2, -4)$ приложена к точке $A(2, -1, 1)$. Определить момент этой силы относительно начала координат.

3.32. Сила $\vec{F} = (2, 2, 9)$ приложена к точке $A(4, 2, -3)$. Определить величину момента этой силы относительно точки $B(2, 4, 0)$.

3.33. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Какую тройку векторов образуют векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$?

3.34. При каком значении m векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + m\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$ будут компланарны?

3.35. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (3, -1, 0)$, $\vec{b} = (2, 3, 1)$, $\vec{c} = (-1, 4, 3)$.

3.36. Вершины пирамиды находятся в точках $A(3, 5, 4)$, $B(5, 8, 3)$, $C(1, 9, 9)$ и $D(6, 4, 8)$. Вычислить объем пирамиды *ABCD*.

3.37. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2, 3, 4)$, $B(4, 7, 3)$, $C(1, 2, 2)$ и $D(-2, 0, -1)$. Вычислить: а) площадь грани *ABC*; б) объем пирамиды *ABCD*.

3.38. Показать, что точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$ и $D(2, 1, 3)$ лежат в одной плоскости.

3.39. Доказать, что векторы $\vec{a} = (10, 7, 2)$, $\vec{b} = (9, 15, 3)$, $\vec{c} = (10, 10, 1)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d} = (32, 17, 0)$ в этом базисе.

3.40. Доказать, что векторы $\vec{a} = (1, 3, 6)$, $\vec{b} = (2, 3, 1)$, $\vec{c} = (-1, 4, 3)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d} = (2, 3, 7)$ в этом базисе.

Задания для самостоятельной работы

1. По заданным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ найти: а) скалярное произведение векторов; б) векторное произведение векторов; в) угол между векторами:

1) $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$;

2) $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - 6\vec{j} - +3\vec{k}$;

3) $\vec{a} = 2\vec{j} + 4\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}$;

4) $\vec{a} = 6\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(-1, 2, 4)$, $B(0, -4, 8)$, $C(-5, 0, 4)$ и $D(7, 2, 0)$. Вычислить: а) площадь указанной грани; б) объем пирамиды $ABCD$: 1) ABC; 2) ACD; 3) CBD; 4) ABD.

3. Вычислить, какую работу производит сила $\vec{F}$, когда точка ее приложения перемещается из точки A в точку B:

1) $\vec{F} = (-1,\ 4,\ -5)$, $A(5, 3, 8)$, $B(-1, 6, 1)$;

2) $\vec{F} = (5,\ 3,\ -7)$, $A(-2, 1, 4)$, $B(3, 2, -4)$;

3) $\vec{F} = (-6, 1, 0)$, $A(-1, 2, 1)$, $B(-7, 5, 2)$;

4) $\vec{F} = (1,\ -4,\ 3)$, $A(2, -3, 4)$, $B(7, -3, 5)$.

4. Доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе:

1) $\vec{a} = (3,\ -1, 2)$, $\vec{b} = (-2, 3, 1)$, $\vec{c} = (4,\ -5,\ -3)$, $\vec{d} = (-3, 2, -3)$;

2) $\vec{a} = (5, 3, 1)$, $\vec{b} = (-1, 2, -3)$, $\vec{c} = (3,\ -4,\ 2)$, $\vec{d} = (-9,\ 34,\ -20)$;

3) $\vec{a} = (1,\ -3,\ 1)$, $\vec{b} = (-2, -4, 3)$, $\vec{c} = (0,\ -2,\ 3)$, $\vec{d} = (-8, -10, 13)$;

4) $\vec{a} = (3,\ 2,\ -4)$, $\vec{b} = (3, 2, -4)$, $\vec{c} = (-2,\ -7,\ 1)$, $\vec{d} = (6,\ 20,\ -3)$.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение геометрического вектора.
2. Как найти модуль вектора?
3. Как найти расстояние между двумя точками, заданными своими координатами?
4. Какие векторы называются коллинеарными, компланарными?

5. Какие операции над векторами называются линейными? Как определяются эти операции и каковы их свойства?

6. Выведите формулы определения координат точки, которая делит отрезок AB в данном отношении k.

7. Как найти координаты середины отрезка?

8. Что называется линейной комбинацией векторов?

9. При каком условии векторы назваются линейно зависимыми (линейно независимыми)?

10. Что называется векторным базисом на плоскости?

11. Что называется векторным базисом в пространстве?

12. Какой базис называется ортонормированным?

13. Что называется скалярным произведением двух векторов? Сформулируйте свойства скалярного произведения двух векторов.

14. Сформулируйте условие перпендикулярности двух векторов.

15. Сформулируйте условие коллинеарности двух векторов.

16. Какая тройка векторов называется правой (левой)?

17. Сформулируйте определение векторного произведения двух векторов.

18. Как векторное произведение двух векторов выражается через их координаты?

19. Сформулируйте свойства векторного произведения двух векторов.

20. Что называется смешанным произведением трех векторов? Каковы его свойства и как смешанное произведение выражается через координаты векторов?

4 УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

Основные теоретические сведения

Нормальный вектор $\vec{n}$ прямой l — это любой ненулевой вектор, лежащий на любой прямой, перпендикулярной прямой l.

Направляющий вектор $\vec{a}$ прямой l — это любой ненулевой вектор, лежащий на прямой l или на параллельной ей прямой.

Общее уравнение прямой на плоскости имеет вид

$$Ax + By + C = 0,$$

где $\vec{n} = (A, B)$ — нормальный вектор прямой.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ с нормальным вектором $\vec{n} = (A, B)$, имеет вид: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Каноническое уравнение прямой на плоскости:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n},$$

где $M_0(x_0, y_0)$ — точка, принадлежащая прямой;

$\vec{a} = (m, n)$ — направляющий вектор прямой.

Параметрическое уравнение прямой на плоскости:

$$\begin{cases} x = x_0 + nt, \\ y = y_0 + mt, \end{cases}$$

где t — параметр ($t \in R$).

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b,$$

где k — угловой коэффициент ($k = \mathrm{tg}\,\alpha$, α — угол наклона прямой к положительному направлению оси Ox);

b — величина отрезка (с учетом знака), отсекаемого прямой на оси Oy.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ с угловым коэффициентом k: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_1(x_2, y_2)$: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Заметим, что в случае $y_2 - y_1 = 0$ уравнение принимает следующий вид: $y - y_1 = 0$. Аналогично, если $x_2 - x_1 = 0$, уравнение прямой записывается $x - x_1 = 0$.

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$, определяется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Косинус острого угла φ между прямыми $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Тангенс острого угла φ между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ определяется по формуле

$$\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|.$$

Из формулы следует, что прямые l_1 и l_2 параллельны, если $k_1 = k_2$, и прямые l_1 и l_2 перпендикулярны, если $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

Примеры решения практических задач

Пример 4.1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3,-2)$:

а) перпендикулярно вектору $\vec{a}=(-1,6)$;

б) параллельно вектору $\vec{a}=(7,3)$;

в) образующей с положительным направлением оси Ox угол 45°.

Решение. А) воспользуемся уравнением $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

Вектор $\vec{a}=(-1,6)=(A,B)$ — нормальный вектор прямой, точка $A(3,-2)=(x_0,y_0)$.

Подставим в уравнение: $-1\cdot(x-3)+6\cdot(y+2)=0$.

Получим: $-x+3+6y+12=0 \Leftrightarrow -x+6y+15=0 \Leftrightarrow x-6y-15=0.$

Б) воспользуемся каноническим уравнением прямой $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$.

Вектор $\vec{a}=(-1,6)=(m,n)$ — направляющий вектор прямой, точка $A(3,-2)=(x_0,y_0)$.

Подставим в уравнение: $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+2}{6} \Leftrightarrow 6\cdot(x-3)-$ $-1\cdot(y+2)=0 \Leftrightarrow 6x-y-20=0$.

В) Уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(3,-2)=(x_0,y_0)$ с угловым коэффициентом $k=\operatorname{tg}45°=1$, примет вид: $y+2=1\cdot(x-3) \Leftrightarrow y=x-5$ или $x-y-5=0$.

Пример 4.2. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(-2,3)$ и $B(1,2)$.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$, имеет вид: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

В нашем случае $A(-2,3)=(x_1,y_1)$ и $B(1,2)=(x_2,y_2)$. Тогда $\frac{x+2}{1+2}=\frac{y-3}{2-3} \Leftrightarrow \frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{-1} \Leftrightarrow 3(y-3)=-(x+2) \Leftrightarrow x+3y-7=0$.

Пример 4.3. Даны вершины треугольника: $A(-3,-3)$, $B(2,7)$ и $C(5,1)$. Построить уравнения сторон треугольника ABC, определить угол BAC треугольника, найти уравнение медианы AK и высоты AM.

Решение. Чтобы построить уравнение стороны AB треугольника, используем уравнение прямой, проходящей через две точки $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Тогда уравнение стороны AB: $\frac{x+3}{2+3}=\frac{y+3}{7+3}$ или $y=2x+3$.

Аналогично, уравнение стороны AC: $\frac{x+3}{5+3}=\frac{y+3}{1+3}$ или $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$.

Уравнение стороны BC: $\frac{x-5}{2-5}=\frac{y-1}{7-1}$ или $y=-2x+11$.

Тангенс угла BAC треугольника найдем по формуле: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}$.

В нашем случае $k_1=2$, $k_2=\frac{1}{2}$.

Следовательно, $\operatorname{tg}A=\dfrac{2-\frac{1}{2}}{1+2\cdot\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$. Тогда угол $A=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

Построим уравнение медианы AK. Для этого найдем координаты точки K — середины отрезка BC (так как AK — медиана), следовательно,

$$x_K=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{2+5}{2}=\frac{7}{2},\ y_K=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{7+1}{2}=4.$$

Уравнение медианы AK: $\frac{x+3}{\frac{7}{2}+3}=\frac{y+3}{4+3}=4$ или $y=\frac{14}{13}x+\frac{3}{13}$.

Построим уравнение высоты AM, опущенной из вершины $A(-3,\ -3)$ на сторону BC, уравнение которой $y=-2x+11$:

$y+3=k(x+3)$, где $k=-\frac{1}{k_{BC}}=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}$ (так как $AM\perp BC$).

Следовательно, уравнение высоты AM примет вид: $y+3=\frac{1}{2}\cdot(x+3)$ или $x-2y-3=0$.

Задания для аудиторной работы

4.1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,2)$ перпендикулярно вектору $\vec{a}=(1,3)$.

4.2. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат параллельно вектору $\vec{a}=(-3,4)$.

4.3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-5,2)$ и образующей с положительным направлением оси Ox угол 30°.

4.4. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(-5,2)$ и $B(1,7)$.

4.5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3,\ 4)$ и отсекающей на оси Oy отрезок $b=2$.

4.6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3,-2)$ параллельно прямой $x-3y+6=0$.

4.7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,-6)$ параллельно прямой $y=3x-6$.

4.8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3,2)$ перпендикулярно прямой $4x+2y-5=0$.

4.9. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(1,\ 1)$, $B(7,\ 4)$, $C(4,\ 5)$. Составить уравнение высоты CK.

4.10. Найти угол между прямыми: а) $8x+6y-7=0$ и $3x-4y+1=0$; б) $y=3x-6$ и $y=4x-3$.

4.11. Составить уравнения сторон треугольника, вершинами которого являются точки $A(-2,\ 0)$, $B(2,\ -1)$, $C(-7,\ 3)$.

4.12. Даны вершины треугольника: $A(-2,\ 1)$, $B(4,\ -3)$, $C(-3,\ 5)$. Составить уравнение медианы, проведенной из вершины C.

4.13. При каком значении k прямая $y = kx + 9$ проходит через точку пересечения прямых $x - y + 5 = 0$ и $x + 2y + 2 = 0$.

4.14. Найти расстояние от точки $A(-2,1)$ до прямой $3x - 4y + 8 = 0$.

4.15. Найти длину высоты BH треугольника с вершинами в точках $A(2,0)$, $B(1,8)$, $C(-1,-3)$.

4.16. На прямой $2x + y - 4 = 0$ найти точку, равноудаленную от точек $A(3,5)$ и $B(7,1)$.

4.17. Найти проекцию точки $A(-2,1)$ на прямую $3x + y + 1 = 0$.

4.18. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3,-5)$ и отсекающей на осях координат отрезки одинаковой длины.

4.19. Составить уравнения прямых, параллельных прямой $3x-4y-10=0$ и отстоящих от неё на расстоянии $d = 3$.

4.20. Построить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,5)$ и равноудаленной от точек $M(-1,2)$ и $N(5,4)$.

4.21. Найти площадь квадрата, если две его стороны лежат на прямых $2x+3y+5=0$ и $6x-9y-7=0$.

4.22. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(4,-3)$ и образующей с осями координат треугольник, площадь которого равна 3.

4.23. Найти координаты точки, симметричной точке $M(2,1)$ относительно прямой $x - 2y + 1 = 0$.

4.24. Составить уравнение прямой, симметричной прямой $3x-2y+1=0$ относительно точки $M(5,1)$.

4.25. Составить уравнения биссектрис углов между прямыми $3x-4y+7=0$ и $5x+12y-1=0$.

Задания для самостоятельной работы

1. Даны вершины треугольника ABC. 1) $A(–2, 4)$, $B(4, 1)$, $C(10, 7)$; 2) $A(–3, –2)$, $B(14, 4)$, $C(6, –8)$; 3) $A(1, 7)$, $B(–3, –1)$, $C(11, –7)$; 4) $A(1, 0)$, $B(–1,4)$, $C(9, –8)$.

Найти: а) уравнение стороны AB; б) уравнение высоты CH; в) уравнение медианы AM; г) длину высоты CH; д) площадь треугольника ABC.

Вопросы для самоконтроля

1. Выведите общее уравнение прямой на плоскости с нормальным вектором $\vec{n}$.
2. Выведите из общего уравнения прямой уравнение с угловым коэффициентом k.
3. Выведите каноническое уравнение прямой на плоскости с направляющим вектором $\vec{a}$.
4. Выведите параметрическое уравнение прямой на плоскости с направляющим вектором $\vec{a}$.
5. Выведите уравнение прямой на плоскости, проходящей через две заданные точки.
6. Напишите формулу определения тангенса угла между прямыми.
7. Выведите формулу для вычисления расстояния от точки до прямой.
8. Сформулируйте условия пересечения, параллельности и перпендикулярности прямых.

5 ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Основные теоретические сведения

Нормальный вектор $\vec{n}$ ***плоскости*** α — это любой ненулевой вектор, лежащий на прямой, перпендикулярной к данной плоскости α.

Общее уравнение плоскости в пространстве имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где $\vec{n} = \left(A, B, C\right)$ — нормальный вектор плоскости.

При этом уравнение плоскости α, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с нормальным вектором $\vec{n} = (A, B, C)$, имеет вид $A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) + C\left(z - z_0\right) = 0$.

Каноническое уравнение прямой в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка, принадлежащая прямой;

$\vec{a} = (m, n, p)$ — направляющий вектор прямой.

Параметрическое уравнение прямой в пространстве:

$$\begin{cases} x = x_0 + nt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

где t — параметр ($t \in R$).

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$ и $M_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение прямой l, заданной пересечением плоскостей α_1 и α_2:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Направляющий вектор $\vec{a} = (m, n, p)$ прямой l, заданной пересечением плоскостей α_1 и α_2:

$$\vec{a} = (m, n, p) = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Расстояние *d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости* $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Расстояние *d от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой* $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ определяется по формуле

$$d = \frac{\left|\vec{a} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right|}{|\vec{a}|}.$$

Косинус острого угла φ между плоскостями, заданными уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Синус острого угла φ между плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ и прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ определяется по формуле

$$\sin\varphi = \frac{\left|Am + Bn + Cp\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Примеры решения практических задач

Пример 5.1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3, -2, 1)$ перпендикулярно вектору $\vec{a} = (1,\ 6, -5)$.

Решение. Воспользуемся уравнением плоскости $A(x - x_0) + {}$ $+B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, где вектор $\vec{a} = (1, 6, -5) = (A, B, C)$ — нормальный вектор плоскости, точка $A(3,\ -2, 1) = (x_0, y_0,\ z_0)$.

Подставим в уравнение: $1 \cdot (x - 3) + 6 \cdot (y + 2) - 5(z - 1) = 0$, $x - 3 + 6y + 12 - 5z + 5 = 0 \Leftrightarrow x + 6y - 5z + 14 = 0$.

Пример 5.2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3,\ -2,\ 1)$ параллельно вектору $\vec{a} = (7,\ 3,\ -2)$.

Решение. Воспользуемся каноническим уравнением прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$.

Вектор $\vec{a} = (7,\ 3,\ -2) = (m,\ n,\ p)$ — направляющий вектор прямой, точка $A(3,\ -2, 1) = (x_0,\ y_0,\ z_0)$.

Подставим в уравнение: $\dfrac{x-3}{7}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$.

Пример 5.3. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(-2, 3, 0)$ и $B(1, 2, -4)$.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, имеет вид: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

В нашем случае $A(-2, 3, 0)=(x_1, y_1, z_1)$ и $B(1, 2, -4)=(x_2, y_2, z_2)$.

Тогда $\dfrac{x+2}{1+2}=\dfrac{y-3}{2-3}=\dfrac{z-0}{-4-0} \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z}{-4}$.

Пример 5.4. Даны координаты вершин пирамиды: $A_1(1, -2, -3)$, $A_2(-3, 1, 1)$, $A_3(4, 3, -1)$, $A_4(3, 2, 2)$. Составить: а) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; б) уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Решение. А) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ построим, используя уравнение плоскости, проходящей через три данные точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Подставив координаты точек A_1, A_2 и A_3, получим:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+3 \\ -3-1 & 1+2 & 1+3 \\ 4-1 & 3+2 & -1+3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+3 \\ -4 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}=0.$$

Разложив последний определитель по элементам первой строки, имеем: $(x-1)(-14)-(y+2)(-20)+(z+3)(-29)=0$ или $14x-20y+29z+33=0$.

Б) уравнение высоты пирамиды построим, используя уравнение прямой, проходящей через заданную точку A_4 с известным направляющим вектором $\vec{a}$. За направляющий вектор $\vec{a}=(m, n, p)$

прямой возьмем нормальный вектор плоскости $A_1A_2A_3$, т. е. $\vec{a} = (14, -20, 29)$. Тогда уравнение высоты имеет вид $\dfrac{x-3}{14} = \dfrac{y-2}{-20} = \dfrac{z-2}{29}$.

Пример 5.5. Найти расстояние d от точки $M(2, -1, 3)$ до прямой $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-1}{5}$.

Решение. Найдем расстояние d по формуле $d = \dfrac{\left|\vec{a} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right|}{|\vec{a}|}$.

$\overrightarrow{M_0M_1} = (-1-2; -2+1;\ 1-3) = (-3, -1, -2)$.

Тогда $\vec{a} \times \overrightarrow{M_0M_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 5 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 9\vec{j} + 9\vec{k} = 3(-\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k})$.

$\left|\vec{a} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right| = 3\sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{19}$, $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$.

Отсюда $d = \dfrac{\left|\vec{a} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right|}{|\vec{a}|} = \dfrac{3\sqrt{19}}{5\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{38}}{10}$.

Задания для аудиторной работы

5.1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4, -3, 1)$ перпендикулярно вектору $\vec{a} = (2, -1, 3)$.

5.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка M_1M_2 перпендикулярно к этому отрезку, если $M_1(-1, 4, -6)$, $M_2(-3, 8, 2)$.

5.3. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-3, -1, 0)$ и параллельно плоскости $2x + 2y - 6z - 3 = 0$.

5.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3, 5, 4)$, $B(5, 8, 3)$, $C(1, 9, 9)$.

5.5. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(4, -6, 5)$ параллельно плоскости, проходящей через три точки $A(3, -2, 2)$, $B(-3, 1, 2)$ и $C(-1, 2, 1)$.

5.6. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2, -3, -4)$ и отсекает на осях координат отличные от нуля отрезки одинаковой величины.

5.7. Найти расстояние от точки $A(1, 2, -1)$ до плоскости $5x - y + 4z - 3 = 0$.

5.8. Найти острый угол между плоскостями $3x - 2y - 2z + 6 = 0$ и $2x - y + 2z - 5 = 0$.

5.9. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(3, 4, -1)$ параллельно вектору $\vec{a}=(2, 5, -3)$.

5.10. Составить уравнение прямой *AB*, если $A(0, 1, 3)$ и $B(-2, 3, 1)$.

5.11. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2, 6, 2)$ перпендикулярно плоскости $3x - 2y - 2z + 6 = 0$.

5.12. Найти угол между прямыми $\frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+2}{2}$ и $\frac{x-2}{3} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z+3}{2}$.

5.13. Составить каноническое уравнение прямой, заданной пересечением плоскостей $2x - 3y + 2z - 6 = 0$, $3x + y - 4z - 4 = 0$.

5.14. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{4}$ и плоскости $x - 2y - 2z + 8 = 0$.

5.15. Показать, что прямая $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$ лежит в плоскости $x + 2y - 4z + 1 = 0$.

5.16. Дана треугольная пирамида с вершинами $A(1, 1, 1)$, $B(-11, 3, -3)$, $C(5, 2, 4)$, $D(2, 2, -5)$. Вычислить длину высоты, проведенной из вершины *D* к грани *ABC*.

5.17. На оси *Ox* найти точку, отстоящую от плоскости $6x + 2y + 3z - 12 = 0$ на расстоянии $d = 6$.

5.18. Найти проекцию точки $P(3,\ 1,\ -1)$ на плоскость $x+2y+3z-30=0$.

5.19. Найти проекцию точки $P(3,1,-1)$ на плоскость $3x+y+z-20=0$ и точку, симметричную точке P относительно плоскости.

5.20. Найти расстояние d от точки $M(1,\ -1,\ -2)$ до прямой $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-8}{-2}$.

5.21. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4,\ -3,\ 1)$ параллельно прямым $\dfrac{x}{6}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+2}{-3}$ и $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-2}{2}$.

5.22. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3,1,-2)$ и прямую $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$.

5.23. Записать уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$ и $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{-2}$.

5.24. Построить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,3,1)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$.

5.25. Найти угол между прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z+1}{3}$ и плоскостью, проходящей через точки $A(-1,2,0)$, $B(6,3,1)$ и $C(-15,0,2)$.

Задания для самостоятельной работы

1. Даны вершины треугольной пирамиды $ABCD$. Найти: а) уравнение указанной грани пирамиды; б) уравнение указанного ребра; в) длину указанной высоты; г) объем треугольной пирамиды $ABCD$.

1) $A(-2,4,2)$, $B(3,1,6)$, $C(10,7,-2)$, $D(-1,-3,-4)$; а) ABC; б) BD; в) DH;

2) $A(-3, -2, -1)$, $B(14, 4, 0)$, $C(6, 8, 4)$, $D(-1, 0, 8)$; а) ABD; б) AC; в) CH;

3) $A(1, 7, -3)$, $B(-3, -1, -2)$, $C(11, -3, 2)$, $D(1, 0, 0)$; а) ACD; б) AD; в) BH;

4) $A(1, -5, 0)$, $B(7, 1, 8)$, $C(3, 7, -5)$, $D(-2, -8, 6)$; а) BCD; б) BC; в) AH.

Вопросы для самоконтроля

1. Выведите общее уравнение плоскости в пространстве с нормальным вектором $\vec{n}$.
2. Выведите уравнение плоскости в пространстве, проходящей через три точки.
3. Выведите формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости.
4. По какой формуле можно вычислить угол между двумя плоскостями?
5. Выведите каноническое уравнение прямой в пространстве с направляющим вектором $\vec{a}$.
6. Выведите параметрическое уравнение прямой в пространстве с направляющим вектором $\vec{a}$.
7. Выведите уравнение прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки.
8. Напишите формулу для вычисления косинуса угла между прямыми.
9. Напишите формулу для вычисления расстояния от точки до прямой в пространстве.
10. Напишите формулу для вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми в пространстве.
11. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве.
12. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности плоскостей в пространстве.
13. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.
14. По какой формуле можно вычислить угол между прямой и плоскостью?

6. ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Основные теоретические сведения

Если каждому элементу x числового множества X ($x \in X$) по вполне определенному правилу ставится в соответствие единственный элемент y числового множества Y $(y \in Y)$, то говорят, что на множестве X задана ***функция*** $y = f(x)$, где x называется независимой переменной или аргументом функции. При этом множество X называется ***областью определения*** функции (обозначение: $D(f)$), а множество Y — ***областью значений*** функции (обозначение: $E(f)$).

Графиком функции называется множество всех точек $M(x, y)$ плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют функциональной зависимости $y = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется ***четной***, если: 1) для любого $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$, т. е. область определения функции — симметричное множество; 2) для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси Oy.

Функция $y = f(x)$ называется ***нечетной***, если: 1) для любого $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$; 2) для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция, которая не является ни четной и ни нечетной, называется функцией ***общего вида***.

Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей (убывающей)*** на интервале (a, b), если для любых значений $x_1 > x_2$, принадлежащих интервалу (a, b), выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ $\left(f(x_1) < f(x_2)\right)$. Функция $y = f(x)$ называется ***неубывающей***

(невозрастающей) на интервале (a, b), если для любых значений $x_1 > x_2$, принадлежащих интервалу (a, b), выполняется неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$ $(f(x_1) \leq f(x_2))$. Функция $y = f(x)$ называется постоянной на интервале (a, b), если для любого $x \in (a, b)$ выполняется $y = C = \text{const}$. Возрастающая, убывающая, невозрастающая, неубывающая, постоянная функции на интервале (a, b) называются ***монотонными***, возрастающая и убывающая — ***строго монотонными***.

Функция, заданная на множестве N натуральных чисел, называется ***числовой последовательностью*** и обозначается $\{x_n\}$, где x_n — общий член последовательности.

Число a называется ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, зависящее от ε ($N = N(\varepsilon)$), что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Последовательность, имеющая предел, называется ***сходящейся***, в противном случае — расходящейся.

Число A называется ***пределом*** функции $y = f(x)$ в точке x_0 (при $x \to x_0$), если для любого, сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\delta > 0$, зависящее от ε, такое что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности $(x_0 - \delta; x_0)$ $((x_0; x_0 + \delta))$, тогда если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, зависящее от ε, такое что для всех x, удовлетворяющих неравенству $x_0 - \delta < x < x_0$ ($x_0 < x < x_0 + \delta$), выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, то число A называется пределом функции $y = f(x)$ ***слева (справа)*** при $x \to x_0$. Обозначение левостороннего предела: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$, правостороннего — $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$. Левосторонний и правосторонний пределы называются ***односторонними***. Для существования предела функции $y = f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы оба односторонних предела в точке x_0 существовали и были равны, т. е. $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

Число A называется ***пределом*** функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого, сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует положительное число $M > 0$, зависящее от ε, такое что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > M$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = A$.

Если существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, то справедливы равенства:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x) \right) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$, где $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(k \cdot f(x) \right) = k \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, где $k = \text{const}$.

Функция $y = \alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** функцией при $x \to x_0$ (при $x \to \infty$), если $\lim\limits_{x \to x_0 (\infty)} \alpha(x) = 0$.

Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно большой*** функцией при $x \to x_0$ (при $x \to \infty$), если $\lim\limits_{x \to x_0 (\infty)} f(x) = \infty$.

При вычислении пределов используют следующие пределы:

1) ***первый замечательный предел*** (раскрывает неопределенность $\left(\dfrac{0}{0} \right)$): $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$;

2) ***второй замечательный предел*** (раскрывает неопределенность (1^{∞})): $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$ ($a>0, a\neq 1$). При $a=e$ предел имеет вид: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ ($a>0$). При $a=e$ предел имеет вид: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$.

Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если: 1) функция $y=f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности; 2) существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$; 3) этот предел равен значению функции в точке x_0, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке x_0 ***слева***, если существует левосторонний предел $f(x_0-0)$, причем этот предел равен значению функции в точке x_0, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)$. Аналогично, функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке x_0 ***справа***, если существует $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$.

Точка x_0, в которой нарушено хотя бы одно из условий непрерывности, называется ***точкой разрыва*** функции. Если существуют конечные односторонние пределы в точке x_0 и $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, но функция $y=f(x)$ не определена в точке x_0, или функция $y=f(x)$ определена в точке x_0, но

$f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$, то x_0 называется ***точкой устранимого разрыва***. Если существуют конечные односторонние пределы в точке x_0, такие что $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, то x_0 называется ***точкой разрыва первого рода***. Если хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0-0)$ или $f(x_0+0)$ в точке x_0 не существует или равен бесконечности, то x_0 называется ***точкой разрыва второго рода***.

Прямая l называется ***асимптотой*** графика функции $y=f(x)$, если расстояние от точки *M*, принадлежащей графику функции, до прямой l при неограниченном удалении точки *M* от начала координат стремится к нулю.

Если $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)=\pm\infty$, то прямая $x=a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$. Если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=A$, то прямая $y=A$ называется горизонтальной асимптотой графика функции $y=f(x)$. Прямая $y=kx+b$, где коэффициенты k и b вычисляются по формулам $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ и $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-k\cdot x\right)$, называется наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$.

Примеры решения практических задач

Пример 6.1. Доказать, что число $a=\frac{1}{2}$ является пределом последовательности $\left\{\frac{n+3}{2n+4}\right\}$ при $n\to\infty$.

Решение. Воспользуемся определением предела: число $a=\frac{1}{2}$ является пределом последовательности $\left\{\frac{n+3}{2n+4}\right\}$, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число

$N = N(\varepsilon)$, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $\left|\frac{n+3}{2n+4} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{n+3}{2n+4} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{n+3-(n+2)}{2(n+2)}\right| = \left|\frac{1}{2(n+2)}\right| = \frac{1}{2(n+2)} < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon} - 2.$$

Значит, неравенство $\left|\frac{n+3}{2n+4} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ выполняется при $n > \frac{1}{2\varepsilon} - 2$. Поэтому в качестве $N = N(\varepsilon)$ можно взять целую часть числа $\frac{1}{2\varepsilon} - 2$, т. е. $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2\varepsilon} - 2\right]$.

Итак, для для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число *N*, зависящее от ε, $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2\varepsilon} - 2\right]$, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $\left|\frac{n+3}{2n+4} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

Пример 6.2. Вычислить пределы последовательностей, заданных общим членом: а) $x_n = \frac{3n}{n+2}$; б) $x_n = \frac{4n^2}{5n+2}$; в) $x_n = n - \sqrt{n(n-4)}$.

Решение. А) имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{1+\frac{2}{n}} = \frac{3}{1+0} = 3.$$

Б) имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{5n+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{n^2\left(\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}=\left(\frac{4}{0+0}\right)=\infty.$$

В) имеем неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженный множитель:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n(n-4)}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n-\sqrt{n(n-4)}\right)\left(n+\sqrt{n(n-4)}\right)}{\left(n+\sqrt{n(n-4)}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n(n-4)}{n+\sqrt{n(n-4)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n+\sqrt{n(n-4)}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n+n\sqrt{1-\frac{4}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{4}{n}}}=\frac{4}{1+\sqrt{1-0}}=2\,.$$

Пример 6.3. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+5}{6x^5+3x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\cos^3 x-\cos x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{ctg}^2 x(\cos x-\cos^3 x)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\mathrm{tg}\, 5x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{5x+3}\right)^{2x}$.

Решение. А) имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5}{6x^5+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5\left(\frac{2}{x^3}+\frac{5}{x^5}\right)}{x^5\left(6+\frac{3}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^3}+\frac{5}{x^5}}{6+\frac{3}{x^4}}=\frac{0+0}{6+0}=0.$$

Б) имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$:

Разложим числитель и знаменатель дроби на множители.

Получим: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-2}{x+3}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}$;

В) имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\cos^3 x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x\left(\cos^2 x-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{\cos^2 x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{-\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{-\sin x}=\left(\frac{2}{0}\right)=\infty;$$

Г) так как $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}^2 x=\infty$, а $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-\cos^3 x)=0$, то имеет место неопределенность вида $(\infty\cdot 0)$.

Выполним преобразования:

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{ctg}^2 x(\cos x-\cos^3 x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}(\cos x-\cos^3 x)\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x\cdot\cos x(1-\cos^2 x)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3 x\cdot\sin^2 x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\cos^3 x=$$

$$=\cos^3 0=1.$$

Д) имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Воспользуемся первым замечательным пределом $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Получим: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg}5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x\big/2x\cdot 2x}{\sin 5x\big/5x\cdot\cos 5x\cdot 5x}=\frac{1\cdot 2}{\frac{1}{1}\cdot 5}=\frac{2}{5}$.

Е) имеем неопределенность вида (1^{∞}).

Воспользуемся вторым замечательным пределом $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$.

Получим: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{5x+3}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{5x+3}\right)^{\frac{5x+3}{1}}\right]^{\frac{1}{5x+3}\cdot 2x}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{5x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{5+\frac{3}{x}}}=e^{\frac{2}{5}}$.

Пример 6.4. Исследовать функцию на непрерывность. Найти точки разрыва функции и определить их тип.

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\le 0,\\ 1+2x, & 0<x<2,\\ x-2, & x\ge 2.\end{cases}$$

Решение. На каждом из промежутков $(-\infty,0)$, $(0,2)$ и $(2,+\infty)$ функция непрерывна, так как задается элементарными функциями, поэтому разрыв может быть только на концах промежутков, т. е. в точках $x=0$ и $x=2$.

Рассмотрим точку $x=0$. Значение функции в точке $f(0)=\left(x^2+1\right)\Big|_{x=0}=0^2+1=1$.

Вычислим односторонние пределы функции в этой точке $\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}\left(x^2+1\right)=1$, $\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}\left(1+2x\right)=1$ и равны значению функции в точке $f(0)$, в точке $x=0$ выполнены все условия непрерывности и $x=0$ — точка непрерывности функции.

Рассмотрим точку $x=2$. Значение функции в точке $f(2)=\left(x-2\right)\Big|_{x=2}=2-2=0$.

Вычислим односторонние пределы $\lim\limits_{x\to 2-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0}\left(1+2x\right)=5$, $\lim\limits_{x\to 2+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0}\left(x-2\right)=0$. Так как односторонние пределы конечны, но не равны, то $x = 2$ — точка разрыва первого рода функции $f(x)$.

Строим график функции (рис. 6.1).

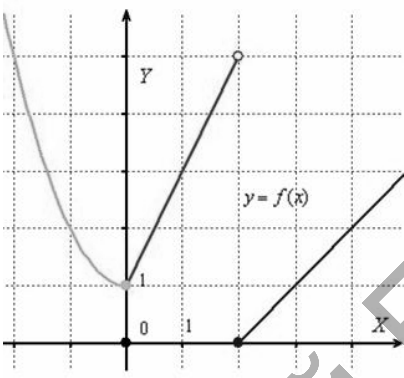

Рисунок 6.1 — График функции

Задания для аудиторной работы

6.1. Найти область определения функции:

а) $f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{7-x}$;

б) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x-3}} + \dfrac{1}{x-5}$;

в) $f(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-1}$;

г) $f(x) = \lg(5x - x^2 - 6)$;

д) $y = \ln\dfrac{x}{x^2-1}$.

6.2. Исследовать функцию на четность:

а) $y = \dfrac{2x}{x-4}$;

б) $y = \dfrac{3x}{x^2-16}$;

в) $y = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-1}$;

г) $y = \dfrac{1}{x} + 2x$;

д) $y = \dfrac{1}{x^3} + 6x - 4$.

6.3. Дана последовательность $\{x_n\}$. Найти первые m членов:

а) $\left\{\frac{n^2}{n+1}\right\}$, $m = 4$;

б) $\left\{\frac{n-3}{n+5}\right\}$, $m = 5$;

в) $\left\{\frac{(-1)^n}{n+1}\right\}$, $m = 6$;

г) $\{(-1)^n + 3\}$, $m = 5$;

д) $\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right\}$, $m = 6$.

6.4. Даны первые члены последовательности $\{x_n\}$. Записать общий член последовательности:

а) $\{x_n\} = 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$;

б) $\{x_n\} = \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$;

в) $\{x_n\} = \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \ldots$;

г) $\{x_n\} = -2, 4, -6, 8, -10, 12, \ldots$;

д) $\{x_n\} = 3, 6, 11, 18, 27$;

е) $\{x_n\} = 4, 6, 4, 6, 4, \ldots$;

ж) $\{x_n\} = 6, 10, 14, 18, \ldots$;

з) $\{x_n\} = 1\frac{2}{3}, 2, 2\frac{1}{3}, 2\frac{2}{3}, 3, \ldots$.

6.5. Доказать, что число $a = 0$ является пределом последовательности $\left\{\frac{1}{2n+4}\right\}$ при $n \to \infty$. Начиная с какого n абсолютная величина разности между x_n и 1 не превосходит 0,001?

6.6. Доказать, что число $a = 1$ является пределом последовательности $\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\}$ при $n \to \infty$. Начиная с какого n абсолютная величина разности между x_n и 1 не превосходит 0,0001?

6.7. Вычислить пределы последовательностей, заданных общим членом:

а) $x_n = \frac{4n}{3n+2}$;

б) $x_n = \frac{4n^3}{2n^2+3n-2}$;

в) $x_n = \frac{5n^2+3}{6n^2+3n^4-1}$;

г) $x_n = \frac{2(n-1)(n+6)}{(n+7)(3n+4)}$;

д) $x_n = n - \sqrt{n+3}$;

е) $x_n = n - \sqrt{n(n-2)}$;

ж) $x_n=\left(\dfrac{n+3}{2n}\right)^{5n}$;

з) $x_n=\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{3n}$;

и) $x_n=\left(\dfrac{n+2}{n+6}\right)^{n+3}$;

к) $x_n=\left(\dfrac{2n+3}{2n}\right)^{5n}$.

6.8. Найти пределы функции:

а) $\lim\limits_{x\to 2}(7x^2-5x+3)$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{4x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3+x}{x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-8x+7}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x+3}{x^2-3x-1}$;

е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}$;

з) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$;

и) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;

к) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}$;

л) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+6x-3}{9x^3+8x^2-2}$.

6.9. Найти пределы функции, используя замечательные пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{2x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{4\operatorname{tg}x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(2x-2)}{x^2-7x+6}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{4x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 7x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$;

з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+8}\right)^{5x}$;

и) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$;

к) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-2}\right)^{4x+3}$.

6.10. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{3x^2-2x-8}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-4x^2+2}{x^3+3x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{\sqrt{2x-2}-\sqrt{7-x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{3x-6}\right)^{-x+4}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+6}{3x+1}\right)^{-8x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x-\sin 9x}{tg\,2x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{\cos 4x-1}$.

6.11. Исследовать функцию на непрерывность в указанных точках:

а) $f(x)=\dfrac{3}{x-2},\ x_1=0,\ x_2=2$;

б) $f(x)=\dfrac{3-x}{x+1},\ x_1=-1,\ x_2=2$;

в) $f(x)=3^{2/x-4},\ x_1=2,\ x_2=4$;

г) $f(x)=9^{x+3/x+2},\ x_1=-2,\ x_2=0$.

6.12. Исследовать данную функцию на непрерывность и построить ее график:

а) $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ x^2+1, & 0<x<1,\\ 2, & x\ge 1;\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 0,\\ -\sqrt{x}, & 0<x\le 4,\\ (x-4)^2, & x>4;\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}-3x, & x<0,\\ \sin x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2},\\ 4, & x\ge 2.\end{cases}$

г) $y=\dfrac{|x+5|}{x+5}-\dfrac{5}{x}$;

д) $y=\dfrac{|x-2|}{x-2}+\dfrac{2}{x}$;

е) $y=\dfrac{|x+3|}{x+3}-\dfrac{3}{x}$;

ж) $y=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x<0,\\ \sqrt{1-x^2}, & 0\le x\le 1,\\ \dfrac{1}{x-1}, & x>1;\end{cases}$

з) $y=\begin{cases} -\dfrac{1}{x+3}, x<-3, \\ \sqrt{9-x^2}, -3\le x\le 0, \\ \dfrac{3|x|}{x}, \quad x>0; \end{cases}$

и) $y=\begin{cases} -\dfrac{1}{x+2}, x<-2, \\ -\sqrt{4-x^2}, -2\le x\le 2, \\ \dfrac{|x-2|}{x-2}, \quad x>2. \end{cases}$

6.13. Найти асимптоты графика функции (построить схематичный чертеж):

а) $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$;

б) $f(x)=\dfrac{3x}{2x-4}$;

в) $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$;

г) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$;

д) $f(x)=\dfrac{16}{x^2-4}$;

е) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-9}$;

ж) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+2}$;

з) $f(x)=\dfrac{4+2x-x^2}{x}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Найти указанные пределы:

1) а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$;

2) а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+4}{x^2-5x+6}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$;

3) а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}$;

4) а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+4x-1}{3x^2+x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x^2+4}{2x^3+5}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$.

2. Исследовать данную функцию на непрерывность и построить ее график:

1) $f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1, \\ x^2+2, & -1\le x<1, \\ 2x, & x\ge 1; \end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0, \\ (x+1)^2, & 0<x\le 2, \\ 2x, & x>2; \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -1, \\ x^2+1, & -1<x\le 1, \\ -x+3, & x>1; \end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0, \\ x^2, & 0<x\le 2, \\ 2x, & x>2. \end{cases}$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение функции.
2. Что называется областью определения и областью значений функции?
3. Каковы основные способы задания функции? Приведите примеры.
4. Какая функция называется четной, нечетной? Приведите примеры.
5. Какая функция называется возрастающей (убывающей) на промежутке?
6. Какая функция называется периодической? Приведите примеры.
7. Какие функции называются элементарными? Перечислите основные элементарные функции.
8. Какая функция называется сложной?
9. Сформулируйте определение числовой последовательности.
10. Сформулируйте определение предела числовой последовательности.
11. Сформулируйте определение предела функции в точке и на бесконечности.
12. Какая функция называется бесконечно малой и каковы ее основные свойства?

13. Какая функция называется бесконечно большой и какова ее связь с бесконечно малой?
14. Сформулируйте основные теоремы о пределах функций.
15. Какой предел называется первым замечательным пределом?
16. Какой предел называется вторым замечательным пределом?
17. Сформулируйте определение непрерывности функции в точке.
18. Сформулируйте свойства функций, непрерывных в точке и на отрезке.
19. Какие точки называются точками разрыва функции?
20. Дайте определение точки разрыва первого рода.
21. Какую точку x_0 называют точкой устранимого разрыва?
22. Дайте определение точки разрыва второго рода.

7 ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Основные теоретические сведения

Производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ называется конечный предел отношения приращения функции $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ в этой точке к приращению аргумента $\Delta x = x - x_0$ при условии, что $\Delta x \to 0$, т. е. $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала (a, b), называется дифференцируемой в этом интервале. Операция нахождения производной называется ***дифференцированием***.

Геометрический смысл производной: производная $f'(x_0)$ равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$, т. е. $f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi = k$. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$ имеет вид $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Прямая, перпендикулярная касательной к графику функции $y = f(x)$ и проходящая через точку касания $M(x_0, f(x_0))$, называется ***нормалью.*** Уравнение нормали, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$, имеет вид $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ (при условии, что $f'(x_0) \neq 0$).

Механический смысл производной: пусть материальная точка движется прямолинейно и функция $S = S(t)$ выражает путь, пройденный точкой за время t (закон движения точки), тогда производная функции $S'(t_0)$ равна мгновенной скорости материальной точки в момент времени $t = t_0$, т. е. $V(t_0) = S'(t_0)$.

Основные правила дифференцирования: если $u = u(x)$, $v = v(x)$ функции, дифференцируемые в некотором интервале (a, b), тогда 1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$; 2) $(u \cdot v)' = u'v + v'u$; 3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$; 4) $(C \cdot u)' = C \cdot u'$, где $C = \text{const}$.

Производные основных элементарных функций:

1) $C' = 0$, $C = \text{const}$;
2) $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$;
3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;
4) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$;
5) $\left(e^x\right)' = e^x$;
6) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$;
7) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
8) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;
9) $(\sin x)' = \cos x$;
10) $(\cos x)' = -\sin x$;
11) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
12) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
13) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;
14) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;
15) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$;
16) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$.

Производная сложной функции: если функция $y = g(x)$ имеет производную $g'(x_0)$ в точке x_0, а $z = f(y)$ имеет производную $f'(y_0)$ в точке $y_0 = g(x_0)$, тогда сложная функция $y = f(g(x))$ от переменной x имеет прозводную в точке x_0, которая находится по формуле $z'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0)$.

Если функции $y = \varphi(t)$ и $x = \psi(t)$ имеют прозводную в точке t_0, тогда функция $y = f(x)$, заданная параметрически уравнениями $\begin{cases} x = \psi(t), \\ y = \varphi(t) \end{cases}$, имеет прозводную в точке $x_0 = \psi(t_0)$, которая находится по формуле $y'(x_0) = \dfrac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}$.

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция от переменной x и называется *производной первого порядка*. Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется *производной второго порядка* и обозначается y'' (или $f''(x)$). Производная от производной второго порядка называется *производной третьего порядка*: $(y'')' = y'''$. Производной n-го порядка (или n-й производной) называется производная от производной $(n-1)$-го порядка: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$. Производные порядка выше первого называются ***производными высших порядков***.

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x отличную от нуля производную, то ее приращение можно представить в следующем виде: $\Delta f(x) = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Слагаемое $f'(x)\cdot\Delta x$ называется главной частью приращения, или ***дифференциалом первого порядка функции*** $y = f(x)$: $dy = f'(x)\cdot\Delta x$. Так как $x' = 1$, то $dx = 1\cdot\Delta x = \Delta x$ — дифференциал независимой переменной. Тогда $dy = f'(x)\cdot dx$, т. е. *дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной*. Отсюда следует равенство $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ — *производная функции равна отношению дифференциалов функции и независимой переменной.*

Если в формуле $\Delta f(x) = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x$ вторым слагаемым пренебречь (так как $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$), то $\Delta f(x) \approx dy$ или

$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f\left(x_0\right)\approx f'(x_0)\cdot\Delta x \Rightarrow f\left(x_0+\Delta x\right)\approx f\left(x_0\right)+$
$+f'\left(x_0\right)\cdot\Delta x$.

Правило Лопиталя. Пусть функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, причем $\varphi'(x)\neq 0$ в окрестности точки x_0. Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. *Замечание:* правило Лопиталя справедливо и при $x\to\pm\infty$.

Примеры решения практических заданий

Пример 7.1. Пользуясь формулами дифференцирования, найти производные следующих функций:

а) $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$; б) $y=4\cos^3 x$; в) $y=e^{\sin(8x+3)}$.

Решение. А) по формуле производной частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ находим:

$$y'=\frac{(\cos x)'(1-\sin x)-\cos x\left(1-\sin x\right)'}{(1-\sin x)^2}=$$

$$\frac{-\sin x\left(1-\sin x\right)-\cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}=\frac{-\sin x+1}{(1-\sin x)^2}=\frac{1}{1-\sin x}.$$

Б) имеем сложную функцию $y=4\cos^3 x$,

$y'=4\cdot 3\cos^3 x\cdot(\cos x)'=12\cos^3 x\cdot(-\sin x)=-12\cos^3 x\cdot\sin x$;

В) имеем сложную функцию $y=e^{\sin(8x+3)}$,

$$y' = f'(u)\cdot u'(v)\cdot v'(x) = e^{\sin(8x+3)}\cdot\cos(8x+3)\cdot 8 = 8\cos(8x+3)e^{\sin(8x+3)}.$$

Пример 7.2. Найти производную функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = 3\cos t + \cos 3t; \\ y = 3\sin t + \sin 3t. \end{cases}$

Решение. Функция $\begin{cases} x = 3\cos t + \cos 3t, \\ y = 3\sin t + \sin 3t \end{cases}$ задана параметрически,

т. е. $\begin{cases} x = \psi(t), \\ y = \varphi(t). \end{cases}$

Находим производные $x'_t = \psi'(t)$ и $y'_t = \varphi'(t)$:

$$x' = -3\sin t - 3\sin 3t = -3(\sin t + \sin 3t) = -3\cdot 2\sin\frac{t+3t}{2}\cdot\cos\frac{t-3t}{2} =$$

$$= -6\sin 2t\cdot\cos t,$$

$$y'_t = 3\cos t + 3\cos 3t = 3(\cos t + \cos 3t) = 3\cdot 2\cos\frac{t+3t}{2}\cdot\cos\frac{t-3t}{2} =$$

$$= 6\cos 2t\cdot\cos t,$$

$$y' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{6\cos 2t\cdot\cos t}{-6\sin 2t\cdot\cos t} = -\mathrm{ctg}2t .$$

Пример 7.3. Найти производную функции, заданной неявно: $xy + y\sin x + e^y = 5$.

Решение. Дифференцируем обе части уравнения, учитывая, что x — переменная, а $y = f(x)$ — функция от переменной x:

$$\left(xy + y\sin x + e^y\right)' = 5',$$

$$\left(x'y + xy'\right) + \left(y'\sin x + y(\sin x)'\right) + e^y\cdot y' = 0,$$

$$y + xy' + y'\sin x + y\cdot\cos x + e^y\cdot y' = 0.$$

Выражаем из уравнения y':

$$y'\left(x+\sin x+e^y\right)=-\left(y+y\cos x\right) \Rightarrow y'=-\frac{y+y\cos x}{x+\sin x+e^y}.$$

Пример 7.4. Найти производную функции $y=\left(\sin 3x\right)^x$.

Решение. Применим метод логарифмического дифференцирования. Для этого логарифмируем обе части равенства по основанию e:

$$\ln y=\ln\left(\sin 3x\right)^x \Leftrightarrow \ln y=x\cdot\ln\left(\sin 3x\right).$$

Дифференцируем обе части полученного равенства, учитывая, что x — переменная, а $y=f\left(x\right)$ — функция от переменной x:

$$\left(\ln y\right)'=\left(x\cdot\ln\left(\sin 3x\right)\right)',$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=x'\cdot\ln\left(\sin 3x\right)+x\cdot\left(\ln\left(\sin 3x\right)\right)'=\ln\left(\sin 3x\right)+x\cdot\frac{1}{\sin 3x}\times$$
$$\times\cos 3x\cdot 3=\ln\left(\sin 3x\right)+3x\cdot\mathrm{ctg}3x.$$

Умножим обе части равенства на y: $y'=y\cdot\left(\ln\left(\sin 3x\right)+3x\cdot\mathrm{ctg}3x\right)$.

Подставим вместо $y=\left(\sin 3x\right)^x$: $y'=\left(\sin 3x\right)^x\cdot\left(\ln\left(\sin 3x\right)+3x\cdot\mathrm{ctg}3x\right)$.

Пример 7.5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=x^2-4x$ в точке с абсциссой $x=1$.

Решение. Уравнение касательной к кривой в точке $M(x_0,y_0)$ имеет вид: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

В нашем случае $x_0=1$, $f(x_0)=f(1)=1^2-4\cdot 1=-3$.

$f'(x)=2x-4$, тогда $f'(1)=\left(2x-4\right)\big|_{x=1}=2\cdot 1-4=-2$.

Подставляя значения $x_0=1$, $f(x_0)=-3$ и $f'(x_0)=-2$ в уравнение, получим: $y+3=-2(x-1)$ или $2x+y+1=0$.

Уравнение нормали имеет вид: $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

В нашем случае $y + 3 = \dfrac{1}{2}(x - 1)$ или $x - 2y - 7 = 0$.

Пример 7.6. Точка совершает прямолинейное колебательное движение по закону $S = A\sin\omega t$. Определить мгновенную скорость и ускорение движения точки в момент времени $t = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Решение. Мгновенная скорость материальной точки в момент времени $t = t_0$ равна:

$$V(t) = S'(t) = \left(A\sin\omega t\right)' = A\cdot\cos\omega t\cdot\omega = A\cdot\omega\cdot\cos\omega t,$$

$$V(t_0) = V\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = A\cdot\omega\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = A\cdot\omega\cdot\cos 2\pi = A\cdot\omega.$$

Ускорение материальной точки в момент времени $t = t_0$ равно:

$$a(t_0) = V'(t_0) = \left(A\cdot\omega\cdot\cos\omega\right)' = A\cdot\omega^2\cdot\sin\omega.$$

При $t = \dfrac{2\pi}{\omega}$ получаем

$$a(t_0) = a\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = A\cdot\omega^2\cdot\sin\left(\omega\cdot\frac{2\pi}{\omega}\right) = A\cdot\omega^2\cdot\sin 0 = 0.$$

Пример 7.7. Найти дифференциал функции $y = x^3 - 3^x$.

Решение. Дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной, т. е. $dy = f'(x)\cdot dx = \left(x^3 - 3^x\right)',\ dx = \left(3x^2 - 3^x\ln 3\right)dx.$

Пример 7.8. Найти пределы, пользуясь правилом Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+5}{x^4+16x+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\cdot e^{-x^2}$.

Решение. А) имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, значит, можно применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^4-16\right)'}{\left(x^3+5x^2-6x-16\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{4x^3}{3x^2+10x\ \ -6}=\frac{4\cdot 2^3}{3\cdot 2^2+10\cdot 2-6}=\frac{32}{26}=\frac{16}{13}.$$

Б) имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Применив правило Лопиталя дважды, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos ax)'}{(1-\cos bx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{a\sin ax}{b\sin bx}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(a\sin ax)'}{(b\sin bx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2\cos ax'}{b^2\cos bx'}=\frac{a^2}{b^2}.$$

В) имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, значит, можно применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-2x^2+5}{x^3+16x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^4-2x^2+5\right)'}{\left(x^3+16x+1\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-4x}{3x^2+16}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2-4}{6x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{24x}{6}=\lim_{x\to\infty}(4x)=\infty:$$

Г) имеем неопределенность вида $(\infty\cdot 0)$:

$$\lim_{x\to\infty}(x+1)\cdot e^{-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)}{e^{x^2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)'}{\left(e^{x^2}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x\cdot e^{x^2}}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0.$$

Пример 7.9. С помощью дифференциала вычислить приближенно $\sqrt[3]{27,3}$.

Решение. Для вычисления данного значения применим формулу $f\left(x_0+\Delta x\right)\approx f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\cdot\Delta x.$

Введем в рассмотрение функцию $f(x)=\sqrt[3]{x}$, значение которой необходимо вычислить в точке $x=27,3=27+0,3$. Пусть $x_0=27$, $\Delta x=0,3$.

Найдем значение функции и значение производной функции $f(x)=\sqrt[3]{x}$ в точке $x_0=27$: $f\left(x_0\right)=f(27)=\sqrt[3]{27}=3$,

$$f'(x)=\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\Rightarrow\quad f'\left(x_0\right)=f'(27)=\frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}=$$

$$=\frac{1}{3\cdot 9}=\frac{1}{27}.$$

Получим: $\sqrt[3]{27,3}\approx f(27)+f'(27)\cdot 0,3=3+\frac{1}{27}\cdot 0,3=3+\frac{1}{27}\cdot\frac{3}{10}=$

$$=3\frac{1}{90}\approx 3,0111.$$

Задания для аудиторной работы

7.1. Найти приращение функции $y = x^2 - 2x + 1$ в точке $x_0 = 1$ при приращениях аргумента $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta x = 0{,}02$.

7.2. Найти приращение функции $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ в точке $x_0 = 2$ при приращении аргумента $\Delta x = 0{,}01$.

7.3. Найти приращение функции $y = x^2 + 3x$ в точке x_0 при приращении аргумента Δx. Найти предел отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

7.4. Найти производную функции $y = \dfrac{x-1}{x+3}$ в точке x_0, воспользовавшись определением производной.

7.5. Найти производные функций:

а) $y = x^5 - 3x^3 + 4x - 6$;

б) $y = 2\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{x}$;

в) $y = 6x - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^4}$;

г) $y = x^6 + 6^x - \sin x$;

д) $y = e^{4x} - \sin 2x + \operatorname{tg} 4x$;

е) $y = (x^3 + 2x + 1)^5$;

ж) $y = \ln^2 3x$;

з) $y = \sin^3 x^2$;

и) $y = \arcsin(\ln x)$;

к) $y = \operatorname{tg}(x^2 + 3)$;

л) $y = x^2 \ln x$;

м) $y = 4^x \cdot x^3$;

н) $y = x^3 \cos 2x \cdot e^x$;

о) $y = \dfrac{\cos x}{3x^2}$;

п) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

р) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$.

7.6. Составить уравнение касательной и нормали к кривой в точке x_0:

а) $y = x^3 + 2x - 2$, $x_0 = 1$;

б) $y = 2x^2 + 3x - 1$, $x_0 = -2$;

в) $y = \sqrt{8 - x^2}$, $x_0 = 2$;

г) $y = x + \sqrt{x^3}$, $x_0 = 1$;

д) $y = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}$, $x_0 = 64$;

е) $y = \left(x^2 - 3x + 6\right)\big/x^2$, $x_0 = 3$.

7.7. Дано уравнение движения точки по оси Ox: $x = 100 + 5t - 0{,}001t^2$ (x измеряется в метрах, t — в секундах). Найти скорость и ускорение этой точки в моменты времени $t = 0$; 1; 10 с.

7.8. Найти пределы, пользуясь правилом Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-3x^2+2x}{4x^3-2x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x-\sin 5x}{4x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(x/3)}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3e^{-x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\sin x)}{\mathrm{tg}x}$;

з) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\mathrm{ctg}x$;

и) $\lim\limits_{x\to +0}(\mathrm{ctg})^{1/\ln x}$.

7.9. Найти производные функций, используя логарифмическое дифференцирование:

а) $y = x^{x^2}$;

б) $y = (x+1)^{\sin 2x}$;

в) $y = (\sin 2x)^{\mathrm{tg}x}$;

г) $y = (\mathrm{tg}x)^{x^4}$.

7.10. Найти производные функций, используя логарифмическое дифференцирование:

а) $y = (\sin 5x)^{x^3-1}$;

б) $y = (x)^{1/x}$;

в) $y = \dfrac{\sqrt[5]{(x+2)^3}}{(x-1)^4(x-3)^5}$;

г) $y = \dfrac{\sqrt[6]{(x-1)^5}}{(x+2)^4(x-5)^7}$.

7.11. Найти производные функций y, заданных неявно следующими уравнениями:

а) $e^{xy} - x^3 - y^3 = 3$;

б) $x^3 + y^2 = x + y$;

в) $x^2 + y^2 - \sin(x^2y^2) = 5$;

г) $xy - \mathrm{tg}\, x = 3$;

д) $2^x + 2^y = 2^{x+y}$;

е) $xy - \dfrac{x}{y} = 3x$;

ж) $\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$;

з) $\ln(xy^3) + e^{x^2y} + 2x = 2$.

7.12. Найти производные функций y, заданных параметрически:

а) $x = t^2 + 2t, y = \ln(t+1)$;

б) $x = 2\ln(4t-1), y = (4t-1)^3$;

в) $x = \sin 3t, y = \mathrm{tg}^2 3t$.

7.13. Вычислить приближенно (до трех знаков после запятой) с помощью дифференциала:

а) $0{,}99^3 - 0{,}99^2 + 2$;

б) $\sqrt[4]{84}$;

в) $\sqrt[3]{65}$;

г) $\sin 29°$;

д) $\mathrm{arctg}\, 0{,}98$.

Задания для самостоятельной работы

1. Найти пределы, пользуясь правилом Лопиталя:

1) а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^5 - 3x^2 + 5}{3x^5 + 4x^2 - x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{7x\sin 3x}$;

2) а) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - x - 6}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-\sin x)}{\mathrm{tg}\, x}$;

3) а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\mathrm{ctg}\, x$;

4) а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^4 + 6x^2 + 5}{4x^4 - 5x^2 + 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos^2 x}{4x\sin x}$.

2. Найти производную функции:

1) а) $y = \sin 4x^2$;

б) $y = \dfrac{8x}{x-2}$;

в) $y = e^{4x}\mathrm{tg}\, x$;

г) $y = x^{\sin 3x}$;

д) $y^3 - 3yx + 6x = 0$;

2) а) $y = \mathrm{tg}\sqrt{x}$;

б) $y = \dfrac{3x}{4x+1}$;

в) $y = e^{2x}\cos x$;

г) $y = (x+1)^{\cos x}$;

д) $x^4 + y^4 = x^2 y^2$;

3) а) $y = \mathrm{tg}^2 x$;

б) $y = \dfrac{5x}{x+3}$;

в) $y = \ln(3x-2)\sin x$;

г) $y = x^{e^{2x}}$;

д) $x^3 - y^2 + xy = 3\sin x$;

4) а) $y = 3\sin x^3$;

б) $y = \dfrac{4x+2}{x+3}$;

в) $y = \ln 2x \cdot \operatorname{tg} x$;

г) $y = x^{(3x-2)^2}$;

д) $e^y + xy = 1$.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение производной функции. Каков ее геометрический и механический смысл?
2. Запишите формулы производных суммы, произведения, частного двух функций. Приведите примеры.
3. Запишите таблицу производных основных элементарных функций.
4. Запишите формулу дифференцирования сложной функции.
5. Как находится производная неявной функции?
6. Как находится производная функции, заданная параметрическими уравнениями?
7. Сформулируйте определение дифференциала функции.
8. Сформулируйте определения производных высших порядков.
9. Сформулируйте правило Лопиталя.

8 ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЕ ГРАФИКА

Основные теоретические сведения

Необходимое условие монотонности функции: если дифференцируемая на интервале (a, b) функция $y = f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x_0) \geq 0$ $(f'(x_0) \leq 0)$ для любого $x \in (a, b)$.

Достаточное условие монотонности функции: если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x_0) > 0$ $(f'(x_0) < 0)$ для любого $x \in (a, b)$, то на интервале (a, b) функция $y = f(x)$ возрастает (убывает).

Точка x_0 называется точкой ***локального максимума (минимума)*** функции $y = f(x)$, если существует такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$. Точки локального максимума (минимума) функции $y = f(x)$ называются ***точками локального экстремума***.

Необходимое условие экстремума функции: если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то производная функции в этой точке равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Точки, принадлежащие области определения функции и в которых производная функции равна нулю или не существует, называются ***критическими точками.***

Достаточное условие экстремума функции (в терминах первой производной): если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности критической точки x_0 и при переходе через точку x_0 производная функции $f'(x)$ меняет знак, то x_0 — точка локального экстремума функции; причем если $f'(x)$ при $x < x_0$ положительна, а при $x > x_0$ отрицательна, то

x_0 — точка максимума; если $f'(x)$ при $x < x_0$ отрицательна, а при $x > x_0$ положительна, то x_0 — точка минимума. *Замечание:* следует иметь в виду, что указанные неравенства должны выполняться в достаточно малой окрестности критической точки x_0.

Достаточное условие экстремума функции (в терминах второй производной): если в точке x_0 производная непрерывной функции $y = f(x)$ равна нулю $\left(f'(x_0) = 0\right)$, а производная второго порядка существует и отлична от нуля $\left(f''(x_0) \neq 0\right)$, то при $f''(x_0) > 0$ в точке x_0 функция имеет минимум, при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 функция имеет максимум.

График функции $y = f(x)$, дифференцируемой на интервале (a, b), называется на этом интервале выпуклым вверх (выпуклым вниз), если соответствующие точки графика функции в пределах интервала (a, b) лежат не выше (не ниже) касательной, проведенной к графику функции в любой точке $(x, f(x))$ интервала $x \in (a, b)$. Выпуклую вверх функцию часто называют ***выпуклой***, а выпуклую вниз — ***вогнутой***. Точка $M_0(x_0, f(x_0))$ называется ***точкой перегиба*** графика функции $y = f(x)$, если в данной точке существует касательная к графику функции и существует окрестность точки x_0, в пределах которой слева и справа от точки M_0 график функции имеет разные направления выпуклости.

Достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции: пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет в каждой точке интервала (a, b) производную второго порядка $f''(x)$, причем $f''(x) \neq 0$. Тогда если $f''(x) > 0$ $\left(f''(x) < 0\right)$ для любого $x \in (a, b)$, то на интервале (a, b) график функции вогнут (выпукл).

Достаточное условие существования точки перегиба: если в точке x_0 производная второго порядка $f''(x_0) = 0$ или не существует и при переходе через точку x_0 производная $f''(x)$ меняет знак, то точка графика функции с абсциссой x_0 является точкой перегиба.

Общая схема исследования функции $y = f(x)D(f)$в целях построения ее графика:

1) найти область определения $D(f)$ функции;

2) определить четность (нечетность) функции;

3) найти точки пересечения графика функции с осями координат (нули функции);

4) найти асимптоты графика функции;

5) исследовать функцию на монотонность (возрастание, убывание), определить точки экстремума;

6) найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба;

7) на основании проведенного исследования построить график функции.

Примеры решения практических заданий

Пример 8.1. Исследовать функцию $y = x^3 - 4x^2 - 16x + 3$ на монотонность, найти точки экстремума

Решение. Находим производную функции: $y' = 3x^2 - 8x - 16$.

Приравниваем производную к нулю и решаем квадратное уравнение:

$3x^2 - 8x - 16 = 0$,

$D = 64 - 4 \cdot 3 \cdot (-16) = 64 + 192 = 256 = 16^2$,

$x_1 = \dfrac{8-16}{6} = -\dfrac{4}{3}$, $x_2 = \dfrac{8+16}{6} = 4$ — критические точки функции.

Определяем знак производной на интервалах $\left(-\infty, -\dfrac{4}{3}\right)$, $\left(-\dfrac{4}{3}, 4\right)$ и $(4, +\infty)$ (рис. 8.1)

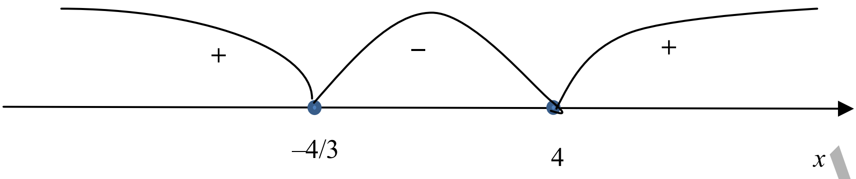

Рисунок 8.1 — Знаки производной

Значит, на интервалах $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup (4, +\infty)$ функция возрастает, и на интервале $\left(-\frac{4}{3}, 4\right)$ функция убывает.

Так как при переходе через точки $x_1 = -\frac{4}{3}$ и $x_2 = 4$ производная функции y' меняет знак, то $x_1 = -\frac{4}{3}$ и $x_2 = 4$ — точки экстремума функции. Причем при $x < x_1 = -\frac{4}{3}$ производная положительна, а при $x > x_1 = -\frac{4}{3}$ производная отрицательна, значит, $x_1 = -\frac{4}{3}$ — точка максимума; при $x < x_2 = 4$ производная отрицательна, а при $x > x_2 = 4$ производная положительна, значит, $x_2 = 4$ — точка минимума.

$$f_{\max} = f\left(-\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)^3 - 4\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 16\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) + 3 = 14\frac{23}{27},$$

$$f_{\min} = f(4) = (4)^3 - 4\cdot(4)^2 - 16\cdot 4 + 3 = -61.$$

Пример 8.2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x - 2\ln x$ на отрезке $[1, e]$.

Решение. Находим производную функции: $y' = 1 - \frac{2}{x}$.

Приравниваем производную к нулю и решаем уравнение:

$$1 - \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow \frac{x-2}{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Получили: $x_1 = 2 \in [1, e]$, $x_2 = 0 \notin [1, e]$ — критические точки функции.

Находим значения функции в критической точке $x_1 = 2 \in [1, e]$ и на концах отрезка $[1, e]$: $f(2) = 2 - 2\ln 2 \approx 0{,}6137$, $f(1) = 1 - 2\ln 1 = 1$, $f(e) = e - 2\ln e = e - 2 \approx 0{,}718$.

Выберем из полученных значений наибольшее и наименьшее: $f_{\text{наим}} = f(2) = 0{,}6137$, $f_{\text{наиб}} = f(1) = 1$, $f(e) = e - 2\ln e = e - 2 \approx 0{,}718$.

Пример 8.3. Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции $y = \frac{x^3}{6} - x^2 + 2x + 5$, точки перегиба.

Решение. Находим производную второго порядка заданной функции:

$$y' = \left(\frac{x^3}{6} - x^2 + 2x + 5\right)' = \frac{x^2}{2} - 2x + 2, \quad y'' = \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 2\right)' = x - 2.$$

Находим точки, в которых вторая производная равна нулю. Для этого решаем уравнение $y'' = 0$: $y'' = x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$.

Исследуем знак производной второго порядка слева и справа от полученной точки (рис. 8.2).

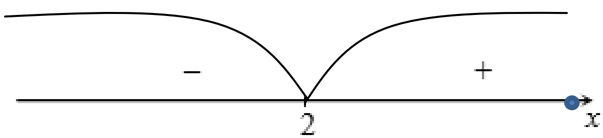

Рисунок 8.2 — Знаки производной второго порядка

Так как на интервале $(-\infty, 2)$ производная второго порядка $f''(x_0) < 0$, то на этом интервале функция выпукла; так как на интервале $(2, +\infty)$ производная $f''(x_0) > 0$, то на интервале $(2, +\infty)$ функция вогнута. Так как при переходе через точку $x = 2$ вторая производная изменила знак, то точка с абсциссой $x = 2$ (точка с координатами $\left(2, 6\frac{1}{3}\right)$) является точкой перегиба графика функции.

Пример 8.4. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$ и построить ее график.

Решение. 1. Заданная функция определена и непрерывна на всей числовой оси, т. е. $D(y) = R$.

2. Функция нечетная, так как

$$y(-x) = \sqrt[3]{((-x)+1)^2} - \sqrt[3]{((-x)-1)^2} = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2} =$$

$$= -\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}\right) = -y(x).$$

Значит, ее график будет симметричен относительно начала координат. Поэтому достаточно построить график для $x \in [0, +\infty)$.

3. График функции пересекается с осями координат только в точке $O(0, 0)$, так как $y(0) = 0$.

4. Найдем асимптоты графика функции.

Вертикальных асимптот график функции не имеет, так как $D(y) = R$ (нет точек разрыва второго рода).

Найдем уравнение наклонной асимптоты $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+2x+1} - \sqrt[3]{x^2-2x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}\right) = 0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(y-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}}=0.$$

Таким образом, уравнение асимптоты $y=0$ — ось *Ox*.

5. Исследуем функцию на монотонность и экстремум с помощью производной первого порядка:

$$y'=\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)'=\left((x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right)'=$$

$$=\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right)=\frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}.$$

Производная функции $y'\neq 0$ при любых значениях переменной *x*.

Производная y' не существует в точках $x=\pm 1$, которые являются критическими.

Так как функция нечетная, то исследуем знак производной на интервале $[0,\infty)$ (рис. 8.3).

Так как, проходя через точку $x=1$, производная y' меняет знак с плюса на минус, то $x=1$ — точка максимума и $y_{\max}=y(1)=\sqrt[3]{4}$.

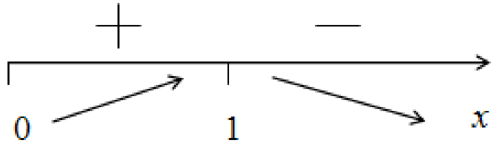

Рисунок 8.3 — Знаки производной и поведения функции

6. Исследуем график функции на выпуклость и вогнутость. Для этого находим производную второго порядка:

$$y''=\left(\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}\right)'=-\frac{2}{9}(x+1)^{-\frac{4}{3}}+\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{4}{3}}=$$

$$=\frac{2}{9}\frac{\sqrt[3]{(x+1)^4}-\sqrt[3]{(x-1)^4}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}.$$

Производная $y''=0$ в точке $x=0$ и y'' не существует в точках $x=\pm 1$. Эти точки могут быть абсциссами точек перегиба.

Исследуем знак второй производной на интервале [0, ∞) (рис. 8.4).

Так $y''>0$ для любого x из интервала [0, ∞), то $x=1$ не является точкой перегиба.

Основываясь на полученных результатах исследования, строим график функции на интервале [0, ∞), затем симметрично полученному графику — относительно начала координат на интервале (–∞, 0) (рис. 8.5).

Рисунок 8.4 — Знаки производной второго порядка и поведения функции

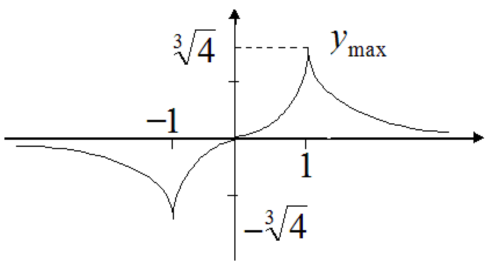

Рисунок 8.5 — График функции

Задания для аудиторной работы

8.1. Найти промежутки возрастания и убывания функций:

а) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$; б) $f(x) = x + \sqrt{x-1}$.

8.2. Найти экстремумы функции:

а) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$;

б) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 15$;

в) $f(x) = (e^x + e^{-x})/2$;

г) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

8.3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке [–2, 2]:

а) $f(x) = x^3 + 3x - 5$; б) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 3$.

8.4. Найти наибольшее и наименьшее значения функций:

а) $f(x) = x^3 + 3x^2$ на отрезке $\left[-4, \dfrac{1}{2}\right]$;

б) $f(x) = (x^2 - 1)^2$ на отрезке $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$.

8.5. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции:

а) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$; б) $f(x) = x^5 - 10x^3 + 6x + 2$; в) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

8.6. Сумма двух положительных чисел равна 12. Каковы эти числа, если сумма их кубов является наименьшей?

8.7. Каким должен быть прямоугольник наибольшей площади, который можно согнуть из куска проволоки длиной 50 см?

8.8. Прямоугольный лист жести имеет длину 54 см и ширину 36 см. Из этого листа требуется изготовить открытую сверху коробку, вырезая по углам листа равные квадраты и загибая оставшиеся боковые полосы под прямым углом. Каковы должны быть стороны вырезанных квадратов, чтобы вместимость коробки была максимальной?

8.9. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м^3 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

8.10. Требуется вырыть яму цилиндрической формы с круглым основанием и вертикальной боковой поверхностью заданного объема $V = 85$ м^3 ($V \approx 27\pi$ м^3). Каковы должны быть линейные размеры ямы (радиус R и высота H), чтобы на облицовку ее дна и боковой поверхности шло минимальное количество материала?

8.11. Требуется изготовить открытый сверху ящик с квадратным дном максимальной вместимости. Каковы должны быть линейные размеры ящика, если на его изготовление имеется $S = 6{,}75$ м^2 материала?

8.12. Исследовать функцию и построить ее график:

а) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 6$;

б) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$;

в) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$;

г) $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x}{2}$;

д) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;

е) $y = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}\,(x-5)$;

ж) $f(x) = x + \sqrt{4 - x}$;

з) $y = e^{\frac{1}{5+x}}$;

и) $y = x\sqrt{1 - x^2}$;

к) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$;

л) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

м) $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Найти промежутки возрастания и убывания функций, точки экстремума:

1) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$; 2) $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$; 3) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$; 4) $y = x + \dfrac{16}{x}$.

2. Исследовать функцию и построить ее график:

1) $y = xe^x$; 2) $y = \dfrac{x^2}{x+3}$; 3) $y = x + \dfrac{4}{x}$; 4) $y = x\sqrt{x}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте достаточное и необходимое условия монотонности функции.
2. Сформулируйте определение точек экстремума функции.
3. Дайте определение критической точки.
4. Сформулируйте необходимое условие экстремума функции.
5. Сформулируйте достаточные условия экстремума функции.
6. Как найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке?
7. Сформулируйте условия выпуклости функции.
8. Сформулируйте достаточное условие точки перегиба.
9. Изложите общую схему исследования функции и построения ее графика.

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

1.1. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -5 & -11 \\ -4 & -7 \end{bmatrix}$; **1.2.** $D=\begin{pmatrix} 1 & -12 & -4 \\ 15 & 6 & 27 \\ -6 & -29 & 29 \end{pmatrix}$; **1.3.** $\begin{pmatrix} 11 & 25 \\ 2 & 29 \end{pmatrix}$; **1.7.** а) 16; б) 1; в) –267; **1.8.** а) –43; б) 145; в) –42; **1.9.** а) 18; в) 16; г) 0; д) 0; **1.10.** 2 и 10; **1.11.** –68 и –18; **1.13.** а) –48; б) –48; **1.14.** а) 75; б) –96; **1.15.** г) $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -12 & 17 & -43 \\ -7 & 11 & -24 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$; **1.16.** б) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.1. а) (2; 3; –1); б) (2; –1; –2); в) система несовместна; **2.2.** а) (3, –1, 0); **2.3.** а) (0; –7; 5); б) (3; –2; –2); е) (1; 2; 2; 0); **2.6.** а) при $\lambda = 1$ вектор $X = \begin{pmatrix} -1/8 \\ 21/16 \\ 1 \end{pmatrix} C$, при $\lambda = -6$ вектор $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} C$, при $\lambda = 10$ вектор $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} C$, $C = \text{const}$.

3.4. (–6, 5, 8); **3.5.** $\sqrt{62}$; **3.6.** $\sqrt{14}$; **3.7.** $\sqrt{94}$; **3.9.** (0; 4, 1); **3.13.** 13; **3.15.** $\sqrt{101}$ и 3; **3.19.** а) –2; б) 0; **3.23.** –6; **3.24** –10; **3.26.** A = 17; **3.27.** A = 13; **3.28.** (8; 32; 16); **3.30.** 14 ед^2; **3.31.** $(2, 11, 7)$; **3.32.** 28; **3.36.** 121/6 ед^3; **3.39.** $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$.

4.1. $x + 3y - 7 = 0$; **4.2.** $4x + 3y = 0$; **4.4.** $5x - 6y + 37 = 0$; **4.5.** $2x - 3y + 6 = 0$; **4.6.** $x - 3y - 9 = 0$; **4.7.** $3x - y - 9 = 0$; **4.9.** $2x + y - 13 = 0$; **4.11.** $(AB): x + 4y + 2 = 0$, $(BC): 4x + 9y + 1 = 0$, $(AC): 3x + 5y + 6 = 0$; **4.12.** $3x + 2y - 1 = 0$; **4.19.** $3x - 4y - 25 = 0$, $3x - 4y + 5 = 0$; **4.26.** $7x - 56y + 48 = 0$, и $32x + 4y + 43 = 0$. **5.1.** $2x - y + 3z - 14 = 0$; **5.3.** $x + y - 3z + 4 = 0$; **5.4.** $19x - 8y + 14z - 73 = 0$; **5.7.** $\frac{2\sqrt{42}}{21}$; **5.9.** $\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+1}{-3}$; **5.10.** $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{1}$; **5.20.** $d = 7$; **5.23.** $6x - 20y - 11z + 1 = 0$; **5.25.** $\arcsin\frac{9\sqrt{7}}{70}$.

6.1. а) $[-3, 7]$; г) $(2, 3)$; **6.8.** а) 21; и) 3; к) 2; л) 0; **6.9.** а) 5/2; б) 2; г) 1; е) 16/49; ж) e^2; з) e^5;

6.10. а) 21; г) $-\frac{1}{2}$; д) –2/3; ж) $\sqrt{3}$; к) 2; л) 0; **6.12.** а) в точке $x_2 = 1$ функция непрерывна, точка $x_1 = 0$ — точка разрыва первого рода; б) в точке $x_1 = 0$ функция непрерывна, точка $x_2 = 4$ — точка разрыва первого рода; **6.13.** в) вертикальные: $x = -2$, $x = 2$, наклонная: $y = x$; д) вертикальные: $x = -3$, $x = 3$, горизонтальные: $y = 0$, наклонных нет.

7.5. а) $y' = 5x^4 - 9x^2 + 4$;

б) $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$;

е) $y' = 5(x^3 + 2x + 1)^4(3x^2 + 2)$;

и) $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$;

к) $y' = \dfrac{2x}{\cos^2(x^2 + 3)}$;

л) $y' = x(2\ln x + 1)$;

п) $y' = \dfrac{1}{1 - x^2}$;

р) $y' = \dfrac{3}{x^2 + 1}$;

7.7. $2x + y + 1 = 0$; **7.9.** а) $y' = x^{x^2+1}(1 + 2\ln x)$; **7.10.** б) 2; г) 27; и) 1/e; **7.11.** д) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2^x\left(2^y - 1\right)}{2^y\left(1 - 2^x\right)}$; **7.12.** а) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2(t+1)^2}$; **7.13.** в) 4,021; г) 0,485.

8.2. а) $y_{|x|=-1} = 17$ — максимум, $y_{|x|=3} = -47$ — минимум; г) $y_{|x|=0} = 0$ — минимум, $y_{|x|=-2} = -4$ — максимум; **8.4.** а) $f(-2) = 4$ — наибольшее значение, $f(-4) = -64$ — наименьшее значение; б) $f(2) = 9$ — наибольшее значение, $f(1) = 0$ — наименьшее значение; **8.5.** в) $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ — интервал выпуклости вверх, $\left(-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$ — интервалы выпуклости вниз, $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ — точки перегиба; **8.12.** сторона основания — 1,5 м, высота — 0,75 м, максимальная вместимость — 1,6875 м^3.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Берман, Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. — М. : Наука, 1985.

2. *Бермант, А. Ф.* Краткий курс математического анализа для втузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. — СПб. : Лань, 2006.

3. *Бугров, Я. С.* Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — М. : Наука, 1983.

4. *Гурский, Е. И.* Основы линейной алгебры и аналитической геометрии : учеб. для инженер.-техн. специальностей вузов / Е. И. Гурский. — Минск : Вышэйш. шк., 1982.

5. *Гусак, А. А.* Высшая математика : в 2 т. / А. А. Гусак. — Минск : ТетраСистемс, 2003.

6. *Гусак, А. А.* Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. — Минск : ТетраСистемс, 2004.

7. *Клетеник, Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник ; под ред. Н. В. Ефимова. — М. : Профессия, 2005.

8. *Кудрявцев, В. А.* Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. — М. : АСТ, 2004.

9. *Ларин, А. А.* Курс высшей математики [Электронный ресурс]: в 2 ч. / А. А. Ларин. — Ч. 1—2. — Режим доступа: http://alexlarin.net/lect1.pdf.

10. *Минорский, В. П.* Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. — М. : Физматлит, 2001.

11. *Письменный, Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике : полный курс / Д. Т. Письменный. — 7-е изд. — М. : Айрис-пресс, 2008. — 608 с.

12. Индивидуальные задания по высшей математике : учеб. пособие : в 4 ч. / А. П. Рябушко [и др.] ; под общ. ред. А. П. Рябушко. — 6-е изд. — Минск : Выш. шк., 2011. — Ч. 1 : Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. — 304 с. : ил.

13. *Унсович, А. Н.* Высшая математика : учеб.-метод. комплекс для студентов эконом. и инженер-экон. специальностей : в 2 ч. / А. Н. Унсович ; Баранович. гос. ун-т. — Барановичи : БарГУ, 2006. — Ч. 1. — 368 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ