

Развертка боковой поверхности пирамиды представляет собой плоскую фигуру, состоящую из треугольников – граней пирамиды.

На рисунке 1 определение длин ребер пирамиды выполнено с помощью вращения их вокруг оси  $i$ . После того, как определены длины ребер  $|S''A_2|$ ,  $|S''B_2|$ ,  $|S''C_2|$ , приступаем к построению развертки. Для этого через произвольную точку  $S_0$  проводим прямую  $a$ . Откладываем на ней от точки  $S_0$   $[S_0A_0] = [S''A_2]$ . Из точки  $A_0$  проводим дугу радиусом  $r_1 = |A'B'|$ , а из точки  $S_0$  – дугу радиусом  $R_1 = |S''B_2|$ . Пересечение дуг укажет положение вершины  $B_0$  треугольника  $S_0A_0B_0$ . Аналогично находят точки  $C_0$  и  $A_0$ . Соединив точки  $A_0B_0C_0A_0$ , получим развертку боковой поверхности пирамиды  $SABC$ .

**Построение развертки конической поверхности.** Задача на построение развертки конической поверхности решается так же, как в случае построения развертки боковой поверхности пирамиды, т.е. способом треугольников (рис. 1). Для этого коническая поверхность аппроксимируется вписанной в нее пирамидальной поверхностью.

Чем больше число граней у вписанной пирамиды, тем меньше будет разница между действительной и приближенной развертками конической поверхности.

Если задана поверхность прямого кругового конуса, то развертка его боковой поверхности представляет круговой сектор, радиус которого равен длине образующей конической поверхности  $L = |SA|$ , а центральный угол  $\alpha^\circ = 2\pi r/L$ , где  $r$  – радиус окружности основания конуса. Величина угла  $\alpha$  получается в радианах. На практике бывает целесообразно иметь его градусную величину.

**Построение условной развертки сферы.** Для построения условной развертки сферы пересекаем поверхность сферы горизонтально проецирующими плоскостями  $y_1, y_2, y_3$  проходящими через центр сферы. Куски сферической поверхности  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , заключенные между меридиональными сечениями  $h_{Oy1} - h_{Oy2}$ ,  $h_{Oy2} - h_{Oy3}$ ,  $h_{Oy3} - h_{Oy4}$ , заменяем кусками цилиндрических поверхностей, прямолинейные образующие которых перпендикулярны к плоскости средних меридиональных сечений  $h_{Oy1}$ ,  $h_{Oy2}$ ,  $h_{Oy3}$ .

Длина образующих, в которые преобразовываются дуги параллелей поверхности вращения, определяется отрезками прямых, заключенных между соседними меридиональными плоскостями  $AB - [A_0B_0]$ .

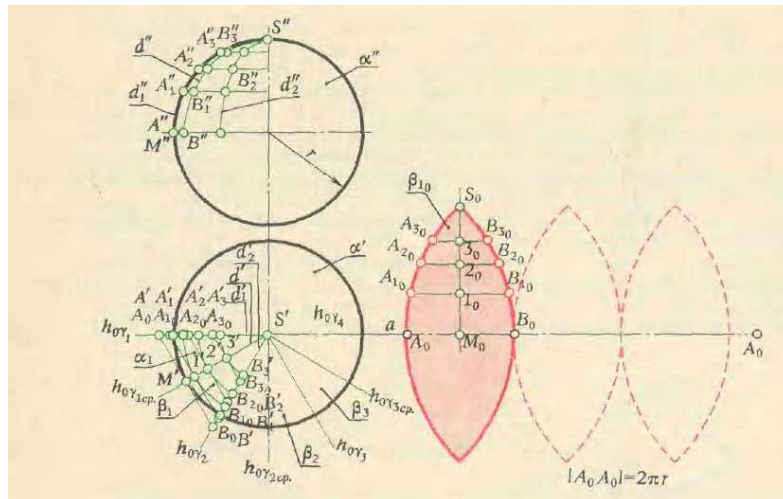


Рисунок 2

Чтобы построить развертку куска цилиндрической поверхности аппроксимирующего участка сферы  $a_1$ , проводим горизонтальную прямую  $a$ . На ней откладываем  $[A_0B_0]$ . Через середину этого отрезка проводим вертикальную прямую, на которой откладываем спрямленное меридиональное сечение (на рисунке 2 показана только его половина) и отмечаем на нем точки пересечения с параллелями сферы ( $M_0, I_0, 2_0, 3_0$ ). Через точки  $M_0, I_0, 2_0, 3_0$  проводим горизонтальные прямые и откладываем на них по обе стороны от вертикали  $M_0S_0$  отрезки, равные половине длин касательных в точках  $M, I, 2, 3$  и заключенные между следами плоскостей  $h_{Oy1}$  и  $h_{Oy2}$ .

## ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА МАГЧЫМЫХ ПЕРАМЯШЧЭННЯЎ ДЛЯ ВЫЗНАЧЭННЯ РЭАКЦЫЙ УНУТРАНЫХ СУВ'ЯЗЕЙ

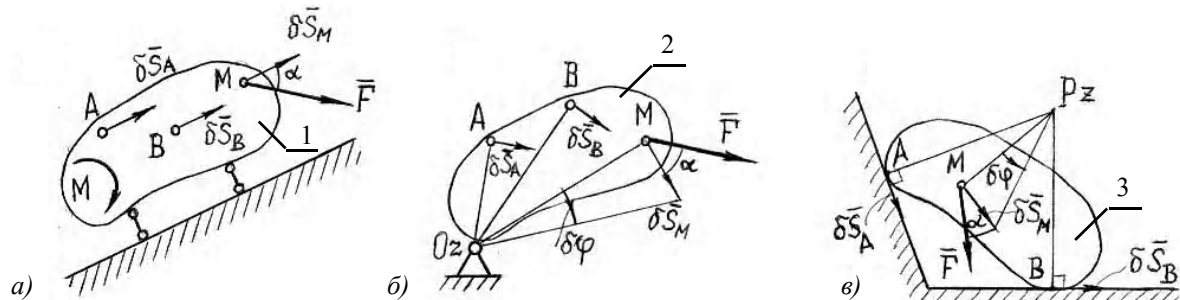
А.М. Целеш, А.А. Маняк

Навуковы кіраўнік: С.І. Русан

Для аналізу раўнавагі механічных сістэм выкарыстоўваюцца пераважна два асноўныя метады. Першы з іх заснаваны на складанні ўмоў раўнавагі. У аснову другога пакладзена агульнае ўраўненне статыкі, якое выражае сутнасць прынцыпа магчымых перамяшчэнняў (ПМП). Прынцыповая перавага апошняга

зключаецца ў тым, што ён дазваляе пазбегнуць рашэння сістэм ураўненняў. Такая ўласцівасць метада асабліва прывабна на стадыі праектавання ў працэсе пошукаў аптымальных параметраў сістэм. ПМП выкарыстоўваецца пры пабудове метада Мора для аналізу статычна нявызначаных сістэм. Аднак, нягледзячы на відавочныя перавагі, ПМП не атрымаў шырокага распаўсюджвання на практыцы. Назавем некалькі прычын стратнага становішча ПМП: на занятках па тэарэтычнай механіцы мала ўвагі акцэнтуюцца на трансфармацыі сувязей у працэсе паніжэння іх валентнасці; не фарміруюцца цвёрдыя навыкі ў вызначэнні работы сіл; у працэсе вывучэння ПМП студэнтамі недавальняюча засвойваюцца ўмовы сумеснасці магчымых перамяшчэнняў (МП) у складаных сістэмах; у падручніках і метадычных дапаможніках не разглядаюцца прыклады і не распрацаваны заданні на вызначэнне рэакцый унутраных (адносных) сувязей; метадычна неабгрунтавана выкарыстоўваецца ў тэме «ПМП» нейкі яго сурагат – ураўненне магчымых магчымасцей (гэта стварае ўраўненне абмежаванасці самога ПМП).

Разгледзім залежнасць паміж магчымымі перамяшчэннямі ў складаных сістэмах. Залежнасць паміж МП пунктаў цвёрдага цела, як вядома, мае лінейны характар. Любое цела, якое ўваходзіць у склад плоскай змяняемай сістэмы, можа здзяйсняць адно з трох магчымых перамяшчэнняў: паступальнае, вярчальнае і плоскае. У першым выпадку (рыс. 1 а) МП усіх пунктаў цела аднолькавы:  $\delta \vec{S}_A = \delta \vec{S}_B = \dots = \delta \vec{S}_M$ . У астатніх выпадках (рыс. 1 б, в) яны прапарцыянальны адлегласцям пунктаў ад восей вярчэння:  $\delta S_A / OA = \delta S_B / OB = \dots = \delta S_M / OM$  і  $\delta S_A / PA = \delta S_B / PB = \dots = \delta S_M / PM$ .



Рысунк 1

На рысунку 2 літарамі  $O_z$  і  $P_z$  абазначаны адпаведна нерухома і імгненная восі павароту цела. У выпадку непаступальных перамяшчэнняў мэтазгодна ўводзіць для цела вуглавую МП  $\delta \varphi$  і праз іх выражаць лінейныя для пунктаў; напрыклад,  $\delta S_M = \delta \varphi \cdot OM = \delta \varphi \cdot PM$  (рыс. 2). Тыя ж перамяшчэнні, што і на рысунку 1, могуць здзяйсняць целы 1, 2, 3 у складзе сістэмы з адной ступенню свабоды.

Давайце паглядзім, як вызначаецца магчымая работа. Разгледзім вызначэнне работы для прыватных выпадкаў магчымых перамяшчэнняў цела.

**Паступальнае перамяшчэнне** (рыс. 1 а). Работа сілы  $F$  роўна  $A(\vec{F}) = F \delta S_M \cos \alpha$ , работа пары  $M$   $A(M) = M \delta \varphi = 0$  (тут  $\delta \varphi = 0$ ).

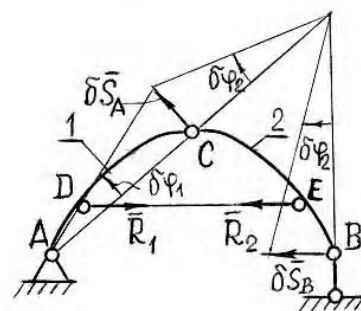
**Вярчальнае перамяшчэнне** (рыс. 1 б). У гэтым выпадку  $A(\vec{F}) = F \delta S_M \cos \alpha = F \cos \alpha \cdot OM \cdot \delta \varphi = M_O(\vec{F}) \delta \varphi$ , дзе  $M_O(\vec{F})$  – момант сілы  $F$  адносна восі вярчэння; работа пары  $A(M) = M \delta \varphi$ .

**Плоскае перамяшчэнне** (рыс. 1 в). Імгненная вось вярчэння  $P_z$  праходзіць праз імгненны цэнтр перамяшчэння цела  $P$ . Работа сілы  $F$ , як і ў папярэднім выпадку, роўна  $A(\vec{F}) = F \delta S_M \cos \alpha = F \cos \alpha PM \delta \varphi = M_P(\vec{F}) \delta \varphi$ , дзе  $M_P(\vec{F})$  – момант сілы  $F$  адносна імгненнай восі  $P_z$ ; работа пары  $A(M) = M \delta \varphi$ . Як бачым, у выпадку непаступальнага перамяшчэння цела работа сілы роўна здабытку яе моманта адносна нерухомай альбо імгненнай восі вярчэння на магчымае вуглавое перамяшчэнне цела.

Разгледзім прымяненне ПМП для вызначэння рэакцый унутраных сувязей.

У вучэбнай літаратуры прыводзяцца прыклады прымянення ПМП пераважна для вызначэння невядомых сіл альбо рэакцый знешніх сувязей. Па-за ўвагай застаюцца спосабы вызначэння рэакцый унутраных сувязей складаных сістэм. Прычына такога становішча, відаць, палягае ў нераспрацаванасці спосабаў пераўтварэння гэтых сувязей і адсутнасцю ў падручніках умоў сумеснасці МП на мяжы асобных частак сістэмы, на якія яна распадаецца пры паніжэнні валентнасці сувязей. Вядома, калі ў статычна вызначанай механічнай сістэме знізіць валентнасць сувязі на адзінку, яна становіцца механізмам з адной ступенню свабоды. Такі механізм мае адно незалежнае МП. Далей механізм з адным МП і рэакцыямі, адпаведнымі адкінутым сувязям, будзем называць разліковай схемай для вызначэння рэакцый па ПМП. Прыклады разліковых схем прыведзены на рысунках 2, 3.

На рысунку 2 адкінута аднавалентная сувязь DE; замест яе ў пунктах D, E прыкладзены рэакцыі  $R_1 = R_2$ . Часткі сістэмы 1, 2 атрымалі магчымыя перамяшчэнні  $\delta \varphi_1$ ,  $\delta \varphi_2$  вакол нерухомага A і імгненнага D цэнтраў



Рысунк 2

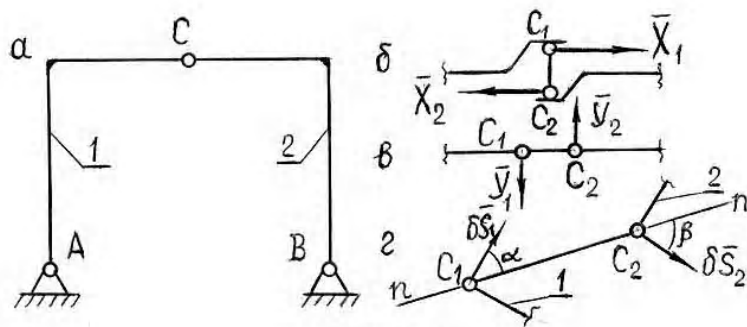


Рисунок 3

вирчэння. Умова сумеснасці МП заключаецца ў тым, што часткі 1, 2 маюць агульнае МП  $\delta S_C$  шарніра C. Два варыянты пераўтварэння двухвалентнай сувязі C пры пераходзе да разліковай схемы паказаны на рысунку 3. Стрыжань бясконца малой даўжыні  $C_1C_2$  у першым выпадку выключае адносны вертыкальны зрух частак разліковай схемы, а іх узаемнае гарызонтальнае перамяшчэнне стрымліваецца сіламі  $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ . У другім выпадку наадварот: гарызонтальны стрыжань

$C_1C_2$  не дапускае гарызонтальны адносны рух частак сістэмы, а сілы  $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2$  выключаюць іх вертыкальны зрух ( $X_1 = X_2 = X_C, Y_1 = Y_2 = Y_C$ ). Прамую, якая праходзіць праз шарніры аднавалентнай сувязі  $C_1C_2$ , будзем называць лініяй ўзаемадзеяння частак разліковай схемы. Каб сфармуляваць умовы сумеснасці МП яе частак, выкарыстаем наступную тэарэму: праекцыі магчымых перамяшчэнняў шарніраў  $C_1C_2$  на лінію ўзаемадзеяння роўны паміж сабою. У адваротным выпадку пры наданні часткам разліковай схемы МП стрыжань  $C_1C_2$  змяніў бы сваю даўжыню (а аб'ектамі вывучэння ў тэарэтычнай механіцы з'яўляюцца толькі цвёрдыя целы). На рысунку 3 г  $mn$  – лінія ўзаемадзеяння частак 1 і 2. Вуглы  $\alpha, \beta$  вызначаюцца з геаметрыі механічнай сістэмы і спосабу замацавання частак 1, 2. Умова сумеснасці МП запісваецца на падставе прыведзенай тэарэмы:

$$\delta s_1 \cos \alpha = \delta s_2 \cos \beta.$$

На рысунку 4 а ўнутраная сувязь C уяўляе сабою слізгаючую замацоўку, якая выключае ўзаемны паварот частак 1, 2 сістэмы і іх папярочны зрух. Два варыянты зніжэння яе валентнасці паказаны на рысунку 4 б, в. Умова сумеснасці мае выгляд:  $\delta \varphi_2 = \delta \varphi_1$ .

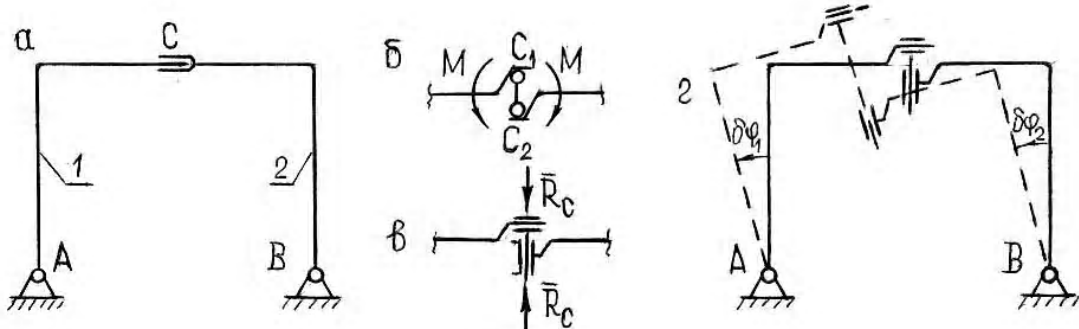


Рисунок 4

Ураўненне работ, што выражае ПМП, запісваецца ў выглядзе:  $\sum \delta A_i = 0$ . Магчымую работу будзем вызначаць па формулах:  $\delta A_i = M_i \delta \varphi_i$  альбо  $\delta A_i = F_i \delta S_i \cos \alpha_i$ . Разгледжаныя вышэй разліковыя схемы для вызначэння рэакцый унутраных сувязей дазваляюць захаваць галоўную перавагу ПМП – складаць ураўненні работ з адной невядомай рэакцыяй.

Прыклад 1. Для дадзенай рамы (рыс. 5 а) знайсці рэакцыі  $X_C, Y_C$  у шарніры C.

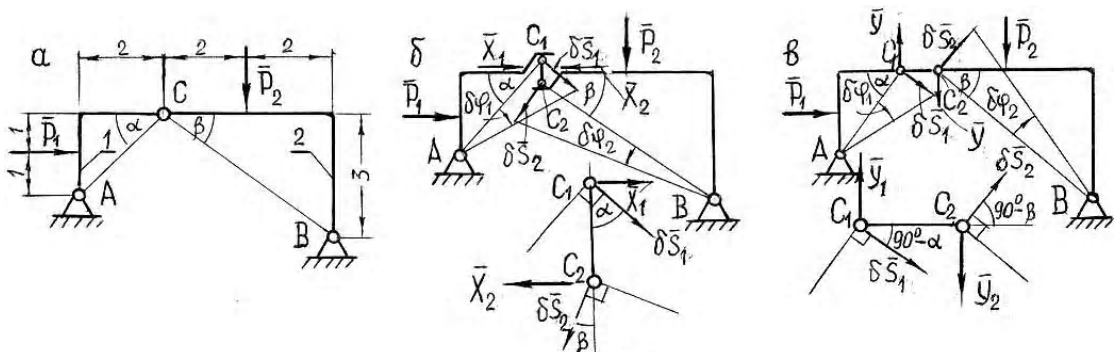
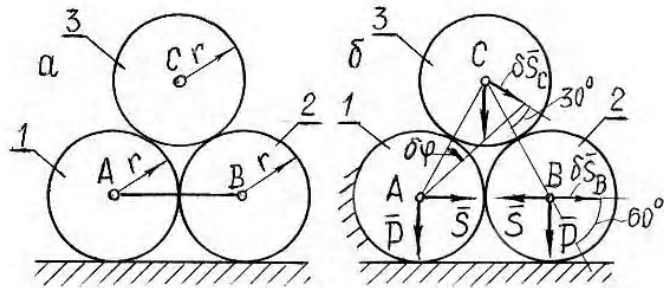


Рисунок 5

*Рашэнне.* Будзем разліковыя схемы (рыс. 5 б, в). У якасці незалежнага МП прымаем  $\delta\varphi_1$ . Для вызначэння  $X_C Y_C$  складаем наступныя ўраўненні работ:  $P_1 \delta\varphi_1 + X_C 2\delta\varphi_1 + X_C 3\delta\varphi_2 + P_2 2\delta\varphi_2 = 0$ ;  $P_1 \delta\varphi_1 - Y_C 2\delta\varphi_1 - Y_C 4\delta\varphi_2 - P_2 2\delta\varphi_2 = 0$ . Запісваем адпаведныя разліковым схемам умовы сумеснасці МП:  $\delta\varphi_1 AC \cos \alpha = \delta\varphi_2 BC \cos \beta$ ;  $\delta\varphi_1 AC \sin \alpha = \delta\varphi_2 BC \sin \beta$ . Адсюль  $\delta\varphi_2 = \frac{1}{2} \delta\varphi_1$  і  $\delta\varphi_2 = \frac{2}{3} \delta\varphi_1$ . З ураўненняў работ, улічваючы  $\delta\varphi_2$ , атрымліваем залежнасці:  $\frac{7}{2} X_C + P_1 + P_2 = 0$ ;  $\frac{14}{3} Y_C - P_1 + \frac{4}{3} P_2 = 0$ . Канчаткова  $X_C = -\frac{2}{7}(P_1 + P_2)$ ,  $Y_C = \frac{1}{14}(3P_1 - 4P_2)$ .

*Прыклад 2.* На два аднолькавыя злучаныя канатам  $AB$  цыліндры 1, 2 пакладзен трэці такі ж цыліндр 3 (рыс. 6 а). Знайсці нацяжэнне каната.

*Рашэнне.* Каб рашыць гэтую задачу з дапамогай умоў раўнавагі, неабходна спачатку скласці іх асобна для цыліндра 3, знайсці сілы узаемадзеяння яго з цыліндрамі 1, 2, а затым разгледзець раўнавагу цыліндра 1 (альбо 2), замяніўшы канат адпаведнымі сіламі нацяжэння  $S$ . ПМП дазваляе атрымаць вынік, не раздзяляючы сістэму на часткі. Вызваляемся ад унутранай сувязі  $AB$  (рыс. 6 б). Цыліндр 1 замацоўваем



Рысунак 6

нерухома. За незалежнае МП прымаем вуглавое перамяшчэнне адрэзка  $AC$   $\delta\varphi$ ; тады  $\delta s_C = \delta\varphi 2r$ . Значэнне  $\delta s_B$  знаходзім з дапамогай сфармуляванай тэарэмы:  $\delta s_B \cos 60^\circ = \delta s_C \cos 30^\circ$ , адкуль  $\delta s_B = \operatorname{tg} 60^\circ \delta s_C = 2r \operatorname{tg} 60^\circ \delta\varphi$ . Запісваем ураўненне работ:  $M_A(P)\delta\varphi - S\delta s_B = 0$  альбо  $Pr - 2rS \operatorname{tg} 60^\circ = 0$ . Атрымліваем:  $S = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} 60^\circ P$ .

## РАЗВИТИЕ УЧЕНИЯ О ТРЕНИИ

С.М. Шестак

Научный руководитель: И.М. Цикман

Автомобили, теплоходы, самолеты перемещаются в пространстве за счет сжигания колоссального количества топлива. Пуля или снаряд, выпущенные с огромной скоростью, полностью теряют ее всего через несколько секунд полета. Обычные часы с пружиной останавливаются, если их не заводить. И подобных примеров можно привести сколько угодно. Известной причиной всех этих фактов служит трение, на преодоление которого всегда необходимо затрачивать определенную энергию.

Трением называют такое взаимодействие движущегося тела с другими телами или окружающей средой, которое сопровождается рассеянием энергии. Мерой трения служит количество энергии, рассеянной на единицу пути, оно имеет размерность силы и численно равно силе трения или силе сопротивления среды. Отношение силы трения к нагрузке называют коэффициентом внешнего трения.

### Основы механики Аристотеля и Галилея

В становлении научных представлений о трении первостепенное значение имели по крайней мере два события: открытие Галилеем на рубеже XVI–XVII вв. закона инерции и осознание Румфордом, два столетия спустя, способности механической энергии превращаться в тепло. Согласно господствовавшей на протяжении двух тысяч лет до Галилея механике Аристотеля всякое, в том числе и равномерное, перемещение реальных тел в горизонтальной плоскости всегда встречает внешнее сопротивление, т.е. сопротивление окружающей среды. Движение любых тел в пустоте, без внешнего сопротивления, должно бы происходить мгновенно или бесконечно. Аристотель писал: «Никто не может сказать, почему тело, приведенное в движение (в пустоте), где-нибудь остановится, ибо, почему оно скорее остановится здесь, а не там». Галилей впервые доказал экспериментально, что свободное тело под действием постоянной силы движется равноускоренно, а отнюдь не равномерно. Согласно его принципу, уравнение движения таково:  $Q = m dv/dt$ , где  $m$  – масса;  $dv/dt$  – ускорение;  $Q$  – сила тяги, которая не зависит от скорости.

«При движении в сопротивляющейся среде, – сообщает Галилей, – по мере возрастания скорости падающее тело встречает постоянно увеличивающееся сопротивление, вследствие чего происходит постоян-