

МІНІСТЭРСТВА АДУКАЦЫІ РЭСПУБЛІКІ БЕЛАРУСЬ  
УСТАНОВА АДУКАЦЫІ  
«БАРАНАВІЦКІ ДЗЯРЖАЎНЫ ЎНІВЕРСІТЭТ»

С. І. РУСАН

# ТЭАРЭТЫЧНАЯ МЕХАНІКА

## СТАТЫКА

(Рашэнне задач павышанай складанасці)

Вучэбна-метадычны дапаможнік  
для студэнтаў тэхнічных спецыяльнасцей  
вышэйшых навучальных устаноў

Рэкамендавана ў друк  
навукова-метадычным саветам універсітэта

Баранавічы  
РВА БарДУ  
2011

УДК 621(075)  
ББК 34.4я73  
P88

А ў т а р  
С. І. Русан

Р э ц е н з е н т ы:

*М. В. Чычкан*, кандыдат тэхнічных навук,  
дацэнт кафедры «Тэхналогія і абсталяванне машынабудавання» БарДУ;  
*С. У. Бабылёў*, начальнік канструктарскага бюро БЗАЛ

Русан, С. І.

**P88** **Тэарэтычная механіка : Статыка : (Рашэнне задач павышанай складанасці)** [Тэкст] : вучэб.-метадыч. дапам. для студэнтаў тэхн. спецыяльнасцей выш. навуч. устаноў / С. І. Русан. — Баранавічы : РВА БарДУ, 2011. — 128, [4] с. : іл. — ISBN 978-985-498-152-9.

Вучэбна-метадычны дапаможнік утрымлівае кароткія звесткі з тэорыі механікі, задачы на раўнавагу плоскіх і прасторавых сістэм сіл з падрабязнымі рашэннямі і задачы для самастойнага рашэння. Уключае шэраг заданняў павышанай складанасці. Можа быць выкарыстаны пры падрыхтоўцы да алімпіяд. У афармленні дапаможніка ўзялі ўдзел студэнты інжынернага факультэта В. У. Кулакоў, В. Р. Белавус, А. У. Быкоўскі і Д. А. Морскі.

Выданне рэкамендуецца студэнтам тэхнічных спецыяльнасцей вышэйшых навучальных устаноў.

Табл. 4. Рыз. 197.

УДК 621(075)  
ББК 34.4я73

© Русан С. І., 2011  
© БарДУ, 2011

ISBN 978-985-498-152-9

## ЗМЕСТ

<i>Уступ</i> .....	4
<b>1 Метадычныя ўказанні і звесткі з тэорыі</b> .....	5
1.1 Агульныя рэкамендацыі .....	5
1.2 Кароткія звесткі з тэорыі .....	6
1.3 Методыка рашэння другой асноўнай задачы статыкі .....	17
<b>2 Раўнавага плоскай сістэмы сіл</b> .....	21
2.1 Раўнавага аднаго цела .....	21
2.2 Раўнавага сістэмы цел .....	36
<b>3 Раўнавага прасторавай сістэмы сіл</b> .....	72
<b>4 Пераўтварэнне сістэмы сіл</b> .....	95
4.1 Тэарэмы аб перамяшчэнні вектара сілы .....	95
4.2 Прывядзенне адвольнай сістэмы сіл да аднаго цэнтра .....	99
4.3 Дынамічная шруба. Статычныя інварыянты .....	101
4.4 Асобныя выпадкі прывядзення сістэмы сіл. Ураўненні цэнтральнай шрубавай восі .....	104
4.5 Рашэнне задач .....	106
<b>5 Задачы для самастойнага рашэння</b> .....	118
Заклучэнне .....	130
Спіс крыніц .....	131

## УСТУП

У тэхнічных ВНУ ўзровень засваення студэнтамі курса тэарэтычнай механікі ў значнай ступені вызначае і якасць іх падрыхтоўкі па ўсіх наступных дысцыплінах агульнатэхнічнага і спецыяльнага цыклаў. Асаблівасць курса заключаецца не толькі ў тым, што ён нясе ў сабе адмысловыя, фундаментальныя для інжынернай творчасці ведаў, але і развівае, фарміруе інтэлект будучага спецыяліста. Па гэтай прычыне правільна арыентаваны ў прыярытэтах сістэмы падрыхтоўкі спецыялістаў студэнт павінен паставіць у сваёй працы тэарэтычную механіку на першы план.

Статыка — першы раздзел дысцыпліны. Яна ўтварае падмурак для вывучэння больш складаных раздзелаў. Узровень засваення дысцыпліны вызначаецца заключнай фазай у яе вывучэнні — навыкамі рашэння задач. Найбольш поўным зборнікам задач з метадыкай іх рашэння з'яўляецца кніга [1]. У адрозненне ад яе дадзены метадычны дапаможнік дэталізуе працэс рашэння і значна пашырае асартымент складаных задач па статыцы. Ён прызначаны для самастойнай працы па вывучэнні курса і спрыяе паглыбленаму засваенню праграмы. Большасць задач запазычаны са зборнікаў [2—7], часам з неістотнымі змяненнямі, іншыя ўзяты з алімпіядных заданняў мінулых гадоў або складзены аўтарам. Амаль усе задачы змяшчаюць падрабязныя рашэнні або кароткія ўказанні.

# 1 МЕТАДЫЧНЫЯ ЎКАЗАННІ І ЗВЕСТКІ З ТЭОРЫІ

## 1.1 Агульныя рэкамендацыі

Перад тым як пачаць карыстацца дапаможнікам, **неабходна** азнаёміцца з наступнымі парадамі:

1. Да работы над кожным раздзелам дапаможніка трэба прыступаць толькі пасля таго, як засвоена тэорыя па адпаведнай тэме. Для гэтага можна звярнуцца да падручнікаў або канспектаў. У дадзеным выданні прыводзяцца толькі кароткія звесткі з тэорыі.

Пры вывучэнні тэорыі трэба пастаянна памятаць, што *самы непрадуктыўны спосаб вывучэння тэарэтычнай механікі — гэта аўтаматычнае запамінанне зместу*. Каб творча авалодаць азначэннямі, тэрэмамі, формуламі, неабходна зразумець іх сэнс. І гэта даступна кожнаму студэнту, але патрабуе настойлівасці. Запамінаць варта толькі тэрміны, зразумеўшы спачатку іх знаходжанне і логіку.

2. Неабходна глыбока ўнікаць у змест задачы, якую патрэбна рашыць. Азнаёміцца з умовай — гэта не проста запомніць змест задачы. Неабходна ўявіць сабе зададзены аб'ект, адчуць залежнасць паміж зыходнымі дадзенымі і велічынямі, якія трэба знайсці. У шматлікіх выпадках для ўразумення ўмовы неабходна правесці мысленны эксперымент. Напрыклад, там, дзе зададзена сіла, можаце ўявіць, што яе ствараеце сваімі мускульнымі напружаннямі. Уявіце, як будзе паводзіць сябе прадстаўлены ў задачы аб'ект, што перашкаджае яго руху, куды будуць накіраваны рэакцыі сувязяў і г. д. Добра, калі падчас удумлівага азнаямлення з умовай задачы ў вас ужо паспее якасны адказ на пастаўленыя ў ёй пытанні.

3. *Лічыцца стратэгічнай памылкай чытаць гатовае рашэнне задачы, не праявіўшы настойлівасці пры яе рашэнні*. Цалкам натуральна, што поспех прыйдзе да вас пасля некалькіх спробаў атрымаць адказ. Калі ж вы рашылі задачу адразу, значыць гэтая задача «не ваша» — яна прызначана для студэнта ніжэйшага ўзроўню падрыхтоўкі. Рэкамендуецца прыступаць да выканання дамашняга задання ў той дзень, калі яно выдадзена

выкладчыкам. Ваша рашэнне будзе, як правіла, адрознівацца ад прыведзенага тут. Яно можа быць і карацей, і лепей. Ну, а калі і пасля пятай спробы не ўдалося зрушыцца з месца, то паглядзіце тут толькі пачатак рашэння. Да канца даводзіце яго самастойна. Лікавыя дадзеныя падстаўляйце на апошнім этапе рашэння.

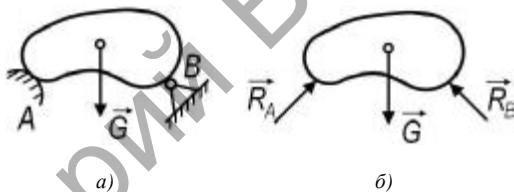
4. Пасля таго, як рашылі задачу, неабходна асэнсаваць (прааналізаваць) вынік. Найперш пераканайцеся, у якой меры вы мелі рацыю, калі прадказвалі вынік, у чым вас падвяла інтуіцыя. Звярніце ўвагу на знакі знойдзеных велічынь, якія параметры апынуліся ў лічніку, а якія ў назоўніку, у якой ступені яны ўвайшлі ў формулу і г. д. Калі застануцца сумненні, то падзяліцеся імі з выкладчыкам. Вярніцеся яшчэ раз да ўмовы задачы. Калі там ёсць якія-небудзь абмежаванні (напрыклад, не ўлічваецца вага, трэнне, памеры якіх-небудзь цел і інш.), то паспрабуйце якасна ацаніць, як зменіцца вынік без такіх абмежаванняў. Самастойна пастаўце шэраг іншых дадатковых пытанняў. У некаторых выпадках такія пытанні тут сфармуляваны, абмежаваны аб'ём дапаможніка не дазволіў зрабіць гэта ва ўсіх рэшаных задачах. Помніце, вывучыць механічныя з'явы, здабыць каштоўны досвед можна толькі падчас глыбокага аналізу вынікаў рашэння задачы.

5. Поспех студэнта ў вывучэнні гэтага дапаможніка залежыць ад яго настойлівасці, ад валявых якасцяў. З гэтага пункту гледжання дапаможнік можа служыць тэстам для самаацэнкі. Калі студэнт, нягледзячы на цяжкасці, крок за крокам рухаецца наперад, поспех яму забяспечаны. У працэсе работы стабілізуецца сіла волі, удасканалюецца інтэлект. Калі студэнт здолее разабрацца ва ўсіх змешчаных тут задачах, ён ужо становіцца на галаву вышэй сваіх аднакурснікаў і ў будучым лёгка спасцігае ўсе іншыя інжынерныя навукі.

## 1.2 Кароткія звесткі з тэоры

У статьицы разглядаецца механічнае ўзаемадзеянне паміж нерухомымі матэрыяльнымі аб'ектамі, пад якімі разумеюць матэрыяльныя пункты і іх сістэмы — абсалютна цвёрдыя целы. Механічныя сістэмы, якія складаюцца з некалькіх цвёрдых цел, прынята называць **складанымі** або **сучлененымі**. Мерай узаемадзеяння паміж матэрыяльнымі аб'ектамі служыць *механічная сіла* з уласцівасцямі вектара. Адрозніваюць сілы *знешнія* і *ўнутраныя*, *актыўныя* і *рэакцыі сувязей*. **Знешнімі** называюць

сілы ўзаемадзеяння дадзенай сістэмы з цэламі, якія не ўваходзяць у яе. Пад **унутранымі** разумеюць сілы ўзаемадзеяння паміж часткамі, што ўтвараюць сістэму. Вельмі важным паняццем у механіцы з'яўляецца сувязь. **Сувяззю** ў статыцы называюць цэла, якое абмяжоўвае свабоду перамяшчэння механічнай сістэмы або яе частак. Сувязі, як і сілы, могуць быць знешнімі і ўнутранымі, бо цэлы, што ўваходзяць у адну сістэму, перашкаджаюць узаемнаму перамяшчэнню. Сілы, з якімі сувязі дзейнічаюць на механічную сістэму, прынята называць **рэакцыямі сувязей**. Рэакцыі ўзнікаюць у выніку ўзаемадзеяння цэла паводле аксіёмы аб роўнасці дзеяння і супрацьдзеяння: сістэма дзейнічае (напрыклад, цісне) на сувязь, а тая «рэагуе» (супрацьдзейнічае) з дапамогай адваротнай сілы. Механічную сістэму, на якую не накладзены сувязі, называюць **свабоднай**. Паводле адной з аксіём статыкі, сувязі, якія перашкаджаюць руху сістэмы, можна адкідаць, замяняючы іх дзеянне рэакцыямі (рыс. 1.1). Звярніце ўвагу: рэакцыі  $R_A$  і  $R_B$  не здольны выклікаць рух цэла; іх з'яўленне абумоўлена сілай цяжару  $G$ , пры адсутнасці сілы  $G$  рэакцыі не ўзнікаюць. Сілы, якія могуць прывесці свабоднае цэла ў рух, называюць **актыўнымі**.



Рысунк 1.1

У статыцы разглядаюцца дзве асноўныя задачы. Першая асноўная задача складаецца ў эквівалентным пераўтварэнні сістэм сіл. Яна рашаецца на падставе тэарэм аб пераносе вектара сілы, уласцівасцей пар сіл і тэарэмы аб прывядзенні сістэм сіл да аднаго цэнтра (тэарэмы Пуансо). Апошняя дазваляе прывесці адвольную сістэму сіл  $(F_1, F_2, \dots, F_n)$  да аднаго цэнтра  $O$  і замяніць яе галоўным вектарам  $\vec{R}$  і галоўным момантам  $M_O$ , якія вылічаюцца па формулах:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad (1.1)$$

$$M_O = \sum_{i=1}^n M_O(\vec{F}_i). \quad (1.2)$$

Больш падрабязныя тэарэтычныя звесткі прыведзены ў раздзеле 4.

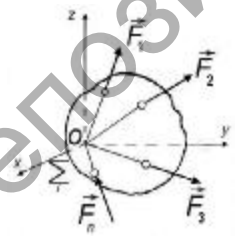
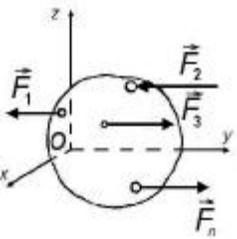
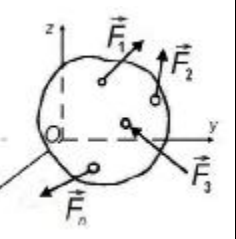
Другая асноўная задача статыкі складаецца ў вызначэнні сіл (у тым ліку рэакцый сувязей), момантаў пар сіл, геаметрычных параметраў сістэмы з умоў раўнавагі. Для раўнавагі цвёрдага цела, да якога прыкладзена якая-небудзь сістэма сіл, неабходна і дастаткова, каб галоўны вектар (1.1) і галоўны момант (1.2) гэтай сістэмы адносна любога цэнтра былі роўныя нулю, г. зн. павінна быць выканана ўмова

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0, \quad (1.3)$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i) = 0. \quad (1.4)$$

Калі спраектаваць вектарныя роўнасці (1.3) і (1.4) на восі дэкартавай сістэмы каардынат, то атрымаем аналітычныя ўмовы раўнавагі. Іх колькасць залежыць ад размяшчэння сіл у прасторы. Аналітычныя ўмовы раўнавагі змешчаны ў табліцах 1.1 і 1.2. Дадзены дапаможнік прысвечаны пераважна другой асноўнай задачы статыкі.

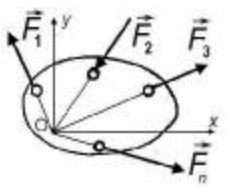
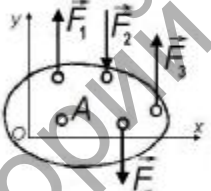
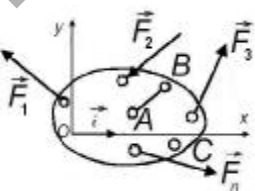
Табліца 1.1

Апісанне мадэлі	Прасторавая сістэма сіл		
	Сістэма сыходных сіл	Сістэма паралельных сіл	Агульны выпадак
Нагрузка			
Умовы раўнавагі	$\left. \begin{aligned} \sum X_i &= 0, \\ \sum_i Y_i &= 0, \\ \sum_i Z_i &= 0. \end{aligned} \right\} (1)$	$\left. \begin{aligned} \sum Y_i &= 0, \\ \sum_i M_x(\mathbf{F}_i) &= 0, \\ \sum_i M_z(\mathbf{F}_i) &= 0. \end{aligned} \right\} (2)$	$\left. \begin{aligned} \sum X_i &= 0, \\ \sum_i Y_i &= 0, \\ \sum_i Z_i &= 0. \end{aligned} \right\} (3)$

Заканчэнне табл. 1.1

Апісанне мадэлі	Прасторавая сістэма сіл		
	Сістэма сыходных сіл	Сістэма паралельных сіл	Агульны выпадак
Умовы раўнавагі			$\left. \begin{aligned} \sum_i M_x(\mathbf{F}_i) &= 0, \\ \sum_i M_y(\mathbf{F}_i) &= 0, \\ \sum_i M_z(\mathbf{F}_i) &= 0. \end{aligned} \right\} (4)$

Табліца 1.2

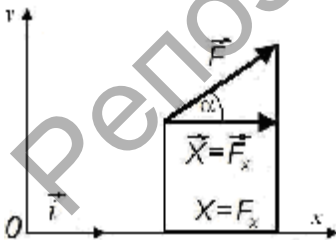
Апісанне мадэлі	Прасторавая сістэма сіл		
	Сістэма сыходных сіл	Сістэма паралельных сіл	Агульны выпадак
Нагрузка			
Умовы раўнавагі	$\left. \begin{aligned} \sum_i X_i &= 0, \\ \sum_i Y_i &= 0. \end{aligned} \right\} (1)$	$\left. \begin{aligned} \sum_i Y_i &= 0, \\ \sum_i M_A(\mathbf{F}_i) &= 0. \end{aligned} \right\} (2)$	$\left. \begin{aligned} \sum_i X_i &= 0, \\ \sum_i Y_i &= 0, \\ \sum_i M_A(\mathbf{F}_i) &= 0. \end{aligned} \right\} (3)$ $\left. \begin{aligned} \sum_i X_i &= 0, \\ \sum_i M_A(\mathbf{F}_i) &= 0, \\ \sum_i M_B(\mathbf{F}_i) &= 0, \\ \cos(\mathbf{AB}, \mathbf{i}) &\neq 0. \end{aligned} \right\} (4)$

Апісанне мадэлі	Прасторавая сістэма сіл		
	Сістэма сыходных сіл	Сістэма паралельных сіл	Агульны выпадак
			$\left. \begin{aligned} \sum_i M_A(\mathbf{F}_i) &= 0, \\ \sum_i M_B(\mathbf{F}_i) &= 0, \\ \sum_i M_C(\mathbf{F}_i) &= 0. \end{aligned} \right\} (5)$ <p>Цэнтры А, В, С не ляжаць на адной прамой</p>

**УВАГА!**

1. У табліцы 1.2 усе сілы змешчаны ў плоскасцях  $Oxy$ .
2. У табліцах 1.1, 1.2  $\sum_i$  раўназначна  $\sum_{i=1}^n$ .
3. У якасці восей праекцый можна выбіраць любыя непаралельныя восі; прамавугольная сістэма каардынат прымаецца абавязкова толькі ў тых выпадках, калі неабходна вылічыць велічыню раўнадзейнай сілы (або момантаў сіл) праз яе складовыя па формуле  $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ .

Да таго, як прыступіць да рашэння задач, неабходна самастойна навучыцца праектаваць сілы на восі і на плоскасці, лёгка знаходзіць моманты сіл адносна пунктаў і восей, а таксама вывучыць уласцівасці пар сіл. Пры гэтым неабходна звярнуць увагу на наступныя палажэнні:



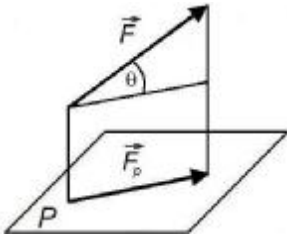
Рысунк 1.2

1. Праекцыя сілы  $F$  на любую вось, напрыклад  $Ox$ , вызначаная па формуле  $X \equiv F_x = F \cos \alpha$ , з'яўляецца скалярнай велічынёй, тады як складовая сілы  $\mathbf{X} \equiv \mathbf{F}_x$ , што паралельны да восі  $Ox$ , — вектар (рыс. 1.2). Суадносіны паміж імі выражаюцца формулай  $\mathbf{X} = X\mathbf{i}$ , дзе  $\mathbf{i}$  — адзінкавы орт<sup>1</sup> восі  $Ox$ .

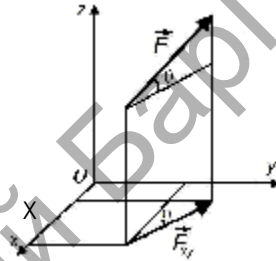
<sup>1</sup> Булыка А. М. Слоўнік іншамоўных слоў : у 2 т. Мн. : БелЭн, 1999. — Т. 2 — С. 139.

2. Праекцыя сілы  $F$  на плоскасць  $P$  з'яўляецца вектарам, модуль якога  $F_p = F \cos \theta$  (рыс. 1.3).

3. Калі сіла  $F$  і вось  $Ox$  не ляжаць у адной плоскасці, то для вылічэння праекцыі сілы на вось неабходна спачатку знайсці праекцыю сілы на плоскасць, што праходзіць праз вось (напрыклад на каардынатную плоскасць  $Oxy - \vec{F}_{xy}$ ), а затым вызначыць праекцыю вектара  $\vec{F}_{xy}$  на вось  $Ox$  (рыс. 1.4) па формуле  $X = F_{xy} \cos \alpha = F \cos \theta \cos \alpha$ .

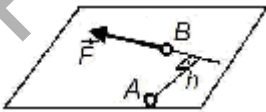


Рысунк 1.3

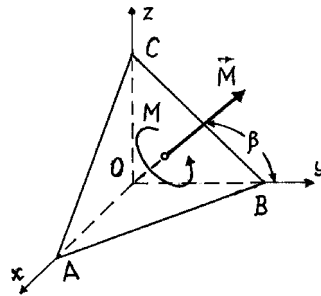


Рысунк 1.4

4. Плячом  $h$  сілы  $F$  называецца найкарацейшая адлегласць ад цэнтра момантаў  $A$  (рыс. 1.5, а) да лініі дзеяння сілы.



а)



б)

Рысунк 1.5

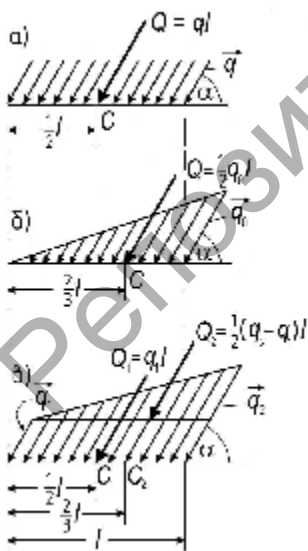
5. Пры вызначэнні знака моманту сілы адносна восі неабходна глядзець на сілу з дадатнага накірунку восі. Калі будзе відаць, што сіла накіравана адносна яе супраць руху стрэлкі гадзінніка, то знак прымаецца дадатным. Варта звяртаць асаблівую ўвагу на знак моманту з мэтай папярэджвання памылак і развіцця прасторавага ўяўлення.

6. Калі сіла  $F$  знаходзіцца ў адной плоскасці з воссю, то яе момант адносна гэтай восі роўны нулю. Такая сіла не здольна вярцець цела вакол восі, яна можа толькі перамяшчаць яго паступальна, у прыватнасці, уздоўж восі.

7. Праекцыя пары сіл на любую вось, размешчаную ў яе плоскасці, роўна нулю, а яе момант адносна любога пункта роўны ўласнаму моманту пары (г. зн. не залежыць ад выбару пункта). Апошняя сцвярджэнне справядліва і для моманту пары адносна восі, калі плоскасць пары перпендыкулярна да восі.

У тых выпадках, калі плоскасць дзеяння пары сіл нахілена да восей каардынат, для вызначэння яе моманту адносна гэтых восей пару зручна прадставіць у выглядзе вектара, перпендыкулярнага да плоскасці дзеяння. На рысунку 1.5, б, вектар  $M$  перпендыкулярны да плоскасці  $ABC$ , а момант пары  $M$  адносна восі  $Oy$  роўны праекцыі вектара  $M$  на вось:

$M_y = M \cos \beta$ . Такім чынам, момант пары адносна восі вызначаецца як і праекцыя сілы на вось.



Рысунк 1.6

8. Калі да цела разам з сіламі прыкладзены і пары сіл, то іх моманты неабходна ўлічваць ва ўмовах раўнавагі, якія апісаны сістэмамі (2)—(4) табліцы 1.1, (1)—(5) табліцы 1.2, уключаючы ў сумы момантаў сіл.

9. Пры вылічэнні момантаў сіл адносна пункта (або восі) мэтазгодна выкарыстоўваць *тэарэму Варыньёна*: момант раўнадзейнай сістэмы сіл адносна цэнтра (або восі) роўны суме момантаў яе складовых адносна гэтага цэнтра (восі).

10. Пры наяўнасці размеркаванай нагрузкі  $q$  яе трэба замяніць раўнадзейнай  $Q$ . Лінія дзеяння  $Q$  праходзіць праз цэнтр паралельных сіл  $S$ . Некаторыя выпадкі прывядзення да раўнадзейнай паказаны на рысунку 1.6.

Велічыня і пункт прыкладання раўнадзейнай не залежаць ад вугла  $\alpha$ . Трапецыядальную нагрузку (рыс. 1.6, в) мэтазгодна прадставіць дзвюма засяроджанымі сіламі:  $Q_1 = q_1 l$  і  $Q_2 = \frac{1}{2}(q_2 - q_1)l$ . У больш складаных выпадках раўнадзейную і пункт яе прыкладання вызначаюць з дапамогай інтэгравання (гл. задачу 2.1).

11. Нямаюць цяжкасцей пры рашэнні задач выклікае ўлік сіл трэння. Законы трэння трэба вывучыць па падручніку. Адрозніваюць трэнне слізгання (трэнне першага роду) і трэнне качэння (трэнне другога роду). Пры вывучэнні раўнавагі цела з улікам трэння ўсе прыкладзеныя да яго сілы можна аб'яднаць у дзве групы: тыя, што імкнуцца прывесці цела ў рух, і сілы супраціўлення, што ўзнікаюць дзякуючы трэнню. У стане спакою цела гэтыя сілы ўраўнаважваюцца. Сілы трэння (рэакцыі) заўсёды процілеглыя па напрамку да актыўных сіл. Прыкладзеныя да цела сілы змяняюцца ў вызначаным дыяпазоне (прымаюць мноства значэнняў), не парушаючы раўнавагі цела. Межы вобласці раўнавагі цела вызначаюцца гранічнымі значэннямі сілы трэння слізгання  $F$  і моманту трэння качэння  $M$  і маюць від:

$$F \leq fN, \tag{1.5}$$

$$M \leq \delta N, \tag{1.6}$$

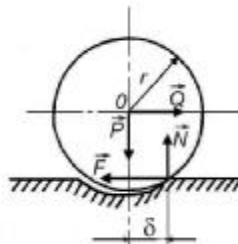
дзе  $f, \delta$  — каэфіцыент трэння слізгання і качэння адпаведна;

$N$  — нармальнае складовае рэакцыі паверхні, вызначае з умовы раўнавагі цела.

12. Спынімся на практычна важным выпадку — цыліндр вагою  $P$  і радыусам  $r$  знаходзіцца на шурпатай гарызантальнай плоскасці (рыс. 1.7). Паколькі тут  $N = P$ ,  $F = Q$  і  $M = \delta N = Qr$ , то ўмовы (1.5) і (1.6) можна прадставіць у выглядзе няроўнасцей:

$$Q \leq fP, \tag{1.7}$$

$$Q \leq \frac{d}{r}P. \tag{1.8}$$



Рысунак 1.7

Як відаць, формулы (1.7) і (1.8) адрозніваюцца толькі каэфіцыентамі пры  $P$ ,

г. зн. характарыстыкамі супраціўлення. Паміж імі магчымы тры суадносіны:  $\frac{d}{r} < f$ ,  $\frac{d}{r} > f$ ,  $\frac{d}{r} = f$ .

Розныя станы цыліндра на плоскасці для гэтых суадносін пры змене сілы  $Q$  прыведзены ў табліцы 1.3.

**УВАГА!**

1. Звычайна  $\frac{\delta}{r} \ll f$ , таму для качэння цыліндра патрабуецца значна меншая сіла  $Q$ , чым для слізгання.
2. Табліца 1.3 справядлівая толькі для выпадку, калі сіла  $Q$  прыкладзена да восі цыліндра.

13. Пры аналізе раўнавагі складаных сістэм аксіёма аб зацвярдзенні дазваляе разглядаць такія сістэмы або іх часткі з некалькіх цел як адно цела. Гэта нярэдка прыводзіць да скарачэння рашэння задачы. Трэба памятаць, што пры раздзяленні такіх сістэм, сілы ўзаемадзеяння паміж часткамі — рэакцыі ўнутраных сувязей — накіроўваюцца ў процілеглыя бакі. Пры аналізе сістэм, якія складаюцца з вялікай колькасці цел, карысна

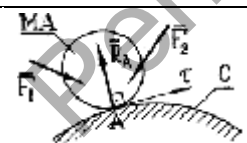
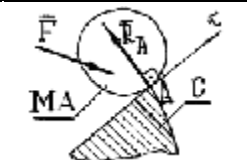
Табліца 1.3

Суадносіны характарыстык супраціўлення руху	Граніцы змянення сілы $Q$	Стан цыліндра на плоскасці
1. $\frac{\delta}{r} \ll f$	$Q \leq \frac{\delta}{r} P$	У раўнавазе
	$fP \leq Q \leq \frac{\delta}{r} P$	Коціцца без слізгання
	$Q \geq fP$	Коціцца і слізае
2. $\frac{\delta}{r} \ll f$	$Q \leq fP$	У раўнавазе
	$\frac{\delta}{r} P \leq Q \leq fP$	Слізае без качэння
	$Q \geq \frac{\delta}{r} P$	Слізае і коціцца
3. $\frac{\delta}{r} = f$	$Q \leq \frac{\delta}{r} P$	У раўнавазе
	$Q \geq \frac{\delta}{r} P$	Слізае і коціцца


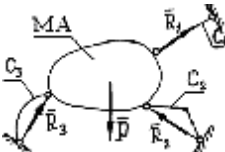
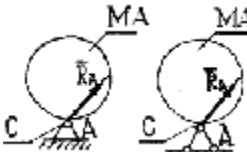
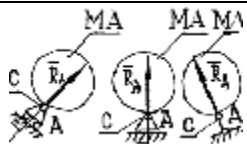


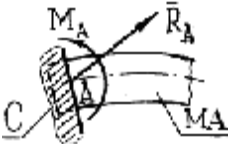
ўмець вызначаць лініі дзеяння поўных рэакцый сувязей (у тым ліку ўнутраных), бо раскладанне іх на складовыя патрабуе аналізу большай колькасці ўраўненняў. У гэтым дапамагаюць аксіёмы аб абсалютна цвёрдым целе і тэрэмы аб трох сілах.

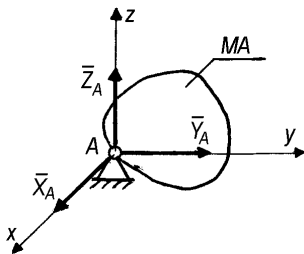
14. Як вядома, большасць аб'ектаў тэхнікі ўяўляюць сабою несвабодныя механічныя сістэмы. Для вызначэння рэакцый сувязей несвабодныя аб'екты прыводзяць да свабодных. Каб пазбегнуць памылак пры вызваленні матэрыяльных аб'ектаў ад сувязей, неабходна цвёрда засвоіць уласцівасці сувязей. Найбольш пашыраныя віды плоскіх сувязей і іх рэакцыі прыведзены ў табліцы 1.4, дзе сувязі, іх рэакцыі і матэрыяльныя аб'екты абазначаны адпаведна літарамі *C*, *R*, *MA*. Самае галоўнае пры вывучэнні табліцы — зразумець, а не запомніць, якія рэакцыі адпавядаюць той ці іншай сувязі. А для гэтага дастаткова толькі ведаць, што *рэакцыя сувязі* — гэта сіла супрацьдзеяння матэрыяльнаму аб'екту. Сапраўды, на матэрыяльны аб'ект дзейнічаюць актыўныя сілы, якія імкнуцца зрушыць яго; але гэта не дазваляюць зрабіць накладзеныя на аб'ект сувязі. Напрамак супрацьдзеяння (напрамак рэакцыі) можна ўбачыць з рысунка аб'екта і сувязі. Калі сувязь дапускае ў якім-небудзь напрамку перамяшчэнне аб'екта, то яе супрацьдзеянне ў гэтым напрамку адсутнічае і адпаведная рэакцыя не ўзнікае. Колькасць абмежаванняў, якія накладвае сувязь на матэрыяльны аб'ект, будзем абазначаць літарай *z* і называць **валентнасцю сувязі**. Сувязь, для якой *z* = 1, называецца **простай** (аднавалентнай). *Колькасць рэакцый сувязі* (альбо яе кампанент) роўна яе валентнасці.

Табліца 1.4

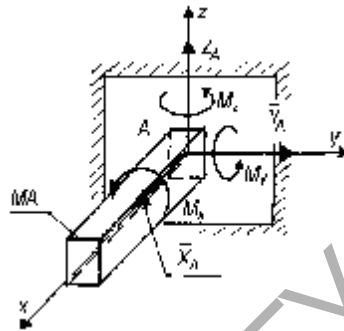
Схема	Назва сувязі <i>C</i>	Валентнасць сувязі <i>z</i>	Заўвага
	Гладкая паверхня	1	Рэакцыя перпендыкулярна да паверхні сувязі ( $\vec{R}_A \perp A_t$ )
	Гладкая паверхня са зломам (на лініі AA')	1	Рэакцыя перпендыкулярна да паверхні матэрыяльнага аб'екта ( $\vec{R}_A \perp A_t$ )

Заканчэнне табл. 1.4

Схема	Назва сувязі С	Валентнасць сувязі z	Заўвага
3. 	Бязважкая ніць (трос, канат, ланцуг, вяроўка і інш.)	1	Рэакцыя накіравана па ніці ад MA
4. 	Ненагружаны бязважкі стрыжань з шарнірамі на канцах	1	Рэакцыя накіравана па прамой, якая праходзіць праз шарніры стрыжня
5. 	Ідэальны нерухомы цыліндрычны шарнір	2	Рэакцыя праходзіць праз цэнтр шарніра і перпендыкулярна да яго восі
6. 	Ідэальны рухомы цыліндрычны шарнір	1	Рэакцыя перпендыкулярна да паверхні, на якой замацаваны шарнір
7. 	Слізгальнае замацаванне	2	Рэакцыя перпендыкулярна да плоскасці слізгання MA
8. 	Падвойнае слізгальнае замацаванне	1	Рэактыўная пара M дзейнічае ў плоскасці на грузкі MA
9. 	Жорсткае замацаванне	3	Сячэнне A матэрыяльнага аб'екта (сувязь) нерухома. RA, MA дзейнічаюць у плоскасці на грузкі $\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A$



Рысунак 1.8



Рысунак 1.9

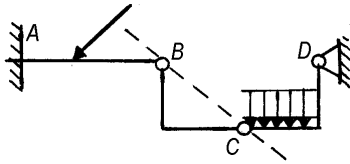
Акрамя плоскіх, выкарыстоўваюцца прасторавыя сувязі: ідэальны нерухомы сферычны шарнір (рыс. 1.8) і жорсткае замацаванне (рыс. 1.9), валентнасці якіх роўны тром і шасці адпаведна.

### 1.3 Методыка рашэння другой асноўнай задачы статыкі

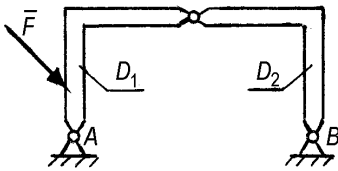
Сутнасць гэтай задачы, як выкладзена ў падраздзеле 1.2, заключаецца ў вызначэнні сілавых і геаметрычных параметраў механічнай сістэмы з умоў раўнавагі. Асартымент задач, што належаць да гэтай групы, вельмі шырокі і разнастайны. І толькі строга прытрымліваючыся вызначанай паслядоўнасці дзеянняў, можна пазбегнуць памылак пры іх рашэнні. Разгледзім гэтую паслядоўнасць.

1. Вывучаем зададзеную механічную сістэму і *выбіраем на рысунку аб'ект раўнавагі*, г. зн. матэрыяльны або геаметрычны пункт (вузел), цэла ці сістэму цэлаў, для якіх неабходна скласці ўмовы раўнавагі. Каб гэтыя ўмовы ўтрымлівалі шукаемыя рэакцыі сувязей і невядомыя сілы, то адпаведныя сувязі павінны быць накладзены на гэты аб'ект і на яго павінны дзейнічаць невядомыя сілы. Такім чынам, неабходныя прыкметы для вылучэння аб'екта раўнавагі закладзены ва ўмове задачы. Калі разглядаецца простая механічная сістэма з адным нагружаным целам, то яно і з'яўляецца аб'ектам раўнавагі. Пры аналізе складаных сістэм, утвораных з  $n$  цэлаў, такіх аб'ектаў будзе  $n$ : трэба разглядаць раўнавагу

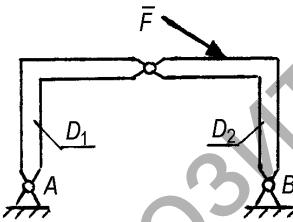
кожнага цела асобна альбо раўнавагу ўсёй сістэмы цалкам і  $(n - 1)$ -го цела паасобку. Калі пры гэтым у складаную сістэму ўваходзяць ненагружаныя целы, то іх можна разглядаць як сувязі і не запісваць для



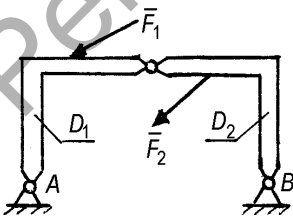
Рысунк 1.10



а)



б)



в)

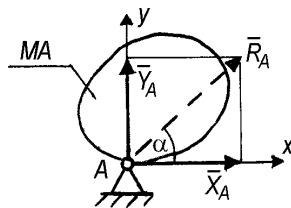
Рысунк 1.11

іх умоў раўнавагі. І тады колькасць аб'ектаў раўнавагі зменшыцца, рашэнне задачы будзе прасцейшым. У якасці прыклада разгледзім механічную сістэму з трох целаў (рыс. 1.10):  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ . Да стрыжня  $BC$  сілы не прыкладзены, значыць ён уяўляе ўнутраную сувязь, якая змешчана ў табліцы 1.4 (радок 4) як  $C_2$ . Пры гэтым лініі дзеяння рэакцый у шарнірах  $B$  і  $C$  накіраваны па прамой  $BC$ .

Адно і тое ж цела ў складзе механічнай сістэмы ў залежнасці ад дзеючых на яго сіл можа разглядацца ў якасці сувязі альбо аб'екта раўнавагі. Так, на рысунку 1.11, а, цела  $D_1$  з'яўляецца аб'ектам раўнавагі, цела  $D_2$  — сувяззю, а на рысунку 1.11, б, — наадварот. На рысунку 1.11, в, неабходна вылучыць два аб'екты раўнавагі  $D_1$  і  $D_2$ .

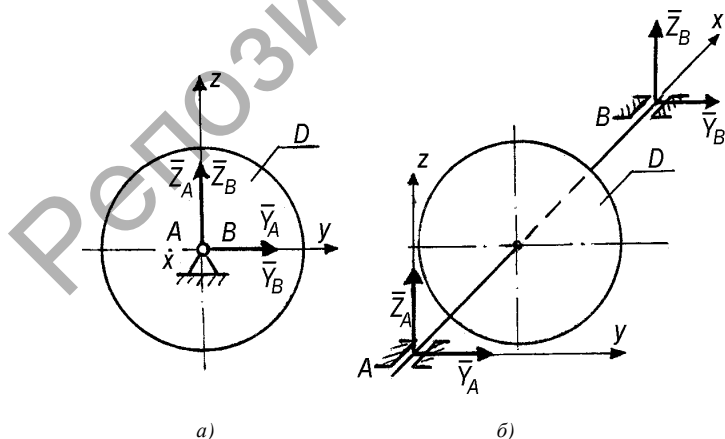
2. *Вызваляем выбраны аб'ект ад накладзеных на яго сувязей, сувязі замяняем іх рэакцыямі. Пры гэтым мэтазгодна выканаць новы рысунк без сувязей. Перад выкананнем гэтага дзеяння неабходна паўтарыць п. 14 (падроздзел 1.2) і затым кіравацца інфармацыяй, змешчанай у табліцы 1.4. Як ужо адзначалася, колькасць рэакцый роўна валентнасці сувязі. Больш дакладна гэта сцвярдженне можна сфармуляваць так: *колькасць невядомых параметраў рэакцыі роўна валентнасці адпаведнай сувязі*. Такімі параметрамі рэакцыі (як і любога вектара) могуць быць: модуль рэакцыі і вугал яе нахілу да восі каардынат альбо кампаненты*

вектора — яго складовыя па восях каардынат. Больш зручна пры рашэнні задач карыстацца апошнімі параметрамі. Так, на рысунку 1.12 ідэальны нерухомы шарнір пасля вызвалення  $MA$  заменены кампанентамі  $\vec{X}_A$  і  $\vec{Y}_A$  вектара  $\vec{R}_A$  (можна было б прыняць у якасці невядомых параметры  $R_A$  і  $\alpha$ ). Для трохвалентнай сувязі  $A$  на рысунку 1.8 невядомымі параметрамі будуць складовыя  $X_A$ ,  $Y_A$  і  $Z_A$ , а для шасцівалентнай на рысунку 1.9 —  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $Z_A$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  і  $M_z$ . Пры вызваленні матэрыяльнага аб'екта ад плоскага жорсткага замацавання (сувязь № 9 у табліцы 1.4) у якасці невядомых прымаюцца  $X_A$ ,  $Y_A$  і  $M_A$ .



Рысунк 1.12

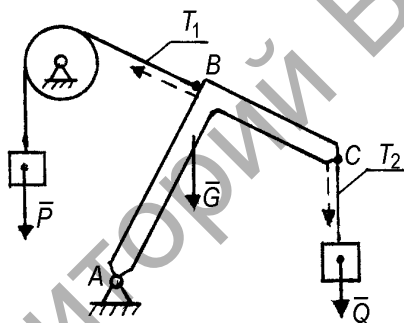
У прасторавым аб'екце графічны выгляд накладзенай сувязі можа адрознівацца ад яе плоскай выявы ў табліцы 1.4. І гэта часам прыводзіць да памылак пры вызваленні ад сувязей. У якасці прыкладу на рысунку 1.13 паказаны дыск  $D$ , вось якога замацавана з дапамогай ідэальных нерухомых цыліндрычных шарніраў  $A$  і  $B$  (іх тэхнічная назва — падшыпнікі). На плоскім рысунку 1.13, *a*, сувязі  $A$  і  $B$  супадаюць. Іх тыпы лёгка ўстанаўліваюцца. Аднак на аксанаметрычным рысунку 1.13, *б*, яны памылкова ўспрымаюцца як слізгальныя замацаванні № 7 (табл. 1.4) з рэактыўным момантам.



Рысунк 1.13

У далейшым складовыя  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $Z_A$ , як і іх раўнадзейную  $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$ , будзем называць адным словам — рэакцыя.

Пры вызваленні аб'екта ад сувязей неабходна памятаць, што не ўсе целы, прымацаваныя да яго, з'яўляюцца сувязямі. Каб не памыліцца, трэба цвёрда кіравацца азначэннем: **связь** — гэта цела, якое ўтрымлівае аб'ект ад перамяшчэння; сувязь не можа выклікаць рух аб'екта. На рысунку 1.14 аб'ектам раўнавагі з'яўляецца стрыжань  $ABC$ . Прымацаваныя да яго ў пунктах  $B$  і  $C$  тросы  $T_1$  і  $T_2$  часам памылкова разглядаюць як сувязі. На самой справе яны не з'яўляюцца сувязямі — праз іх перадаюцца на стрыжань  $ABC$  актыўныя сілы  $P$  і  $Q$ , якія імкнуцца рухаць аб'ект. Пры рашэнні задачы сілы цяжару  $P$  і  $Q$  трэба перанесці ў пункты  $B$  і  $C$ , як паказана на рысунку 1.14 пункцірам, а целы адкінуць.



Рысунк 1.14

3. *Складаем умовы раўнавагі* для аб'ектаў, выбраных у п. 1 (падроздзел 1.3). Пры гэтым карыстаемся табліцамі 1.1, 1.2 і ўсімі рэкамендацыямі, прыведзенымі ў падраздзеле 1.2. Перш за ўсё трэба звярнуць увагу, якая сістэма сіл дзейнічае на аб'ект раўнавагі — плоская ці прасторавая. Затым з табліцы 1.1 ці 1.2 выбраць адпаведныя ўмовы раўнавагі. Далейшы поспех залежыць ад умення знаходзіць праекцыі сіл на восі каардынат і моманты сіл адносна цэнтраў ці восей.

Калі на аб'ект дзейнічае плоская сыходная сістэма сіл, то задачу можна хутчэй рашыць графічна, пабудаваўшы замкнёны многавугольнік сіл. І надзвычай проста рашаецца задача, калі да цела прыкладзена толькі адна сіла і магчыма прымяненне тэарэмы аб трох сілах.

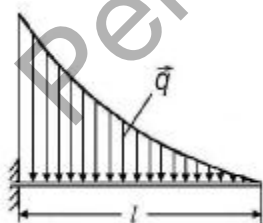
4. Рашаем атрыманую ў п. 3 (падроздзел 1.3) сістэму алгебраічных ураўненняў. У правільна складзенай сістэме колькасць невядомых велічынь роўна колькасці ўраўненняў раўнавагі. Частка знойдзеных у выніку рашэння рэакцый можа мець знак «мінус». Гэта азначае, што сапраўдны напрамак адмоўных рэакцый процілеглы іх напрамку, паказанаму на рысунку, дзе гэты напрамак выбіраўся адвольна. Мяняць напрамак адмоўных рэакцый на рысунку не патрэбна. Неабходна выканаць праверку правільнасці рашэння. Для гэтага можна падставіць знойдзеныя велічыні ва ўраўненні раўнавагі. Больш эфектыўнай будзе праверка, калі скласці суму момантаў адносна новага цэнтра і падставіць у яе знойдзеныя значэнні рэакцый.

## 2 РАЎНАВАГА ПЛОСКАЙ СІСТЭМЫ СІЛ

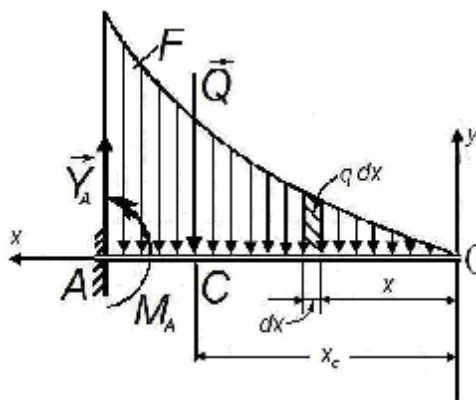
### 2.1 Раўнавага аднаго цела

#### Задача 2.1

Інтэнсіўнасць размеркаванай нагрузкі, прыкладзенай да кансольнай бэлькі даўжынёй  $l$ , прапарцыянальна квадрату адлегласці ад свабоднага канца (рыс. 2.1). Яе раўнадзейная роўна  $Q$ . Вызначыць рэактыўны момант замацавання.



Рысунк 2.1



Рысунк 2.2

### Рашэнне

Для атрымання адказу неабходна скласці ўмову раўнавагі бэлыкі  $\sum_i M_A(\dot{F}_i) = 0$ , аднак для гэтага не хапае каардынаты  $x_c$  пункту прыкладання раўнадзейнай размеркаванай нагрузкі  $Q$  (г. зн. пляча сілы  $Q$ ).

Увядзем восі каардынат з пачаткам у пункце  $O$ . Тады інтэнсіўнасць размеркаванай нагрузкі ў пункце, вызначым каардынатай  $x$ , паводле ўмовы задачы  $q = kx^2$ , дзе  $k$  — невядомы каэфіцыент прапарцыянальнасці. Лінія дзеяння раўнадзейнай  $Q$  праходзіць праз цэнтр цяжару плошчы  $F$ , абмежаванай графікам нагрузкі (рыс. 2.2).

Вызначым яго каардынату  $x_c$ . Для гэтага выкарыстаем формулу

$$x_c = S_0 / Q, \quad (2.1)$$

дзе  $S_0$  — статычны момант плошчы  $F$  адносна пункта  $O$ , роўны  $S_0 = \int_0^l qxdx$ ;

$Q$  — велічыня самой плошчы, роўная  $F = \int_0^l qdx$ .

Падстаўляючы ў роўнасць  $F = \int_0^l qdx$  выраз  $q = kx^2$ , знаходзім

статычны момант  $S_0$  і велічыню плошчы па формулах:  $S_0 = k \int_0^l x^3 dx = \frac{1}{4} kl^4$ ,

$$Q = k \int_0^l x^2 dx = \frac{1}{3} kl^3.$$

Па формуле (2.1) маем роўнасці:  $x_c = \frac{1}{4} kl^4 / \frac{1}{3} kl^3 = \frac{3}{4} l$  і  $h_Q = AC = \frac{1}{4} l$ . Вызваляемся ад сувязей і складаем умову раўнавагі бэлыкі. Атрымаем выраз

$$\sum_i M_A(\dot{F}_i) = M_A - Qh_Q = 0.$$

$$\text{Адгэтуль } M_A = Qh_Q = \frac{1}{4} Ql.$$

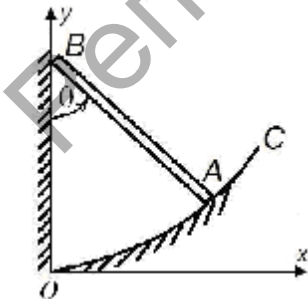
### Задача 2.2

Размещены в вертикальной плоскости однородный стержень  $AB$  длиной  $l$  и массой  $m$  опирается концом  $B$  у вертикальную стенку и концом  $A$  у поверхность  $OC$  (рис. 2.3). Найти уравнение кривой  $OC$  у системы координат  $xOy$ , на которой у любым становішчы, вызначаным вуглом  $\theta$ , стержень находзіцца ў раўнавазе. Трэнем ігнараваць.

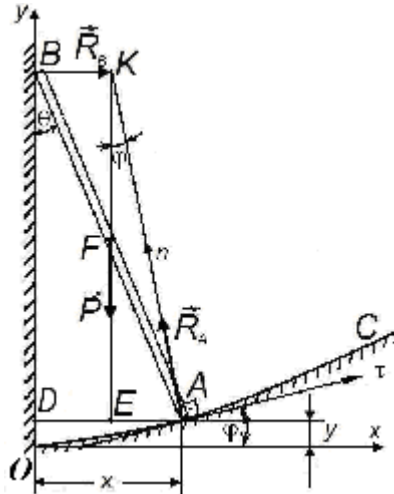
#### Рашэнне

Дзеянне сувязей на стержень замянем реакцыямі  $R_A$  і  $R_B$ . Сіла цяжару стержня  $P$  прыкладзена ў яго сярэдзіне  $F$ . Так як стержень находзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем трох сіл, то іх лініі дзеяння перасякаюцца ў адным пункце  $K$  (рис. 2.4). Пры гэтым реакцыя  $R_A$  перпендыкулярна да датычнай  $At$ . На гэтым вычэрпваецца прымяненне тэарэтычнай механікі і ў дзеянне ўступае матэматыка. Няхай  $\angle AKE = \varphi$ . З уласцівасці артаганальнасці старон вуглоў заключаем, што такі ж вугал утварае і датычная  $At$  з воссю  $Ox$ . Знайдзем залежнасць паміж каардынатамі канца  $A$  стержня ў адвольным становішчы на паверхні  $OC$ . Скарыстаемся ўласцівасцю вытворнай  $y'$  у пункце  $A$ , якая мае выгляд

$$y' = \operatorname{tg} \varphi. \quad (2.2)$$



Рысунк 2.3



Рысунк 2.4

Выразім  $\operatorname{tg}\varphi$  праз  $x$  і  $l$ . З рысунка 2.4 відаць, што  $\operatorname{tg}\varphi = \frac{AE}{EK} = \frac{AE}{BD} = \frac{x/2}{\sqrt{l^2 - x^2}}$ ; такім чынам,  $y' = x/2\sqrt{l^2 - x^2}$  або

$$dy = xdx/2\sqrt{l^2 - x^2}. \quad (2.3)$$

Інтэгруем роўнасць (2.3) і атрымаем выраз

$$y = -\frac{1}{2}\sqrt{l^2 - x^2} + C_1. \quad (2.4)$$

Паколькі крывая, апісаная ўраўненнем (2.4), праходзіць праз пачатак каардынат, то яе ўраўненню здавальняюць каардынаты  $x = 0$ ,  $y = 0$ , г. зн.  $0 = -\frac{1}{2}\sqrt{l^2 - 0} + C_1$ , адкуль  $C_1 = \frac{1}{2}l$ .

Канчаткова атрымліваем:  $y = \frac{1}{2}(l - \sqrt{l^2 - x^2})$ .

### Задача 2.3

Цыліндр вагой  $P$  і радыусам  $R$  ляжыць на шурпатай гарызантальнай плоскасці і дакранаецца шурпатай вертыкальнай сценкі (рыс. 2.5). Пры якім моманце пары сіл, прыкладзенай да цыліндра, ён будзе знаходзіцца ў раўнавазе, калі каэфіцыенты трэння слізгання цыліндра па гарызантальнай плоскасці і сценцы роўныя  $f_1$  і  $f_2$ ?

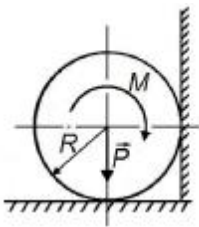
*Рашэнне*

Вызваем цыліндр ад накладзеных на яго сувязей. На цыліндр, як відаць з рысунка 2.6, дзейнічае плоская сістэма сіл. Складаем умовы раўнавагі:

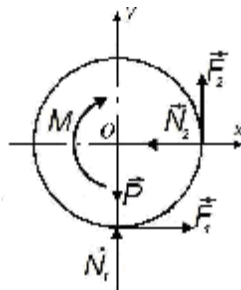
$$\sum X_i = F_1 - N_2 = 0, \quad (2.5)$$

$$\sum Y_i = N_1 + F_2 - P = 0, \quad (2.6)$$

$$\sum M_0(\vec{F}_i) = F_1 r + F_2 r - M = 0. \quad (2.7)$$



Рысунак 2.5



Рысунак 2.6

У стане гранічнай раўнавагі сілы трэння вызначаюцца па формулах:

$$F_1 = f_1 N_1, \quad F_2 = f_2 N_2. \quad (2.8)$$

З ураўнення (2.4) знаходзім велічыню  $M$ :

$$M = (F_1 + F_2)r. \quad (2.9)$$

Далей рашаем сумесна ўраўненні (2.5) і (2.6) і ўлічваем залежнасці (2.8).

Атрымліваем  $F_1$  і  $F_2$ :  $F_1 = \frac{f_1 P}{1 + f_1 f_2}, \quad F_2 = \frac{f_1 f_2 P}{1 + f_1 f_2}.$

Падстаўляем  $F_1$  і  $F_2$  у формулу (2.9).

Атрымліваем:

$$M = \frac{(1 + f_2)}{(1 + f_1 f_2)} f_1 r P. \quad (2.10)$$

Гэта гранічнае значэнне моманту пары сіл, пры якім цыліндр яшчэ будзе заставацца ў стане раўнавагі. А найменшае яго значэнне роўна нулю. З формулы (2.10) відаць, што гранічная велічыня  $M$  залежыць ад шурпатасці паверхняў, у кантакце з якімі знаходзіцца цыліндр. Так, пры  $f_1 = 0$ ,  $M = 0$ , г. зн. пры любым  $M > 0$  раўнавага цыліндра будзе парушана. Як гэта растлумачыць? На першы погляд можа здацца, што пры  $f_1 = 0$  будзе адсутнічаць толькі гарызантальная сіла трэння  $F_1$  (гл. рыс. 2.6), а вертыкальная  $F_2$  павінна працягваць аказваць супраціўленне вярчэнню.

Больш уважлівы аналіз дазваляе заўважыць, што знікненне сілы  $F_1$  непазбежна вядзе да ператварэння ў нуль і сілы  $F_2$ . Калі няма «прыціскаючай» сілы  $F_1$ , адсутнічае і рэакцыя  $N_2 = F_1$ , а, такім чынам, і сіла  $F_2 = f_2 N_2$ . Далейшы аналіз працягвайце самастойна.

*Дадатковыя пытанні:*

1. Ці існуе такое значэнне моманту пары  $M$ , пры якім цыліндр будзе каціцца па вертыкальнай сценцы?

2. Якім будзе адказ на папярэдняе пытанне, калі сценка ўтвораць тупы вугал з гарызантальнай плоскасцю?

### Задача 2.4

Скрыня вагі  $P$  знаходзіцца на шурпатай гарызантальнай плоскасці з каэфіцыентам трэння  $f$  (рыс. 2.7). Вызначыць, пад якім вуглом  $\beta$  трэба прыкладзі сілу  $Q$  і велічыню гэтай сілы, каб зрушыць скрыню пры найменшай велічыні  $Q$ .

*Рашэнне*

Пераканаемся спачатку, што велічыня сілы  $Q$ , якую трэба знайсці, залежыць ад вугла  $\beta$ . Каб зрушыць скрыню, союваючая сіла  $Q' = Q \cos \beta$  павінна пераадолець супраціўленне, што аказваецца сілай трэння  $T$ . Прыем, што  $\beta = 0$ , тады відавочна, што рух скрыні пачнецца пры  $Q' = Q = T = fN$ , дзе  $N = P$ . Пры ўзрастанні вугла  $\beta$  сіла трэння  $T$  будзе меншаць, бо пры гэтым памяншаецца рэакцыя  $N$  — сіла  $Q$  імкнецца прыпадняць скрыню. Гэта, аднак, не азначае, што скрыню можна зрушыць з дапамогай меншай сілы  $Q$ . З прыведзенай у пачатку

формулы вынікае, што  $Q = \frac{Q'}{\cos \beta} = \frac{T}{\cos \beta}$ . У гэтай формуле пры ўзрастанні

вугла  $\beta$  памяншаюцца лічнік і назоўнік. Такім чынам, зрабіць якую-небудзь выснову аб характары змянення сілы  $Q$  цяжка. Неабходна правесці даследаванне на экстрэмум. Для гэтага спачатку знойдзем выраз сілы  $Q$  у выглядзе функцыі вугла  $\beta$ . Звернемся да ўмоў раўнавагі скрыні (рыс. 2.8):

$$\sum_i X_i = Q \cos \beta - T = 0, \quad (2.11)$$

$$\sum_i Y_i = N + Q \sin \beta - P = 0. \quad (2.12)$$

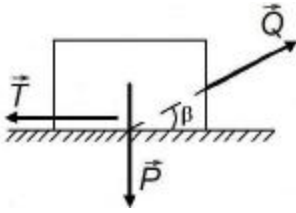


Рисунок 2.7

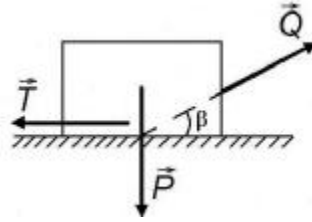


Рисунок 2.8

Рашаючы сумесна ўраўненні (2.11) і (2.12) з улікам гранічнай залежнасці  $T = fN$ , атрымліваем сілу

$$Q = \frac{fP}{(\cos \beta + f \sin \beta)}. \quad (2.13)$$

Знаходзім вытворную  $\frac{dQ}{d\beta}$  і прыраўноўваем яе да нуля:

$$\frac{dQ}{d\beta} = \frac{fP(-\sin \beta + f \cos \beta)}{(\cos \beta + f \sin \beta)^2} = 0,$$

або  $-\sin \beta + f \cos \beta = 0$ ; адгэтуль  $\operatorname{tg} \beta = f$  і  $\beta = \operatorname{arctg} f$ .

Паколькі  $\sin \beta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}}$ ,  $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + f^2}}$ , то паводле

формулы (2.13) атрымаем велічыню  $Q_{\min}$ :  $Q_{\min} = \frac{fP}{\frac{1}{\sqrt{1 + f^2}} + \frac{f^2}{\sqrt{1 + f^2}}}$

або  $Q_{\min} = \frac{fP}{\sqrt{1 + f^2}}$ .

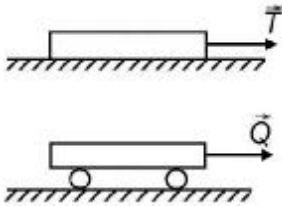
Карыстаючыся другой вытворнай функцыі  $Q$ , пакажыце, што ў крытычным пункце  $\beta = \operatorname{arctg} f$  велічыня  $Q$  сапраўды мае мінімальнае значэнне, а не максімальнае.

### Задача 2.5

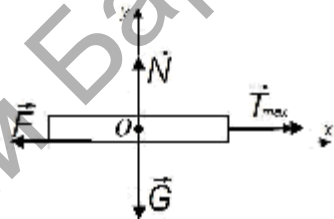
Визначить суадносіны паміж максімальнымі значэннямі гарызантальных сіл  $T$  і  $Q$ , прыкладзеных да аднаго і таго ж цяжкага бруса, пры якіх брус будзе заставацца ў раўнавазе непасрэдна на шурпатай гарызантальнай плоскасці і на двух апорных катках (рыс. 2.9). Каэфіцыент трэння слізгання  $f = 0,1$ ; каэфіцыент трэння качэння па плоскасці і паверхні бруса  $k_1 = k_2 = k = 0,005$  см. радыус кожнага катка  $r = 5$  см. Вагой каткоў і папярэчнымі размерамі брусоў ігнараваць.

*Рашэнне*

Знойдзем спачатку сілу  $T_{\max}$  (рыс. 2.10).



Рысунак 2.9



Рысунак 2.10

Хай вага бруса роўна  $G$ . Вызваляемся ад сувязі і складаем умовы раўнавагі

$$\sum_i X_i = T_{\max} - F = 0, \quad (2.14)$$

$$\sum_i Y_i = N - G = 0, \quad (2.15)$$

дзе сіла трэння  $F = fN$ .

Рашаем сумесна ўраўненні (2.14) і (2.15), знаходзім  $T_{\max} = fG = 0,1G$ .

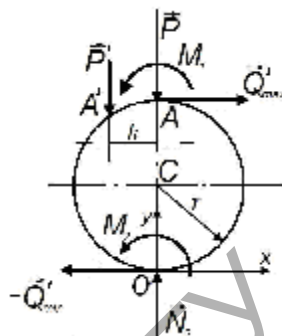
Визначым сілу  $Q_{\max}$ . Для гэтага разгледзім адзін з каткоў у стане гранічнай раўнавагі (рыс. 2.11). На яго перадаецца ціск ад цела  $P = \frac{G}{n}$ ,

дзе  $n$  – колькасць каткоў. У нашым выпадку  $P = \frac{G}{2}$ . Пара  $M_1$  з'явілася,

як і  $M_2$ , у выніку пераносу сілы  $P$  са становішча  $P'$  у становішча  $P$  (у гранічным палажэнні сіла  $P'$  прыкладзена злева ад восі катка  $C$ , бо ён імкнецца да качэння налева адносна бруса). Сіла  $Q'_{\max}$ , якая імкнецца зрушыць брус, прыкладзена да верхняй утваральнай катка  $A$  і роўна

$$Q'_{\max} = \frac{Q_{\max}}{n} = \frac{Q_{\max}}{2}.$$

Складаем умовы раўнавагі катка:



Рысунак 2.11

$$\sum_i M_0(\vec{F}_i) = M_1 + M_2 - Q'_{\max} 2r = 0, \quad (2.16)$$

$$\sum_i Y_i = N_2 - P = 0. \quad (2.17)$$

З ураўнення (2.17) вынікае, што  $N_2 = P = \frac{G}{2}$ .

У гранічнай раўнавазе  $M_1 = k_1 P = k_1 \frac{G}{2}$ ,  $M_2 = k_2 N_2 = k_2 \frac{G}{2}$ .

З ураўнення (2.16) знаходзім велічыню  $Q_{\max}$  (пры  $k_1 = k_2 = k$ ) па формуле  $Q'_{\max} = \frac{1}{2r}(M_1 + M_2) = \frac{kG}{2r}$ , адкуль  $Q_{\max} = 2Q'_{\max} = \frac{kG}{r} = 0,001G$ .

Шукаемыя суадносіны роўны  $\frac{T_{\max}}{Q_{\max}} = \frac{0,1G}{0,001G} = 100$ .

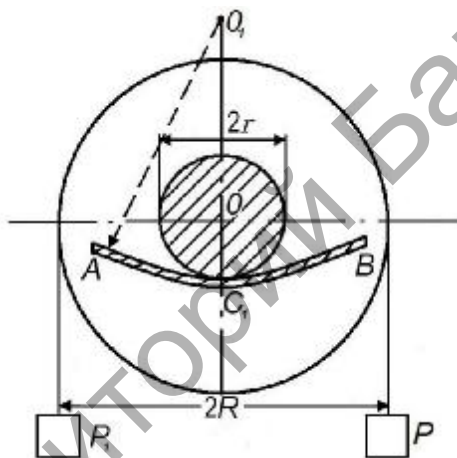
Як бачым, супраціўленне пры качэнні на два парадкі ніжэй, чым пры слізганні. Гэтай акалічнасцю тлумачыцца распаўсюджаны пераход у тэхніцы да трэння качэння.

*Дадатковыя пытанні:*

1. Прааналізуйце, як зменіцца вынік рашэння задачы, калі не ўлічваць трэнне качэння на паверхні блока?
2. Як уплывае колькасць каткоў на велічыню  $Q_{\max}$ ?
3. Як зменіцца  $Q_{\max}$ , калі ўлічыць вагу каткоў?

### Задача 2.6

Блок радыусам  $R$  з двума шыпамі радыусам  $r$  сіметрычна размешчаны адносна яго сярэдняй плоскасці (на рысунку 2.12 іх праекцыі супадаюць). Шыпы абапіраюцца на дзве цыліндрычныя паверхні  $AB$  з гарызантальнымі ўтваральнымі. На блок намотаны трос, да якога падвешаны грузы  $P$  і  $P_1$ , прычым  $P > P_1$ . Вызначыць найменшую велічыню грузу  $P_1$ , пры якой блок будзе знаходзіцца ў раўнавазе, мяркуючы, што каэфіцыент трэння шыпоў аб цыліндрычныя паверхні  $AB$  роўны  $f$ , а вага блока з шыпамі  $Q$ .

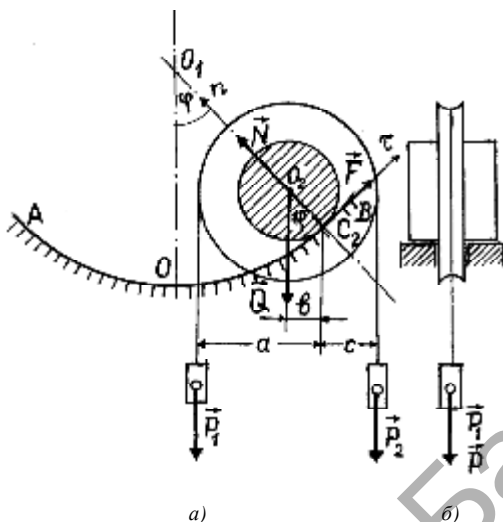


Рысунак 2.12

#### Рашэнне

Спачатку неабходна вывучыць канструкцыю блока з шыпамі. На падставе задазенага рысунка 2.12 трэба прадставіць бакавую праекцыю блока, затым зверыць адлюстраванне з рысункам 2.13, б, дзе нерухомыя цыліндрычныя паверхні памечаны штрыхоўкай. Пажадана правесці ўяўны эксперымент з блокам, нагрузіўшы яго сіламі  $P$  і  $P_1$ .

Калі сілы роўныя паміж сабою, або адсутнічаюць, то блок будзе займаць самае нізкае становішча на паверхні  $AB$  (гл. рыс. 2.12). Пры нагружэнні яго сіламі  $P > P_1$  з'яўляецца момант качэння адносна пункта  $C_1$ , накіраваны па гадзіннікавай стрэлцы, і пачынаецца качэнне



Рысунак 2.13

блока на шыпах направа. Магчымае становішча раўнавагі сістэмы  $O_1O_2$  пры  $P > P_1$  паказана на рысунку 2.13, а. Што мяшае блоку каціцца далей ад становішча раўнавагі? Назавём магчымыя дзве прычыны: а) момант качэння адносна пункта  $C_2$  памяншаецца, а момант супраціўлення ўзрастае, г. зн. у некаторым становішчы сістэмы  $Pc \leq (P_1a + Qb)$ ; б) наступае прабуксоўка шыпоў на апорах  $AB$ , пры якой блок можа здзяйсняць вярчальны рух вакол нерухомага пункта  $O_2$ . У апошнім выпадку сіла трэння слізгання  $F$  дасягае гранічнага значэння  $F = fN$ . Дапускаем, што рэалізуюцца дзве прычыны; пры гэтым прабуксоўка блока прадухіляецца належным падборам сілы  $P_1$  з умовы раўнавагі. Далей свядома прымяняем ужо вядомую методдыку рашэння. Вызваляемся ад сувязей  $AB$ , замяняем іх рэакцыямі  $N$  і  $F$ .

Запісваем умовы раўнавагі:

$$\sum F_{ix} = F - (Q + P_1 + P) \sin \varphi = 0,$$

$$\sum F_{iy} = N - (Q + P_1 + P) \cos \varphi = 0,$$

$$\sum M_{O_2}(\vec{F}_i) = -PR + P_1R + Fr = 0,$$

адкуль

$$F = (Q + P_1 + P) \sin \varphi, \quad (2.18)$$

$$N = (Q + P_1 + P) \cos \varphi, \quad (2.19)$$

$$Fr - (P - P_1)R = 0. \quad (2.20)$$

Дзелім левую і правую частку ўраўнення (2.18) на адпаведныя часткі ўраўнення (2.19). Улічваем, што  $F = fN$ . Атрымліваем:  $\operatorname{tg} \varphi = f$ , г. зн. вугал  $\varphi$  з'яўляецца вуглом трэння. Далей рашаем сумесна ўраўненні

$$(2.18) \text{ і } (2.20), \text{ пры гэтым улічваем, што } \sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}}.$$

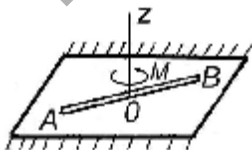
$$\text{Знаходзім сілу } P_1 \text{ па формуле } P_1 = \frac{P(R\sqrt{1+f^2} - fr) - frQ}{R\sqrt{1+f^2} + rf}.$$

### Задача 2.7

Аднародны стрыжань  $AB$  даўжынёю  $l$  і вагою  $P$  ляжыць на шурпатай гарызантальнай плоскасці (рыс. 2.14). Які па модулю момант  $M$  можа выклікаць вярчэнне стрыжня вакол восі  $Oz$ , што перпендыкулярна да апорнай плоскасці і праходзіць праз яго цэнтр, калі ціск стрыжня на плоскасць размеркаваны раўнамерна, а каэфіцыент трэння слізгання роўны  $f$ ?

#### Рашэнне

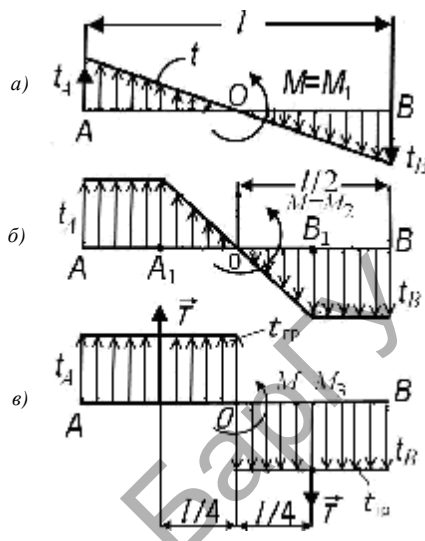
Абзначым інтэнсіўнасць размеркаванай сілы трэння праз  $t$ . Яна накіравана перпендыкулярна да стрыжня ў гарызантальнай плоскасці. Карысна прасачыць, як змяняецца інтэнсіўнасць  $t$  уздоўж стрыжня пры ўзрастанні моманту пары  $M$ . Пара імкнецца прывесці стрыжань у вярчальны рух, пры гэтым пункт, што ляжыць на восі  $Oz$ , застаецца нерухомым. Такім чынам, інтэнсіўнасць  $t$  у пункце  $O$  роўна нулю.



Рысунк 2.14

Да канцоў стрыжня пры малых значэннях моманту пары  $M = M_1$ , пры якіх інтэнсіўнасць сілы трэння яшчэ не дасягае гранічнага значэння  $t_{\text{гр}}$ , яна ўзрастае па лінейным законе. Размеркаванне інтэнсіўнасці ў гэтым стане паказана на рысунку 2.15, а, дзе прадстаўлены выгляд зверху. Пры гэтым  $t_A = t_B < t_{\text{гр}}$ . Пры

далейшым узрастанні моманту пары  $M$  інтэнсіўнасць  $t$  на канцах  $A$  і  $B$  дасягае гранічнага значэння, зона з гранічным значэннем  $t_{гр}$  паступова распаўсюджваецца да цэнтра стрыжня на ўчасткі  $AA_1$  і  $BB_1$  (рыс. 2.15, б). Аднак, стрыжань працягвае заставацца ў спакоі, паколькі на ўчастку  $A_1B_1$  велічыня  $t$  яшчэ не дасягнула значэння  $t_{гр}$ . І толькі калі інтэнсіўнасць сілы трэння прыме гранічнае значэнне ва ўсіх пунктах кантакта з плоскасцю, надыходзіць гранічная раўнавага стрыжня (рыс. 2.15, в). Гэты стан неабходна разгледзець, каб рашыць задачу. Складаем умову



Рысунак 2.15

раўнавагі:  $\sum_i M_o(F_i) = M - \frac{2Tl}{4} = 0$ , адкуль  $M = \frac{1}{2}Tl$ . Каб выклікаць рух стрыжня, неабходна прыкладзі да яго пару з момантам  $M$

$$M > \frac{1}{2}Tl. \tag{2.21}$$

Тут  $T = t_{гр} \frac{1}{2}l$  — раўнадзейная сіл трэння  $t_{гр}$ , прыкладзеных да паловы стрыжня (на рысунку 2.15, в, вызначаецца як плошча прамавугольніка).

$t_{гр} = fn$ ,  $n = \frac{N}{l}$  — інтэнсіўнасць размеркаванай нармальнай рэакцыі,  $N = P$  — нармальная рэакцыя плоскасці, знойдзеная з умовы раўнавагі

стрыжня  $\left( \sum_i Z_i = 0 \right)$  Такім чынам,  $T = \frac{1}{2}fnl = \frac{1}{2}fN = \frac{1}{2}fP$ .

Падстаўляем выраз  $T$  у формулу (2.21). Канчаткова атрымліваем выраз  $M > \frac{1}{4}fPl$ .

### Задача 2.8

Аднародны цяжкі стрыжань  $AB$ , аб'ём якога роўны  $V$ , шарнірна замацаваны да апоры  $A$  і часткова апушчаны ў вадкасць шчыльнасцю  $\rho$  (рыс. 2.16). Вызначыць шчыльнасць матэрыялу стрыжня і рэакцыю шарніра  $A$  пры ўмове, што ў стане раўнавагі  $AC = CB$ .

#### Рашэнне

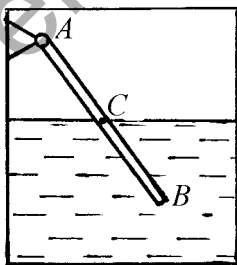
Вызваляем стрыжань ад сувязі  $A$ , паказваем сілу цяжару  $P$  і выштурховую сілу  $F$  (рыс. 2.17). Апошняя прыкладзена да сярэдзіны ўчастка  $CB$  і паводле закона Архімеда роўна сіле цяжару аб'ёму вадкасці, выціснутага стрыжнем, г. зн.  $F = \frac{1}{2}V\rho g$ .

1. *Вызначэнне шчыльнасці матэрыялу стрыжня  $\rho_1$ .* Няхай  $AB = 2l$ . Складзем умову раўнавагі стрыжня:  $\sum M_A(\vec{F}_i) = Fh_2 - Ph_1 = 0$  або  $F \frac{3}{2}l \sin \varphi - Pl \sin \varphi = 0$ , адкуль  $P = \frac{3}{2}F$ .

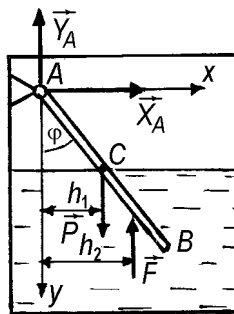
Падстаўляем ва ўмову  $P = V\rho_1 g$  і значэнне  $F$ . Атрымліваем выраз  $V\rho_1 g = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{2} \rho g$ . Адсюль  $\rho_1 = \frac{3}{4}\rho$ .

2. *Вызначэнне рэакцый  $X_A$  і  $Y_A$ .* Запісваем умовы раўнавагі:

$\sum X_i = X_A = 0$ ,  $\sum Y_i = P - F - Y_A = 0$ . Знаходзім велічыні  $X_A$  і  $Y_A$  па формуле  $X_A = 0$ ,  $Y_A = P - F = \frac{3}{2}F - F = \frac{1}{2}F = \frac{1}{4}V\rho g$ .



Рысунк 2.16



Рысунк 2.17

Высветлице, ад чаго залежыць вугал  $\phi$  пры нязменных характарыстыках  $\rho$  і  $\rho_1$ , якія дадатковыя параметры неабходны для яго вызначэння.

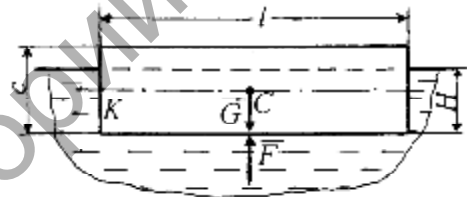
### Задача 2.9

Пантон, які мае форму прамавугольнага паралелепіпеда размерам  $l \times b \times c$  пасля спуску на ваду апусціўся на глыбіню  $H$  (рыс. 2.18, а). Пры наступным частковым пад'ёме да яго была прыкладзена сіла  $P$  (рыс. 2.18, б). Цэнтр цяжару пантона  $C$  і пункт  $K$  знаходзяцца на адным узроўні. Знайдзі  $H$ ,  $\alpha$  і  $h$  пры ўмове, што вага пантона  $G = 2\,000$  кН,  $P = 750$  кН,  $l = 20$  м,  $b = 10$  м, удзельная вага вады  $\gamma = 10$  кН/м<sup>3</sup>.

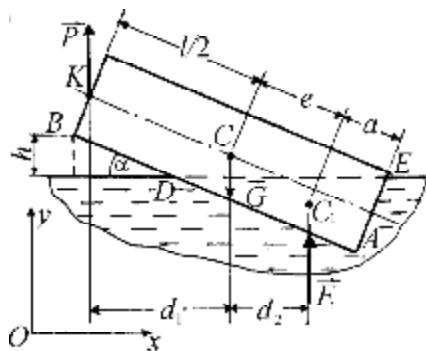
#### Рашэнне

Вызначаем глыбіню пагрузжэння пантона  $H$ . Для гэтага разгледзім яго раўнавагу ў гарызантальным палажэнні (рыс. 2.18, а). Выштурховую сілу абазначым праз  $F$ . Тады  $\sum Y_i = F - G = 0$ , адкуль  $F = G$ . Па закону Архімеда сіла  $F$  роўна вазе аб'ёму вады  $V$ , выціснутага часткай пантона:  $F = V\gamma = lbH\gamma = G$ . Знаходзім глыбіню пагрузжэння пантона  $H$  па формуле  $H = G/lb\gamma = 2\,000/10 \cdot 20 \cdot 10 = 1$  м.

Знойдзем вугал нахілу пантона да паверхні вады  $\alpha$  (рыс. 2.18, б). Заглыбленая ў ваду частка пантона ўяўляе сабою прызму, сячэнне якой абазначана літарамі  $ADE$ , а цэнтр цяжару праз  $C_1$ . Адпаведную выштурховую сілу  $F_1$  вызначым з умовы раўнавагі:  $\sum Y_i = P - G + F_1 = 0$ . Атрымліваем:  $F_1 = G - P = 2\,000 - 750 = 1\,250$  кН. Каб вызначыць геаметрычныя параметры трохвугольніка  $ADE$ ,



а)



б)

Рысунк 2.18

складзем суму момантаў сіл адносна пункта  $K$ :

$$\sum M_K(\vec{F}_i) = F_1(d_1 + d_2) - Gd_1 = 0 \text{ альбо } F_1\left(\frac{l}{2} + e\right) \cos \alpha - G \frac{l}{2} \cos \alpha = 0 \text{ ці}$$

$$F_1\left(\frac{l}{2} + e\right) - \frac{1}{2}Gl = 0. \text{ Адсюль } \left(\frac{l}{2} + e\right) = \frac{IG}{2F_1}, \quad e = \frac{l}{2}\left(\frac{G}{F_1} - 1\right) = 0,3l = 6 \text{ м.}$$

Параметр  $e$  вызначае палажэнне цэнтра  $C_1$  адносна цэнтра  $C$ . Яго палажэнне адносна тарца трохвугольніка  $AE$  роўна  $a = \frac{1}{3}AD = \frac{l}{2} - e = 10 - 6 = 4$  м,

адкуль  $AD = 3a = 3 \cdot 4 = 12$  м. Другі катэт трохвугольніка  $AE$  знойдзем,

$$\text{разглядаючы аб'ём прызмы, па формуле: } V_1 = F_1 / \gamma = \frac{1}{2}AD \cdot AE \cdot b.$$

$$\text{Атрымліваем: } AE = 2F_1 / b\gamma \cdot AD = 2500 / 10 \cdot 10 \cdot 12 = 2,083(3) \text{ м.}$$

Відавочна, што  $\operatorname{tg} \alpha = AE / AD = 2,08(3) / 12 = 0,1736$ , адкуль  $\alpha = 10^\circ 51'$ .

Знаходзім вышыню вугла  $B$  над паверхняй вады:  $h = BD \cdot \sin \alpha = 8 \cdot 0,17104 = 1,368$  м.

## 2.2 Раўнавага сістэмы цел

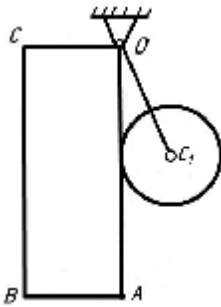
Далей разгледзім задачы, у якіх механічныя сістэмы ўтвораны з некалькіх цел.

### Задача 2.10

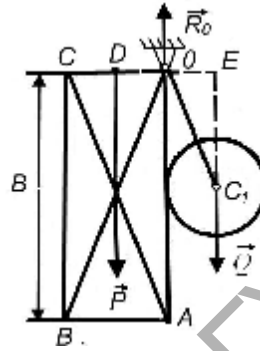
Аднародная прамавугольная пласцінка і аднародны дыск радыусам  $R$  аднолькавай таўшчыні, зробленыя з аднаго і таго ж матэрыялу, падвешаны да гарызантальнай восі  $O$  (рыс. 2.19). Дыск падвешаны пры дапамозе бязважкага стрыжня  $OC_1$ . Пры гэтым бок  $OA$  пласцінкі заняў вертыкальнае становішча. Вызначыць даўжыню  $OA$ , калі  $AB$  роўны  $a$ .

*Рашэнне*

Разгледзім раўнавагу ўсёй сістэмы цалкам (рыс. 2.20). На сістэму накладзена адна сувязь у пункце  $O$ . Яе рэакцыю абазначым літарай  $R_O$ . На аб'ект раўнавагі дзейнічае плоская сістэма паралельных сіл. Для адказу на пастаўленае пытанне дастаткова скласці адну ўмову раўнавагі:



Рысунак 2.19



Рысунак 2.20

$$\sum_i M_o(\vec{F}_i) = P \cdot OD - Q \cdot OE = 0$$

$$\text{або } P \frac{a}{2} = QR. \quad (2.22)$$

Знойдем сілы цяжару  $P$  і  $Q$ . Абазначым удзельную вагу матэрыялу праз  $\gamma$ , таўшчыню пласцінкі і дыска праз  $c$ , а іх аб'ёмы праз  $V_1$  і  $V_2$ . Тады  $P = \gamma V_1 = \gamma abc$ ,  $Q = \gamma V_2 = \gamma \pi R^2 c$ . Падстаўляем  $P$  і  $Q$  ва ўраўненне

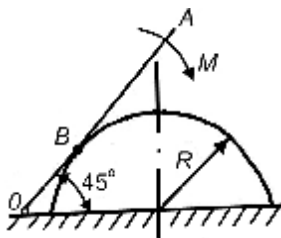
$$(2.22), \text{ атрымаем роўнасць } \gamma abc \frac{a}{2} = \gamma \pi R^2 c R, \text{ адкуль } b = \frac{2\pi R^3}{a^2}.$$

*Дадатковыя пытанні:*

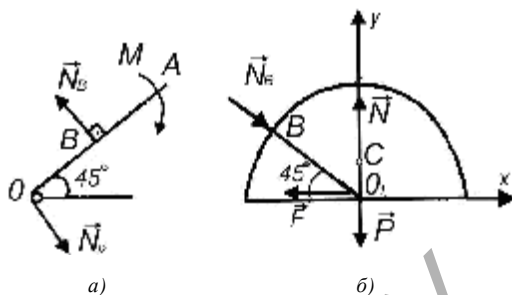
1. Дакажыце, што рэакцыя  $R_0$  накіравана вертыкальна, як паказана на рысунку 2.20.
2. Рашыце задачу з улікам вагі аднароднага стрыжня  $OC_1$ , якая роўна  $G$ .

### Задача 2.11

Які момант  $M$  трэба прыкладзі да стрыжня  $OA$ , каб са становішча, паказанага на рысунку 2.21, зрушыць управа паўдыск  $D$  радыусам  $R$  і вагой  $P$ , калі каэфіцыент трэння слізгання паміж паўдыскам і апорнай гарызантальнай плоскасцю  $f$  роўны 0,5? Вагой стрыжня  $OA$  і трэннем у кантактным пункце  $B$  ігнараваць.



Рисунак 2.21



Рисунак 2.22

### Рашэнне

Раздзелім складаную сістэму на два цэлы — стрыжань  $OA$  і паўдыск  $D$  (рыс. 2.22). Складаем умову раўнавагі стрыжня  $OA$ :  $\sum_i M_{O}(\vec{F}_i) = N_B \cdot OB - M = 0$ , адгэтуль

$$N_B = \frac{M}{OB} = \frac{M}{R}. \quad (2.23)$$

Затым разгледзім паўдыск  $D$ . Дзеянне плоскасці на яго замяняем рэакцыямі  $N$  і  $F$ , дзе  $F$  — сіла трэння слізгання. Паўдыск знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем плоскай сыходнай сістэмы сіл. Адпаведныя ўмовы раўнавагі запішам у выглядзе:

$$\sum_i X_i = N_B \cos 45^\circ - F = 0, \quad (2.24)$$

$$\sum_i Y_i = -N_B \sin 45^\circ + N - P = 0. \quad (2.25)$$

У стане гранічнай раўнавагі сіла трэння  $F$  вызначаецца па формуле

$$F = fN. \quad (2.26)$$

Рашаючы сумесна ўраўненні (2.24) і (2.25) з улікам (2.26) атрымліваем рэакцыю  $N_B$

$$N_B = \frac{fP}{(1-f)\cos 45^\circ} = \sqrt{2}P. \quad (2.27)$$

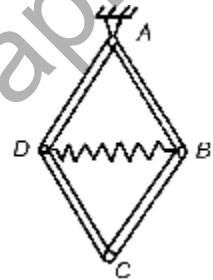
З формулаў (2.23) і (2.27) знаходзім велічыню  $M = \sqrt{2}PR$ .  
 Натуральна, што ўмове задачы будзе задавальняць і любое значэнне  $M > \sqrt{2}PR$ .

*Дадатковыя пытанні:*

1. На рысунку 2.22, а, рэакцыя  $N_O$  накіравана перпендыкулярна да стрыжня  $OP$ . Як гэта абгрунтаваць?
2. Ці зменіцца накірунак рэакцыі і велічыня  $N_O$ , калі ўлічыць трэнне слізгання ў пункце  $B$ ?

### Задача 2.12

Канструкцыя, паказаная на рысунку 2.23, складаецца з чатырох аднолькавых стрыжняў масай  $m$  і даўжынёй  $l$  кожны, злучаных шарнірамі і размешчаных у вертыкальнай плоскасці. Шарніры  $D$  і  $B$  злучаны спружынай. У стане раўнавагі стрыжні ўтвараюць квадрат. Вызначыць жорсткасць  $c$  спружыны, калі ў ненапружаным стане яна мае даўжыню  $d_0 = 2l\sqrt{2}$ .



Рысунк 2.23

*Рашэнне*

Жорсткасць спружыны  $c$  і сціскаючая сіла  $T$  ёй звязаны залежнасцю  $T = c|\Delta|$ , адкуль  $c = \frac{T}{|\Delta|}$ , дзе  $|\Delta|$  — дэфармацыя спружыны. У стане раўнавагі даўжыня дэфармаванай спружыны  $d$  вызначаецца як дыяганаль квадрата па формуле  $d = l\sqrt{2}$ . Такім чынам, змяненне даўжыні спружыны  $\Delta = d_0 - d = l\sqrt{2}$ , а жорсткасць  $c$  роўна:

$$c = \frac{T}{l\sqrt{2}}. \quad (2.28)$$

Знойдзем сілу  $T$ , што сціскае спружыну. Для гэтага неабходна рашыць задачу статыкі складанай сістэмы. Разгледзім раўнавагу

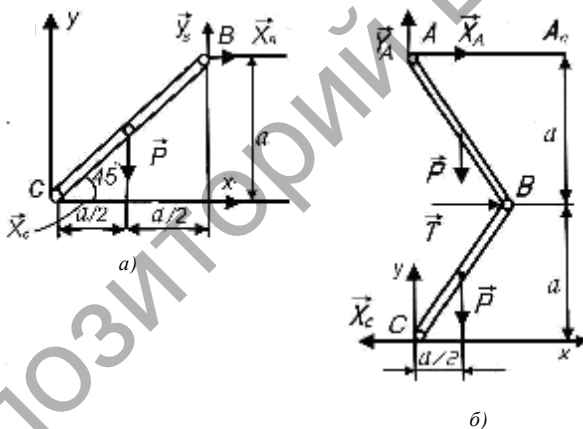
стрижня  $BC$  і паловы квадрата  $ABC$ . Дзеянне спружыны на шарнір  $B$  замяняем рэакцыяй  $T$ . Запісваем умову раўнавагі стрыжня  $BC$ :

$$\sum_i M_B(\vec{F}_i) = P \frac{a}{2} + X_C a = 0. \text{ Адгэтуль } X_C = -\frac{1}{2} P. \text{ Знак «мінус» тут}$$

азначае, што сапраўдны накірунак рэакцыі  $X_C$  процілеглы прынятаму на рысунку 2.24, а. Разгледзім раўнавагу паловы квадрата, прыем сапраўдны накірунак  $X_C$ . Маем роўнасць  $\sum_i M_A(\vec{F}_i) = Ta - 2P \frac{a}{2} - X_C 2a = 0$ ,

$$\text{адсюль } T = 2P. \text{ Падстаўляем } T \text{ у формулу (2.28) } c = \frac{2P}{l\sqrt{2}}$$

або канчаткова  $c = \frac{mg\sqrt{2}}{l}$ .



Рысунк 2.24

*Дадатковае пытанне.* На рысунку 2.24, б, рэакцыя  $Y_C$  прынята роўнай нулю (з меркаванняў сіметрыі сістэмы). Дакажыце гэта больш строга на падставе ўмоў раўнавагі. Для гэтага знайдзіце рэакцыю апоры  $A$  для ўсёй сістэмы, палову яе  $Y_A$  прыкладзіце ў пункце  $A$  да часткі  $ABC$  і складзіце для гэтай часткі ўмову  $\sum Y_i = 0$ .

### Задача 2.13

Два цэлы звязаны паміж сабой ніткай  $AB$ . Першае цела мае форму паралелепіпеда і вагу  $G$ , другое — форму цыліндра радыусам  $R$  і вагою  $P$ . Абодва цэлы знаходзяцца на плоскасці, што ўтварае вугал  $\alpha$  з гарызонтам (рыс. 2.25). Якую максімальную сілу  $Q$ , паралельную нахіленай плоскасці, трэба прыкладасці да першага цела, каб утрымаць абодва цэлы ў раўнавазе? Каэфіцыенты трэння слізгання і качэння роўны адпаведна  $f$  і  $\delta$ .

#### Рашэнне

Вывольваемся ад сувязей. Пры гэтым дзеянне ніткі замяняем рэакцыяй  $T$ . Складаем умовы раўнавагі для кожнага з цел (рыс. 2.26):

$$\sum_i X_i = -T - F_1 - G \sin \alpha + Q = 0, \quad (2.29)$$

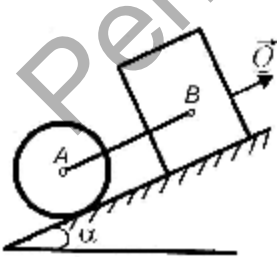
$$\sum_i Y_i = N_1 - G \cos \alpha \neq 0, \quad (2.30)$$

$$\sum_i M_O(\vec{F}_i) = P \cdot \sin \alpha \cdot R - T \cdot R + M = 0, \quad (2.31)$$

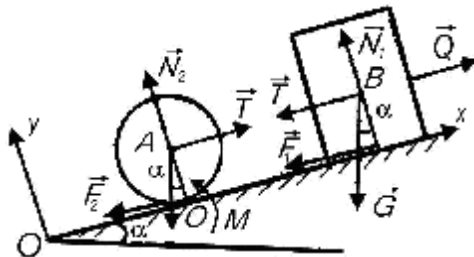
$$\sum_i Y_i = N_2 - P \cos \alpha = 0. \quad (2.32)$$

У стане гранічнай раўнавагі сіла трэння і момант трэння роўныя:

$$F_1 = fN_1; \quad M = \delta N_2. \quad (2.33)$$



Рысунак 2.25



Рысунак 2.26

З ураўненняў (2.30) і (2.32) атрымліваем  $N_1$  і  $N_2$ :

$$N_1 = G \cos \alpha, \quad N_2 = P \cos \alpha. \quad (2.34)$$

Падстаўляем выразы (2.34) у формулы (2.33):

$$F_1 = fG \cos \alpha, \quad M = \delta P \cos \alpha. \quad (2.35)$$

З ураўненняў (2.29) і (2.31), з улікам (2.35), знаходзім велічыню  $T$  па формулах

$$T = Q - fG \cos \alpha - G \sin \alpha, \quad T = P \sin \alpha + \frac{\delta}{R} P \cos \alpha. \quad (2.36)$$

Прыраўноўваем паміж сабой выразы (2.36) і атрымліваем сілу  $Q$ , якую трэба знайсці:  $Q = (P + G) \sin \alpha + \left(\frac{\delta}{R} P + fG\right) \cos \alpha$ .

*Дадатковыя пытанні:*

1. Ці можна ўраўненне (2.31) замяніць сумай праекцый сіл на вось  $Ox$ ? Растлумачце свой адказ.
2. Ці можна рашыць задачу, не падзяляючы сістэму на два целы, г. зн. не ўводзячы рэакцыі  $T$ ?
3. Рашыце задачу іншым спосабам.
4. Знайдзіце ў дадзенай задачы мінімальную сілу  $Q$ .

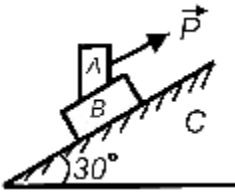
### **Задача 2.14**

Два целы  $A$  і  $B$  змешчаны на нахіленай плоскасці  $C$  так, як паказана на рысунку 2.27. Вага цел адпаведна роўна:  $G_1 = 100$  Н,  $G_2 = 200$  Н. Каэфіцыент трэння паміж цэламі  $A$  і  $B$  роўны  $f_1 = 0,6$ ; паміж цэламі  $B$  і плоскасцю  $C$  —  $f_2 = 0,2$ . Даследаваць стан сістэмы пры розных значэннях сілы  $P$ , прыкладзенай да цела  $A$  паралельна нахіленай плоскасці.

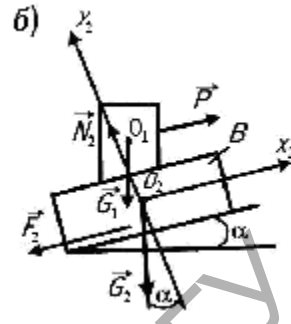
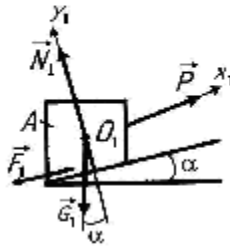
*Рашэнне*

П е р ш ы с п о с а б

Разгледзім раўнавагу цела  $A$  і сістэмы цел  $A$  і  $B$ . Вывалімся ад сувязей. Дзеянне цела  $B$  на  $A$  і дзеянне плоскасці  $C$  на сістэму цел  $A$  і  $B$



Рисунак 2.27



Рисунак 2.28

замяняем рэакцыямі  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $F_1$  і  $F_2$  (рыс. 2.28). Умовы раўнавагі маюць выгляд:

$$\sum_i X_{1i} = P - G_1 \sin \alpha - F_1 = 0, \quad (2.37)$$

$$\sum_i Y_{1i} = N_1 - G_1 \cos \alpha = 0, \quad (2.38)$$

$$\sum_i X_{2i} = P - (G_1 + G_2) \sin \alpha - F_2 = 0, \quad (2.39)$$

$$\sum_i Y_{2i} = N_2 - (G_1 + G_2) \cos \alpha = 0. \quad (2.40)$$

Ва ўраўненнях (2.37)–(2.40) пастаяннымі з’яўляюцца толькі сілы  $G_1$  і  $G_2$ . Сіле  $P$  па ўмове задачы адводзіцца роля незалежнай зменнай; лічыцца, што яна дадатная ( $P \geq 0$ ), г. зн. заўсёды накіравана ўправа. Сілы трэння  $F_1$  і  $F_2$ , як вынікае з ураўненняў (2.37) і (2.39), залежаць ад  $G_1$ ,  $G_2$  і  $P$ . Знайдзем іх:

$$F_1 = P - G_1 \sin \alpha, \quad (2.41)$$

$$F_2 = P - (G_1 + G_2) \sin \alpha. \quad (2.42)$$

Гранічныя значэнні сіл трэння  $F_{1гр}$  і  $F_{2гр}$  вызначаем па формулах:

$$F_{1гр} = f_1 N_1, \quad (2.43)$$

$$F_{2гр} = f_2 N_2, \quad (2.44)$$

дзе  $N_1$  і  $N_2$ , знаходзяцца з ураўненняў (2.38) і (2.40). Вобласць раўнавагі цела  $A$  на паверхні цела  $B$  і сістэмы цел  $A$  і  $B$  на плоскасці  $C$  вызначаецца ўмовамі:

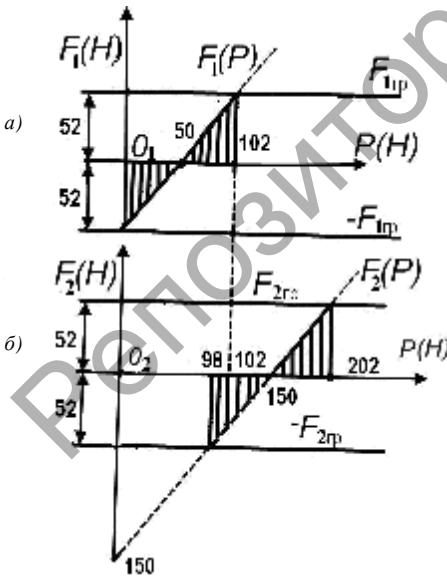
$$|F_1| \leq F_{1гр}, \quad (2.45)$$

$$|F_2| \leq F_{2гр}. \quad (2.46)$$

Падстаўляючы лікавыя дадзеныя, атрымліваем гранічныя значэнні сіл трэння  $F_{1гр}$  і  $F_{2гр}$ :

$$F_{1гр} = f_1 G_1 \cos \alpha = 0,6 \cdot 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 52 \text{ Н},$$

$$F_{2гр} = f_2 (G_1 + G_2) \cos \alpha = 0,2 \cdot (100 + 200) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 52 \text{ Н}.$$



Рысунк 2.29

Далейшае рашэнне задачы для зручнасці аналізу вынікаў прадставім графічна (рыс. 2.29), змяшчаючы пачаткі адлікаў сіл  $O_1$  і  $O_2$  на агульнай вертыкалі. Будзем графікі функцый, апісаных формуламі (2.41) і (2.42). Яны перасякаюць восі абсцыс. Дадатныя значэнні сіл трэння  $F_1$  і  $F_2$  адпавядаюць іх напрамкам управа, адмоўныя — улева. Напрамак сіл трэння абумоўлены знешнімі ўздзеяннямі на целы. Так, пры  $P = 0$  сілы  $F_1$  і  $F_2$  накіраваны ўправа таму, што складовыя сілы цяжару  $G_1 \sin \alpha$  і  $(G_1 + G_2) \sin \alpha$  імкнуцца зрушыць целы ўлева. Далей будзем графікі

гранічных значэнняў  $F_{1гр}$  і  $F_{2гр}$ . Умовам (2.45) і (2.46) здавальняюць вобласці, вылучаныя штрыхоўкай, для якіх  $-F_{1гр} \leq F_1 \leq F_{1гр}$ ,  $-F_{2гр} \leq F_2 \leq F_{2гр}$ .

Пункты  $P = 0$  і  $P = 102$  Н знойдзены па формуле (2.41) пры  $F_1 = -F_{1гр}$  і  $F_1 = F_{1гр}$ , а пункты  $P = 98$  Н і  $P = 202$  Н вызначаны з формулы (2.42) пры  $F_2 = -F_{2гр}$  і  $F_2 = F_{2гр}$ . Пераходзім да аналізу выніка і адказаў на пастаўленае ва ўмове заданне.

1. З графікаў на рысунку 2.29, а, робім выснову, што пры значэннях  $0 \leq P \leq 102$  Н цела  $A$  не слізвае па целе  $B$ , г. зн. паказанае мноства значэнняў  $P$  вызначае вобласць адноснай раўнавагі цела  $A$ . Пры  $P > 102$  Н цела  $A$  слізвае па целе  $B$  уверх. Уніз цела  $A$  не можа перамяшчацца ні пры якіх дадатных значэннях  $P$ .

2. З рысунка 2.29, б, відаць, што вобласць раўнавагі сістэмы цел  $A$  і  $B$  на плоскасці  $C$  абмежавана значэннямі  $98 \text{ Н} \leq P \leq 202 \text{ Н}$ . Аднак у п. 1 (гл. вышэй, с. 45) мы адзначылі, што пры  $P > 102$  Н цела  $A$  слізвае па целе  $B$  управа і таму сіла трэння  $F_{1гр}$  не здольна перадаць знешняе ўздзеянне ад цела  $A$  да цела  $B$ , бо сіла  $P$  прыкладзена да цела  $A$ . Па гэтай прычыне правая мяжа вобласці раўнавагі ссоўваецца ўлева, г. зн.  $98 \text{ Н} \leq P \leq 102 \text{ Н}$ . Калі целы  $A$  і  $B$  жорстка змацаваць паміж сабою або прыкласці сілу  $P$  да цела  $B$ , то правая мяжа будзе вызначацца першапачатковым значэннем  $P = 202$  Н.

3. Пры  $0 \leq P \leq 98$  Н цела  $B$  будзе слізгаць па плоскасці  $C$  уніз. Цела  $A$ , як відаць з рысунка 2.29, а, у гэтым інтэрвале застаецца нерухомым адносна цела  $B$ . Значыць, абодва целы будуць перамяшчацца ўлева.

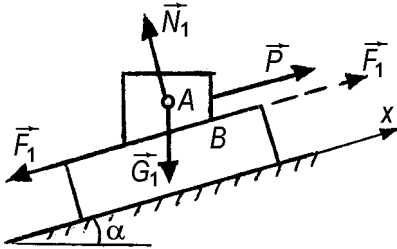
Рашым гэтую задачу, не звяртаючыся да графічных пабудов.

### Д р у г і с п о с а б

Выкладзем яго падрабязна без спасылкі на першы спосаб. Сістэму цел разглядаем як складаную:

1. Даследуем стан цела  $A$  на целе  $B$  пры ўзрастанні сілы  $P$  ад нулявога значэння (рыс. 2.30). Лічым, што цела  $B$  замацавана на плоскасці нерухома. Размерамі цела  $A$  ігнаруем. На цела дзейнічаюць пастаянныя сілы  $G_1$ ,  $N_1$  і пераменныя  $P$  і  $F_1$ . Тут  $F_1$  — сіла счাপлення, якая можа змяняцца ад нуля да гранічнага значэння  $F_{1гр} = f_1 N_1$ .

Паводле ўмовы задачы  $F_{1гр} = 0,6 \cdot 100 \cdot \cos 30^\circ = 51,96 \text{ Н} \approx 52 \text{ Н}$ . Напрамак сілы  $F_1$  таксама пераменны: яна можа быць накіравана як уверх, так



Рысунак 2.30

і ўніз у плоскасці слізання. Сілу цяжару  $G_1$  прадставім у выглядзе двух складовых:  $G'_1 = G_1 \cos \alpha$ , накіраванага па нармалі да плоскасці слізання цела  $A$ , і  $G''_1 = G_1 \sin \alpha = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$  Н, накіраванага паралельна да гэтай плоскасці. Сіла  $G''_1$  імкнецца зрушыць цела  $A$  ўніз па плоскасці.

Разгледзім прыватныя выпадкі:

а)  $P = 0$ . На рысунку 2.31, *a*, паказаны сілы, якія дзейнічаюць на цела  $A$ . Запісваем умову раўнавагі:  $\sum X_i = F_1 - G''_1 = 0$ . Адсюль  $F_1 = G''_1 = 50$  Н. Як бачым, сіла  $F_1$  не дасягае свайго гранічнага значэння  $F_{1\text{гр}} = 52$  Н. Таму цела  $A$  не можа слізгаць уніз па целу  $B$ ;

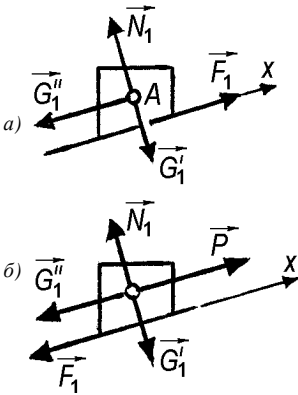
б)  $P > 0$ . Пры паступовым узростанні сілы  $P$  велічыня  $F_1$  памяншаецца, затым прымае нулявое значэнне і нарэшце мяняе напрамак (рыс. 2.31, *б*). Цела  $A$  будзе заставацца ў раўнавазе, пакуль сіла счаплення  $F_1$  не дасягне свайго максімальнага значэння  $F_{1\text{гр}}$ . Складаем умову раўнавагі:  $\sum X_i = P_1 - G''_1 - F_{1\text{гр}} \leq 0$ , адкуль  $P \leq G''_1 + F_{1\text{гр}} = 50 + 52 = 102$  Н. Пры  $P > 102$  Н цела  $A$  слізгае ўверх па целу  $B$ ;

2. Даследуем стан двух цел  $A$  і  $B$  на нахіленай плоскасці  $C$ . Будзем лічыць, што целы жорстка змацаваны паміж сабою і разглядаць іх як адно цела. Агульныя для двух целу сілы цяжару, яе кампаненты, нармальную рэакцыю, сілу счаплення і сілу трэння абазначым адпаведна праз  $G_{12}$ ,  $G'_{12}$ ,  $G''_{12}$ ,  $N_{12}$ ,  $F_2$  і  $F_{2\text{гр}}$  (рыс. 2.32).

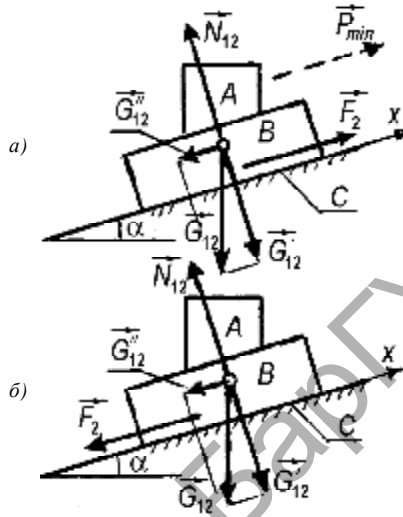
Тады  $G_{12} = G_1 + G_2 = 100 + 200 = 300$  Н,  $G'_{12} = (G_1 + G_2) \cos \alpha$ ,  
 $G''_{12} = (G_1 + G_2) \sin \alpha = 300 \cdot \frac{1}{2} = 150$  Н,  $N_{12} = N_1 + N_2 = G_{12} \cos \alpha = 300 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 259,8$   
 Н,  $F_{2\text{гр}} = f_2 N_{12} = 0,2 \cdot 259,8 = 51,96 \approx 52$  Н.

Разгледзім прыватныя выпадкі:

а)  $P = 0$  (рыс. 2.29, *a*). Запісваем умову раўнавагі:  $\sum X_i = F_2 - G''_{12} = 0$ . Адсюль  $F_2 = G''_{12} = 150$  Н. Як бачым, для раўнавагі цел неабходна сіла



Рисунак 2.31



Рисунак 2.32

счাপлення  $F_2$  большая, чым яе гранічнае значэнне ( $150 \text{ Н} > 52 \text{ Н}$ ). Значыць пры  $P = 0$  целы будуць слізгаць ўніз па плоскасці  $C$ ;

б) знойдзем мінімальнае значэнне сілы  $P$ , пры якім целы будуць утрымлівацца нерухома на плоскасці  $C$ . Для гэтага складзем умову раўнавагі (рыс. 2.32, а):  $\sum X_i = P_{\min} + F_{2\text{гр}} - G_{12}'' = 0$ . Знаходзім сілу  $P_{\min}$  па формуле  $P_{\min} = G_{12}'' - F_{2\text{гр}} = 150 - 52 = 98 \text{ Н}$ ;

в)  $P > P_{\min}$  (рыс. 2.32, б). Складаем умову раўнавагі цел:  $\sum X_i = P - F_{2\text{гр}} - G_{12}'' \leq 0$ , адсюль  $P \leq (F_{2\text{гр}} + G_{12}'') = 52 + 150 = 202 \text{ Н}$ . Значыць, пры  $P \leq 202 \text{ Н}$  змацаваныя целы будуць заставацца нерухомымі. Але ў нашай задачы сіла  $P$  не можа дасягнуць такога значэння, бо цела  $A$ , да якога яна прыкладзена, пачынае слізгаць па целу  $B$  пры меншым значэнні —  $P > 102 \text{ Н}$ . Гэта значэнне і будзе верхняй граніцай раўнавагі двух цел.

Вынікі даследавання стану цел пад дзеяннем пераменнай сілы наступныя: пры  $P < 98 \text{ Н}$  абодва целы рухаюцца ўніз, пры  $98 \text{ Н} < P < 102 \text{ Н}$  целы нерухомыя; пры  $P > 102 \text{ Н}$  цела  $B$  рухаюцца, а цела  $A$  слізгае па ім уверх.

Дадатковыя пытанні:

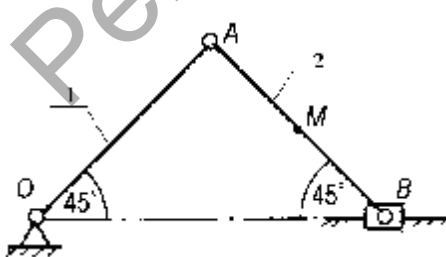
1. Ці можна знайсці такі каэфіцыент трэння  $f_1$ , пры якім целы  $A$  і  $B$  будуць разам слізгаць па плоскасці  $C$  уверх? Як гэта зрабіць?
2. Як змяняцца вынікі даследавання, калі сіла  $P$  будзе прыкладзена да цела  $B$ ?

### Задача 2.15

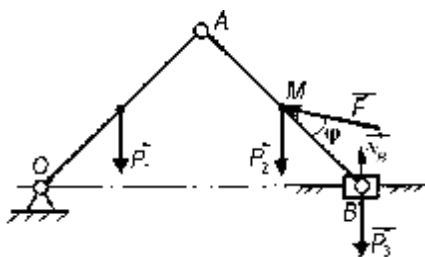
Крывашыпна-шатунны механізм утвораны з двух аднолькавых звенняў  $1$  і  $2$  даўжынёй  $l$  і паўзуна  $B$  (рыс. 2.33). Іх сілы цяжару роўны адпаведна  $P_1$ ,  $P_2$  і  $P_3$ . Знайсці мінімальнае значэнне сілы  $F$ , прыкладзенай у пункце  $M$  шатуна  $2$ , якая можа ўраўнаважыць механізм. Прыняць  $P_1 = P_2 = P_3 = P$ ,  $AM = MB$ .

Рашэнне

Пакажам сілы цяжару звенняў. Напрамак сілы  $F$  будзем вызначаць вуглом  $\varphi$ , утвораным вектарам сілы са стрыжнем  $AB$  (рыс. 2.34). Відавочна, што пры адсутнасці сілы  $F$  паўзун  $B$  і звяно  $AB$  будуць перамяшчацца ўправа. Значыць ураўнаважвальную сілу неабходна накіраваць улева. Ураўнаважыць механізм можна рознымі па значэнні сіламі. Іх велічыня пры нязменных нагрузках на механізм залежыць ад напрамку сілы, г. зн.  $F = F(\varphi)$ . Згодна з умовай задачы неабходна знайсці такі вугал  $\varphi$ , пры якім  $F = F_{\min}$ . Дадзены механізм уяўляе сабою складаную механічную сістэму. Паўзун  $B$  можна не разглядаць як самастойную частку, а яго сілу цяжару  $P_3$  і рэакцыю  $N_B$  прыкласці непасрэдна да стрыжня  $AB$ . Далей можна наўпрост прымяніць метадку аналізу складаных сістэм. Затым для дзвюх плоскіх сістэм сіл, прыкладзеных да частак  $OA$  і  $AB$ , запісаць шэсць умоў раўнавагі. Столькі ж будзе і невядомых сіл: па дзве рэакцыі ў шарнірах  $O$  і  $A$ , сіла  $F$



Рысунак 2.33



Рысунак 2.34

і рэакцыя  $N_B$ . Але такі стандартны план рашэння дадзенай задачы не рацыянальны. Паводле ўмовы ў задачы неабходна вызначыць толькі сілу  $F$ . Таму пажадана атрымаць сістэму ўраўненняў з меншай колькасцю невядомых. Аналіз задачы паказвае, што можна абмежавацца двюма ўмовамі раўнавагі з невядомымі сіламі  $F$  і  $N_B$ . Запішам іх адпаведна для правай часткі  $AB$  і ўсёй сістэмы  $OAB$ :

$$\sum M_A(\mathbf{F}_i) = N_B l \cos 45^\circ - P_3 l \cos 45^\circ - P_2 \frac{l}{2} \cos 45^\circ - F \sin \varphi \frac{l}{2} = 0,$$

$$\begin{aligned} \sum M_O(\mathbf{F}_i) = N_B \cdot 2l \cos 45^\circ - P_3 \cdot 2l \cos 45^\circ - P_2 \frac{3}{2} l \cos 45^\circ - \\ - F \sin \varphi \frac{l}{2} + F \cos l - P_1 \frac{l}{2} \cos 45^\circ = 0. \end{aligned}$$

Калі ўлічыць, што тут  $P_1 = P_2 = P_3 = P$ , то атрымаем

$$\left. \begin{aligned} N_B l \cos 45^\circ - \frac{3}{2} P l \cos 45^\circ - \frac{1}{2} F l \sin \varphi = 0, \\ 2N_B l \cos 45^\circ - 4P l \cos 45^\circ - \left( \frac{1}{2} \sin \varphi - \cos \varphi \right) F l = 0. \end{aligned} \right\}$$

З гэтай сістэмы ўраўненняў выключаем  $N_B$ ; атрымаем роўнасць

$$-P l \cos 45^\circ + \left( \frac{1}{2} \sin \varphi + \cos \varphi \right) F l = 0,$$

адкуль  $F = \frac{\sqrt{2}/2}{\frac{1}{2} \sin \varphi + \cos \varphi} P$  альбо

$$F = \frac{\sqrt{2}}{\sin \varphi + 2 \cos \varphi} P \quad (2.47)$$

Абзначым назойнік формулы (2.47) праз  $f$ :  $f = \sin \varphi + 2 \cos \varphi$ .

Функцыя  $F = F(\varphi)$  прыме мінімальнае значэнне пры максімальным значэнні  $f$ . Знойдзем значэнне  $\varphi$ , пры якім  $f$  дасягае максімуму. Для гэтага правядзем даследаванне на экстрэмум:  $\frac{df}{d\varphi} = \cos \varphi - 2 \sin \varphi = 0$

альбо  $\sqrt{1 - \sin^2 \varphi} - 2 \sin \varphi = 0$ ,  $1 - \sin^2 \varphi = (2 \sin \varphi)^2$ ,  $5 \sin^2 \varphi = 1$ ,  
 $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $\varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

Тады  $f_{\max} = \sin \varphi + 2\sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sqrt{5}} + 2\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{5}{\sqrt{5}}$  і па

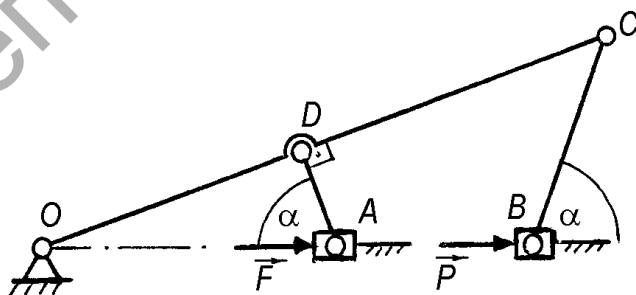
формуле (2.47) знаходзім  $F_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{5/\sqrt{5}} P = \sqrt{\frac{2}{5}} P$ .

На рысунку 2.34 можна паказаць, што напрамак сілы  $F_{\min}$  супадае з напрамакам скорасці пункта  $M$ , якая можа мець месца пры павелічэнні сілы  $F_{\min}$ . Паспрабуйце высветліць, ці залежыць значэнне сілы  $F$  ад сілы  $P_3$ .

### Задача 2.16

Дакажаць, што паказаны на рысунку 2.35 механізм, змешчаны ў гарызантальнай плоскасці, будзе знаходзіцца ў раўнавазе пры ўмове,

што  $\frac{P}{F} = \frac{OA}{OB}$ .

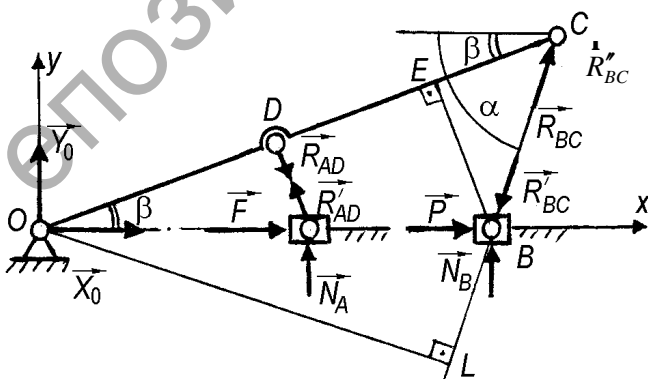


Рысунк 2.35

### Раішэнне

Каб лепш зразумець структуру механізма і ўзаемадзеянне яго звенняў, паставім сабе пытанне: якім чынам сілы  $F$  і  $P$ , накіраваныя ў адзін бок, могуць ураўнаважыцца? Каб адказаць на яго, уявім спачатку, што стрыжань  $BC$  адсутнічае, тады пад дзеяннем сілы  $F$  стрыжань  $OC$  будзе паварочвацца вакол пункта  $O$  па стрэлцы гадзінніка. Аналагічна можна заўважыць, што пры адсутнасці стрыжня  $AD$  звяно  $OC$  пад дзеяннем сілы  $P$  будзе паварочвацца супраць гадзіннікавай стрэлкі. Такім чынам, высвятляем, што сілы  $F$  і  $P$  узаемадзейнічаюць паміж сабою, дзякуючы стрыжням  $AD$  і  $BC$ , праз звяно  $OC$ . Пры гэтым стрыжань  $AD$  расцягнуты,  $BC$  — сціснуты.

З рысунка 2.36 відаць, што механічная сістэма складаецца з пяці цел. Калі наўпрост прымяніць методыку разліку такой сістэмы, то атрымаем ураўненні з мноствам невядомых рэакцый, якія па ўмове задачы не патрэбны. Неабходна рацыяналізацыя. Перш за ўсё ўстанавім, якія з пяці цел могуць разглядацца ў якасці аб'ектаў раўнавагі. Па прыкметах, апісаных у падраздзеле 1.3, імі будуць паўзуну  $A$ ,  $B$  і звяно  $OC$ , а стрыжні  $AD$  і  $BC$  з'яўляюцца ўнутранымі сувязямі. Гэта дазваляе пры дзяленні сістэмы на часткі ў шарнірах  $A$ ,  $D$ ,  $B$  і  $C$  уводзіць не па дзве рэакцыі, складовыя па восях кардынат, а па адной, пры гэтым  $R'_{AD} = R_{AD}$ ,  $R'_{BC} = R_{BC}$ . Далей, для кожнага з трох аб'ектаў раўнавагі, запішам толькі тры ўраўненні, якія не ўключаюць рэакцый  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $N_A$  і  $N_B$  (рыс. 2.36):



Рысунк 2.36

для стрижня  $OC$

$$\sum M_0(\dot{F}_i) = R_{BC}' \cdot OC - R_{AD} \cdot OD = 0; \quad (2.48)$$

для паўзуна  $A$

$$\sum X_i = F - R_{AD} \cos \alpha = 0; \quad (2.49)$$

для паўзуна  $B$

$$\sum X_i = P - R_{BC} \cos \alpha = 0. \quad (2.50)$$

З ураўненняў (2.49) і (2.50) знаходзім рэакцыі  $R_{AD}$ ,  $R_{BC}$  па формулах

$$R_{AD} = F / \cos \alpha, \quad R_{BC} = P / \cos \alpha. \quad (2.51)$$

Прадставім ураўненне (2.48) у выглядзе:  $R_{BC} \cdot \sin(\alpha - \beta) \cdot OC - R_{AD} \cdot OD = 0$

або з улікам (2.51):  $\frac{P}{\cos \alpha} \sin(\alpha - \beta) \cdot OC - \frac{F}{\cos \alpha} OD = 0$ .

Адсюль  $P \sin(\alpha - \beta) \cdot OC = F \cdot OD$  і

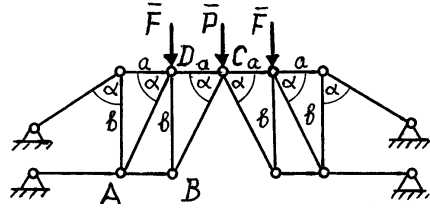
$$\frac{P}{F} = \frac{OD}{OC \cdot \sin(\alpha - \beta)}. \quad (2.52)$$

Параўнаем роўнасць (2.52) з суадносінамі ва ўмове задачы. Можна дапусціць, што ў назоўніку правай часткі ўраўнення (2.52)  $OC \cdot \sin(\alpha - \beta) = OE$ , бо  $OD/OE$  роўна, як відаць з трохвугольніка  $OBE$ ,  $OA/OB$ . Дакажам, што  $OC \cdot \sin(\alpha - \beta)$  сапраўды роўна  $OE$ . Для гэтага спачатку пабудуем трохвугольнік, у якім адрэзак  $OC$  будзе гіпатэнузай, а вугал  $(\alpha - \beta)$  — вуглом, што прылягае да яе (пры вяршыні  $C$ ). Такім будзе трохвугольнік  $OCL$ . У ім  $OL = OC \cdot \sin(\alpha - \beta)$ . Паколькі  $\triangle OBE = \triangle OBL$ , то  $OE = OL$ , і замест роўнасці (2.52)

атрымліваем выраз  $P/F = \frac{OD}{OE} = \frac{OA}{OB}$ .

### Задача 2.17

У стрыжнявай канструкцыі — ферме (рыс. 2.37), утворанай з бязважкіх стрыжняў, — вызначыць, пры якіх суадносінах паміж сіламі  $F$  і  $P$  унутраныя сілы ў стрыжнях  $AB$  і  $CD$  будуць адрознівацца ў пяць разоў ( $\alpha = 60^\circ$ ).



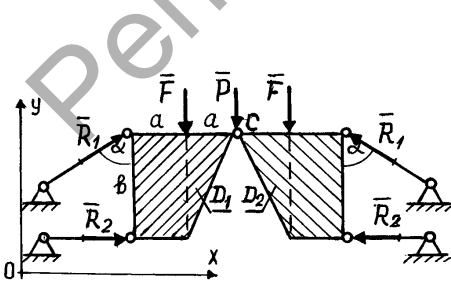
Рысунк 2.37

### Рашэнне

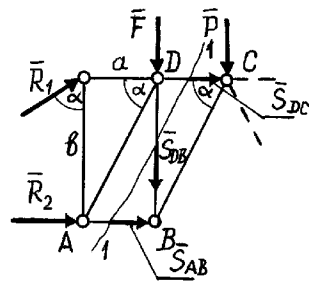
Пастаноўка пытання ў задачы сведчыць аб эфектыўнасці метадаў тэрэтычнай механікі, якія дазваляюць шляхам адмысловага размеркавання знешняй нагрукі забяспечваць патрэбныя суадносіны ўнутраных сіл у стрыжнях сістэмы. Задача дапускае мноства варыянтаў рашэння. Будзем прытрымлівацца тыпавай метадыкі разліку ферм.

1. *Вызначаем рэакцыі знешніх сувязей.* Канструкцыя фермы і нагрукка на яе сіметрычны адносна вертыкальнай восі, што праходзіць праз шарнір  $C$ . Таму рэакцыі сувязей, размешчаных злева і справа ад гэтай восі, роўны паміж сабою. На рысунку 2.38 яны абазначаны аднолькава:  $R_1$  і  $R_2$ . Велічыні рэакцый знаходзяцца як ў складанай сістэме з двух цел (на рысунку 2.38 целы  $D_1$  і  $D_2$  заштрыхаваны).

Разглядаем раўнавагу ўсёй фермы:  $\sum Y_i = 2R_1 \cos \alpha - 2F - P = 0$ , адсюль  $R_1 = (2F + P) / 2 \cos \alpha = 2F + P$ . З раўнавагі левай часткі сістэмы,



Рысунк 2.38



Рысунк 2.39

показанай на рысунку 2.38, атрымліваем выраз:  $\sum M_C(\overset{r}{F}_i) = -R_1 \cos \alpha \cdot 2a + Fa + R_2 b = 0$ . Улічваючы, што  $b/a = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $b = a \operatorname{tg} \alpha = a\sqrt{3}$ , вызначаем рэакцыю  $R_2$  па формуле  $R_2 = \sqrt{3}(F + P)/3$ .

2. *Вызначаем унутраную сілу ў стрыжні DC.* Калі б ва ўмове задачы ставілася мэта знайсці сілы ва ўсіх стрыжнях ці толькі ў крайніх левых альбо правых, то мэтазгодна было б прымяніць *метады выразання вузлаў*. Для вызначэння сіл ва ўнутраных стрыжнях прыменім *метады сячэнняў*. Праводзім сячэнне  $I-I$ , якое перасякае стрыжні  $DC$  і  $AB$ . Адкідаем правую (ад сячэння) частку фермы, а яе дзеянне на левую замяняем невядомымі сіламі  $S_{DC}$ ,  $S_{DB}$  і  $S_{AB}$  (рыс. 2.39). Разглядаем раўнавагу адсечанай левай часткі. Каб ураўненне раўнавагі ўтрымлівала толькі адну невядомую сілу  $S_{DC}$ , запісваем выраз

$$\sum M_B(\overset{r}{F}_i) = -S_{DC}b - R_1 \cos \alpha \cdot a - R_1 \sin \alpha \cdot b = 0,$$

адсюль

$$S_{DC} = -(R_1 \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha + R_1 \cos \alpha) / \operatorname{tg} \alpha,$$

канчаткова  $S_{DC} = -2\sqrt{3}(2F + P)/3$ .

3. *Вызначаем унутраную сілу ў стрыжні AB.* Разглядаем раўнавагу той жа левай часткі:  $\sum M_D(\overset{r}{F}_i) = (R_2 + S_{AB})b - R_1 \cos \alpha \cdot a = 0$ , адкуль  $S_{AB} = -\sqrt{3}P/6$ .

**УВАГА!**

Знакі «мінус» у формулах для сіл  $S_{DC}$  і  $S_{AB}$  сведчаць аб тым, што сапраўдны напрамак гэтых сіл процілеглы тым напрамкам, што паказаны на рысунку 2.39; адпаведныя стрыжні фермы пры гэтым сціснуты.

4. *Вызначаем суадносіны паміж сіламі F і P.* Няхай сіла  $S_{DC}$  у  $n$  разоў большая за сілу  $S_{AB}$ :  $S_{DC} = nS_{AB}$ . Тады  $2\sqrt{3}(2F + P)/3 = n\sqrt{3}P/6$ ,  $2(2F + P) = nP/2$ ,  $4F = nP/2 - 2P$ ,  $4F = (n/2 - 2)P$ ,  $8F = (n - 4)P$ ,  $F/P = (n - 4)/8$ . Пры  $n = 5$  знаходзім суадносіны паміж сіламі  $F$  і  $P$ :  $F/P = 1/8$ .

**УВАГА!**

Задачу 2.17 карысна рашыць без вызначэння рэакцый знешніх сувязей  $R_1$  і  $R_2$ .

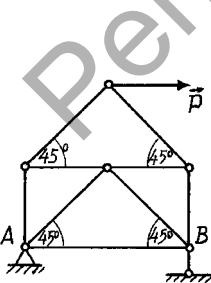
У такім разе давядзецца знайсці рэакцыі  $X_C$  і  $Y_C$  унутранай сувязі  $C$ . Калі ўлічыць, што яны, як сілы ўзаемадзеяння левай і правай частак фермы, накіраваны ў розныя бакі, і сіметрычны адносна вертыкальнай восі, што праходзіць праз шарнір  $C$ , то можна заўважыць, што  $Y_C = 0$ .

**Задача 2.18**

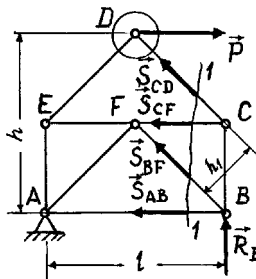
Плоская ферма (рыс. 2.40) нагружана гарызантальнай сілай  $P$ . Вызначыць унутраную сілу  $S_{AB}$  у стрыжні  $AB$ .

*Рашэнне*

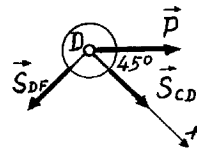
Рашэнне можна пачаць з устанаўлення суадносін паміж геаметрычнымі параметрамі фермы вышыняй  $h$  і пралётам  $AB$  роўным  $l$ . Калі звярнуць увагу на аднолькавыя вуглы  $\alpha = 45^\circ$ , то лёгка паказаць, што  $h = l$ ; пры гэтым  $AE = EF = FC = FD = l/2$ . Для вызначэння рэакцыі сувязі  $B$  разглядаем раўнавагу ўсёй фермы як цвёрдага цела. Атрымліваем:  $\sum M_A(\vec{F}_i) = R_B l - Ph = 0$ , адкуль  $R_B = P$ . Рэакцыя сувязі  $A$  тут не спатрэбіцца. Высветлім, ці можна рашыць задачу «адным дзеяннем» (з аднаго ўраўнення знайсці сілу  $S_{AB}$ ). Уяўна выразаем вузел  $B$ , да якога прымыкае стрыжань  $AB$ . У разрез трапляюць тры стрыжні ( $AB$ ,  $BF$ ,  $BC$ ) з невядомымі ўнутранымі сіламі. А для плоскай сыходнай сістэмы сіл можна класці толькі дзве ўмовы раўнавагі. Таму вызначыць сілу  $S_{AB}$  нельга. Паспрабуем правесці сячэнне  $I-I$ , у якое пападае стрыжань  $AB$  (рыс. 2.41).



Рысунк 2.40



Рысунк 2.41



Рысунк 2.42

Разглядаем раўнавагу правай (ад сячэння) часткі фермы. Дзеянне на яе адкінутай левай часткі замяняем невядомымі ўнутранымі сіламі. Накіроўваем іх ад сячэння  $1-1$ . Такому напрамку сіл адпавядае *расцяжэнне* стрыжняў. Спраўдны напрамак унутраных сіл знаходзіцца напрыканцы рашэння па іх знаках. Як відаць з рысунка 2.41, на правую частку фермы дзейнічае адвольная плоская сістэма сіл, для якой можна скласці тры ўмовы раўнавагі, а невядомых сіл чатыры. У гэтым выпадку рашэнне ў «адно дзеянне» не магчыма. Давядзецца рашаць задачу ў два этапы. Спачатку з раўнавагі вузла  $D$  знойдзем сілу  $S_{CD}$ , а затым з раўнавагі адсечанай правай часткі фермы вызначым сілу  $S_{AB}$ . Выразаны вузел  $D$  паказаны на рысунку 2.42. Запісваем роўнасць  $\sum X_i = S_{CD} + P \cos 45^\circ + 0 = 0$ . Адсюль  $S_{CD} = -P \cos 45^\circ$ , канчаткова атрымаем формулу  $S_{CD} = -\sqrt{2}P/2$ , дзе знак «мінус» паказвае, што стрыжань  $CD$  сціснуты і сіла  $S_{CD}$  накіравана да вузла. Таму, разглядаючы далей раўнавагу правай часткі фермы, вектар  $S_{CD}$  таксама трэба накіраваць да сячэння  $1-1$ . Каб атрымаць цяпер ураўненне з адной невядомай сілай  $S_{AB}$ , складаем суму момантаў адносна пункта  $F$ :  $\sum M_F(\vec{F}_i) = -S_{CD}h_1 - S_{AB}h/2 + R_B l/2 = 0$ . Адсюль знаходзім сілу  $S_{AB}$  па формуле  $S_{AB} = P/2$ .

#### УВАГА!

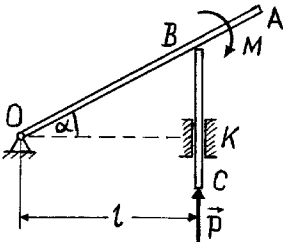
Пры рашэнні задачы выкарыстаны агульны (тыповы) спосаб без уліку яе асаблівасцей: сіметрыі структуры, спецыфікі размяшчэння шарніраў. Калі іх улічыць, то можна знайсці рашэнне ў «адно дзеянне».

#### Задача 2.19

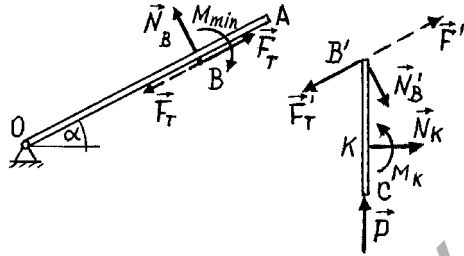
Кэфіцыент трэння ў пункце судакранання  $B$  штока  $BC$  са стрыжнем  $OA$  роўны  $f$ . На шток дзейнічае сіла  $P$  (рыс. 2.43). Знайсці мінімальнае і максімальнае значэнне моманту пары  $M$ , якая забяспечвае раўнавагу сістэмы. Дадзены  $\alpha$  і  $l$ . Вагою стрыжня і штока ігнараваць.

#### Рашэнне

Механізм уяўляе сабою складаную сістэму. Будзем разглядаць раўнавагу яго частак паасобку. На рысунку 2.44 паказаны напрамак сіл трэння для выпадку, калі да стрыжня  $OA$  прыкладзена пара сіл



Рысунак 2.43



Рысунак 2.44

з момантам  $M_{\min}$ . Як вызначыць напрамак сіл трэння  $F_T$  і  $F'_T$ ? Спачатку звернем увагу, што падчас перамяшчэння штока ўверх яго канец  $B$  слізае па стрыжні  $OA$  ўправа пад вуглом  $\alpha$ , г. зн. аддаляецца ад пункта  $O$ ; пры апусканні штока канец  $B$  набліжаецца да пункта  $O$ . А цяпер уявім, што на стрыжань дзейнічае такая пераменная пара сіл  $M$ , што сілы трэння адсутнічаюць, а раўнавага сістэмы забяспечваецца толькі нармальнымі сіламі ўзаемадзеяння  $N_B$  і  $N'_B$ , як у сістэмах без трэння. Пачнем паступова змяншаць велічыню моманту пары. Пры гэтым пад дзеяннем пастаяннай сілы  $P$  наслявае перамяшчэнне штока ўверх; яго канец  $B$  будзе імкнуцца зрушыцца па стрыжні  $OA$  ўправа пад вуглом  $\alpha$  (да пункта  $A$ ), а сіла счаплення  $F_{сч}$ , што ўтрымлівае яго ад такога зруху, будзе накіравана ўлева да пункта  $O$  (на рысунку 2.44 сілы счаплення не паказаны). Гранічнае значэнне гэтай сілы ўяўляе сілу трэння  $F'_T$ . Сіла  $F_T$ , прыкладзеная да стрыжня  $OA$ , накіравана ў процілеглы бок, пры гэтым  $F_T = F'_T$ . А гранічнае значэнне моманту пары  $M$ , пры якім дасягаецца сіла  $F'_T$ , будзе яго мінімальным значэннем  $M_{\min}$ . Каб устанавіць напрамкі сіл трэння для вызначэння максімальнай велічыні моманту пары  $M_{\max}$ , неабходна прамежкавае значэнне пары  $M$  павялічваць. Тады канец  $B$  штока будзе імкнуцца да зруху па стрыжні ў напрамку да пункта  $O$ , прыкладзеная да яго сіла счаплення будзе накіравана ў процілеглы бок. На рысунку 2.44 сілы трэння, што адпавядаюць моманту  $M_{\max}$ , паказаны пункцірам.

Запішам умовы раўнавагі адпаведна для стрыжня і штока:

$$\sum M_0(\vec{F}_i) = N_B \cdot OB - M_{\min}^{\max} = 0, \quad (2.53)$$

$$\sum Y_i = P - N_B \cos \alpha \pm F_T \sin \alpha = 0. \quad (2.54)$$

Тут і ніжэй ва ўсіх формулах верхні знак адпавядае максімальнаму значэнню моманту пары, ніжні — мінімальнаму. Падстаўляем у выраз (2.54) сілу трэння  $F_T = fN_B$  і выражаем з атрыманага ўраўнення рэакцыю  $N_B$ :  $N_B = P / (\cos \alpha \mp f \sin \alpha)$ . Цяпер з ураўнення (2.53) знаходзім гранічныя значэнні моманту ўраўнаважваючай пары сіл  $M_{\min}^{\max}$  па формуле

$$M_{\min}^{\max} = Pl / (\cos \alpha \mp f \sin \alpha) \cos \alpha.$$

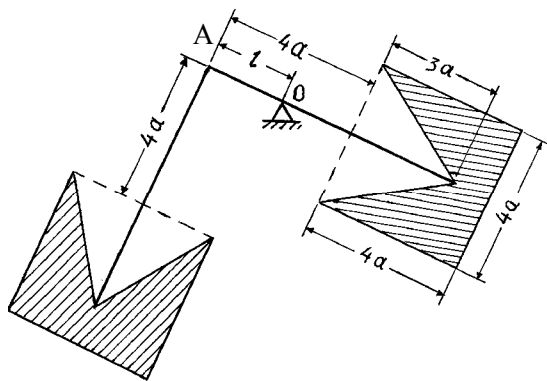
### Задача 2.20

Суцэльная канструкцыя ўяўляе сабою дзве аднолькавыя цяжкія пласціны, злучаныя бязважкім ломаным стрыжнем (рыс. 2.45). Знайсці найбольшае значэнне адлегласці  $l$ , пры якім канструкцыя будзе заставацца ў раўнавазе на апоры  $O$ . Коэфіцыент трэння роўны  $f$ .

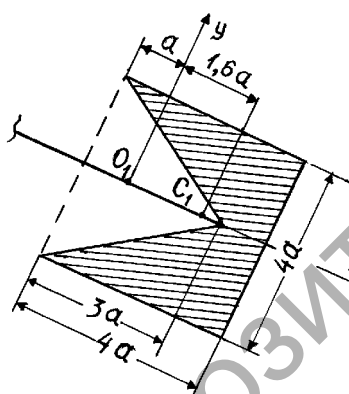
#### Рашэнне

Знойдзем спачатку каардынаты цэнтра цяжару пласціны. Фігуру раздзяляем на дзве часткі: квадрат са стараной  $4a$  і трохвугольнік (выраз) з асновай  $4a$  і вышынёй  $3a$ . На рысунку 2.46  $O_1$  — цэнтр цяжару плошчы выразаннага трохвугольніка,  $C_1$  — цэнтр цяжару ўсёй пласціны. Пачатак каардынат змяшчам у пункце  $O_1$ . Знаходзім  $x_{C_1} = (16a^2 a - 0) / (16a^2 - 6a^2) = 1,6a$ . Адлегласць ад вяршыні вугла  $A$  да цэнтра цяжару пласціны роўна  $AC_1 = 4a + a + 1,6a = 6,6a$ . Цэнтр цяжару  $C$  усёй сістэмы знаходзіцца на перасячэнні адрэзка  $C_1C_1$  з бісектрысай  $AL$ , якая з'яўляецца яе воссю сіметрыі (на рысунку 2.47 пласціны не паказаны, а толькі іх цэнтры цяжару  $C_1$ ).

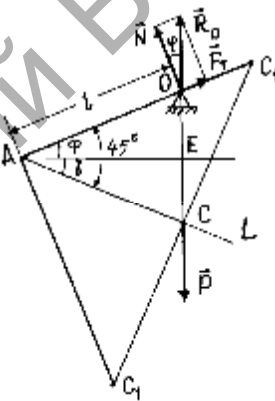
Далейшы поспех у рашэнні задачы цалкам залежыць ад якасці выканання рысунка 2.47. Каб правільна паказаць дадзеную канструкцыю на апоры  $O$ , трэба звярнуць увагу, што яна знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем дзвюх сіл: сілы цяжару  $P$ , прыкладзенай у цэнтры цяжару  $C$ , і рэакцыі  $R_0$  апоры  $O$ . Паводле аксіёмы аб абсалютна цвёрдым целе гэтыя сілы павінны мець агульную лінію дзеяння,



Рисунак 2.45



Рисунак 2.46



Рисунак 2.47

значыць, яна праходзіць праз пункты  $O$  і  $C$ . Паколькі сіла  $P$  вертыкальна, то і рэакцыя  $R_0$  у любым становішчы раўнавагі вертыкальна і роўна  $P$ . Калі цяпер апору  $O$  змясціць на сярэдыне стрыжня  $AC_1$ , то ён займе гарызантальнае палажэнне, пры гэтым сіла счаплення  $F_{сч}$  стрыжня з апораю адсутнічае. Пры наступным павелічэнні адлегласці  $l$  сістэма будзе паварочвацца супраць руху гадзіннікавай стрэлкі. Цяпер узнікае сіла счаплення, якая ўтрымлівае канструкцыю

ад слізгання. Пры некаторым значэнні  $l$  гэта сіла дасягае свайго максімальнага значэння, роўнага сіле трэння  $F_T$ . У такім становішчы канструкцыя і паказана на рысунку 2.47. Вугал  $\varphi$ , утвораны вектарам  $R_0$  з нармаллю да стрыжня  $AC_1$  у гэтым палажэнні гранічнай раўнавагі, як вядома, называюць вуглом трэння, для яго  $\operatorname{tg}\varphi = f$ . Далейшае павелічэнне адлегласці  $l$  не магчыма, бо парушаецца раўнавага цела — яно будзе слізгаць па апоры ўлева.

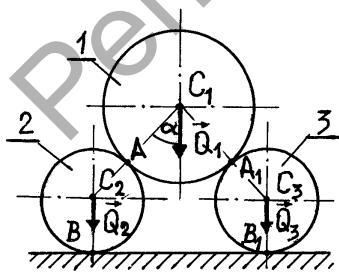
Працяг рашэння чыста геаметрычны. З вяршыні вугла  $A$  праводзім гарызонтальную лінію  $AE$  і адзначаем пры вяршыні вугла  $\varphi$ . У трохвугольніку  $AEC$ :

$$\begin{aligned} AE &= AC \cos \gamma = AC_1 \cos 45^\circ \cdot \cos(45^\circ - \varphi) = \\ &= AC_1 (\sqrt{2}/2) (\cos 45^\circ \cdot \cos \varphi + \sin 45^\circ \cdot \sin \varphi) = \\ &= 6,6a (\sqrt{2}/2) (\sqrt{2}/2) (\cos \varphi + \sin \varphi) = 3,3a (\cos \varphi + \sin \varphi). \end{aligned}$$

З трохвугольніка  $AEO$  знаходзім адлегласць  $l$  па формуле  $l = AE / \cos \varphi = 3,3a(1 + \operatorname{tg}\varphi)$ ; канчаткова атрымаем значэнне  $l = 3,3a(1 + f)$ .

### Задача 2.21

Цыліндры 1, 2 і 3 складзены, як паказана на рысунку 2.48. Іх сілы цяжару роўны  $Q_1, Q_2 = Q_3$ . Каэфіцыент трэння паміж цыліндрамі роўны  $f$ . Вызначыць найбольшы вугал  $\alpha$ , пры якім цыліндры знаходзяцца ў раўнавазе, і найменшы каэфіцыент трэння паміж цыліндрамі 2, 3 і плоскасцю.



Рысунк 2.48

### Рашэнне

Каб лепш зразумець умову задачы, паспрабуйце адказаць на наступныя пытанні:

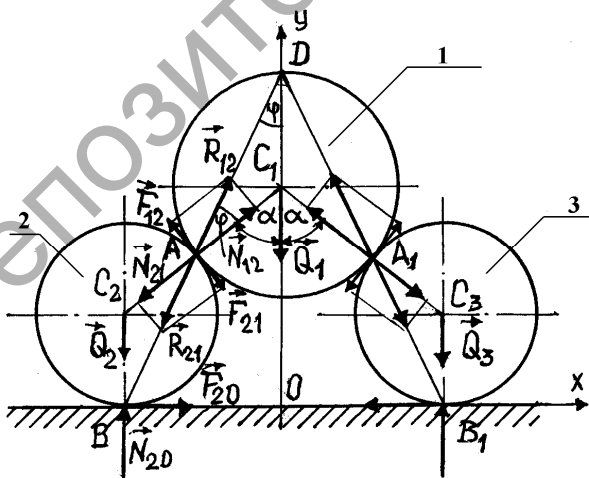
1. Які рух будуць выконваць цыліндры 2, 3 у выпадках, калі каэфіцыенты трэння ў пунктах  $A, A_1, B, B_1$ :
- а)  $f_A = f_{A_1} = 0, f_B = f_{B_1} \neq 0$ ; б)  $f_A = f_{A_1} \neq 0, f_B = f_{B_1} = 0$ ; в)  $f_A = f_{A_1} = 0, f_B = f_{B_1} = 0$ ?

2. Чаму пры  $f_A = f_{A_1} \neq 0$ ,  $f_B = f_{B_1} \neq 0$  абмежавана значэнне вугла  $\alpha$ ?

Інакш: чаму яго не можна павялічваць, захоўваючы раўнавагу сістэмы, да таго становішча, калі цыліндр 1 апусціцца на апорную плоскасць?

Цяпер, калі вы ўжо знайшлі адказы на пастаўленыя пытанні, давайце паразважаем над другім з іх сумесна. Пакажам сілы ўзаемадзеяння цыліндраў 1 і 2. На рысунку 2.49 літарамі  $N_{12}$ ,  $F_{12}$  і  $\vec{R}_{12}$ , дзе  $\vec{R}_{12} = \vec{N}_{12} + \vec{F}_{12}$ , абазначаны сілы, прыкладзеныя да цыліндра 1. Працілеглыя ім па напрамках сілы  $N_{21}$ ,  $F_{21}$ ,  $\vec{R}_{21}$ , дзе  $\vec{R}_{21} = \vec{N}_{21} + \vec{F}_{21}$ , прыкладзены да цыліндра 2. Такія ж сілы ўзнікаюць і паміж цыліндрамі 1 і 3 (на рысунку не абазначаны). Сілы  $N_{12}$  і  $N_{13}$  уяўляюць сабою нармальныя рэакцыі з боку цыліндраў 2, 3, а сілы  $N_{21}$  і  $N_{31}$  — ціск цыліндра 1 на ніжнія цыліндры. Літарамі  $F_{12}$ ,  $F_{13}$  і  $F_{21}$ ,  $F_{31}$  абазначаны сілы счাপлення паміж цэламі. Пры ідэальна гладкіх паверхнях цел ( $f = 0$ ) яны роўны нулю. У апошнім выпадку з умовы раўнавагі цыліндра 1 знаходзім сілу  $N_{12}$  па формуле

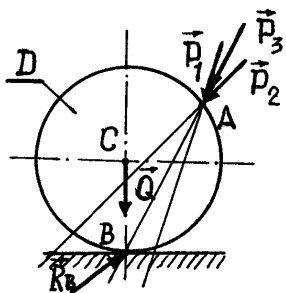
$$N_{12} = N_{21} = N_{13} = N_{31} = Q_1 / 2 \cos \alpha. \quad (2.55)$$



Рысунк 2.49

Звернем увагу на наступныя акалічнасці:

1. Відавочна, што калі лінія дзеяння сілы  $P_1$ , прыкладзенай да нейкага цыліндра  $D$  (рыс. 2.50), праходзіць справа ад пункта  $B$ , то сіла



Рысунк 2.50

імкнецца павярнуць яго за стрэлкай гадзінніка, калі яна перасякае апорную плоскасць злева ад пункта  $B$  (як у сілы  $P_2$ ), то — супраць руху стрэлкі. І толькі сіла  $P_3$ , лінія дзеяння якой праходзіць праз пункт  $B$ , не выклікае павароту цыліндра, ён можа толькі слізгаць па плоскасці альбо заставацца ў раўнавазе пры пэўным значэнні каэфіцыента трэння  $f_B$ . Да такой жа высновы можна прыйсці і на падставе тэарэмы аб трох сілах (на рысунку 2.50 — гэта сілы  $P_3$ ,  $Q$ ,  $R_B$ ), якія перасякаюцца ў адным пункце  $B$ .

2. З формулы (2.55) відаць, што з павелічэннем вугла  $\alpha$  ціск цыліндра  $1$  на цыліндры  $2$  і  $3$  узрастае. Калі ж цыліндры шурпатыя, то адначасова ўзрастае і сіла счাপлення.

3. Ціск цыліндра  $1$  на цыліндры  $2$  і  $3$ , як гэта відаць з рысунка 2.49, імкнецца зрушыць іх ад восі сіметрыі  $Oy$ , у той час як сілы счাপлення  $F_{21}$  і  $F_{31}$  утрымліваюць іх ад такога зруху, бо накіраваны да восі сіметрыі. Апошнія магчыма, калі цыліндры  $2$  і  $3$  знаходзяцца на шурпатай плоскасці.

А цяпер вернемся да пытання 2 (гл. пачатак рашэння). Будзем павялічваць вугал  $\alpha$  ад яго мінімальнага значэння. Для гэтага цыліндры  $2$  і  $3$  будзем аднолькава адсоўваць ад восі сіметрыі, цыліндр  $1$  будзе апускацца. Раўнадзейныя рэакцыі  $R_{21}$  і  $R_{31}$  пры гэтым узрастаюць і праходзяць у любым новым становішчы раўнавагі сістэмы праз пункты кантактаў  $B$  і  $B_1$ . Пры некаторым значэнні вугла  $\alpha$ , якое будзе *найбольшым*, сіла счাপлення  $F_{12}$ , роўная  $F_{21}$ , дасягне свайго гранічнага значэння  $F_{12} = F_{21} = fN_{12} = fN_{21}$ , якое называецца сілай трэння (у яе абазначэнні часта выкарыстоўваецца індэкс «т»:  $F_{1т} = F_{2т}$ ). Пры далейшым павелічэнні вугла  $\alpha$  ціск на цыліндры  $2$  і  $3$  будзе ўзрастаць, а стрымліваючыя сілы трэння застануцца нязменнымі. Раўнавага сістэмы парушыцца. Калі цяпер пабудоваць рэакцыю  $\vec{R}_{21} = \vec{F}_{2т} + \vec{N}_{21}$ , то можна ўбачыць, што яе лінія дзеяння ўжо не праходзіць

праз пункт  $B$ , а вышэй яго. Такім чынам, адказ на другое пытанне наступны: *найбольшае значэнне вугла  $\alpha$  вызначаецца велічыняй каэфіцыента трэння*. Пры  $f = 0$  раўнавага цыліндраў не магчыма.

Далей будзем лічыць, што рысунак 2.49 адпавядае найбольшаму значэнню вугла  $\alpha$ , а сіла  $F_{12} = F_{1r}$ . Тады вугал  $\varphi$  паміж нармаллю  $AO_1$  да паверхні цыліндра  $I$  і вектарам  $R_{12}$  будзе вуглом трэння, для якога  $\operatorname{tg}\varphi = f$ . Выразім вугал  $\alpha$  праз каэфіцыент трэння  $f$ .

### Першы спосаб

Разгледзім раўнавагу цыліндра 2. Атрымаем роўнасці:

$$\sum M_{C_2}(\vec{F}_i) = F_{20}r_2 - F_{21}r_2 = 0, \quad (2.56)$$

$$\sum X_i = F_{20} + F_{21} \cos \alpha - N_{21} \sin \alpha = 0. \quad (2.57)$$

З ураўнення (2.56) знаходзім сілу  $F_{20} = F_{21} = fN_{21}$ . Перапішам ураўненне (2.57) з улікам значэння  $F_{20}$ :  $fN_{21} + fN_{21} \cos \alpha - N_{21} \sin \alpha = 0$ .

Адсюль  $(1 + \cos \alpha)f = \sin \alpha$ ,  $\sin \alpha / (1 + \cos \alpha) = f$ ,  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = f$ ,  $\frac{\alpha}{2} = \operatorname{arctg} f$ ,  $\alpha = 2 \operatorname{arctg} f$ .

### Другі спосаб

У становішчы гранічнай раўнавагі агульная лінія дзеяння рэакцый  $R_{12}$  і  $R_{21}$  праходзіць праз пункты  $B$  і  $D$ . Адзначаем пры вяршыні  $D$  вугал  $\varphi$ . Знаходзім суму вуглоў у трохвугольніку  $ADC_1$ :  $2\varphi + (180^\circ - \alpha) = 180^\circ$ . Адсюль  $\varphi = \alpha/2$ ,  $\operatorname{arctg} f = \alpha/2$ ,  $\alpha = 2 \operatorname{arctg} f$ .

*Вызначэнне мінімальнага каэфіцыента трэння  $f_0$* . Як вышэй адзначалася, цыліндры 2 і 3 могуць заставацца ў раўнавазе пад дзеяннем сіл  $R_{21}$  і  $R_{31}$  толькі на шурпатай плоскасці. У становішчы гранічнай раўнавагі сіла трэння  $F_{20} = f_0 N_{20}$ , адкуль  $f_0 = F_{20} / N_{20}$ . Раней знойдзена сіла  $F_{20} = f N_{12}$ . Каб вызначыць  $N_{12}$  і  $N_{20}$ , запісваем умовы раўнавагі адпаведна цыліндра  $I$  і ўсёй сістэмы цыліндраў:

$$\sum Y_i = 2N_{12} \cos \alpha + 2F_{12} \sin \alpha - Q_1 = 0, \quad (2.58)$$

$$\sum Y_i = 2N_{20} - Q_1 - 2Q_2 = 0. \quad (2.59)$$

З ураўнення (2.58), улічваючы залежнасць  $F_{12} = fN_{12}$ , знаходзім рэакцыю  $N_{12} = Q_1 / 2(\cos \alpha + f \sin \alpha)$  і  $F_{20} = fQ_1 / 2(\cos \alpha + f \sin \alpha)$ . З ураўнення (2.59) атрымліваем  $N_{20} = (Q_1 + 2Q_2) / 2$ . Цяпер знаходзім найменшае значэнне каэфіцыента трэння  $f_0$  цыліндраў 2 і 3 з плоскасцю, неабходнае для раўнавагі сістэмы:  $f_0 = fQ_1 / (Q_1 + 2Q_2)e$ , дзе  $e = \cos \alpha + f \sin \alpha = (1 - f^2) / \sqrt{1 + 3f^2} + 2f^2 / \sqrt{1 + 3f^2} = (1 + f^2) / \sqrt{1 + 3f^2}$ .

Для вызначэння каэфіцыента  $e$  выкарыстаны формулы:  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = f$ ,

$$\operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right), \quad \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \cos \alpha = 1 / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Атрыманы вышэй вынік можна прадставіць у выглядзе:  $f_0 = nQ_1 / (Q_1 + 2Q_2)$ , дзе  $n = f \sqrt{1 + 3f^2} / (1 + f^2)$ .

### Задача 2.22

Суцэльны стрыжань  $ABC$  злучаны з раздвоеным кривашыпам  $DOE$  з дапамогай паўзуноў  $A$  і  $B$ , якія могуць слізгаць па кривашыпу (рыс. 2.51). Вызначыць сілу  $Q$ , якая ўраўнаважвае пару сіл з момантам  $M$ . Вагой звенняў механізма і трэннем ігнараваць.  $AB = BC = l$ .

#### Раішэнне

Як відаць з рысунка 2.51, механізм утвораны з дзвюх частак. Паўзуны  $A$  і  $B$  уяўляюць сабою ўнутраныя аднавалентныя (простыя) сувязі. Знешняя сувязь  $C$  таксама аднавалентная. Лініі дзеяння рэакцый такіх сувязей вядомы. На рысунку 2.52 вектары  $R_A$  і  $R_B$  перпендыкулярны да частак  $OD$  і  $OE$  кривашыпа. Рэакцыя  $R_C$  перпендыкулярна да магчымага перамяшчэння паўзуна  $C$ .

#### УВАГА!

Часам паўзуны памылкова ўспрымаюцца як слізгальныя двухвалентныя злучэнні, таму што маюць знешняе падабенства з імі. Трэба памятаць, што ў слізгальных злучэннях адсутнічаюць шарніры.

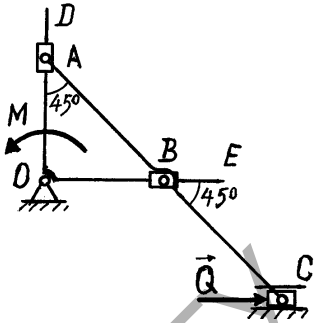
Разгледзім два способы рашэння задачы.

Першы спосаб

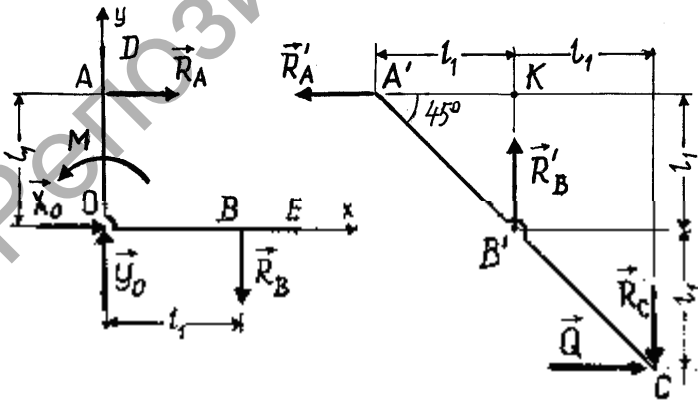
Задача рашаецца паводле тыповой методыкі. Механізм дзелім на дзве часткі. Знешнія і ўнутраныя сувязі замяняем іх рэакцыямі (рыс. 2.52). Для кожнай з частак можна скласці тры ўмовы раўнавагі (усяго шэсць умоў) і знайсці з іх пяць невядомых рэакцый і сілу  $Q$ . Паколькі ў задачы неабходна вызначыць толькі сілу  $Q$ , то дастаткова будзе скласці толькі частку ўраўненняў. Для іх атрымання можна разглядаць і раўнавагу ўсёй сістэмы. У рамках першага спосабу рашэння магчыма некалькі варыянтаў выбару сістэмы ўраўненняў. Каб знайсці карцейшы шлях да мэты, неабходна ўважліва прааналізаваць сістэму сіл, прыкладзеных да стрыжняў. У прыватнасці, трэба пазбягаць ураўненняў, якія ўключаюць рэакцыі сувязі  $O$ . Для назапашвання досведу рашэння задач разгледзім два варыянты складання ўраўненняў, неабходных для вызначэння сілы  $Q$ .

Разглядаем раўнавагу стрыжня  $DOE$ ; знаходзім суму момантаў сіл:

$$\sum M_O(\vec{F}_i) = M - R_A l_1 - R_B l_1 = 0. \quad (2.60)$$



Рысунк 2.51

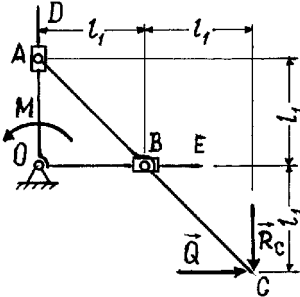


Рысунк 2.52

З раўнавагі стрыжня  $A'B'C'$  атрымліваем роўнасці

$$\sum X_i = Q - R'_A = 0, \quad (2.61)$$

$$\sum M_C(\vec{F}_i) = R'_B l_1 + R'_A 2l_1 = 0. \quad (2.62)$$



Рысунк 2.53

Ураўненні (2.60)—(2.62) ствараюць дастатковую сістэму. З ураўнення (2.61) знаходзім рэакцыю  $R'_A = Q$ . Тады з ураўнення (2.62) атрымаем  $R'_B = 2Q$ . Перапішам ураўненне (2.60), улічваючы, што  $R_A = R'_A$ ,  $R_B = R'_B$ :  $M - Ql_1 - 2Ql_1 = 0$ . Адсюль знаходзім сілу па формуле:  $Q = M/3l_1$ ; канчаткова  $Q = \sqrt{2}M/3l_1$ .

Каб атрымаць другую дастатковую сістэму ўраўненняў, разгледзім раўнавагу ўсёй сістэмы, вызвалішы яе толькі ад сувязі  $C$  (рыс. 2.53).

Знаходзім суму момантаў сіл адносна цэнтра  $O$ :

$$\sum M_O(\vec{F}_i) = M + Ql_1 - R_C 2l_1 = 0. \quad (2.63)$$

Для стрыжня  $A'B'C'$  (рыс. 2.52) запісваем ураўненне

$$\sum M_K(\vec{F}_i) = Q2l_1 - R_C l_1 = 0. \quad (2.64)$$

Як бачым, два ўраўненні (2.63) і (2.64) утрымліваюць дзве невядомыя сілы  $Q$  і  $R_C$ . Калі іх рашыць сумесна, то можна атрымаць такое ж выражэнне  $Q$ , як і раней.

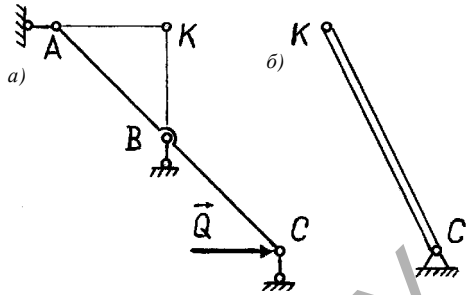
### Д р у г і с п о с а б

Ён прыныпова адрозніваецца ад першага, таму што патрабуе пераўтварэння зададзенай сістэмы (рыс. 2.51) у новую эквівалентную разліковую мадэль. Як адзначалася, на стрыжань  $ABC$  накладзены тры аднавалентныя сувязі: знешняя  $C$  і ўнутраныя  $A$  і  $B$ . Заменім простыя

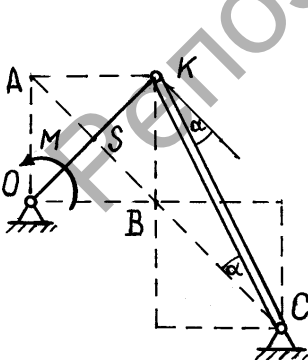
сувязі  $A$  і  $B$  одної двухвалентай сувяззю  $K$ . Яе необходима змясціць у пункце перасячэння ліній дзеяння рэакцый  $R'_A$  і  $R'_B$  (рыс. 2.52 і 2.54, а).

Сіла  $Q$ , прыкладзеная ў пункце  $C$  і накладзеная на яго простая сувязь, забяспечваюць нерухомасць гэтага пункта, што дазваляе ўсталяваць у ім двухвалентную сувязь.

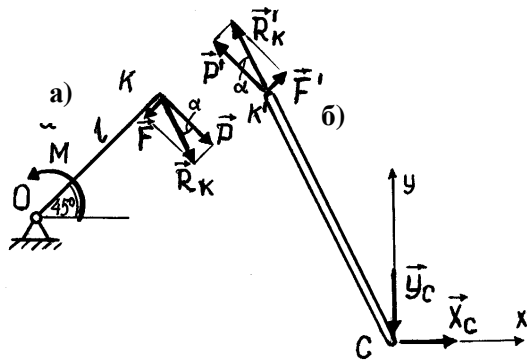
У выніку першапачатковы стрыжань  $ABC$  мадэліруецца новым стрыжнем  $CK$ . На рысунку 2.54, б, ён паказаны дзвюма лініямі. Калі цяпер уключыць стрыжань у зададзеную сістэму, то атрымаем разліковую мадэль, эквівалентную зададзенай сістэме. Такім чынам, мы ад механізма з адной ступенню свабоды перайшлі да нязменнай складанай сістэмы (рыс. 2.55). Сіла  $Q$  тут «прыхавана» ў сувязі  $C$ . Знайсці яе можна як рэакцыю  $X_C = Q$  проста з аналізу раўнавагі частак сістэмы (рыс. 2.56). Як відаць з рысунка 2.56, б, стрыжань  $CK'$  знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем дзвюх сіл, прыкладзеных да яго канцоў  $C$  і  $K'$  (на рысунку 2.56, б, паказаны іх складовыя). Таму яны накіраваны ўздоўж стрыжня:  $R'_K = R_K \parallel CK'$ . Складовыя  $P' = P$  сілы  $R'_K$  перпендыкулярны да стрыжня  $OK$ . Сілу  $P$  знаходзім з раўнавагі



Рысунак 2.54



Рысунак 2.55



Рысунак 2.56

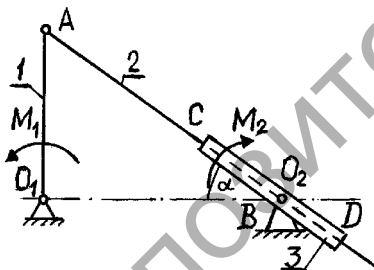
стрыжня  $OK$ :  $\sum M_o(\vec{F}) = M - Pl = 0$ , адкуль  $P = M/l$ . Паколькі  $F/P = \operatorname{tg} \alpha$ , то  $F = P \operatorname{tg} \alpha = P/3$  (тут, як відаць з рысунка 2.55,  $\operatorname{tg} \alpha = KS/CS = 0,5l/1,5l = 1/3$ ). Цяпер складаем умову раўнавагі для стрыжня  $CK'$ :  $\sum X_i = X_C + F' \cos 45^\circ - P' \cos 45^\circ = 0$ . Адгэтуль  $X_C = Q = (P - P/3) \cos 45^\circ = (M/l)(2/3) \cos 45^\circ$ ; канчаткова  $Q = \sqrt{3}M/3l$ .

#### УВАГА!

1. Аб пераўтварэнні сістэмы сувязей, выкарыстаным у другім спосабе, падрабязна напісана ў вучэбна-метадычным дапаможніку [9, с. 16].
2. Самы эфектыўны спосаб вызначэння ўраўнаважваючай сілы заснаваны на *прынцыпе магчымых перамяшчэнняў*, які вывучаецца ў другой частцы курса тэарэтычнай механікі. Для рашэння задачы 2.22 рацыянальна яго прымяненне з выкарыстаннем атрыманай тут разліковай мадэлі (гл. рыс. 2.55).

#### Задача 2.23

Механізм складаецца з крывашыпа 1 і шатуна 2, які можа слізгаць ва ўтулцы 3 (рыс. 2.57). Утулка замацавана шарнірна на восі  $O_2$  і судакранаецца з шатуном толькі ў пунктах  $C$  і  $D$ .



Рысунк 2.57

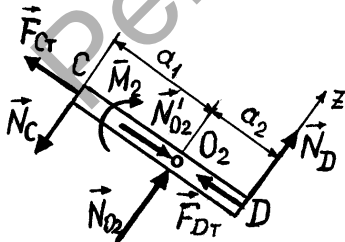
Дадзена:  $M_1$ ,  $O_1A = r$ ,  $O_2C = a_1$ ,

$O_2D = a_2$ ,  $\alpha$ ,  $f$ , дзе  $f$  — каэфіцыент трэння слізгання шатуна ва ўтулцы. Знайсці найменшае значэнне моманту пары  $M_2$ , прыкладзенага да ўтулкі, пры якім механізм застаецца ў раўнавазе.

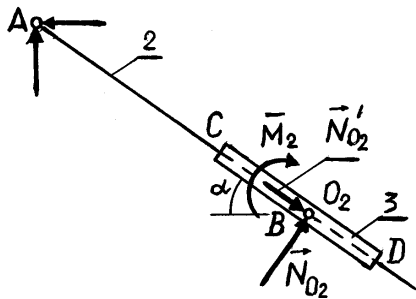
#### Рашэнне

Як відаць з рысунка 2.57, механізм складаецца з трох звянняў. Яго раўнавага магчыма толькі пры пэўных знешніх уздзеяннях. Пры  $f = 0$  існуе толькі адно значэнне моманту пары  $M_2$ , якое забяспечвае раўнавагу механізма (пры зададзеным  $M_1$ ). Калі  $f \neq 0$ , то яны ўтвараюць вобласць змянення моманту  $M_2$  (мноства значэнняў). Паводле ўмовы задачы трэба знайсці найменшае з іх. Уявім, што мы

знайшлі пару  $M_2$  пры  $f = 0$ , якая ўраўнаважвае механізм. Яна будзе ўраўнаважваць механізм і пры  $f \neq 0$ , пры гэтым сіла трэння ў кінематычнай пары «шатун-ўтулка» роўна нулю. Высветлім, якім чынам будзе парушацца раўнавага механізма пры змяншэнні знойдзенага моманту пары  $M_2$ . Відавочна, у гэтым выпадку механізм пачне рухацца пад дзеяннем неўраўнаважанай пары  $M_1$  — стрыжні 1, 2 і ўтулка будуць паварочвацца супраць руху стрэлкі гадзінніка. Адначасова стрыжань 2 будзе рухацца адносна ўтулкі — выцягвацца з яе, а яго частак  $AC$  будзе павялічвацца. Калі  $f \neq 0$ , то пры памяншэнні моманту  $M_2$  слізганне шатуна ва ўтулцы пачнецца не адразу, бо ў пунктах  $C$  і  $D$  узнікнуць сілы счаплення, якія да пэўнага моманту часу будуць утрымліваць стрыжань 2 ва ўтулцы без слізгання. А без прасоўвання шатуна не магчымы паварот звенняў. Пры некаторым значэнні памяншаемага моманту пары  $M_2$  сілы счаплення дасягнуць свайго межавога значэння, роўнага сіле трэння слізгання  $F_T = fN$ . Аднапаведнае значэнне моманту пары  $M_2$  будзе найменшым —  $M_{2min}$ . Для зручнасці выкладання ўвядзем абазначэнне  $M_{2min} = \bar{M}_2$ . Яго, паводле ўмовы задачы, і неабходна вызначыць. Трэба звярнуць увагу, што сілы трэння  $F_{Cm}$  і  $F_{Dm}$  у пунктах  $C$  і  $D$ , якія процідзейнічаюць выцягванню стрыжня, накіраваны ўздоўж яго ўніз. Да ўтулкі яны прыкладзены ў адваротным напрамку (рыс. 2.58). Каб знайсці сілы трэння, разгледзім раўнавагу асобна ўтулкі і стрыжня 2 з утулкай 3, паказаных на рысунках 2.58 і 2.59. Напрамкі рэакцый  $N_C$  і  $N_D$  на рысунку 2.58 выбраны так, каб яны



Рысунк 2.58



Рысунк 2.59

маглі супрацьдзейнічаць актыўнай пары сіл  $\bar{M}_2$ . Іншы выбар напрамкаў рэакцый не прывядзе да памылкі, толькі яны атрымаюцца са знакамі «мінус». Тое самае можна сказаць і аб выбары напрамку вектара  $N_{O_2}$  на рысунку 2.59: паколькі пара  $\bar{M}_2$  імкнецца вярцець аб'ект раўнавагі  $ACD$  адносна пункта  $A$  за стрэлкай гадзінніка, то рэакцыя  $N_{O_2}$  павінна ўраўнаважваць яе момантам процілеглага напрамку. На ўсіх рысунках літарай  $B$  абазначаем пункт стрыжня 2, які супадае з воссю ўтулкі  $O_2$ ,  $AB = l$ .

Запісваем патрэбныя ўраўненні раўнавагі ўтулкі:

$$\sum M_{O_2}(\vec{F}_i) = N_C a_1 + N_D a_2 - \bar{M}_2 = 0, \quad (2.65)$$

$$\sum Z_i = N_D - N_C + N_{O_2} = 0. \quad (2.66)$$

Далей разглядаем раўнавагу сістэмы, утворанай шатуном і ўтулкай; атрымліваем

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = N_{O_2} l - \bar{M}_2 = 0. \quad (2.67)$$

З ураўненняў (2.66) і (2.67) выключаем  $N_{O_2}$  і знаходзім:

$$N_D l - N_C l + \bar{M}_2 = 0. \quad (2.68)$$

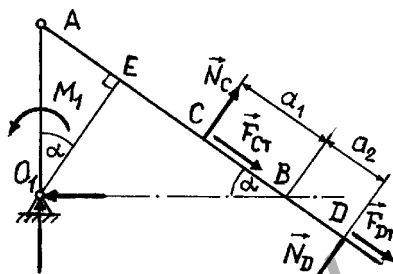
Рашаем сумесна ўраўненні (2.60) і (2.63), канчаткова прыходзім да наступных формул:

$$N_C = (l + a_2) \bar{M}_2 / (a_1 + a_2) l, \quad N_D = (l - a_1) \bar{M}_2 / (a_1 + a_2) l.$$

Цяпер знаходзім сілы трэння ў пунктах  $C$  і  $D$ :  $F_{CT} = f N_C$ ,  $F_{DT} = f N_D$ .

А зараз, паразважаем аб выбары аб'екта раўнавагі для вызначэння моманту  $\bar{M}_2$ . Неабходнае ўраўненне павінна ўключаць задзеную пару  $M_1$  і сілы трэння  $F_{Cm}$  і  $F_{Dm}$ , ад якіх залежыць велічыня моманту  $\bar{M}_2$ . Непажадана, каб ва ўраўненне раўнавагі

ўваходзілі рэакцыі сувязей  $A$ ,  $O_1$ ,  $O_2$ , бо тады давядзецца запісваць некалькі ўраўненняў і рашаць іх сістэму. Адзначаным патрабаваннем да аб'екта раўнавагі можа задаволіць увесь механізм (рыс. 2.60) без утулкі, а, значыць, і без сувязі  $O_2$ . Запісваем для яго ўмову



Рысунк 2.60

$$\sum M_{O_1}(\vec{F}_i) = M_1 + N_c(l - a_1 - AE) - N_D(l + a_2 - AE) - (F_{c_t} + F_{d_t})O_1E = 0. \quad (2.69)$$

Тут  $AE = r \sin \alpha$ ,  $O_1E = r \cos \alpha$ . Пасля падстаноўкі гэтых параметраў, рэакцый  $N_c$ ,  $N_D$  і сіл трэння  $F_{c_t}$ ,  $F_{d_t}$  ва ўраўненне (2.69) атрымаем

$$M_1 - \sin^2 \alpha \bar{M}_2 - (2l - a_1 + a_2)fr \cos \alpha \bar{M}_2 / (a_1 + a_2)l = 0.$$

Адсюль знаходзім момант  $\bar{M}_2$ :

$$\bar{M}_2 = (a_1 + a_2)l M_1 / [(a_1 + a_2)l \sin^2 \alpha + (2l - a_1 + a_2)fr \cos \alpha],$$

дзе  $l = r / \sin \alpha$ .

Пры  $a_1 = a_2 = a$  атрымаем:  $\bar{M}_2 = a M_1 / [a \sin^2 \alpha + fr \cos \alpha]$

*Дадатковыя пытанні:*

1. Знайдзіце момант пары  $\bar{M}_2$  пры  $a_1 = a_2 = a$ ,  $f = 0$  і параўнайце з момантам пары  $M_1$ . Ці такі вынік вы прагназавалі, не звяртаючыся да формул? У колькі разоў момант пары  $\bar{M}_2$  большы, чым момант пары  $M_1$  пры  $\alpha = 30^\circ$  і  $a_1 = a_2 = a$ ,  $f = 0$ ?

2. Як уплываюць сілы счаплення на суадносіны паміж момантамі пар  $\bar{M}_2$  і  $M_1$ ? Павялічваюць яе ці памяншаюць?

3. Ці зменіцца вынік, калі пару  $\bar{M}_2$  прыкладзі не да ўтулкі, а да шатуна? (Для адказу на пытанне неабходна перанесці пару і паўтарыць рашэнне задачы 2.23).

### 3 РАЎНАВАГА ПРАСТОРАВАЙ СІСТЭМЫ СІЛ

Умовы раўнавагі цела, на якое дзейнічае прасторавая сістэма сіл, прыведзены ў табліцы 1.1. З яе відаць, што колькасць незалежных ураўненняў для аднаго цела роўна шасці. Калі механічная сістэма складаецца з некалькіх цел, то колькасць незалежных ураўненняў у агульным выпадку можна вызначыць па формуле

$$s = 6n_1 + 3n_2,$$

дзе  $n_1$ ,  $n_2$  — колькасць цел, нагружаных адпаведна прасторавай і плоскай сістэмай сіл.

Калі ўсе сілы паралельныя, то  $s = 3n_1 + 2n_2$ . Паколькі ў сістэму сіл уключаюцца рэакцыі знешніх і ўнутраных сувязей, то ў канкрэтных задачах не заўсёды відавочна, чаму роўна  $n_1$ ,  $n_2$ . Патрабуецца папярэдні аналіз складанай сістэмы. Звычайна запісваюцца не ўсе ўмовы раўнавагі, а толькі тыя, якія неабходны для вызначэння велічынь, што трэба знайсці. Методыка рашэння задач такая ж, што і для плоскай сістэмы сіл. Трэба памятаць, што ўмовы раўнавагі прасторавай сістэмы сіл уключаюць сумы момантаў *адносна восі*, а не адносна пунктаў, як гэта мела месца для плоскай сістэмы. У змешаных складаных сістэмах выкарыстоўваюцца абедзве разнавіднасці ўраўненняў момантаў.

#### Задача 3.1

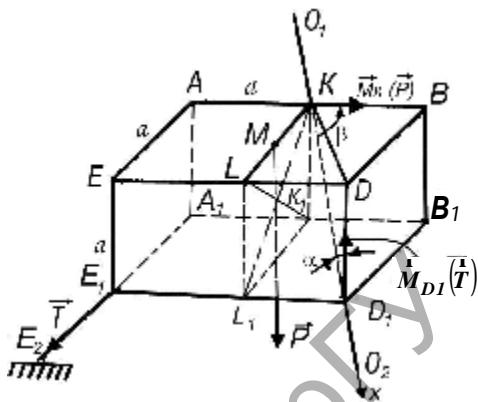
Аднародны прамавугольны паралелепіпед з рэбрамі  $AE = EE_1 = a$ ,  $AB = 2a$  вагою  $P$  можа паварочвацца вакол нерухомай восі  $O_1O_2$  (рыс. 3.2). Раўнавага цела забяспечваецца з дапамогай вярчэўкі  $E_1E_2$ , размешчанай на працягу рабра  $A_1E_1$ . Вызначыць нацяжэнне вярчэўкі  $T$  пры ўмове, што  $AK = KB$ .

#### Рашэнне

Гэта задача на замацаванне паняцця моманту сілы адносна восі. Паколькі цела мае нерухомую вось вярчэння, то яго раўнавага забяспечваецца толькі адной умовай: сума момантаў усіх сіл адносна гэтай восі павінна быць роўна нулю. Вызваляемся ад сувязі  $E_1E_2$ . Каардынатную вось  $O_1x$  накіроўваем па лініі  $O_1O_2$ . З рысунка 3.2 відаць, што вось  $O_1O_2$  з'яўляецца дыяганаллю куба з рабрам  $a$ , пры гэтым цэнтр цяжару цела  $C$  знаходзіцца ў цэнтры грані  $KLL_1K_1$  гэтага куба. Умова раўнавагі мае выгляд

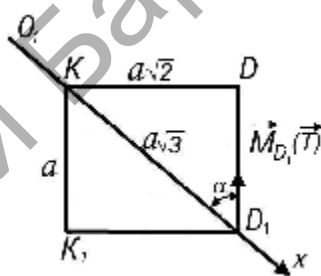
$$\sum_i M_x(\vec{F}_i) = M_x(\vec{T}) + M_x(\vec{P}) = 0. \quad (3.1)$$

Каб вылічыць моманты сіл  $T$  і  $P$ , успомнім азначэнне: момант сілы адносна восі роўны праекцыі на гэтую вось вектара-моманта сілы адносна адвольнага пункта на гэтай восі. У якасці такога пункта для моманта сілы  $T$  прымем пункт  $D_1$ ; плячом сілы  $T$  з'яўляецца найкарацейшая адлегласць ад пункта  $D_1$  да лініі дзеяння рэакцыі  $T - D_1E_1$ . Вектар-момант  $\vec{M}_{D_1}(\vec{T})$  накіраваны перпендыкулярна да плоскасці, што праходзіць праз пункт  $D_1$  і вектар  $T$ , г. зн. па нармалі да грані  $A_1B_1D_1E_1$  (рыс. 3.2). Аналагічна, плячом сілы  $P$  адносна пункта  $K$  будзе



Рысунак 3.2

адрэзак  $MK = \frac{a}{2}$ , а вектар-момант  $\vec{M}_k(\vec{P})$  перпендыкулярны да сячэння  $KLL_1K_1$ . Знойдзем складнікі ўраўнення (3.1). У адпаведнасці з прыведзеным азначэннем атрымаем роўнасць



Рысунак 3.3

$$M_x(\vec{T}) = -M_{D_1}(\vec{T}) \cos \alpha = -T \cdot D_1E_1 \cos \alpha = -T \cdot 2a \cos \alpha.$$

Для вызначэння велічыні  $\cos \alpha$ , пакажам асобна сячэнне  $DD_1K_1K$  на плоскасці (рыс. 3.3). Атрымліваем:  $\cos \alpha = \sqrt{3}/3$  і  $M_x(\vec{T}) = -2aT \sqrt{3}/3 = -2\sqrt{3}aT/3$ . Аналагічна  $M_x(\vec{P}) = M_k(\vec{P}) \cos \beta = P \cdot MK \cdot \cos \beta = \frac{1}{6}aP\sqrt{3}$ . Падстаўляем  $M_x(\vec{T})$  і  $M_x(\vec{P})$  ва ўраўненне (3.1):  $-\frac{2}{3}\sqrt{3}aT + \frac{1}{6}\sqrt{3}aP$ . Адсюль  $T = \frac{1}{4}P$ .

**УВАГА!**

Дакажыце, што  $\cos \beta = \cos \alpha$ . Для гэтага неабходна на рысунку 3.2 злучыць пункты  $BD_1$  і нарысаваць асобна атрыманы прамавугольны трохвугольнік  $KBD_1$ .

### Задача 3.2

Стрыжань, які мае форму дугі паўакружнасці радыусам  $r$ , размешчаны ў гарызантальнай плоскасці і нагружаны раўнамерна размеркаванай нагрузкай інтэнсіўнасці  $q$  (рыс. 3.4). Левы канец стрыжня замацаваны ў сцяну, а правы свабодны. Вызначыць рэакцыю замацавання.

#### Рашэнне

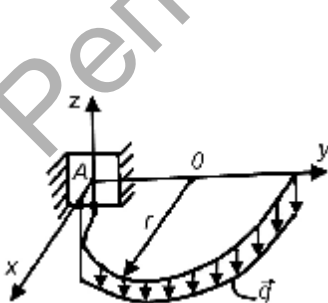
Вызваляемся ад сувязі  $A$ . Складовыя рэакцыі  $R_A$  і рэактыўнага моманту  $M_A$  абазначым праз  $X_A, Y_A, Z_A, M_x, M_y, M_z$  (рыс. 3.5). Раўнадзейная размеркаванай нагрузкі  $q$  роўна  $Q = qL = q\pi r$ . Пункт прыкладання сілы  $Q$  знаходзіцца ў цэнтры цяжару паўакружнасці  $C$ . Складаем умовы раўнавагі:

$$\sum_i X_i = X_A = 0, \quad \sum_i Y_i = Y_A = 0, \quad \sum_i Z_i = Z_A - Q = 0,$$

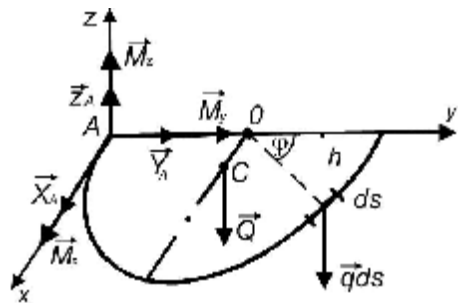
$$\sum_i M_x(\vec{F}_i) = M_x - Qr = 0, \quad \sum_i M_z(\vec{F}_i) = M_z = 0,$$

$$\sum_i M_y(\vec{F}_i) = M_y + Q \cdot OC = 0.$$

Адсюль атрымліваем:  $X_A = Y_A = 0, \quad Z_A = q\pi r, \quad M_x = q\pi r^2, \quad M_z = 0, \quad M_y = -Q \cdot OC$ . У апошняй формуле знак «мінус» паказвае, што рэактыўны момант у замацоўцы накіраваны процілегла паказанаму на рысунку 3.5, г. зн. па гадзіннікавай стрэлцы. Плечо  $OC = x_C$  неабходна вызначыць як каардынату  $x_C$  цэнтра цяжару паўакружнасці. Прывядзем



Рысунак 3.4



Рысунак 3.5

іншы, больш агульны, спосаб вылічэння моманту размеркаванай нагрузкі  $q$  адносна восі  $Oy$ . Раўнадзейная нагрузкі  $q$  на ўчастку дугі  $ds$  роўна  $dQ = qds$ . Знаходзім яе момант адносна восі  $Oy$ :  $dm_y = dQ \cdot h = qhds = qr \sin\varphi r d\varphi = qr^2 \sin\varphi d\varphi$ . Момант усёй нагрузкі  $M_y(q) = \int_0^\pi dm_y = \int_0^\pi qr^2 \sin\varphi d\varphi = -qr^2 \cos\varphi \Big|_0^\pi = 2qr^2$ . Далей складаем тую ж умову раўнавагі:  $\sum_i M_y(\vec{F}_i) = M_y + M_y(q) = 0$ , адсюль  $M_y = -2qr^2$ .

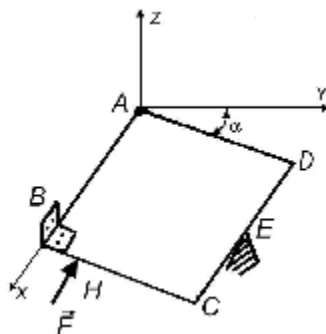
**УВАГА!**

Тут мы складалі шэсць умоў раўнавагі. Калі ўлічыць, што нагрузка паралельна восі  $Oz$ , то можна абысціся трыма ўмовамі. Наяўнасць рэактыўных пар  $M_x, M_y$  не змяняе становішча, паколькі іх плоскасці паралельныя да нагрузкі  $q$ .

**Задача 3.3**

Квадратная аднародная пласцінка  $ABCD$  са стараной  $a$  вагою  $P$  замацавана ў пункце  $A$  пры дапамозе сферычнага, а ў пункце  $B$  — цыліндрычнага шарніраў (рыс. 3.6).

Старана  $AB$  гарызантальна. У пункце  $E$  пласцінка абапіраецца на вастрыё. У пункце  $H$  на пласцінку дзейнічае сіла  $F$  паралельная да стараны  $AB$ . Складзі ўмовы раўнавагі пласцінкі, калі яна ўтварае з гарызантальнай плоскасцю вугал  $\alpha$ , а  $CE = ED, BH = b$ .



Рысунк 3.6

*Рашэнне*

Аб'ектам раўнавагі ў задачы з'яўляецца пласцінка. Вызваляючы яе ад сувязей, будзем улічваць, што вастрыё  $E$  перашкаджае павароту пласцінкі вакол восі  $Ax$ , яго рэакцыя  $R_E$  перпендыкулярна да плоскасці пласцінкі (рыс. 3.7). Для складання  $\sum_i Y_i, \sum_i Z_i$  і  $\sum_i M_x(\vec{F}_i)$  на рысунку 3.8 прадстаўлены від пласцінкі з дадатнага напрамку восі  $Ax$ . Вось  $Ax$  і сіла  $F$  на гэтым рысунку праектуюцца ў пункты  $A$  і  $H$ . Плячом сілы  $F$  адносна восі  $Ay$  з'яўляецца адрэзак  $KL = bs \sin\alpha$ , адносна восі  $Az$  — адрэзак  $MK = b \cos\alpha$ .

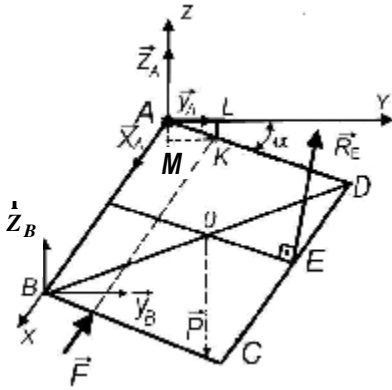


Рисунок 3.7

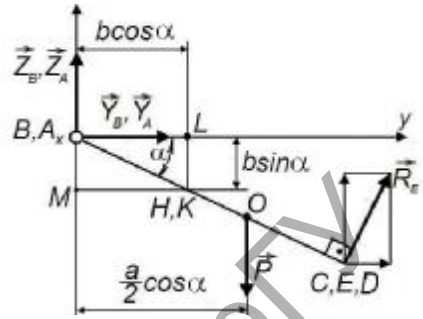


Рисунок 3.8

Адпаведна рысункам 3.7 і 3.8 атрымліваем:

$$\sum_i X_i = X_A - F = 0,$$

$$\sum_i Y_i = Y_A + Y_B + R_E \sin \alpha = 0,$$

$$\sum_i Z_i = Z_A + Z_B + R_E \cos \alpha - P = 0,$$

$$\sum_i M_x(\vec{F}_i) = R_E a - P \frac{a}{2} \cos \alpha = 0,$$

$$\sum_i M_y(\vec{F}_i) = -Z_B a - R_E \cos \alpha \frac{a}{2} + F b \sin \alpha + P \frac{a}{2} = 0,$$

$$\sum_i M_z(\vec{F}_i) = Y_B a + R_E \sin \alpha \frac{a}{2} + F b \cos \alpha = 0.$$

Канчаткова маем:

$$X_A - F = 0, \quad Y_A + Y_B + R_E \sin \alpha = 0,$$

$$Z_A + Z_B + R_E \cos \alpha - P = 0,$$

$$R_E - \frac{1}{2} P \cos \alpha = 0,$$

$$Z_B + \frac{1}{2} R_E \cos \alpha - \frac{b}{a} F \sin \alpha - \frac{1}{2} P = 0,$$

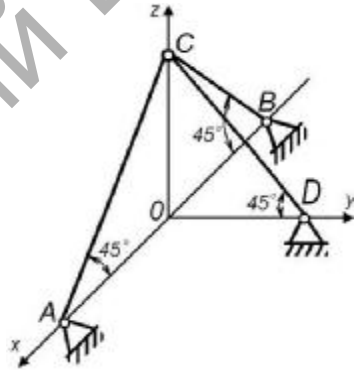
$$Y_B + \frac{1}{2} R_E \sin \alpha + \frac{b}{a} F \cos \alpha = 0.$$

### Задача 3.4

Тры аднолькавыя аднародныя стрыжні вагой  $P$  канцамі  $A$ ,  $B$  і  $D$  шарнірна прымацаваны да гарызантальнай плоскасці і злучаны паміж сабой шарнірам  $C$  (рыс. 3.9). Вызначыць рэакцыі сферычных шарніраў  $A$ ,  $B$  і  $D$ .

#### Рашэнне

Сістэма складаецца з трох цел:  $AC$ ,  $CB$  і  $CD$ . Паказваем знешнія сілы  $P$ . Дзелім сістэму на дзве часткі:  $CD$  і  $ABC$ . Пакажам, што на кожную з іх дзейнічае плоская сістэма сіл. Для гэтага неабходна пераканацца, што шарніры  $A$ ,  $B$  і  $D$  можна разглядаць як цыліндрычныя, а не сферычныя. Стыжынь  $CD$  знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем трох сіл:  $P$ ,  $R_C$  і  $R_D$ . Таму ўсе яны перасякаюцца ў адным пункце і знаходзяцца ў той жа вертыкальнай плоскасці, што стыжынь і сіла  $P$ . Складовыя рэакцыі  $R_C$  і  $R_D$  паказаны на рысунку 3.10,



Рысунк 3.9

адкуль вынікае, што апору  $D$  можна разглядаць як цыліндрычны шарнір. Каб высветліць, які выгляд сувязі накладзены на стыжынь  $CD$  у пункце  $C$ , звернем увагу, што пункт  $C$  належыць і сістэме  $ACB$ . Яна перашкаджае перамяшчэнню шарніра  $C$  толькі ў плоскасці  $ACB$  і не абмяжоўвае яго ў перпендыкулярным накірунку (г. зн. у плоскасці  $OCD$ ). А такую сувязь, як вядома з тэорыі, накладвае вертыкальны стыжынь. Канчатковая мадэль сувязей, накладзеных на стыжынь  $CD$ , паказана на рысунку 3.11.

Пераходзім да часткі  $ACB$ . На кожным са стыжыняў  $AC$  і  $CB$  таксама дзейнічаюць тры сілы, якія перасякаюцца на лініях дзеяння сіл  $P$ . Значыць,

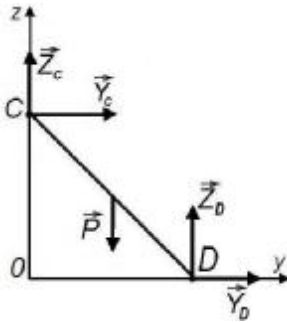


Рисунок 3.10

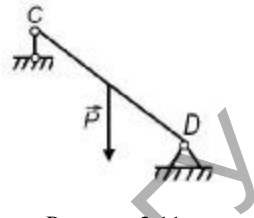


Рисунок 3.11

реакції  $R_A$  і  $R_B$  розміщені в площині  $ACB$  і їх можна представити двома складовими  $X_A, Z_A$  і  $X_B, Z_B$  у той же площині. Таким чином, опори  $A$  і  $B$  уявляють циліндричні шарніри. Уся система після вивалення від зв'язей показана на рисунку 3.12.

Даліше рішення задачі не представляє важкості. Складаємо умови рівноваги для всієї системи і стержня  $CD$ :

$$\sum_i M_x(\mathbf{F}_i) = Z_D a - P \frac{1}{2} a = 0,$$

$$\sum_i Y_i = Y_D = 0,$$

$$\sum_i Z_i = Z_C + Z_D - P = 0.$$

Адсюль

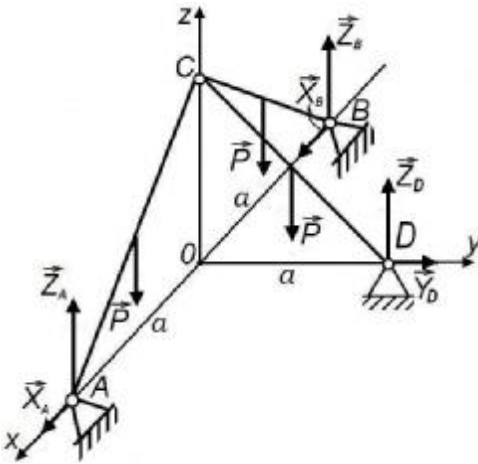
$$Z_D = P/2, Y_D = 0, Z_C = P/2.$$

Складаємо умови рівноваги частки  $ACB$  (рис. 3.13):

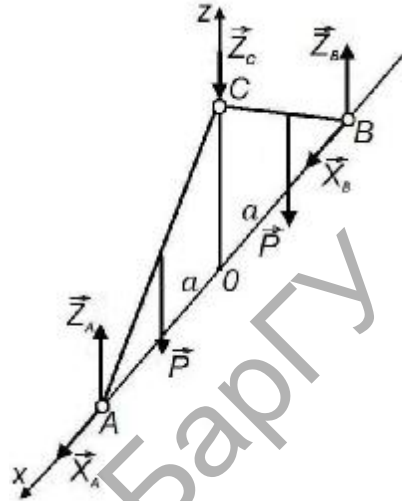
$$\sum_i M_B(\mathbf{F}_i) = -Z_A \cdot 2a + P \cdot \frac{3}{2}a + Z_C \cdot a + P \cdot \frac{1}{2}a = 0,$$

$$\sum_i M_A(\mathbf{F}_i) = -P \frac{1}{2}a - Z_C a - P \frac{3}{2}a + Z_B 2a = 0,$$

$$\text{адсюль } Z_A = Z_B = 5P/4.$$



Рысунак 3.12



Рысунак 3.13

З умовы раўнавагі сістэмы  $ACB \sum_i X_i = 0$  вынікае, што  $X_B = -X_A$ .

Для вызначэння  $X_A$  складаем умову раўнавагі стрыжня  $AC$ :

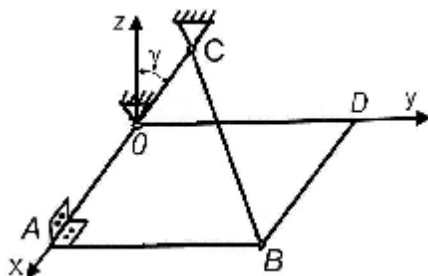
$$\sum_i M_C(\vec{F}_i) = -X_A a - Z_A a + P \frac{1}{2} a = 0.$$

Адсюль  $X_A = -X_B = -3P/4$ .

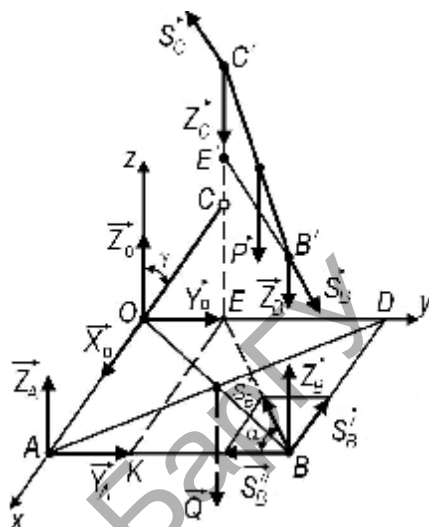
Прапануем рашыць гэтую задачу, разглядаючы шарніры  $A$ ,  $B$  і  $D$  як сферычныя з трыма складовымі па воях каардынат рэакцыямі  $R_A$ ,  $R_B$  і  $R_D$ .

### Задача 3.5

Цяжкая аднародная тонкая прамавугольная пліта ўтрымліваецца ў гарызантальным становішчы сферычным шарнірам  $O$ , цыліндрычным шарнірам  $A$  і тонкім цяжкім стрыжнем  $CB$  (рыс. 3.14). Вага пліты  $Q$ , вага стрыжня  $P$ . Трэннем ігнараваць. Вугал  $\gamma$  у плоскасці  $Oyz$  лічыць вядомым. Знайсці рэакцыю шарніра  $Y_A$ .



Рисунак 3.14



Рисунак 3.15

### Рашэнне

Паколькі стрыжань  $BC$  цяжкі, то яго трэба разглядаць не як сувязь, а як цэла. Таму зададзеная сістэма з'яўляецца складанай. Вызвалімся ад сувязей. Пры гэтым неабходна ўлічваць, што стрыжань  $BC$  знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем трох сіл:  $P$ ,  $R_B$  і  $R_C$ . Значыць, усе яны перасякаюцца ў адным пункце на лініі дзеяння сілы  $P$  і таму размешчаны ў вертыкальнай плоскасці, вызначанай трохвугольнікам  $B'C'E'$ .

Вызваленыя ад сувязей раздзеленыя сістэма паказана на рысунку 3.15, дзе рэакцыі  $S_B$  і  $S_C$  паралельныя да лініі  $BE$ , а рэакцыі  $Z_B$  і  $Z_C$  паралельныя да восі  $Oz$ . Паколькі патрабуецца вызначыць адно складовае рэакцыі  $Y_A$ , то запішам толькі тыя ўмовы раўнавагі, якія неабходны для атрымання адказу. Увядзем абазначэнні:  $OA = EK = a$ ,  $AB = b$ ,  $CE = C'E' = h$ ,  $BE = B'E' = d$ ,  $OC = x$ ,  $\angle KBE = \alpha$ .

З рысунка 3.15 відаць, што  $h = x \cos \gamma$ ,  $d = a / \sin \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha = (b - x \sin \gamma) / a$ .

Рэакцыю  $S_B$  прадставім у выглядзе двух складовых:

$$S'_B = S_B \sin \alpha, \quad S''_B = S_B \cos \alpha.$$

Умовы раўнавагі:  
для стрыжня

$$\sum_i M_{C'}(\mathbf{F}_i) = S_B h - Z_B d - P \frac{1}{2} d = 0, \quad (3.2)$$

для пласціны

$$\sum_i M_x(\mathbf{F}_i) = Z_B b - Q \frac{1}{2} b = 0, \quad (3.3)$$

$$\sum_i M_z(\mathbf{F}_i) = Y_A a - S_B' a + S_B' b = 0. \quad (3.4)$$

З ураўненняў (3.3) і (3.2) паслядоўна знаходзім рэакцыі:

$$Z_B = Q/2, \quad S_B = d(Q+P)/2h.$$

Ураўненне (3.4) перапішам у выглядзе

$$Y_A a - S_B \cos \alpha \cdot a + S_B \sin \alpha \cdot b = 0,$$

адсюль

$$\begin{aligned} Y_A &= \frac{1}{a} (a \cos \alpha - b \sin \alpha) S_B = \frac{1}{a} (a \cos \alpha - b \sin \alpha) \cdot d(Q+P)/2h = \\ &= \left( a \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - b \right) (Q+P)/2h = \left( a \frac{b - x \sin \gamma}{a} - b \right) (Q+P)/2h. \end{aligned}$$

Падстаўляючы сюды  $h = x \cos \gamma$ , канчаткова атрымліваем

$$Y_A = -(Q+P) \operatorname{tg} \gamma / 2.$$

Знак «мінус» паказвае, што сапраўдны напрамак рэакцыі  $Y_A$  процілеглы да вектара  $\dot{Y}_A$  на рысунку 3.15. Паспрабуйце растлумачыць гэты факт шляхам разважання. Прыміце да ўвагі, як накіравана рэакцыя  $S_B$  адносна восі  $Oz$ , менавіта яна вызначае і накірунак складовага  $Y_A$ . Варта звярнуць увагу і на тое, што велічыня  $Y_A$  не залежыць ні ад размераў пласціны, ні ад размяшчэння канца стрыжня на паўпрамой  $OC$ .

### Задача 3.6

Аднародная роўнастаронняя трохвугольная пласціна  $ABC$ , вага якой роўна  $P$ , абпіраецца на гарызонтальную плоскасць  $Oxy$ , а яе стораны  $AC$  і  $BC$  датыкаюцца да плоскасцей  $Oxz$ ,  $Oyz$  (рыс. 3.16). Ігнаруючы трэннем, знайсці мінімальную сілу  $F$ , якая будзе ўтрымліваць пласціну ў раўнавазе.

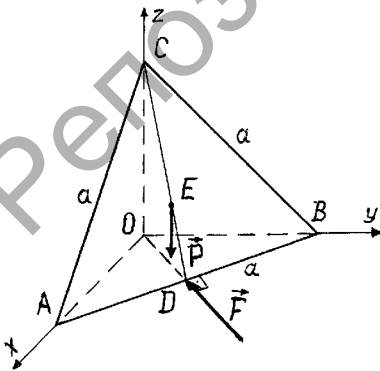
#### Раішэнне

Пры мінімальным значэнні сілы  $F$  ціск пласціны на плоскасці  $Oxy$ ,  $Oyz$  і іх рэакцыі адсутнічаюць. Нармальныя рэакцыі, якія ўзнікаюць на гладкіх паверхнях, прыкладзены толькі да стараны  $AB$  і вяршыні  $C$ . Размеркаваную па старане  $AB$  рэакцыю прывядзем да яе сярэдзіны  $D$  і абазначым праз  $R_D$ . Цэнтр цяжару пласціны знаходзіцца

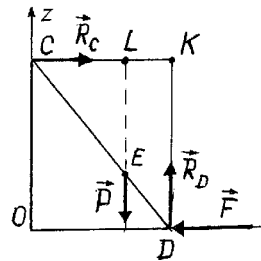
на перасячэнні яе медыянаў, г. зн.  $DE = \frac{1}{3}DC$  (гл. рыс. 3.16). Лёгка

заўважыць, што лініі дзеяння ўсіх сіл, прыкладзеных да пласціны, знаходзяцца ў плоскасці трохвугольніка  $OCD$ . І таму далей будзем разглядаць раўнавагу адвольнай плоскай сістэмы сіл, паказанай на рысунку 3.17. Каб выключыць з аналізу рэакцыі  $R_C$  і  $R_D$ , складзем суму момантаў сіл адносна пункта  $K$ :  $\sum M_K(\vec{F}_i) = P \cdot KL - F \cdot DK = 0$ , адсюль

$$F = P \cdot KL / DK. \quad (3.5)$$



Рысунк 3.16



Рысунк 3.17

Застаецца знайсці адрэзкі  $DK$  і  $KL$ . Абазначым даўжыні старон пласціны літарай  $a$ . Пласціну  $ABC$  (рыс. 3.16) можна разглядаць як аснову правільнай павёрнутага піраміды з вяршыняй  $O$ , бакавымі гранямі якой з'яўляюцца раўнабедраныя прамавугольныя трохвугольнікі. Таму  $\angle OAC = \angle OCA = 45^\circ$  і ў трохвугольніку  $OAC$   $OA = OC = a \cos 45^\circ = a\sqrt{2}/2$ . У прамавугольніку  $ODKC$  (рыс. 3.17)  $DK = OC = a\sqrt{2}/2$ . З трохвугольніка  $OAD$  знаходзім адрэзак  $OD$  па формуле  $OD = OA \sin 45^\circ = a/2$ . Тады  $KL = \frac{1}{3}OD = a/6$ . Звяртаемся цяпер да формулы (3.5), у выніку атрымліваем значэнне сілы  $F = \sqrt{2}P/6$ .

### Задача 3.7

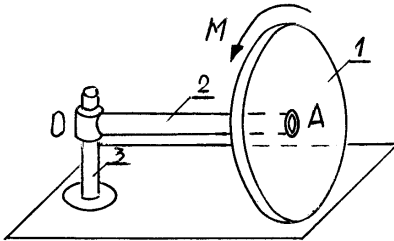
Кола  $I$  радыусам  $r$ , замацаванае на восі  $OA$ , можа каціцца пад дзеяннем прыкладзенага да яго моманту  $M$ . Пры гэтым цэнтр кола  $A$  апісвае акружнасць радыусам  $R = OA$  (рыс. 3.18). Знайсці момант  $M$  у стане раўнавагі сістэмы пры ўмове, што момант трэння на восі кола роўны  $M_1$ , момант трэння качэння  $M_2$ , а момант трэння на апоры 3 роўны  $M_3$ .

#### Рашэнне

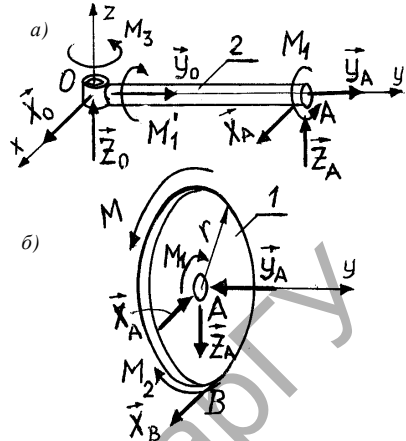
Як відаць на рысунку 3.18, сістэма складаецца з трох частак 1, 2, 3. Для рашэння задачы дастаткова разгледзець раўнавагу вала 2 і кола 1. Моманты трэння і рэакцыі, прыкладзеныя да іх, паказаны на рысунку 3.19. Напрамкі момантаў трэння вызначаюцца напрамкам магчымага качэння кола 1 пад дзеяннем актыўнага моманту  $M$ .

Разгледзім раўнавагу вала  $OA$  (рыс. 3.19,  $a$ ). Кола імкнецца павярнуцца вакол яго супраць руху стрэлкі гадзінніка (калі глядзець з дадатнага напрамку восі  $Oy$ ). Такі ж напрамак мае і момант трэння  $M_1$ , які перадаецца ад яго на вал. Гэты момант, у сваю чаргу, імкнецца павярнуць вал вакол восі  $Oy$  супраць ходу стрэлкі гадзінніка, але гэтаму павароту процідзейнічае рэактыўны момант  $M'_1$  ( $M'_1 = M_1$ ), які перадаецца на вал ад жорстка замацаванай на плоскасці стойкі 3. Такім чынам, для вала  $OA$  сума момантаў мае выгляд

$$\sum M_Z(\vec{F}_i) = M_3 - X_A \cdot R = 0. \quad (3.6)$$



Рисунак 3.18



Рисунак 3.19

Пяройдзем цяпер да кола 1. На яго, акрамя сіл узаемадзеяння з валам, дзейнічаюць у пункце B рэактыўныя сілы плоскасці: момант трэння качэння  $M_2$  і сіла счаплення  $X_B = X_A$ . Складаем умову раўнавагі:

$$\sum M_y(\vec{F}_i) = M - M_1 - M_2 - X_B r = 0. \quad (3.7)$$

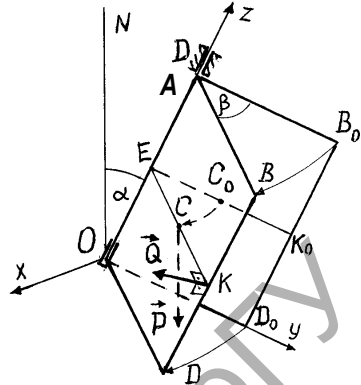
З ураўненняў (3.6) і (3.7) выключаем  $X_A$ ,  $X_B$  і знаходзім момант  $M$  па формуле  $M = M_1 + M_2 + \frac{r}{R} M_3$ .

### Задача 3.8

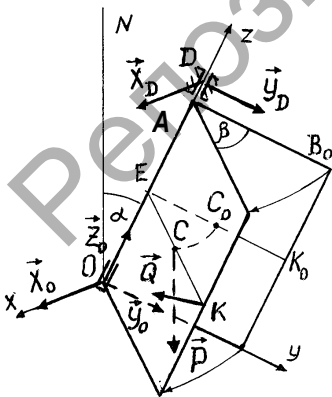
Аднародная прававугольная пласціна вагою  $P$  са старанамі  $OA = 2a$  і  $AB = 2b$  у стане раўнавагі знаходзілася ў вертыкальнай плоскасці (у палажэнні  $AB_0D_0O$ ); пры гэтым яе замацаваная старана  $OA$  ўтварала вугал  $\alpha$  з вертыкаллю  $ON$ . Затым у пункце  $K_0$  да пласціны прыклалі сілу  $Q$ , нармальную да яе плоскасці, пад дзеяннем якой пласціна павярнулася вакол стараны  $AO$  на нейкі вугал  $\beta$  у новае палажэнне раўнавагі  $ABDO$  (рыс. 3.20). Знайсці вугал  $\beta$  і рэакцыі сувязей  $O$  і  $D$ .

*Рашэнне*

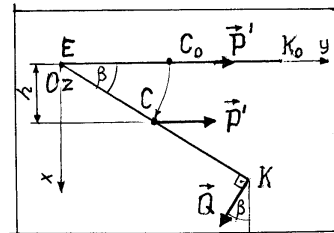
Для паспяховага рашэння задачы трэба дакладна ўявіць палажэнне аб'екта раўнавагі  $ABDO$  ў прасторы. Паводле ўмовы задачы напачатку пласціна знаходзілася ў адной (вертыкальнай) плоскасці з нармаллю  $ON$ . Будзем лічыць, што гэта плоскасць сумяшчаецца з плоскасцю ліста паперы. Уводзім прамавугольную сістэму восей каардынат. Дзве з іх накіруем па стонах пласціны ў пачатковым палажэнні, а трэцюю  $Ox$  — перпендыкулярна да яе (рыс. 3.21). Прымем да ўвагі, што вектар сілы  $P$  падчас павароту пласціны застаецца паралельным да вертыкалі  $ON$  і да плоскасці  $Oyz$ ; таму яго праекцыя на плоскасць  $Oxy$  паралельна да восі  $Oy$ , а праекцыя на плоскасць  $EKK_0$ , што праходзіць праз цэнтр цяжару  $C$  (і лініі  $EK$ ,  $EK_0$ ) — паралельна да адрэзка  $EK_0$ . Вектар сілы  $Q$  знаходзіцца ў плоскасці  $EKK_0$ , перпендыкулярнай да восі  $Oz$  і паралельнай да плоскасці  $Oxy$ . На рысунку 3.22 прадстаўлены від на плоскасць  $EKK_0$  з дадатнага напрамку восі  $Oz$ , дзе  $C_0C$  — дуга, якую апісвае цэнтр цяжару пласціны пры яе павароце,  $P'$  — праекцыя сілы  $P$  на гэту плоскасць.



Рысунк 3.20



Рысунк 3.21



Рысунк 3.22

Вызв'яляем пласціну ад сувязей  $O$  і  $D$  (эл. рыс. 3.21). Як бачым, на яе дзейнічае адвольная прасторавая сістэма сіл, для якой можна скласці шэсць умоў раўнавагі і затым вызначыць шэсць невядомых: пяць рэакцый сувязей і вугал  $\beta$ . Будзем запісваць гэтыя ўраўненні не ўсе адразу, а мэтанакіравана, г. зн. спачатку ставіць канкрэтную мэту, а затым складаць неабходныя ўраўненні:

1. *Вызначэнне вугла  $\beta$* . Вугал павароту можна знайсці, не вызв'яляючы пласціну ад сувязей, г. зн. разгледзець раўнавагу несвабоднага цела. З рысункаў 3.21 і 3.22 знаходзім:  $P' = P \sin \alpha$ ,  $h = a \sin \beta$ ,  $\sum M_z(\dot{F}_i) = P'h - Q \cdot 2a = 0$  альбо  $P \sin \alpha \cdot a \sin \beta - Q \cdot 2a = 0$ , адкуль  $\sin \beta = 2Q / P \sin \alpha$ .

Для працягу рашэння задачы спатрэбіцца  $\cos \beta$ . Знаходзім яго па формуле  $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{P^2 \sin^2 \alpha - 4Q^2} / P \sin \alpha$  альбо  $\cos \beta = e / P \sin \alpha$ , дзе  $e = \sqrt{P^2 \sin^2 \alpha - 4Q^2}$ .

2. *Вызначэнне рэакцыі  $Z_O$* . Аналіз сістэмы сіл паказвае, што патрэбна скласці наступную ўмову раўнавагі:  $\sum Z_i = Z_O - P \cos \alpha = 0$ , адсюль  $Z_O = P \cos \alpha$ .

3. *Вызначэнне рэакцый  $X_O$  і  $X_D$* . Запісваем дзве ўмовы раўнавагі:

$$\sum M_y(\dot{F}_i) = X_D \cdot 2b + Q \cos \beta \cdot b + P \cos \alpha \cdot a \sin \beta = 0,$$

$$\sum X_i = X_O + X_D + Q \cos \beta + 0 = 0.$$

З першай умовы знаходзім рэакцыю  $X_D$  па формуле  $X_D = -(Qb \cos \beta + Pa \cos \alpha \sin \beta) / 2b$ . Падстаўляем значэнне  $X_D$  у другое ўраўненне і выражаем  $X_O$ :

$$X_O = (Pa \cos \alpha \sin \beta - Qb \cos \beta) / 2b.$$

4. *Вызначэнне  $Y_O$  і  $Y_D$* . Складаем яшчэ два ўраўненні:

$$\sum M_x(\dot{F}_i) = -Y_D \cdot 2b + Q \sin \beta \cdot b - P \sin \alpha \cdot b - P \cos \alpha \cdot a \cos \beta = 0,$$

$$\sum Y_i = Y_O + Y_D - Q \sin \beta + P \sin \alpha = 0.$$

З першага ўраўнення атрымліваем роўнасць

$$Y_D = [Qb \sin \beta - (b \sin \alpha + a \cos \alpha \cos \beta)P] / 2b.$$

Падстаўляем знойдзенае выражэнне  $Y_D$  у другое ўраўненне, з якога знаходзім  $Y_O = [Qb \sin \beta + (a \cos \alpha \cos \beta - b \sin \alpha)P] / 2b$ .

У атрыманыя формулы для  $Z_O$ ,  $X_O$ ,  $Y_O$ ,  $X_D$  і  $Y_D$  неабходна падставіць знойдзеныя вышэй  $\sin \beta$  і  $\cos \beta$ .

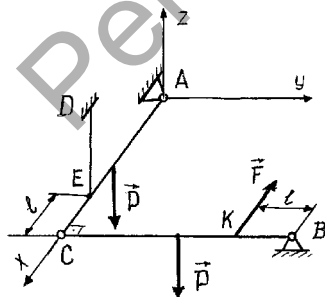
### Задача 3.9

Аднародныя стрыжні  $AC$  і  $CB$  даўжынёй  $4l$ , вага кожнага з якіх роўна  $P$ , замацаваны на сферычных шарнірах  $A$ ,  $B$  і ўтрымліваюцца ў гарызантальным становішчы з дапамогай ніці  $DE$ . Сіла  $F$  паралельна да восі  $Ax$  (рыс. 3.23). Вызначыць рэакцыі знешніх сувязей  $A$ ,  $B$  і  $ED$ .

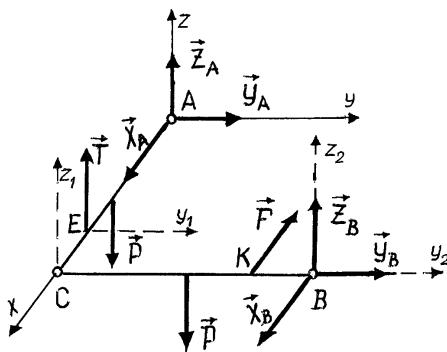
Перад тым, як прыступіць да рашэння задачы, устанавіце, якія рэакцыі залежаць толькі ад  $F$ . Паспрабуйце знайсці іх як для плоскай сістэмы сіл, размешчанай у гарызантальнай плоскасці без уліку сіл  $P$  і сувязі  $ED$ .

#### Рашэнне

Механічная сістэма складаецца з двух цел  $AC$  і  $CB$ . Вызваляем яе ад сувязей (рыс. 3.24). Паколькі на сістэму дзейнічае адвольная прасторавая



Рысунак 3.23



Рысунак 3.24

сістэма сіл, то для яе можна скласці шэсць умоў раўнавагі (3) і (4) (эл. табл. 1.1). Аднак у нас, як відаць з рысунка 3.24, сем невядомых. Каб атрымаць дадатковае ўраўненне, неабходна разгледзець раўнавагу аднаго з цел асобна. Затым рашыць атрыманую сістэму з сямі алгебраічных ураўненняў. Гэта «стандартная» metodyка рашэння любой задачы на раўнавагу прасторавай сістэмы сіл. Каб пазбегнуць кансерватызму мыслення, пакажам, што гэта не адзіны шлях да мэты. Заўжды застаецца прастора для творчасці. Удумліва аналізуючы ўмову задачы, можна знаходзіць больш рацыянальныя спосабы рашэння. Зараз варта паслядоўна скласці такія ўраўненні раўнавагі, каб кожнае з іх утрымлівала толькі адну новую невядомую велічыню:

1. *Вызначэнне рэакцыі  $X_B$  з раўнавагі стрыжня  $BC$ .* Для стрыжня мы можам скласці толькі частку ўмоў раўнавагі, бо ён не вызвалены ад унутранай сувязі  $C$ :  $\sum M_{Z_1}(\overset{\bullet}{F}_i) = F \cdot KC - X_B \cdot BC = 0$ , адкуль знаходзім рэакцыю  $X_B$  па формуле

$$X_B = KC \cdot F / BC = 3l \cdot F / 4l = 3F / 4.$$

2. *Вызначэнне рэакцыі  $Y_B$  з раўнавагі ўсёй сістэмы:*

$$\sum M_Z(\overset{\bullet}{F}_i) = F \cdot KC + Y_B \cdot AC - X_B \cdot BC = 0,$$

адсюль

$$Y_B = (X_B \cdot BC - F \cdot KC) / AC = \left( \frac{3}{4} F \cdot 4l - F \cdot 3l \right) / 4l = 0.$$

3. *Вызначэнне рэакцыі  $Z_B$  з раўнавагі стрыжня  $BC$ :*

$$\sum M_X(\overset{\bullet}{F}_i) = Z_B \cdot BC - P \cdot BC / 2 = 0,$$

адсюль

$$Z_B = P / 2.$$

4. *Вызначэнне рэакцыі  $Y_A$  з раўнавагі стрыжня  $AC$ :*

$$\sum M_{z_1}(\overset{\bullet}{F}_i) = Y_A \cdot AC = 0, \text{ адсюль } Y_A = 0.$$

5. Вызначэнне рэакцыі  $X_A$  з раўнавагі ўсёй сістэмы:

$$\sum M_{z_2}(\vec{F}_i) = X_A \cdot BC - Y_A \cdot AC - F \cdot BK = 0,$$

адсюль

$$X_A = (Y_A \cdot AC + F \cdot BK) / BC = BK \cdot F / BC = lF / 4l = F / 4.$$

6. Вызначэнне рэакцыі  $Z_A$  з раўнавагі ўсёй сістэмы:

$$\sum M_{Y_1}(\vec{F}_i) = Z_A \cdot AE - Pl + Pl - Z_B l = 0,$$

адсюль

$$Z_A = \frac{1}{3} Z_B = \frac{1}{3} P / 2 = P / 6.$$

7. Вызначэнне рэакцыі  $T$  з умовы раўнавагі ўсёй сістэмы:

$$\sum M_{Y_2}(\vec{F}_i) = T \cdot EC + Z_A \cdot AC - P \cdot AC / 2 = 0,$$

адсюль

$$T = \left( \frac{1}{2} P \cdot 4l - \frac{1}{6} P \cdot 4l \right) / EC = 4P / 3.$$

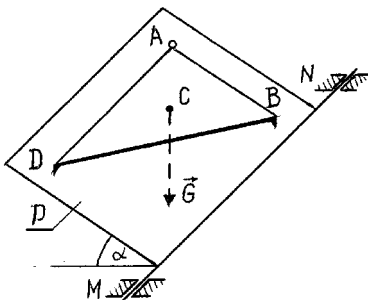
Як бачым, пры вызначэнні невядомых не выкарыстоўвалася сума праекцый на восі каардынат. Гэта зроблена з мэтай, каб ураўненні раўнавагі ўтрымлівалі мінімальную колькасць невядомых рэакцый.

#### УВАГА!

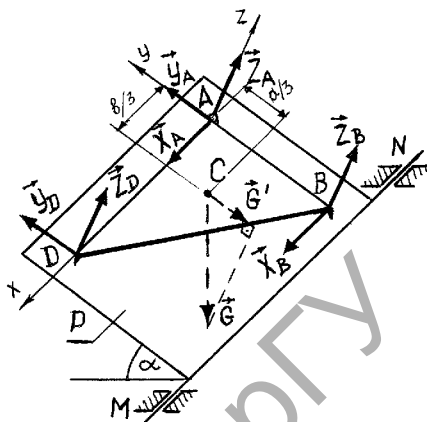
У апошнім ураўненні невядомае значэнне  $T$  выражаецца праз  $Z_A$ . Калі дапусціць, што  $Z_A$  было знойдзена няправільна, то памылка прайдзе і ў значэнне  $T$ . Каб велічыня  $T$  не залежала ад іншых рэакцый, варта замест апошняга ўраўнення склаці суму момантаў усіх сіл адносна восі, праведзенай праз шарніры  $A$  і  $B$ .

### Задача 3.10

Пласціна ў форме прамавугольнага трохвугольніка  $ABD$  замацавана ў вяршыні  $A$  на нахіленай плоскасці  $P$  з дапамогай сферычнага шарніра і абпіраецца на яе шытырамі ў вяршынях  $B$  і  $D$  (рыс. 3.25). Каэфіцыенты



Рисунак 3.25



Рисунак 3.26

трэння роўны адпаведна  $f_1$  і  $f_2$ , старана трохвугольніка  $AB$  роўна  $a$ ,  $AD$  роўна  $b$ ,  $AD \parallel MN$ . Вызначыць вугал нахілу плоскасці  $P$ , пры якім пласціна  $ABD$  страціць раўнавагу.

### Рашэнне

Уводзім сістэму каардынат і вызваляем пласціну ад сувязей (рыс. 3.26). Заўважым, што рэакцыі  $Z_B$  і  $Z_D$  накіраваны па нармалях да плоскасці пласціны і роўны яе ціску на плоскасць  $P$ , а рэакцыі  $X_B$  і  $Y_D$ , якія ўзнікаюць у плоскасці пласціны, уяўляюць сабою сілы счаплення. Яны ўзнікаюць пад дзеяннем сілы  $G' = G \sin \alpha$ , якая імкнецца павярнуць пласціну на плоскасці  $P$  вакол восі  $Az$ . Напрамкі сіл счаплення  $X_B$  і  $Y_D$  процілеглы да магчымых перамяшчэнняў штыроў  $B$  і  $D$ . Пры павелічэнні вугла  $\alpha$  сілы  $X_B$  і  $Y_D$  узрастаюць.

Для атрыманай прасторавай сістэмы сіл, якая дзейнічае на пласціну, можна скласці шэсць умоў раўнавагі, а невядомых рэакцый сувязей, як відаць з рысунка 3.26, — сем. Такім чынам, пры малых значэннях вугла  $\alpha$  разглядаемая задача статычна невызначальная. Пры максімальным значэнні вугла нахілу  $\alpha = \alpha_m$ , калі пласціна пачынае рухацца, сілы счаплення  $X_B$  і  $Y_D$  дасягаюць свайго гранічнага значэння — сіл трэння слізгання  $X_{Bт}$  і  $Y_{Dт}$ . І мы атрымліваем дадатковыя (да шасці ўмоў раўнавагі) суадносіны  $X_{Bт} = f Z_B$ ,  $Y_{Dт} = f_2 Z_D$ . Пры гэтым з'яўляецца і новая невядомая — вугал  $\alpha_m$ , які патрэбна вызначыць.

Разгледзім раўнавагу пласціны пры  $\alpha = \alpha_m$ .

Запісваем роўнасці:  $\sum M_x(\mathbf{F}_i) = G \frac{1}{3} a \cos \alpha_m - Z_B a = 0$ ,

$\sum M_y(\mathbf{F}_i) = G \cos \alpha_m \frac{1}{3} b - Z_D b = 0$ , адсюль  $Z_B = \frac{1}{3} G \cos \alpha_m$ ,  $Z_D = \frac{1}{3} G \cos \alpha_m$ .

Знаходзім сілы трэння:  $X_{B_T} = \frac{1}{3} f_1 G \cos \alpha_m$ ,  $Y_{D_T} = \frac{1}{3} f_2 G \cos \alpha_m$ . Цяпер

складаем суму момантаў:  $\sum M_z(\mathbf{F}_i) = G \cdot \sin \alpha_m \frac{1}{3} b - X_{B_T} a - Y_{D_T} b = 0$

альбо  $\frac{1}{3} G b \sin \alpha_m - \frac{1}{3} f_1 G a \cos \alpha_m - \frac{1}{3} f_2 G b \cos \alpha_m = 0$ , адсюль

$b \sin \alpha_m = (f_1 a + f_2 b) \cos \alpha_m$  і  $\operatorname{tg} \alpha_m = (f_1 a + f_2 b) / b$ .

### Задача 3.11

Бязважкі куб можа вярцецца вакол восі  $ON$ , якая праходзіць праз яго вяршыні  $O$  і  $A$ . У вяршыні  $O$  ён замацаваны з дапамогай сферычнага шарніра, у вяршыні  $A$  — з дапамогай цыліндрычнага. Да куба прыкладзена сіла  $F$  (рыс. 3.27). Вызначыць рэакцыі сувязей  $O$  і  $A$ .

#### Раішэнне

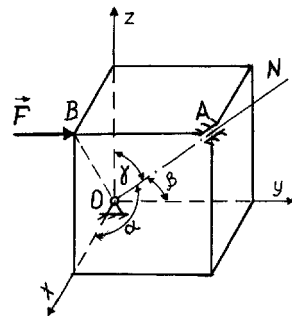
Досвед раішэння гэтай задачы — яшчэ адзін прыклад, калі адыход ад тыповой метадыкі раішэння ў прыватных выпадках дазваляе знайсці рацыянальны варыянт дасягнення мэты. Але спачатку ўдумліва прааналізуйце ўмову задачы і адкажыце на пытанні:

1. Чаму куб не верціцца пад дзеяннем сілы  $F$ ?

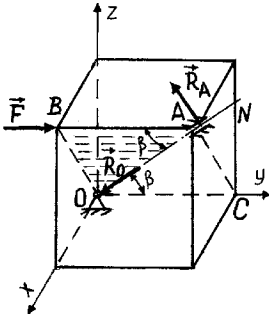
2. Чаму будуць роўныя рэакцыі сувязей  $O$  і  $A$ , калі лінію дзеяння сілы  $F$  сумясціць з дыяганаллю  $BO$ ?

Вы знайшлі правільны адказ. Куб не верціцца, бо момант сілы  $F$  адносна восі  $ON$  роўны нулю — лінія дзеяння сілы перасякае вось. А рэакцыі сувязей  $O$  і  $A$  роўны адпаведна сіле  $F$  і нулю.

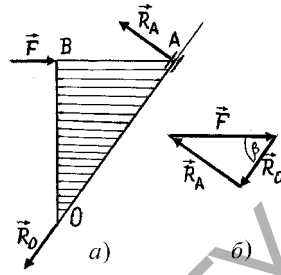
У працэсе аналізу ўмовы задачы, напэўна, звярнулі ўвагу на яе істотную асаблівасць: куб



Рысунак 3.27



Рысунк 3.28



Рысунк 3.29

знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем трох сіл (актыўнай сілы  $F$  і рэактыўных  $R_0$  і  $R_A$ ). Тут варта прыгадаць тэарэму аб трох сілах, якая так эфектыўна выкарыстоўваецца пры аналізе плоскай сістэмы сіл. Паводле тэарэмы тры сілы павінны перасякацца ў адным пункце. Паколькі лініі дзеяння сіл  $F$  і  $R_A$  перасякаюцца ў пункце  $A$ , то і лінія дзеяння рэакцыі  $R_0$  праходзіць праз гэты пункт (рыс. 3.28). Вельмі істотны і вывад з тэарэмы аб тым, што ўсе тры сілы знаходзяцца ў адной плоскасці. Такой плоскасцю на рысунку 3.28 з'яўляецца плоскасць трохвугольніка  $ABO$ , або прамавугольніка  $ABOC$ . Заўважаная асаблівасць задачы дазваляе аналізаваць раўнавагу *плоскай* сістэмы сіл, што значна спрашчае яе рашэнне. Разгледзім раўнавагу сячэння  $ABO$  (рыс. 3.29, а). Пабудуем для яго трохвугольнік сіл (рыс. 3.29, б). Вугал  $\beta$  у гэтым трохвугольніку такі ж як і той, што ўтварае вось  $ON$  з каардынатнай восьсю  $Oy$ . З трохвугольніка знаходзім рэактыўныя сілы:  $R_0 = F \cos \beta$ ,  $R_A = F \sin \beta$ . З геаметрыі вядома залежнасць:  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ . Паколькі для дыяганалі куба  $\alpha = \beta = \gamma$ , то  $3 \cos^2 \beta = 1$ ,  $\cos \beta = \sqrt{3}/3$ ,  $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{2}/3$ . Канчаткова атрымліваем:  $R_0 = F\sqrt{3}/3$ ,  $R_A = F\sqrt{2}/3$ .

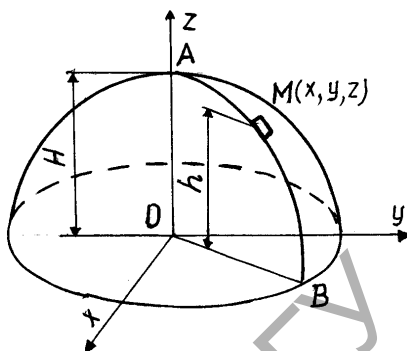
### Задача 3.12

Паверхня парабалічнага купала апісваецца ўраўненнем  $z = H - (x^2 + y^2)/H$ . На вышыні  $h$  на купал пакладзены груз  $M$  (рыс. 3.30). Каэфіцыент трэння слізгання роўны  $f$ . Пры якіх значэннях  $h$  магчыма раўнавага груза на паверхні купала?

### Рашэнне

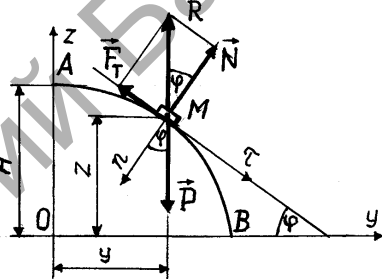
Цела  $M$  на паверхні купала можа слізаць па яго мерыдыяну  $AB$ . Паколькі паверхня купала сіметрычна адносна восі  $Oz$ , то ўмовы раўнавагі на ўсіх мерыдыянах аднолькавыя. Сумясцім мерыдыян  $AB$  з каардынатнай плоскасцю  $Oyz$ . Яго ўраўненне пры  $x = 0$  прымае выгляд

$$z = H - y^2 / H. \quad (3.8)$$



Рысунк 3.30

Змесцім цела  $M$  на паверхню  $AB$  у палажэнне гранічнай раўнавагі. На яго дзейнічаюць дзве сілы: сіла цяжару  $P$  і рэакцыя паверхні  $R$ . Паводле аксіёмы аб абсалютна цвёрдым целе лініі дзеяння гэтых сіл знаходзяцца на агульнай прамой — на вертыкалі. У палажэнні гранічнай раўнавагі вектар  $R$  утварае з нармальлю  $Mn$  да паверхні вугал трэння  $\varphi$  (рыс. 3.31). Такі ж вугал утварае і датычная  $M\tau$  з воссю  $Oy$ . Раскладваем вектар  $R$  на нармальную рэакцыю  $N$  і сілу трэння  $F_T$ . Запісваем умовы раўнавагі цела на паверхні  $AB$ :



Рысунк 3.31

$$\sum F_{in} = P \cos \varphi - N = 0, \quad \sum F_{it} = P \sin \varphi - F_T = 0.$$

З першага ўраўнення знаходзім велічыню  $N$  па формуле  $N = P \cos \varphi$ . Паколькі  $F_T = fN = fP \cos \varphi$ , то другое ўраўненне прымае выгляд:  $P \sin \varphi - fP \cos \varphi = 0$ . Адсюль  $\operatorname{tg} \varphi = f$ . Значэнне  $\operatorname{tg} \varphi$  знаходзім матэматычна як вытворную па каардынаце  $y$  функцыі (3.8):  $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{dz}{dy} = 0 + 2y / H$ . Тады  $f = 2y / H$ , адкуль  $y = fH / 2$ . Найменшае значэнне вышыні  $h$  вызначаем па формуле (3.8)  $h = z = H - (fH/2)^2 / H = (1 - f^2/4)H$ . Такім чынам, цела  $M$  будзе знаходзіцца ў раўнавазе на паверхні купала пры  $h \geq (1 - f^2/4)H$ .

### Задача 3.13

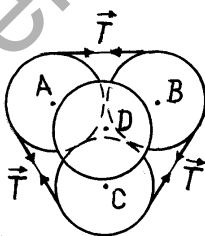
Тры аднолькавыя аднародныя шары  $A$ ,  $B$  і  $C$  шчыльна змешчаны на гладкай гарызантальнай плоскасці і абвязаны ў экватарыяльнай плоскасці шнуром. Чацвёрты шар  $D$  (аднолькавай вагі  $P$ , роўнай 10 Н) пакладзены на іх зверху (рыс. 3.32). Вызначыць нацяжэнне шнура  $T$ . Трэннем шароў паміж сабою ігнараваць.

#### Раішэнне

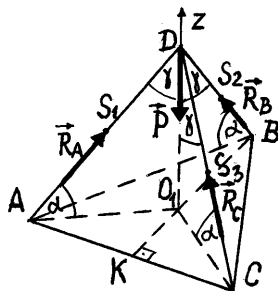
Паводле metodyкі аналізу раўнавагі складаных сістэм неабходна разгледзець раўнавагу кожнага шара паасобку. Але паколькі шары  $A$ ,  $B$  і  $C$ , дзякуючы сіметрыі, нагружаны аднолькава, то будзем разглядаць раўнавагу аднаго шара  $A$ . Пачнем з верхняга шара  $D$ . Каб знайсці пункты яго судакранання з шарамі  $A$ ,  $B$  і  $C$ , неабходна злучыць яго цэнтр з цэнтрамі ніжніх шароў. Гэтыя цэнтры на рысунку 3.32 будзем абазначаць тымі ж літарамі, што і шары. Даўжыня кожнага з адрэзкаў  $AD$ ,  $BD$  і  $CD$  роўна  $2r$  ( $r$  — радыус шара). Значыць пункты судакранання шароў  $S_1$ ,  $S_2$  і  $S_3$  знаходзяцца пасярэдзіне адрэзкаў. Утвораная адрэзкамі  $AD$ ,  $BD$  і  $CD$  і ўяўнымі плоскасцямі трохвугольнікаў, фігура ўяўляе правільны тэтраэдр (рыс. 3.33). На рысунку 3.33 шар  $D$  не паказаны, а прыкладзеныя да яго рэакцыі ў пунктах  $S_1$ ,  $S_2$  і  $S_3$  абазначаны літарамі  $R_A$ ,  $R_B$  і  $R_C$ . Ціск на шары  $A$ ,  $B$  і  $C$  з боку шара  $D$  роўны па велічыні гэтым рэакцыям і процілеглы ім па напрамку.

Разглядаем раўнавагу шара  $D$ :  $\sum Z_i = 3R_A \cos \gamma - P = 0$  ці  $3R_A \sin \alpha - P = 0$ , адсюль

$$R_A = P/3 \sin \alpha. \quad (3.9)$$



Рысунк 3.32



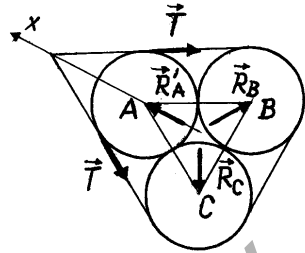
Рысунк 3.33

Значэнне  $\sin \alpha = \cos \gamma$  знаходзім праз  $\cos \alpha$  з трохвугольніка  $DO_1B$ , у якім  $O_1B = 2BK/3 = 2BD \sin 60^\circ/3 = \sqrt{3}BD/3$ .

Атрымліваем выраз  $O_1B/BD = \cos \alpha$  ці  $\cos \alpha = \sqrt{3}/3$ , а  $\cos \gamma = \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - 3/9} = \sqrt{2/3}$ . Па формуле (3.9) знаходзім

$$R_A = R_B = R_C = P/3\sqrt{2/3} = \sqrt{6}P/6.$$

Сілы ціску на шары  $A, B$  і  $C$  пераносім у іх цэнтры, што ў экватарыяльнай плоскасці, дзе знаходзіцца шнур. Раскладваем іх у гэтых пунктах на вертыкальныя і гарызантальныя складаемыя. Першыя ўраўнаважваюцца апорнай плоскасцю, другія выклікаюць нацяжэнне шнура. На рысунку 3.34 (від зверху) паказаны гарызантальныя складаемыя  $R'_A, R'_B$  і  $R'_C$ . Разглядаючы раўнавагу шара  $A$  будзем улічваць, што яго сілы ўзаемадзеяння з шарамі  $B$  і  $C$  роўны нулю, паколькі шнур не меў папярэдняга нацягу. Складаем суму праекцый на вось  $Ax$ :  $\sum X_i = R'_A - 2T \cos 30^\circ = 0$ . Адкуль  $T - R'_A / 2 \cos 30^\circ = R_A \cos \alpha / \sqrt{3} = \sqrt{6}P/18$ . Падстаўляем  $P = 10$  Н. Такім чынам,  $T = 1,361$  Н.



Рысунк 3.34

## 4 ПЕРАЎТВАРЭННЕ СІСТЭМЫ СІЛ

### 4.1 Тэарэмы аб перамяшчэнні вектара сілы

Калі на матэрыяльны аб'ект дзейнічае адвольная сістэма сіл (рыс. 4.1), то нельга ўявіць яго магчымы рух: напрамак, від, скорасць, паскарэнне. Каб вызначыць характарыстыкі руху ці ўстанавіць стан спакою, неабходна спачатку пераўтварыць сістэму сіл: прывесці яе да прасцейшага віду. Вывучэнне спосабаў такога пераўтварэння і складае змест *першай асноўнай задачы статыкі*. Яе рашэнне заснавана на перамяшчэнні і складанні вектараў сіл і момантаў (пар). Перамяшчэнне сіл выконваецца на падставе дзвюх тэарэм, якія прыводзім тут без доказу.

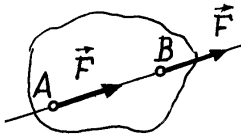


Рысунк 4.1

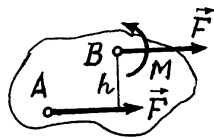
**Тэарэма 1.** Дзеянне сілы на цела не зменіцца пры перамяшчэнні яе вектара па лініі дзеяння.

У якасці прыкладу на рысунку 4.2 сіла  $F$  перанесена з пункта прыкладання  $A$  ў пункт  $B$ .

**Тэарэма 2.** Дзеянне сілы на цела не зменіцца, калі яе вектар перанесці паралельна і далучыць пару сіл з момантам, роўным моманту зададзенай сілы адносна новага пункта прыкладання.



Рысунак 4.2

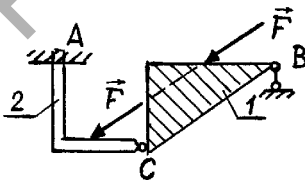


Рысунак 4.3

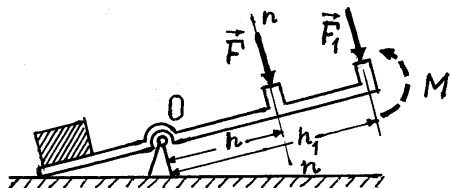
На рысунку 4.3 сіла  $F$  перанесена паралельна з пункта  $A$  ў пункт  $B$ ; момант далучанай пары  $M = Fh$ . Паколькі доказы тэарэм 1 і 2 простыя, то некаторыя аўтары называюць іх лемамі альбо лічаць вынікамі з аксіём.

Трэба мець на ўвазе, што перанос сіл дапушчальны ў межах *аднаго* цела. Калі, напрыклад, сілу  $F$  на рысунку 4.4 перанесці па лініі яе дзеяння з цела 1 на цела 2, то рэакцыі сувязей  $A$ ,  $B$  і  $C$  змяняцца. Далучэнне пары  $M$  пры паралельным пераносе сілы  $F$  паводле тэарэмы 2 трэба разглядаць як кампенсацыю на змяненне пляча сілы, якое мае месца пры такім пераносе.

У якасці ілюстрацыі на рысунку 4.5 паказаны рычаг з апорай у шарніры  $O$ . Відавочна, што пры пераносе сілы  $F$  у палажэнне  $F_1$  яе дзеянне на рычаг зменіцца: момант адносна центра  $O$  ўзрастае на велічыню  $M_1 = F(h_1 - h)$ . А каб гэтага не адбылося, неабходна пры паралельным пераносе сілы далучаць такую ж пару  $M$  процілеглага напрамку (на рысунку яна паказана пункцірам). На гэтым жа



Рысунак 4.4



Рысунак 4.5

рысунку можна заўважыць, што пры пераносе сілы  $F$  па яе лініі дзеяння  $n - n$  плячо  $h$ , а, значыць, і момант адносна цэнтра  $O$  застаюцца нязменнымі. Такім чынам, пацвярджаецца тэарэма 1.

### УВАГА!

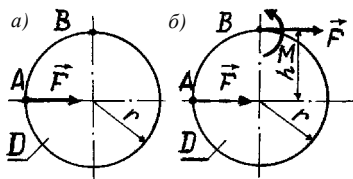
1. У прыкладзе з рычагам сіла  $F$  пераўтворана ў эквівалентную сістэму, што складаецца з сілы  $F_1 = F$  і пары  $M = F(h_1 - h)$ . Магчыма і адваротнае пераўтварэнне — прывядзенне сілы і пары да адной раўнадзейнай сілы.
2. Пры пераносе сілы  $F$  у межах аднаго цела з пункта  $A$  ў пункт  $B$ , як мы пераканаліся, далучаецца пара  $M = M_B(\vec{F})$ . Калі ж сілу перанесці яшчэ раз з пункта  $B$  у пункт  $C$ , то далучаная пара будзе роўна  $\dot{M} = \dot{M}_B(\vec{F}) + \dot{M}_C(\vec{F})$ , дзе  $\dot{M}_C(\vec{F})$  — момант сілы  $F$ , прыкладзенай у пункце  $B$  адносна пункта  $C$ .

### Прыклад 1

Сілу  $F$ , прыкладзеную да кола  $D$  у пункце  $A$  (рыс. 4.6, а), паралельна перанесці ў пункт  $B$  такім чынам, каб яе дзеянне на кола не змянілася.

#### Раішэнне

Пераносім сілу  $F$  паралельна ў пункт  $B$ , як паказана на рысунку 4.6, б, і далучаем пару сіл з момантам, роўным моманту зададзенай сілы  $F$  (на рысунку 4.6, б, паказана пункцірам) адносна цэнтра  $B$ :  $M = Fh = Fr$ .



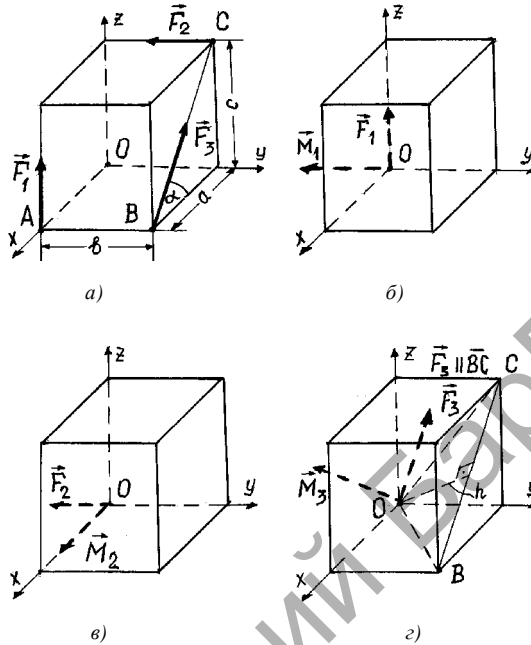
Рысунк 4.6

### Прыклад 2

Да паралелепіпеда з рэбрамі  $a, b, c$  у пунктах  $A, B$  і  $C$  прыкладзены сілы  $F_1, F_2$  і  $F_3$  (рыс. 4.7, а). Перанесці вектары сіл паралельна ў пункт  $O$ , не змяняючы іх дзеяння на паралелепіпед.

#### Раішэнне

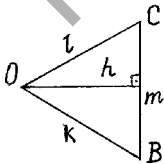
Прымяняем тэарэму аб паралельным пераносе вектара сілы. Вынікі пераносу кожнай сілы паказаны асобна на рысунках 4.7, б, в, г. Пары сіл прадстаўлены вектарамі  $\dot{M}_1, \dot{M}_2$  і  $\dot{M}_3$ , модулі якіх роўны:



Рисунак 4.7

$M_1 = F_1 a$ ,  $M_2 = F_2 c$ ,  $M_3 = F_3 h$ , дзе  $h$  — плячо сілы  $F_3$ . Плячо можна знайсці з трохвугольніка  $OBC$  як яго вышыню. На рысунку 4.8 гэты трохвугольнік паказаны асобна. Даўжыні яго старон  $k$ ,  $l$ ,  $m$ , роўныя:  $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $l = \sqrt{b^2 + c^2}$ ,  $m = \sqrt{a^2 + c^2}$ .

Плошчу  $S$  трохвугольніка знаходзім па формулах:  $S = \frac{1}{2} mh$  і  $S = \sqrt{p(p-k)(p-l)(p-m)}$ , дзе  $p = (k+l+m)/2$  і ўяўляе паўперыметр трохвугольніка. З прыведзеных формул атрымліваем  $h = 2S/m$ . Вектар  $M_3$  перпендыкулярны да плоскасці трохвугольніка  $OBC$ . Тут для вызначэння моманту пары  $M_3$  выкарыстаны адзін з прыватных спосабаў.



Рисунак 4.8

Разгледзім агульны каардынаты спосаб, паводле якога  $M_3 = \sqrt{M_{3x}^2 + M_{3y}^2 + M_{3z}^2}$ , дзе  $M_{3x} = y_B Z_3 - z_B Y_3$ ,

$M_{3y} = z_B X_3 - x_B Z_3$ ,  $M_{3z} = x_B Y_3 - y_B Z_3$  — моманты сілы  $F_3$  адносна восей каардынат;  $X_3 = -F_3 \cos \alpha$ ,  $Y_3 = 0$ ,  $Z_3 = F_3 \sin \alpha$  — праекцыі сілы  $F_3$  на восі каардынат;  $x_B = a$ ,  $y_B = b$ ,  $z_B = 0$  — каардынаты пункта прыкладання сілы  $F_3$ . Цяпер знаходзім  $M_{3x} = bF_3 \sin \alpha$ ,  $M_{3y} = -aF_3 \sin \alpha$ ,  $M_{3z} = -bF_3 \cos \alpha$ . Напрамак вектара  $\dot{M}_3$  вызначаем праз накіроўваючыя косінусы:  $\cos \alpha_3 = M_{3x} / M_3$ ,  $\cos \beta_3 = M_{3y} / M_3$ ,  $\cos \gamma_3 = M_{3z} / M_3$ ;  $\alpha_3$ ,  $\beta_3$ ,  $\gamma_3$  — вуглы, утвораныя вектарам  $\dot{M}_3$  з восямі каардынат (на рысунку 4.7, з, не паказаны).

## 4.2 Прывядзенне адвольнай сістэмы сіл да аднаго цэнтра

Мэта прывядзення — спрашчэнне сістэмы сіл (гл. падраздзел 4.1). Нагадваем, што вектары, пры дапамозе якіх умоўна прадстаўляюцца пары сіл, можна складваць па тых жа правілах, што і вектары сіл. Іх таксама можна пераносіць як уздоўж вектараў, так і паралельна да іх, пры гэтым, у адрозненне ад паралельнага пераносу вектара сілы, без далучэння кампенсуючых пар.

Разгледзім матэрыяльны аб'ект, на які дзейнічае адвольная сістэма сіл і параў сіл (гл. рыс. 4.1). Увядзём наступныя азначэнні:

1. Вектар  $\dot{R}$ , роўны геаметрычнай суме ўсіх сіл, што ўтвараюць сістэму, называецца **галоўным вектарам** гэтай сістэмы:

$$\dot{R} = \sum \dot{F}_i. \quad (4.1)$$

2. Вектар  $\dot{M}_O$ , роўны геаметрычнай суме момантаў усіх сіл, што ўваходзяць у сістэму, адносна адвольнага цэнтра  $O$ , называецца **галоўным момантам** гэтай сістэмы:

$$\dot{M}_O = \sum \dot{M}_i. \quad (4.2)$$

Калі сістэма ўключае пары сіл, то іх моманты таксама ўваходзяць у суму (4.2). Велічыні галоўнага вектара  $\dot{R}$  і галоўнага моманту  $\dot{M}_O$  знаходзяцца ў агульным выпадку праз іх праекцыі на восі каардынат па формулах:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}, \quad (4.3)$$

дзе  $R_x = \sum X_i$ ,  $R_y = \sum Y_i$ ,  $R_z = \sum Z_i$  — праекцыі галоўнага вектара, а  $M_x = \sum M_{ix}$ ,  $M_y = \sum M_{iy}$ ,  $M_z = \sum M_{iz}$  — праекцыі галоўнага моманту сістэмы сіл на восі каардынат. Праекцыі галоўнага моманту знаходзяцца як сумы момантаў усіх сіл адносна восей. Напрамкі вектараў  $\overset{\cdot}{R}$  і  $\overset{\cdot}{M}_O$  вызначаюцца праз накіроўваючыя косінусы вуглоў:  $\cos \alpha_1 = R_x / R$ ,  $\cos \beta_1 = R_y / R$ ,  $\cos \gamma_1 = R_z / R$  і  $\cos \alpha_2 = M_x / M_O$ ,  $\cos \beta_2 = M_y / M_O$ ,  $\cos \gamma_2 = M_z / M_O$ . Тут праз  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  і  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_2$  абазначаны вуглы, утвораныя адпаведна вектарамі  $\overset{\cdot}{R}$  і  $\overset{\cdot}{M}_O$  з восьмі каардынат.

**УВАГА!**

З другога значэння выплывае, што сістэма сіл можа мець мноства галоўных момантаў у залежнасці ад выбару цэнтра  $O$ .

**Тэарэма Пуансо.** Адвольная сістэма сіл можа быць прыведзена да аднаго цэнтра  $O$  і ў выніку заменена адной сілай, роўнай галоўнаму вектару сістэмы  $R$ , і адной парай з момантам  $M_O$ , роўным галоўнаму моманту гэтай сістэмы адносна цэнтра прывядзення  $O$ .

Сфармуляваная тэарэма называецца *асноўнай тэарэмай статыкі*. Яна даказваецца на падставе тэарэм 1 і 2, прыведзеных у падраздзеле 4.1. Сапраўды, гэтыя тэарэмы дазваляюць перанесці ўсе сілы ў цэнтр  $O$ ; атрымаецца сыходная сістэма сіл і сыходная сістэма вектараў-момантаў далучаных пар сіл. Іх сумы знаходзяцца затым па формулах (4.1)—(4.3).

**УВАГА!**

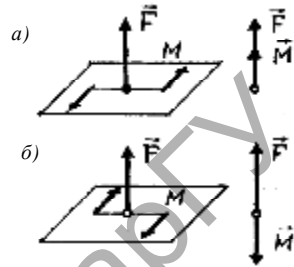
Калі сістэму сіл, прыведзеную да цэнтра  $O$ , прывесці яшчэ раз да іншага цэнтра  $O_1$ , то новы галоўны момант будзе мець від  $\overset{\cdot}{M}_{O_1} = \overset{\cdot}{M}_O + \overset{\cdot}{M}_{O_1}(\overset{\cdot}{R})$ , дзе  $\overset{\cdot}{M}_O$  — галоўны момант адносна цэнтра  $O$ :  $\overset{\cdot}{M}_{O_1}(\overset{\cdot}{R})$  — момант галоўнага вектара  $\overset{\cdot}{R}$ , прыкладзенага ў цэнтры  $O$ , адносна цэнтра  $O_1$ .

### 4.3 Дынамічная шруба. Статычныя інварыянты

Вінік, атрыманы на падставе тэарэмы Пуансо, дапускае далейшае спрашчэнне сістэмы сіл і патрабуе адмысловай класіфікацыі.

**Азначэнне.** Сукупнасць сілы  $F$  і пары сіл з момантам  $M$ , якая дзейнічае ў плоскасці, перпендыкулярнай да вектара сілы, называецца **сілавой** альбо **дынамічнай шрубай** (скарочана — **дынамай**).

Правая і левая дынамічныя шрубы паказаны адпаведна на рысунках 4.9, а і 4.9, б. Дынамай уздзейнічаюць на рабочы інструмент пры свідраванні адтулін, артэзіянскіх і нафтавых свідравін і г. д.



Рысунак 4.9

**Тэарэма.** Адвольная сістэма сіл у агульным выпадку можа быць прыведзена да дынамічнай шрубы.

У гэтым лёгка пераканацца. Паводле тэарэмы Пуансо адвольная сістэма сіл прыводзіцца да галоўнага вектара і галоўнага моманту (рыс. 4.10, а). Праводзім праз вектары  $\vec{R}$  і  $\vec{M}_O$  плоскасць  $I$ . Другую плоскасць  $II$  пабудуем перпендыкулярна да плоскасці  $I$ . Раскладзем вектар  $\vec{M}_O$  па напрамках  $\vec{R}$  і перпендыкулярным да яго:  $\vec{M}_O = \vec{M}^* + \vec{M}_n$ , дзе  $M^* = M_O \cos \alpha$ ,  $M_n = M_O \sin \alpha$ . Тут вектар  $\vec{M}_n$  перпендыкулярны да плоскасці  $II$ . Яго можна замяніць парай сіл ( $\vec{R}'$  і  $\vec{R}''$ ), змешчанай у гэтай плоскасці. Прымем  $R' = R'' = R$ . Тады вектары  $R$  і  $R'$ , што ўтвараюць ураўнаважаную сістэму сіл, можна адкінуць, а вектар  $M^*$  перанесці ў пункт  $O_1$  (рыс. 4.10, б). Атрымаем сукупнасць сілавых фактараў ( $\vec{R}$  і  $\vec{M}^*$ ), што ўяўляе дынамічную шрубу. Прамую  $O_1 O_1''$  называюць **цэнтральнай шрубавай восьсю** сістэмы сіл. Калі б сістэму сіл з самага пачатку прыводзілі да цэнтра  $O_1$  альбо да любога іншага цэнтра на цэнтральнай шрубавай восі, то атрымалі б гэтую ж дынамічную шрубу. Трэба ўважліва вывучыць рысунак 4.10. На ім вектары  $\vec{R}$  і  $\vec{M}^*$  не змяняюцца пры перамяшчэнні цэнтра прывядзення  $O$ . Па гэтай

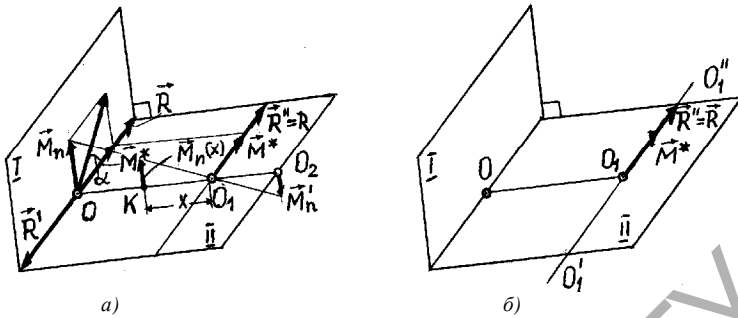


Рисунок 4.10

причыне яны атрымалі наступныя назвы:  $\dot{R}^*$  — *першы (вектарны) статычны інварыянт* сістэмы сіл,  $M^*$  — *другі (скалярны) статычны інварыянт*. Вектар  $\dot{M}^*$  называюць таксама *галоўным момантам дынамічнай шрубы*. Гэта найменшы з усіх магчымых галоўны момант для дадзенай сістэмы сіл.

**УВАГА !**

Паколькі другі статычны інварыянт уяўляе сабою праекцыю галоўнага вектара  $\dot{M}_O$  на напрамак вектара  $\dot{R}$ , то матэматычна яго можна выразіць праз скалярны здабытак  $M^* = \dot{M}_O \dot{R} / R$  альбо па формуле

$$M^* = (R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z) / R. \quad (4.4)$$

Велічыня вектара  $M_n$  (рыс. 4.10) змяняецца прапарцыянальна адлегласці ад цэнтральнай шрубавай восі:  $M_n(x) = Rx$ . Як відаць з гэтай формулы, адлегласць  $OO_1$  на рысунку 4.10 пры канкрэтных значэннях  $R$  і  $M_n$  выбіраецца не адвольна; пры  $x = OO_1$  атрымліваем  $OO_1 = M_n / R$ . Калі ж цэнтр прывядзення (на рысунку  $O_2$ ) перамяшчаецца ўправа ад цэнтральнай шрубавай восі, то напрамак вектара  $M_n = \dot{M}_n$  змяняецца на процілеглы. Праекцыі моманту  $M_n$  на восі каардынат знаходзяцца па вядомых формулах:

$$M_{nx} = yR_z - zR_y, \quad M_{ny} = zR_x - xR_z, \quad M_{nz} = xR_y - yR_x, \quad (4.5)$$

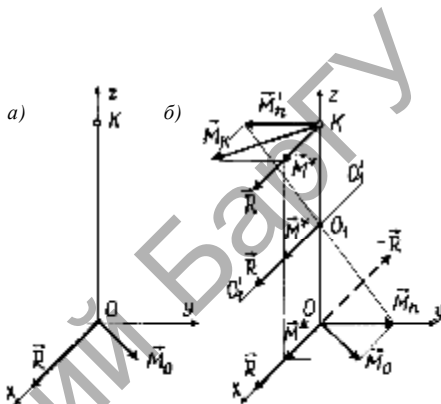
дзе  $x, y, z$  — каардынаты цэнтра прывядзення;

$R_x, R_y, R_z$  — пракцыі галоўнага вектара на восі каардынат.

Каб замацаваць атрыманыя тут звесткі з тэорыі пераўтварэння сістэмы сіл, выканайце наступны прыклад.

### Прыклад

Калі сістэму сіл прывесці да цэнтра  $O$ , то атрымаем галоўны вектар  $\vec{R}$  і галоўны момант  $\vec{M}_O$ , змешчаныя ў гарызантальнай плоскасці (рыс. 4.11, а). Пабудова галоўнага моманту гэтай сістэмы, калі яна будзе прыведзена да цэнтра  $K$ . Лічыць, што  $OK = 2M_n / R$  і цэнтры  $O$  і  $K$  знаходзяцца з процілеглых бакоў ад цэнтральнай шрубавай восі гэтай сістэмы сіл.



Рысунк 4.11

### Рашэнне

Разгледзьце яго толькі для праверкі ўласнага рашэння. У яго аснову пакладзена інфармацыя аб пераменным моманце  $M_n$  і звесткі аб інварыянтах  $\vec{R}$  і  $\vec{M}^*$ . Апошнія для ўсіх цэнтраў прывядзення аднолькавыя. Паслядоўнасць дзеянняў можа быць наступнай:

- 1) раскладваем вектар  $\vec{M}_O$  на артаганальныя кампаненты  $\vec{M}^*$  і  $\vec{M}_n$ ;
- 2) вызначаем напрамак па восі  $O_z$  ад цэнтра  $O$  на цэнтральную шрубавую вось (вышэй альбо ніжэй цэнтра  $O$ ). Для гэтага па напрамку вектара  $\vec{M}_n$  устанаўліваем палажэнне сіл, якія ўтвараюць адпаведную яму пару  $(\vec{R}, -\vec{R})$ , змешчаную ў плоскасці  $Oxz$ , пры гэтым улічваем, што сіла  $(-\vec{R})$ , якая ўраўнаважвае галоўны вектар, прыкладзена ў пункце  $O$  (на рысунку 4.11, б, паказана пункцірам). Тады другая сіла пары  $\vec{R}$  будзе змешчана вышэй пункта  $O$ , яна і вызначае палажэнне цэнтральнай шрубавай восі  $O_1O_2$ ;

3) знаходзім пункт  $O_1$ :  $OO_1 = M_n / R$ ;

4) вызначаем на рысунку 4.11, б, палажэнне цэнтра  $K$  (паводле ўмовы задачы  $OK = 2 \cdot OO_1$ );

5) знаходзім для цэнтра  $K$  вектар  $\overset{\mathbf{v}'}{M}_n$ . Для гэтага праз канец вектара  $\overset{\mathbf{v}'}{M}_n$  і пункт  $O_1$  праводзім прамую да цэнтра  $K$ . Відавочна, што  $M_n' = M_n$ ;

6) пераносім паралельна вектар  $\overset{\mathbf{r}^*}{M}^*$  з цэнтра  $O$  ў цэнтр  $K$ ;

7) знаходзім галоўны момант  $M_K$ :  $\overset{\mathbf{r}}{M}_K = \overset{\mathbf{v}'}{M}_n + \overset{\mathbf{r}^*}{M}^*$ , па велічыні  $M_K = M_O$ .

Знайдзіце галоўны момант  $M_K$  у выпадку, калі цэнтры прывядзення  $O$  і  $K$  знаходзяцца з аднаго боку ад восі  $O_1 O_1$  ніжэй яе.

#### 4.4 Асобныя выпадкі прывядзення сістэмы сіл. Ураўненні цэнтральнай шрубавай восі

У залежнасці ад значэння галоўнага вектара і галоўнага моманту сістэмы сіл і вугла паміж вектарамі  $\overset{\mathbf{r}}{R}$  і  $\overset{\mathbf{r}}{M}_O$  магчымы некалькі выпадкаў яе прывядзення (спрашчэння):

1)  $\overset{\mathbf{r}}{R} \neq 0$ ,  $\overset{\mathbf{r}}{M}_O \neq 0$ ,  $M^* \neq 0$  (ці  $\overset{\mathbf{r}}{R} \cdot \overset{\mathbf{r}}{M}_O \neq 0$ ) — сістэма сіл прыводзіцца да дынамічнай шрубы (рыс. 4.10, а);

2)  $\overset{\mathbf{r}}{R} \neq 0$ ,  $\overset{\mathbf{r}}{M}_O \neq 0$ ,  $M^* = 0$  (ці  $\overset{\mathbf{r}}{R} \cdot \overset{\mathbf{r}}{M}_O = 0$ ) — сістэма сіл прыводзіцца да раўнадзейнай;

3)  $\overset{\mathbf{r}}{R} \neq 0$ ,  $\overset{\mathbf{r}}{M}_O = 0$ ,  $M^* = 0$  (ці  $\overset{\mathbf{r}}{R} \cdot \overset{\mathbf{r}}{M}_O = 0$ ) — сістэма сіл прыводзіцца да раўнадзейнай;

4)  $\overset{\mathbf{r}}{R} = 0$ ,  $\overset{\mathbf{r}}{M}_O \neq 0$ ,  $M^* = 0$  (ці  $\overset{\mathbf{r}}{R} \cdot \overset{\mathbf{r}}{M}_O = 0$ ) — сістэма сіл эквівалентна пары сіл;

5)  $\overset{\mathbf{r}}{R} = 0$ ,  $\overset{\mathbf{r}}{M}_O = 0$ ,  $M^* = 0$  (ці  $\overset{\mathbf{r}}{R} \cdot \overset{\mathbf{r}}{M}_O = 0$ ) — сістэма сіл ураўнаважана (эквівалентна нулю).

Заўважым, што ў другім і трэцім выпадках, калі сістэма сіл прыводзіцца да раўнадзейнай, справядліва тэарэма Варыньёна аб

моманце раўнадзейнай. Пры гэтым сама раўнадзейная пры  $\dot{M}_O = 0$  праходзіць праз цэнтр прывядзення  $O$ , а пры  $\dot{M}_O \neq 0$  яна аддалена ад гэтага цэнтра на адлегласць  $OO_1 = M_O / R$  (рыс. 4.10, б).

Ва ўсіх пералічаных варыянтах спрашчэння сістэмы сіл поўная інфармацыя аб сілавых фактарах  $\dot{R}$  і  $\dot{M}_O$  задаецца ў адным цэнтры прывядзення  $O$ . У вучэбных задачах можа задавацца частковая інфармацыя аб іх (толкі  $\dot{R}$  ці  $\dot{M}_O$ ), але ў некалькіх цэнтрах прывядзення. Тады для апісання сістэмы сіл можна карыстацца наступнымі прыкметамі:

а) галоўны момант  $\dot{M}_A$  перпендыкулярны да галоўнага вектара  $R$ , зададзенага ў іншым цэнтры прывядзення  $B$ , — сістэма сіл прыводзіцца да раўнадзейнай;

б) галоўныя моманты адносна некалькіх цэнтраў паралельны, але не роўны паміж сабою — галоўны вектар перпендыкулярны да іх ( $\dot{R} \cdot \dot{M} = 0$ ) і сістэма сіл прыводзіцца да раўнадзейнай;

в) для трох ці болей цэнтраў прывядзення, якія не ляжаць на адной прамой, зададзена  $\dot{M}_A = \dot{M}_B = \dot{M}_C = \dots = \dot{M}$ , — адпаведная сістэма сіл прыводзіцца да пары з момантам  $\dot{M}$ ;

г) галоўныя моманты  $\dot{M}_A$  і  $\dot{M}_B$  не паралельны паміж сабою — сістэма сіл прыводзіцца да дынамічнай шрубы.

На рысунках 4.10, б, і 4.11, б, паказаны графічны спосаб пабудовы цэнтральнай шрубавай восі. Каб пабудаваць яе дакладна, неабходна выкарыстаць адпаведныя ўраўненні. Прыводзім скарачана іх вывад.

На рысунку 4.10, а, відаць, што  $\dot{M}_O = \dot{M}^* + \dot{M}_n$ , адкуль  $\dot{M}^* = \dot{M}_O - \dot{M}_n$  альбо  $\dot{M}^* = \dot{M}_O - \dot{M}_{O_1}(\dot{R})$ . Уводзім прамавугольную сістэму каардынат з пачаткам у цэнтры прывядзення  $O$  і знаходзім праекцыю апошняй вектарнай роўнасці на яе восі з улікам формул (4.5):

$$\begin{aligned} M_x^* &= M_{Ox} - (yR_z - zR_y), & M_y^* &= M_{Oy} - (zR_x - xR_z), \\ M_z^* &= M_{Oz} - (xR_y - yR_x). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Паколькі вектары  $\dot{M}^*$  і  $\dot{R}$  накіраваны па адной прамой, то іх праекцыі на каардынатныя восі прапарцыянальны:

$$M_x^*/R_x = M_y^*/R_y = M_z^*/R_z = M^*/R,$$

альбо з улікам формул (4.6)

$$\begin{aligned} [M_{Ox} - (yR_z - zR_y)]/R_x &= [M_{Oy} - (zR_x - xR_z)]/R_y = \\ &= [M_{Oz} - (xR_y - yR_z)]/R_z = M^*/R. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Мы атрымалі ўраўненні цэнтральнай шрубавай восі  $O_1'O_1'$ , якія звязваюць бягучыя каардынаты  $x, y, z$  адвольнага цэнтра прывядзення  $O_1$  на гэтай восі з параметрамі сістэмы сіл — праекцыямі галоўнага вектара і галоўнага моманта.

## 4.5 Рашэнне задач

### Задача 4.1

Сілы  $F_1$  і  $F_2$  прыкладзены да вуглоў  $A, B$  паралелепіпеда з рэбрамі  $a, b, c$  (рыс. 4.12).

Прывесці сістэму сіл да цэнтраў  $O$  і  $C$ .

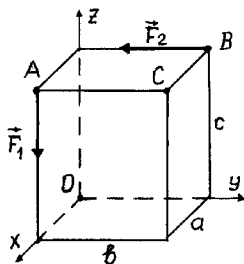
Вызначыць моманты  $M_O^*, M_C^*$ , прааналізаваць вынік.

### Рашэнне

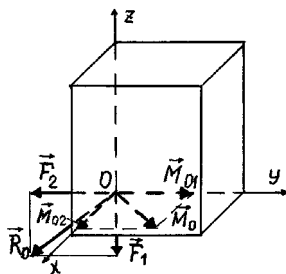
Галоўная мэта разгляду гэтай прастай задачы — пераканацца ў існаванні інварыянтаў сістэмы сіл і зразумець іх сутнасць.

1. *Прывядзенне сістэмы сіл да цэнтра  $O$ .* Паколькі сістэма ўтворана толькі дзвюма сіламі, то прыменім наглядны спосаб яе спрашчэння. Пераносім сілы  $F_1$  і  $F_2$  паралельна ў цэнтр  $O$  (рыс. 4.13) і далучаем пары  $M_{O1}$  і  $M_{O2}$ . Як відаць з рысунка,

$$R_O = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}, \quad M_O = \sqrt{M_{O1}^2 + M_{O2}^2}, \quad (4.8)$$



Рысунак 4.12



Рысунак 4.13

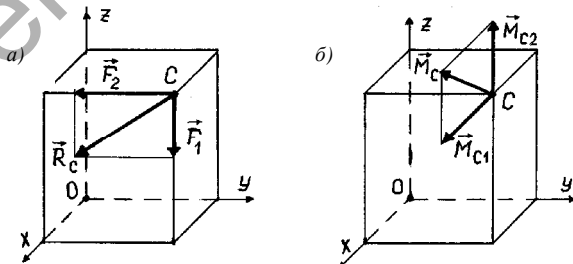
дзе  $M_{O1} = F_1 a$ ,  $M_{O2} = F_2 c$ ; пры гэтым вектар  $\vec{M}_{O1}$  перпендыкулярны да плоскасці  $Oxz$ , а  $\vec{M}_{O2}$  перпендыкулярны да плоскасці  $Oyz$ .

2. *Прывядзенне сістэмы сіл да цэнтра C.* Пераносім сілы  $F_1$  і  $F_2$  у цэнтр  $C$  (рыс. 4.14, а), далучаем пары  $M_{C1}$  і  $M_{C2}$  (рыс. 4.14, б) і знаходзім  $R_C$  і  $M_C$  па формулах:

$$R_C = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}, \quad M_C = \sqrt{M_{C1}^2 + M_{C2}^2}, \quad (4.9)$$

дзе  $M_{C1} = F_1 b$ ,  $M_{C2} = F_2 a$ , вектар  $\vec{M}_{C1}$  перпендыкулярны да плоскасці  $Oyz$ , а вектар  $\vec{M}_{C2}$  перпендыкулярны да плоскасці  $Oxy$ .

З формул (4.8) і (4.9) відаць, што галоўныя вектары  $R_O$  і  $R_C$  аднолькавыя па велічыні. Паколькі ўтвараючы іх сілы пераносяцца *паралельна*, то і напрамкі вектараў супадаюць. Такім чынам, приходзім



Рысунак 4.14

да высновы, што  $\dot{R}_O = \dot{R}_C = \dot{R}$  незалежна ад размяшчэння цэнтраў прывядзення і колькасці сіл. З тых жа формул і рысункаў 4.13 і 4.14, б, відаць, што  $\dot{M}_O \neq \dot{M}_C$ .

3. *Вызначэнне момантаў  $M_O^*$  і  $M_C^*$ .* Знойдзем праекцыі галоўных момантаў  $M_O$  і  $M_C$  на галоўны вектар  $R$ , інакш — моманты  $M_O^*$  і  $M_C^*$ . Для гэтага скарыстаемся прыведзенай у падраздзеле 4.3 формулай (4.4), паводле якой

$$M_O^* = (R_x M_{Ox} + R_y M_{Oy} + R_z M_{Oz}) / R, \quad (4.10)$$

$$M_C^* = (R_x M_{Cx} + R_y M_{Cy} + R_z M_{Cz}) / R. \quad (4.11)$$

Тут, як відаць з рысункаў 4.13 і 4.14,  $R_x = 0$ ,  $R_y = -F_2$ ,  $R_z = -F_1$ ;  $M_{Ox} = M_2 = F_2 c$ ,  $M_{Oy} = M_1 = F_1 a$ ,  $M_{Oz} = 0$ ;  $M_{Cx} = M_{C1} = F_1 b$ ,  $M_{Cy} = 0$ ,  $M_{Cz} = M_{C2} = F_2 a$ .

Па формулах (4.10) і (4.11) знаходзім моманты  $M_O^*$  і  $M_C^*$ :

$$M_O^* = [0 \cdot F_2 c + (-F_2) F_1 a + (-F_1) \cdot 0] / R = -a F_1 F_2 / R,$$

$$M_C^* = [0 \cdot F_1 b + (-F_2) \cdot 0 + (-F_1) F_2 a] / R = -a F_1 F_2 / R.$$

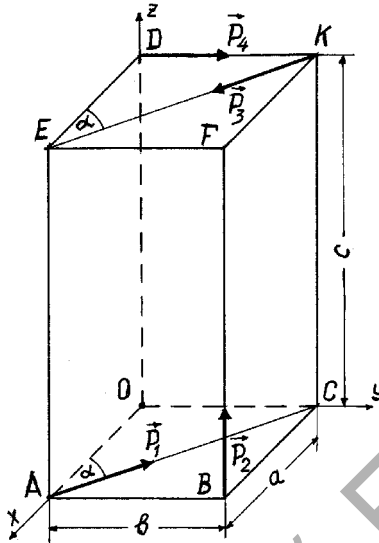
Як бачым, і галоўныя моманты дынамічных шруб не залежаць ад цэнтраў прывядзення —  $M_O^* = M_C^*$ . Знакі «мінус» у апошніх выніках сведчаць аб тым, што сістэма сіл  $F_1$  і  $F_2$  прыводзіцца да *левай* дынамічнай шрубцы.

#### Задача 4.2

Знайсі галоўны вектар  $\dot{R}$  і галоўны момант  $\dot{M}_O$  зададзенай сістэмы сіл (рыс. 4.15) адносна цэнтра  $O$  і вызначыць, да якога прасцейшага віду прыводзіцца сістэма.

Пабудаваць цэнтральную вось дынамы і паказаць яе кампаненты  $\dot{R}$  і  $\dot{M}^*$ .

Дадзена:  $a = 30$  см,  $b = 20$  см,  $c = 40$  см;  $P_1 = 25$  Н,  $P_2 = 20$  Н,  $P_3 = 25$  Н,  $P_4 = 20$  Н.



Рысунак 4.15

### Рашэнне

Паводле ўмовы задачы неабходна правесці поўнае даследаванне зададзенай сістэмы сіл. Для пабудовы цэнтральнай шрубавай восі паралелепіпед прадстаўляем на рысунках у пэўным маштабе. Знаходзім спачатку патрэбныя ў далейшым функцыі вугла  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = b / \sqrt{a^2 + b^2} = 20 / \sqrt{30^2 + 20^2} = 0,5547,$$

$$\cos \alpha = a / \sqrt{a^2 + b^2} = 30 / \sqrt{30^2 + 20^2} = 0,8321.$$

1. Вызначаем галоўны вектар  $\vec{R}$ . Яго праекцыі на восі каардынат роўны

$$R_x = \sum X_i = -P_1 \cos \alpha + 0 + P_3 \cos \alpha + 0 = -25 \cdot 0,8321 + 25 \cdot 0,8321 = 0,$$

$$R_y = P_1 \sin \alpha + 0 - P_3 \sin \alpha + P_4 = P_4 = 20 \text{ Н},$$

$$R_z = 0 + P_2 + 0 + 0 = 20 \text{ Н}.$$

Вызначаем модуль галоўнага вектара:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{0 + 20^2 + 20^2} = 20\sqrt{2} = 28,284 \text{ Н.}$$

2. Вызначаем галоўны момант  $M_O$ . Для гэтага знаходзім галоўныя моманты адносна восей каардынат:

$$\begin{aligned} M_x &= \sum M_{xi} = 0 + P_2 b + P_3 \sin \alpha \cdot c - P_4 c = \\ &= 20 \cdot 20 + 25 \cdot 0,5547 \cdot 40 - 20 \cdot 40 = 154,7 \text{ Н} \cdot \text{см}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \sum M_{yi} = 0 - P_2 \cdot a + P_3 \cos \alpha \cdot c + 0 = -20 \cdot 30 + \\ &+ 25 \cdot 0,8321 \cdot 40 = 232,1 \text{ Н} \cdot \text{см}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_z &= \sum M_{zi} = P_1 \sin \alpha \cdot a + 0 - P_3 \cos \alpha \cdot b + 0 = \\ &= 25 \cdot 0,5547 \cdot 30 - 25 \cdot 0,8321 \cdot 20 = 0,025 \text{ Н} \cdot \text{см}. \end{aligned}$$

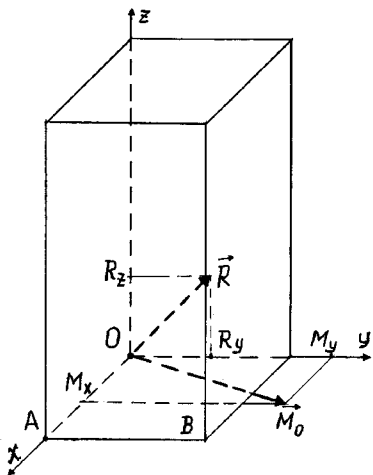
Модуль галоўнага моманту роўны

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{154,7^2 + 232,1^2 + 0,025^2} = 278,931 \text{ Н} \cdot \text{см}.$$

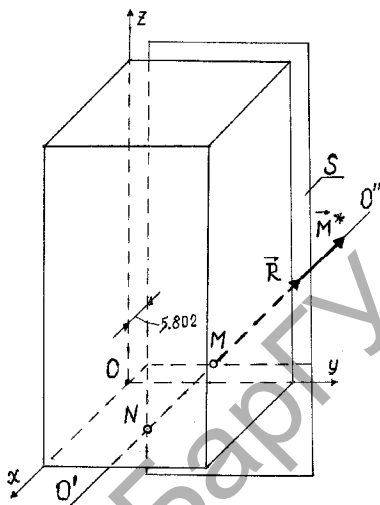
Будуем галоўны вектар  $\overset{\bullet}{R}$  і галоўны момант  $\overset{\bullet}{M}_O$  па іх праекцыях на восі каардынат (рыс. 4.16). Значэннем  $M_z = 0,025$  ігнаруем; лічым, што вектар  $\overset{\bullet}{M}_O$  знаходзіцца ў плоскасці  $Oxy$ . Як відаць з рысунка 4.16, ён не перпендыкулярны да вектара  $\overset{\bullet}{R}$ . Таму зададзеная сістэма сіл можа быць прыведзена да дынамічнай шрубы (дынамы).

3. Знаходзім галоўны момант дынамы  $M^*$ . Ён знаходзіцца, як праекцыя галоўнага моманту на галоўны вектар, па формуле

$$\begin{aligned} M^* &= \overset{\bullet}{M}_O \cdot \overset{\bullet}{R} / R = (R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z) / R = \\ &= (0 \cdot 154,7 + 20 \cdot 232,1 + 20 \cdot 0,025) / 28,284 = 164,14 \text{ Н} \cdot \text{см}. \end{aligned}$$



Рисунак 4.16



Рисунак 4.17

4. Пабудуем цэнтральную вась дынамічнай шрубы. Запісваем яе ўраўненні:

$$\begin{aligned} [M_x - (yR_z - zR_y)] / R_x &= [M_y - (zR_x - xR_z)] / R_y = \\ &= [M_z - (xR_y - yR_x)] / R_z = M^* / R. \end{aligned}$$

Выкарыстаем два з іх:  $[M_x - (yR_z - zR_y)] / R_x = M^* / R$ ,  
 $[M_y - (zR_x - xR_z)] / R_y = M^* / R$ .

Падстаўляем сюды лікі:  $[154,7 - (y \cdot 20 - z \cdot 20)] = 0 \cdot 164,14 / 28,284$ ,  
 $[232,1 - (z \cdot 0 - x \cdot 20)] = 20 \cdot 164,14 / 28,284$ .

Канчаткова атрымліваем:  $y - z = 7,735$ ,  $x = -5,802$ . Як відаць з ураўненняў, вась дынамы знаходзіцца ў плоскасці  $S$ , паралельнай да каардынатнай плоскасці  $Oyz$ , на адлегласці  $x = 5,802$  см ад яе. Гарызантальную плоскасць яна перасякае ў пункце  $M$  з каардынатамі  $x = -5,802$  см,  $y = 7,735$  см, а бакавую  $Oxz$  у пункце  $N$  з каардынатамі  $x = -5,802$  см,  $y = -7,735$  см.

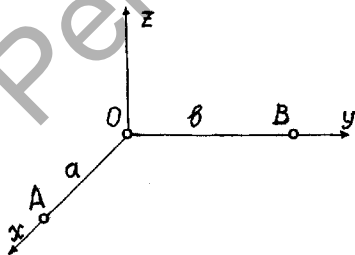
### Задача 4.3

Галоўныя моманты некаторай сістэмы сіл адносна цэнтраў  $O$ ,  $A$  і  $B$  аднолькавыя па велічыні ( $M_O = M_A = M_B$ ), а галоўны вектар роўны  $R$  і паралельны да восі  $Oz$ ;  $OA = a$ ,  $OB = b$  (рыс. 4.18).

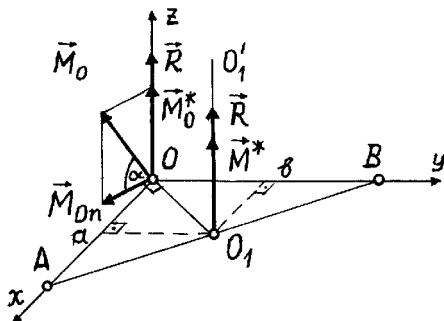
Вызначыць вуглы, якія ўтвараюць галоўныя моманты  $M_O$ ,  $M_A$  і  $M_B$  з плоскасцю  $Oxy$ .

#### Рашэнне

Задазеныя галоўныя моманты можна прадставіць у выглядзе разлажэнняў:  $\vec{M}_O = \vec{M}_O^* + M_{O_n}$ ,  $\vec{M}_A = \vec{M}_A^* + M_{A_n}$ ,  $\vec{M}_B = \vec{M}_B^* + M_{B_n}$  (на рысунку 4.19 паказана толькі разлажэнне вектара  $\vec{M}_O$ ). Тут паводле ўмовы задачы  $M_O = M_A = M_B$ . Праекцыі гэтых момантаў  $M_O^*$ ,  $M_A^*$  і  $M_B^*$  на напрамак галоўнага вектара  $R$  уяўляюць сабою інварыянты сістэмы сіл, таму і  $M_O^* = M_A^* = M_B^*$ . Роўнасць галоўных момантаў і іх праекцый на напрамак галоўнага вектара  $\vec{R}$  азначае, што вуглы, утвораныя галоўнымі вектарамі  $\vec{M}_O$ ,  $\vec{M}_A$  і  $\vec{M}_B$  як з нармальным да плоскасці  $Oxy$  вектарам  $R$ , так і з самой плоскасцю, аднолькавыя. Абазначым апошнія праз  $\alpha$  (рыс. 4.19). З роўнасці вуглоў  $\alpha$  заключаем, што і праекцыі момантаў  $\vec{M}_O$ ,  $\vec{M}_A$  і  $\vec{M}_B$  на гарызонтальную плоскасць роўны па модулю:  $M_{O_n} = M_{A_n} = M_{B_n}$ . Гэтыя моманты адносна цэнтраў прывядзення, узятых на восі дынамы, як вядома, роўны нулю



Рысунак 4.18



Рысунак 4.19

і ўзрастаюць прапарцыянальна адлегласці цэнтраў ад восі. Таму апошняю роўнасць можна перапісаць у выглядзе

$$R \cdot O_1O = R \cdot O_1A = R \cdot O_1B,$$

дзе  $O_1$  — пункт перасячэння восі дынамы з плоскасцю  $Oxy$  (рыс. 4.19).

Як бачым, вось дынамы  $O_1O'$  аднолькава аддалена ад цэнтраў  $O$ ,  $A$  і  $B$ :  $O_1O = O_1A = O_1B$ . Гэтыя адрэзкі роўны радыусу акружнасці, праведзенай праз пункты  $O$ ,  $A$  і  $B$  з цэнтрам у пункце  $O_1$ . Калі зрабіць рысунак гэтай акружнасці, то можна заўважыць, што яе дыяметр  $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Тады  $O_1O = O_1A = O_1B = AB/2 = \sqrt{a^2 + b^2}/2$ , а момант  $M_{O_1} = R \cdot O_1O = R\sqrt{a^2 + b^2}/2$ . На рысунку 4.19 відаць, што  $\cos \alpha = M_{O_1} / M_O = R\sqrt{a^2 + b^2} / 2M_O$ .

**УВАГА!**

Цэнтр  $O_1$  можна знайсці і як пункт перасячэння перпендыкуляраў да адрэзкаў  $OA$ ,  $OB$ , праведзеных з іх сярэдзін.

**Задача 4.4**

Галоўныя моманты сістэмы сіл адносна цэнтраў  $O$ ,  $A$  і  $B$  ( $OA = a$ ,  $OB = b$ ) накіраваны, як паказана на рысунку 4.20, і па велічыні роўныя:  $M_O = M$ ,  $M_A = 4M$ ,  $M_B = 5M$ .

Даказаць, што сістэма сіл прыводзіцца да раўнадзейнай.

Вызначыць яе модуль.

*Рашэнне*

1. Даказваем ад адваротнага. Патрэбна пераканацца, што вектары  $\overset{\cdot}{M}_O$ ,  $\overset{\cdot}{M}_A$  і  $\overset{\cdot}{M}_B$  перпендыкулярны да галоўнага вектара  $\overset{\cdot}{R}$ . Паколькі яны паралельны паміж сабою, то ўтвараюць з напрамкам вектара  $\overset{\cdot}{R}$  аднолькавы вугал  $\alpha$ . Дапусцім, што сістэма сіл прыводзіцца да дынамы. Тады праекцыі вектараў  $\overset{\cdot}{M}_O$ ,  $\overset{\cdot}{M}_A$  і  $\overset{\cdot}{M}_B$  на напрамак вектара  $\overset{\cdot}{R}$  павінны быць роўны паміж сабою:

$$M_O \cos \alpha = M_A \cos \alpha = M_B \cos \alpha = M^*,$$

дзе  $M^*$  — галоўны момант дынамы (скалярны інварыянт).

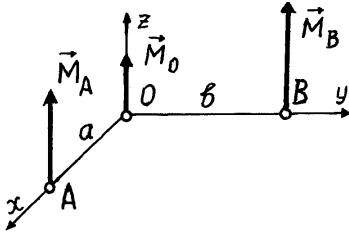


Рисунок 4.20

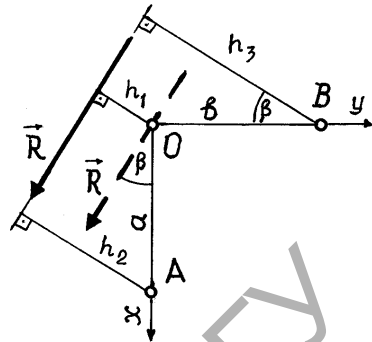


Рисунок 4.21

Апошняя роўнасць пры  $M_O \neq M_A \neq M_B$  можа выконвацца пры ўмове, што  $M^* = 0$ ,  $\alpha = 90^\circ$ , г. зн., калі галоўныя моманты перпендыкулярны да вектара  $R$ . А ў гэтым выпадку, як вядома, сістэма сіл прыводзіцца да раўнадзейнай, роўнай галоўнаму вектару сістэмы  $\vec{R}$ .

2. Вызначаем модуль раўнадзейнай. Будзем лічыць, што вектар  $\vec{R}$  знаходзіцца ў гарызантальнай плоскасці  $Oxy$ . На рысунку 4.21 ён паказаны суцэльнай лініяй у адвольным палажэнні (від зверху). Літарамі  $h_1, h_2, h_3$  абазначаны плечы сілы  $R$  адносна цэнтраў  $O, A$  і  $B$ . Як відаць з рысунка 4.21,  $Rh_1 = M_O = M$ ,  $Rh_2 = M_A = 4M$ ,  $Rh_3 = M_B = 5M$  і  $(h_2 - h_1)/a = \sin \beta$ ,  $(h_3 - h_1)b = \cos \beta$ . Тут пяць залежнасцей (і столькі ж невядомых  $R, h_1, h_2, h_3, \beta$ ), з якіх вызначаецца велічыня і палажэнне раўнадзейнай. Каб зменшыць колькасць невядомых, перанясем вектар  $\vec{R}$  паралельна на адлегласць  $h_1$ , як паказана на рысунку 4.21 пункцірам, і ўвядзем абазначэнні:  $h_2 - h_1 = h_A$ ,  $h_3 - h_1 = h_B$ . Атрымаем залежнасці:

$$Rh_A = 3M, Rh_B = 4M, h_A/a = \sin \beta, h_B/b = \cos \beta. \quad (4.12)$$

Дзве апошнія суадносіны ўзводзім у квадраты і складаем асобна іх левыя і правыя часткі:

$$(h_A/a)^2 + (h_B/b)^2 = 1. \quad (4.13)$$

З двох перших залежностей (4.12) виражаємо  $R$ :

$$R = 3M / h_A \text{ і } R = 4M / h_B,$$

адсюль

$$3M / h_A = 4M / h_B$$

альбо

$$4h_A = 3h_B \text{ і } h_B = 4h_A / 3.$$

Підставляємо  $h_B$  у формулу (4.13) і виражаємо  $h_A$ :

$$h_A = 3ab / \sqrt{9b^2 + 16a^2}.$$

Тепер з першої формули (4.12) знаходимо величину  $R$  за формулою

$$R = 3M / h_A = \sqrt{9b^2 + 16a^2} M / ab.$$

#### Задача 4.5

Головні моменти системи сил відносно центра  $O$  і  $A$  роїні  $M_O$  і  $M_A$  і накірані, як показано на рисунку 4.22;  $OA = h$ .

Доказати, що система сил не приводиться до раундзейної.

Визначити також проекцію головної вектора системи сил на площину  $Oxz$ .

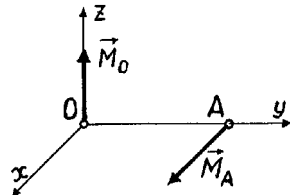


Рисунок 4.22

#### Решення

1. Докажем, что система сил не приводится до раундзейной. Спраўды, паводле прыкмет, змешчаных у падраздзеле 4.4, система сил приводиться до раундзейной у тым выпадку, калі праекцыі галоўных момантаў на галоўны вектар ва ўсіх цэнтрах прывядзення роўны нулю (альбо  $\vec{M} \cdot \vec{R} = 0$ ). Гэта ўмова тут не выконваецца, паколькі праекцыі непаралельных вектараў  $\vec{M}_O$  і  $\vec{M}_A$  на напрамак вектара  $\vec{R}$  не могуць быць роўнымі паміж сабою. Прыходзім да высновы, што система сил приводзіцца да дынамы.

2. Вызначаем праекцыю галоўнага вектара на плоскасць  $Oxz$ . У гэтым можа дапамагчы дасканалы рысунак. Для яго выканання карысна прыгадаць рысункі з падраздзела 4.3 і затым уяўна злучыць зададзеныя галоўныя моманты  $\overset{\cdot}{M}_O$  і  $\overset{\cdot}{M}_A$  з галоўным вектарам  $\overset{\cdot}{R}$ , праекцыю якога неабходна вызначыць. Захоўваючы абазначэнні падраздзела 4.3, атрымліваем формулы:

$$\overset{\cdot}{M}_O = \overset{\cdot}{M}_O^* + \overset{\cdot}{M}_{On}, \quad \overset{\cdot}{M}_A = \overset{\cdot}{M}_A^* + \overset{\cdot}{M}_{An}, \quad (4.14)$$

дзе  $\overset{\cdot}{M}_O^* = \overset{\cdot}{M}_A^* = \overset{\cdot}{M}^*$  — другі інварыянт сістэмы сіл.

Момант  $\overset{\cdot}{M}^*$  накіраваны па лініі дзеяння вектара  $\overset{\cdot}{R}$ . Вызначым палажэнні плоскасцей, у якіх знаходзяцца вектары  $\overset{\cdot}{M}_O^*$  і  $\overset{\cdot}{M}_A^*$  (а, значыць, і  $\overset{\cdot}{R}$ ). Звернем увагу на наступныя відавочныя факты:

1) усе тры вектары, што ўваходзяць у кожную з формул (4.14), змешчаны ў адной плоскасці;

2) паколькі  $\overset{\cdot}{M}_{On} \parallel \overset{\cdot}{M}_{An}$  і  $\overset{\cdot}{M}_O^* \parallel \overset{\cdot}{M}_A^*$ , то плоскасці, утвораныя названымі тройкамі вектараў, паралельны паміж сабою;

3) гэтыя плоскасці перпендыкулярны да адрэзка  $OA$ , таму што змяшчаюць перпендыкулярныя да яго вектары —  $\overset{\cdot}{M}_O \perp \overset{\cdot}{OA}$ ,  $\overset{\cdot}{M}_A \perp \overset{\cdot}{OA}$  — і пры гэтым вектар  $\overset{\cdot}{M}_O$  не паралельны да вектара  $\overset{\cdot}{M}_A$ .

Апошняе сцвярджэнне дазваляе зрабіць выснову, што вектары  $\overset{\cdot}{M}_O^*$  і  $\overset{\cdot}{M}_A^*$ , а значыць, і  $\overset{\cdot}{R}$ , перпендыкулярны да восі  $Ox$ . Інакш, вектар  $\overset{\cdot}{R}$  паралельны да плоскасці  $Oxz$  і модуль яго праекцыі на гэту плоскасць роўны модулю самога вектара. Цяпер паспрабуем уявіць, дзе заходзіцца вось дынамы — на адрэзку  $OA$  ці за яго межамі. Зноў звернемся да формул (4.14). Нам ужо вядома, што ўсе вектары першай формулы знаходзяцца ў плоскасці  $Oxz$ , а другой — у плоскасці, паралельнай да  $Oxz$ . Пры гэтым вектары  $\overset{\cdot}{M}_O^*$  і  $\overset{\cdot}{M}_A^*$  разам з вектарам  $\overset{\cdot}{R}$  утвараюць адну плоскасць. Абзначым яе літарай  $P_1$ , моманты  $\overset{\cdot}{M}_{On}$  і  $\overset{\cdot}{M}_{An}$  знаходзяцца ў плоскасці  $P_2$ , што перпендыкулярна да  $P_1$ . На падставе прыведзенай інфармацыі разлажэнне вектара  $\overset{\cdot}{M}_O$  можна ўявіць, як паказана на рысунку 4.23, а, (від з дадатнага напрамку восі  $Oy$ ). Раскладваючы

па тых жа напрамках момант  $\vec{M}_A$ , убачым (рыс. 4.23, в), што вектар  $\vec{M}_{An}$  накіраваны процілегла вектару  $M_{On}$ . Калі цяпер на рысунку 4.24 злучыць канцы вектараў  $M_{On}$  і  $M_{An}$ , то атрымаем графік змянення нармальнага да  $\vec{R}$  моманту  $\vec{M}_n$ . Графік перасякае адрэзак  $OA$  ў некаторым пункце  $O_1$ . Праз яго і праходзіць вось дынамы. Такім чынам, мы знайшлі адказ на пастаўленае вышэй пытанне: вось дынамы праходзіць праз пункт  $O_1$  ў межах адрэзка  $OA$ . Аб'ядноўваем усю атрыманую інфармацыю і будзем аксанаметрычны рысунак 4.24, з дапамогай якога атрымліваем роўнасці  $M_{On} = R \cdot OO_1$ ,  $M_{An} = R \cdot O_1A$ ,  $M_{On} + M_{An} = R(OO_1 + O_1A) = Rh$ , адкуль

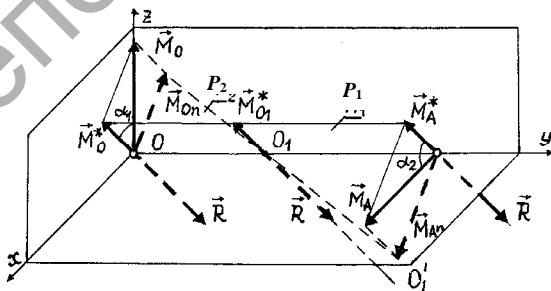
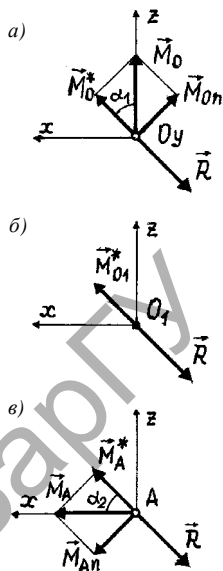
$$R = (M_{On} + M_{An}) / h. \quad (4.15)$$

У формуле (4.15)  $M_{On} = M_O \sin \alpha_1$ ,

Рысунак 4.23

$M_{An} = M_A \sin \alpha_2$ .

Заканчэнне рашэння чыста матэматычнае. Патрэбна знайсці ў апошніх формулах  $\sin \alpha_1$ ,  $\sin \alpha_2$ . На рысунку 4.24 відаць, што  $M_O^* / M_O = \cos \alpha_1$ ,  $M_A^* / M_A = \cos \alpha_2$ . Паколькі  $M_O^* = M_A^*$  і  $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$ , то  $M_O \cos \alpha_1 = M_A \cos \alpha_2$  ці  $M_O \cos \alpha_1 = M_A \cos (90^\circ - \alpha_1) = M_A \sin \alpha_1$ .



Рысунак 4.24

Адсюль  $\operatorname{tg} \alpha_1 = M_O / M_A$  і  $\sin \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1} = M_O / \sqrt{M_O^2 + M_A^2}$ ,  
 $\sin \alpha_2 = \sin(90^\circ - \alpha_1) = \cos \alpha_1 = 1 / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1} = M_A / \sqrt{M_O^2 + M_A^2}$ .

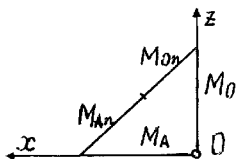
Цяпер знаходзім  $M_{On}, M_{An}$  і іх суму па формулах:

$$M_{On} = M_O^2 / \sqrt{M_O^2 + M_A^2},$$

$$M_{An} = M_A^2 / \sqrt{M_O^2 + M_A^2},$$

$$M_{On} + M_{An} = \sqrt{M_O^2 + M_A^2}.$$

Па формуле (4.15) атрымліваем  $R = \sqrt{M_O^2 + M_A^2} / h$ .



Рысунак 4.25

#### УВАГА!

Заклучную частку рашэння можна значна скараціць, калі рысунок 4.23,  $a$  і  $b$  сумясціць у адной плоскасці, напрыклад,  $Oxz$ . Тады атрымаем рысунак 4.25, з якога знойдзем лічнік формулы (4.15):

$$M_{On} + M_{An} = \sqrt{M_O^2 + M_A^2}.$$

## 5 ЗАДАЧЫ ДЛЯ САМАСТОЙНАГА РАШЭННЯ

### Задача 5.1

На круглым гладкім цыліндры з гарызантальнай воссю радыусам  $R = 0,1$  м ляжаць два шарыкі  $A$  і  $B$  (рыс. 5.1), іх вага  $G_A = 1$  Н,  $G_B = 2$  Н. Шарыкі злучаны ніткай  $AB$  даўжынёю  $l = 0,2$  м. Вызначыць вуглы  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ , якія ўтвораны радыусамі  $OA$  і  $OB$  з вертыкальнай прамой  $OC$  у становішчы раўнавагі, і ціскі  $N_1$  і  $N_2$  шарыкаў на цыліндр у пунктах  $A$  і  $B$ . Размерамі шарыкаў ігнараваць.

#### Указанне

Вызваляемся ад сувязей, якімі з'яўляюцца паверхня цыліндра і ніць. Замяням іх рэакцыямі (рыс. 5.2). Для дзвюх сыходных сістэм сіл складаем чатыры ўмовы раўнавагі. Улічваем, што  $S_A = S_B$ ,  $\varphi_1 + \varphi_2 = l / R$ ,

$$\sin(2 - \varphi_2) = \sin 2 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos 2.$$

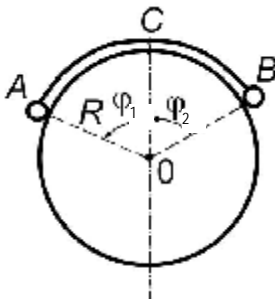


Рисунок 5.1

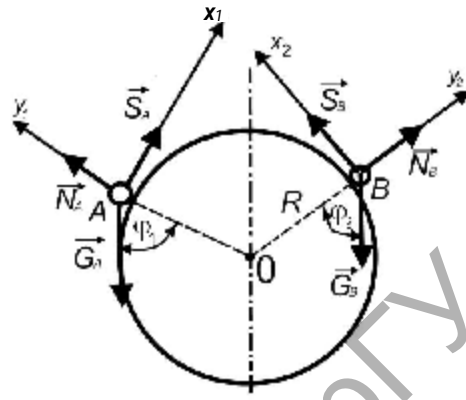


Рисунок 5.2

Адказ:  $\operatorname{tg} \varphi_2 = \sin 2 / (2 + \cos 2)$ ,  $\varphi_1 = 84^\circ 45'$ ,  $\varphi_2 = 29^\circ 50'$ ,  
 $N_1 = \cos \varphi_1 = 0,092 \text{ Н}$ ,  $N_2 = 2 \cos \varphi_2 = 1,43 \text{ Н}$ .

### Задача 5.2

Два грузы, адзін з якіх мае масу  $m_1 = 20 \text{ г}$ , злучаны пружынай і надзеты на гладкія стрыжні A і B (рыс. 5.3). Вызначыць масу  $m_2$  другога груза, калі ў становішчы раўнавагі пружына расцягнута сілай  $P = 0,25 \text{ Н}$ .

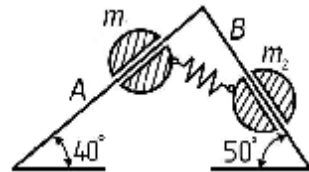
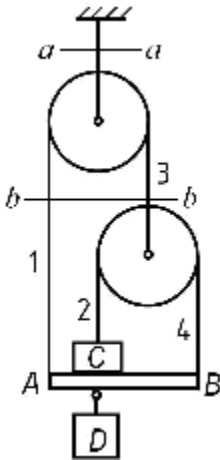


Рисунок 5.3

Адказ:  $m_2 = 28 \text{ г}$ .

### Задача 5.3

Два грузы C і D аднолькавай вагі P з дапамогай бязважкіх блокаў аднолькавага радыусам, вярвак і бруска AB прыведзены ў стан раўнавагі, прычым брусок гарызантальны (рыс. 5.4). Вызначыць нацяжэнне ўчастка I вярвоўкі, калі ўсе ўчасткі вертыкальны, а вось блока з нерухомым цэнтрам і пункт падвеса груза D ляжаць на адной вертыкалі. Рашыць задачу двума спосабамі.



Рысунк 5.4

*Указанне*

Задача рашаецца вусна. Адзін са спосабаў грунтуецца на відавочнай роўнасці нацяжэння ўчасткаў вяроўкі 1 і 3, пры гэтым сістэма рассякаецца на дзве часткі сячэннем  $b-b$ . Пры выкарыстанні іншага спосабу можна разгледзець спачатку раўнавагу ўсёй сістэмы цалкам (размешчанай ніжэй сячэння  $a-a$ ), а затым — раўнавагу верхняга блока (г. зн. участка паміж сячэннямі  $a-a$  і  $b-b$ ).

Адказ:  $T_1 = P$ .

**Задача 5.4**

Захоўваючы ўмову задачы 5.3, вызначыць суадносіны нацяжэнняў чатырох участкаў вяроўак, абазначаных на рысунку 5.4 лічбамі 1, 2, 3, 4.

Адказ:  $T_1/T_2/T_3/T_4 = 1/1/2/1/1/2$ .

**Задача 5.5**

Цяжкі стрыжань даўжынёю  $l$  падвешаны на дзвюх аднолькавых ніцях даўжынёю  $L$  кожная, якія прапушчаны праз бязважкае гладкае кольца  $C$  і прывязаны да канцоў стрыжня  $A$  і  $B$  (рыс. 5.5). Адлегласць паміж пунктамі падвеса нітак роўна  $a$ ,  $OC + CA = L$ . Вызначыць адлегласць  $x = CA = CB$  ад кольца да канцоў стрыжня пры яго раўнавазе. Памеры кольца не ўлічваць.

*Указанне*

Паколькі кольца гладкае, то нацяжэнне ўчасткаў ніцей, размешчаных вышэй і ніжэй кольца, аднолькавыя. На гэтай падставе лёгка паказаць, што і вуглы, утвораныя, напрыклад, участкамі  $OC$  і  $AC$  з вертыкаллю, роўныя паміж сабой. Далей выкарыстоўваюцца суадносіны ў падобных трохвугольніках.

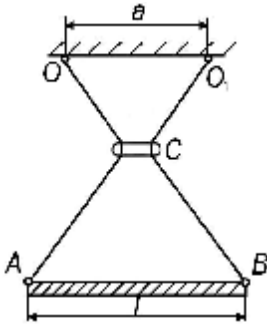
Адказ:  $x = lL/(a+l)$ .

**Задача 5.6**

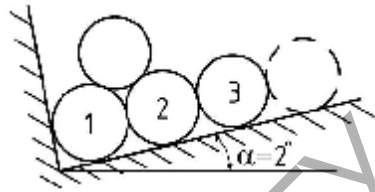
Пры якой мінімальнай колькасці аднолькавых труб ніжняга раду (рыс. 5.6) яны не раскояцца?

Трэнне не ўлічваць, прыняць вугал  $\alpha = 2^\circ$ .

Адказ:  $n_{\min} = 9$ .



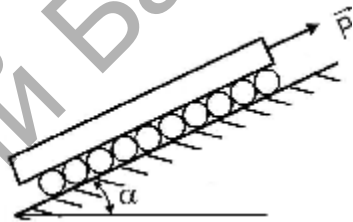
Рисунак 5.5



Рисунак 5.6

### Задача 5.7

Бетонны блок масай  $m = 500$  кг раўнамерна паднімаюць уверх па нахіленай шурпатай плоскасці на бязважкіх катках дыяметрам  $d = 0,2$  м (рыс. 5.7). Каэфіцыенты трэння качэння каткоў па нахіленай плоскасці і па паверхні блока роўны адпаведна  $\delta_1 = 0,01$  см і  $\delta_2 = 0,005$  см. Каэфіцыент трэння слізгання блока па плоскасці роўны  $f = 0,1$ .



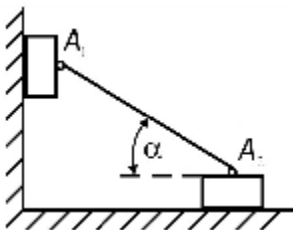
Рисунак 5.7

Вызначыць неабходную сілу  $P$ , прыкладзеную да блока паралельна плоскасці, для яго раўнамернага качэння і слізгання па плоскасці ( $\alpha = 30^\circ$ ).

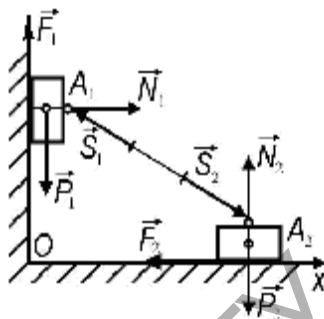
Адказ: пры ўключанні  $P = mg[\sin \alpha + (\delta_1 + \delta_2) \cos \alpha / d] = 2,453$  кН, пры ўцягванні  $P = mg(\sin \alpha + f \cos \alpha) = 2,887$  кН.

### Задача 5.8

Вага цел  $A_1$  і  $A_2$  роўны адпаведна  $P_1$  і  $P_2$ , а каэфіцыенты трэння паміж імі, сцяной і падлогай —  $f_1$  і  $f_2$ . Целы злучаны бязважкім стрыжнем з шарнірамі на канцах (рыс. 5.8). Вызначыць найменшы вугал  $\alpha$ , пры якім сістэма знаходзіцца ў раўнавазе.



Рисунак 5.8



Рисунак 5.9

*Указанне*

Накірунак сіл трэння трэба выбраць з улікам, што цела  $A_1$  імкнецца зрушыцца ўніз, а цела  $A_2$  направа. З умовы раўнавагі стрыжня вынікае, што  $S_1 = S_2 = S$  (рыс. 5.9). З раўнавагі ўсёй сістэмы і цела  $A_1$  атрымліваем:  $N_1 - F_2 = 0$ ,  $F_1 + N_2 - P_1 - P_2 = 0$ ,  $N_1 - S_1 \cos \alpha = 0$ ,  $F_1 - P_1 + S_1 \sin \alpha = 0$ . З гэтай сістэмы пры  $F_1 = f_1 N_1$ ,  $F_2 = f_2 N_2$  знаходзім  $\operatorname{tg} \alpha$  па формуле  $\operatorname{tg} \alpha = (P_1 - f_1 f_2 P_2) / f_2 (P_1 + P_2)$ .

**Задача 5.9**

Аднародны гладкі шар замацаваны на свабодным канцы тонкага аднароднага стрыжня  $OC$ . Шар упіраецца ў брусок  $M$ , што ляжыць на шурпатай гарызантальнай паверхні (рыс. 5.10). Вызначыць каэфіцыент трэння  $f$  паміж бруском і плоскасцю пры ўмове, што раўнавага бруска парушаецца ў той момант, калі вугал паміж стрыжнем і вертыкаллю роўны  $\alpha$ . Сілы цяжару шара, стрыжня і бруска роўны адпаведна  $Q$ ,  $P$  і  $P_1$ .

*Указанне*

Размеры цела  $M$  і шара не ўлічваюць. Лічыць, што лінія дзеяння сілы трэння  $F$  паміж бруском і плоскасцю праходзіць праз пункт  $C$ .

Адказ:  $(Q + P / 2) \operatorname{tg} \alpha / P_1$ .

**Задача 5.10**

Які момант  $M$  трэба прыкласці да стрыжня  $OA$ , каб са становішча, паказанага на рысунку 5.11, зрушыць управа прызму  $BCDE$  вышынёй  $h = 0,1$  м

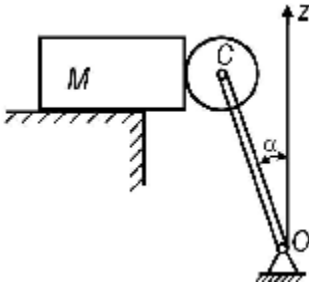


Рисунок 5.10

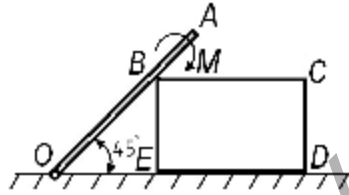


Рисунок 5.11

і вагою  $P = 10$  Н, калі каэфіцыент трэння слізгання паміж прызмай і апорнай гарызантальнай плоскасцю  $f = 0,1$ ? Вагой стрыжня  $OA$  і трэннем у кантактным пункце  $B$  ігнараваць.

Адказ:  $M = fhP / \sin \alpha (\sin \alpha - f \cos \alpha) = 0,228$  Н·м.

### Задача 5.11

Вызначыць найменшы момант, які трэба прыкладасці да звяна  $OA$ , каб са становішча, паказанага на рысунку 5.12, пакаціць цыліндрычны каток вагою  $P = 4$  Н і радыусам  $r = 8,1$  мм, калі каэфіцыент трэння паміж катком і гарызантальнай плоскасцю  $\delta = 0,01$  см,  $OA = AB = 10\sqrt{2}$  см. Вагой звенняў  $OA$ ,  $AB$  і трэннем у шарнірах ігнараваць.

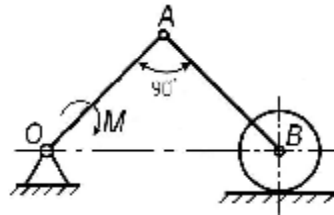


Рисунок 5.12

Адказ:  $M_{\min} = 1$  Н·см.

### Задача 5.12

Ці здолее гарызантальная сіла  $P = 3mg$ , прыкладзеная да кліна  $A$  масай  $m$ , падняць клін  $B$  масай  $2m$  (рыс. 5.13)? Каэфіцыент трэння слізгання на ўсіх паверхнях  $f = 0,4$ .

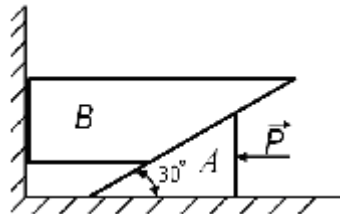
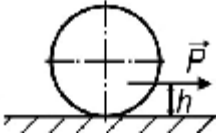
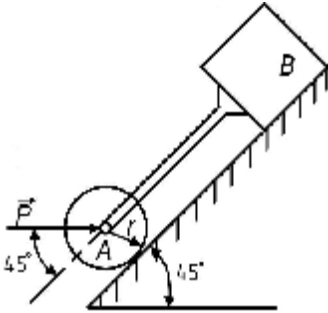


Рисунок 5.13

Адказ: не здолее.



Рысунк 5.14



Рысунк 5.15

### Задача 5.13

Каэфіцыенты трэння качэння і слізгання катка па гарызантальнай паверхні роўныя адпаведна  $\delta$  і  $f$  (рыс. 5.14). На якой вышыні  $h$  трэба прыкладзі гарызантальную сілу  $P$ , каб каток вагою  $10P$ :

- раўнамерна слізгаў па гарызантальнай паверхні без качэння;
- раўнамерна каціўся без слізгання.

Адказ: а)  $h < 10\delta$  пры  $f < 0,1$  (пры  $f > 0,1$  магчыма слізганне і качэнне адначасова);  
 б)  $h > 10\delta$  пры  $f > 0,1$  (пры  $f < 0,1$  магчыма качэнне і слізганне адначасова).

### Задача 5.14

На вось катка масай  $m$  насаджаны штурхач, што ўпіраецца ў брусок  $B$  масай  $m$  (рыс. 5.15). Пры якіх значэннях сілы  $P$ , прыкладзенай да вості катка, каток і брусок будуць знаходзіцца ў раўнавазе? Каэфіцыенты трэння качэння катка і слізгання бруска роўныя адпаведна  $\delta$  і  $f$ .

Адказ:  $(2 - f - \delta/r)/(1 + \delta/r) < P/mg < (2 + f + \delta/r)/(1 - \delta/r)$ .

### Задача 5.15

Выкарыстоўваючы ўмову задачы 2.7, вызначыць, які момант  $M$  неабходна прыкладзі да стрыжня, каб інтэнсіўнасць сілы трэння на яго канцах склала палову яе гранічнага значэння, г. зн., каб  $t_A = t_B = \frac{1}{2}t_{\text{тр}}$ .

Адказ:  $M = fPl/12$ .

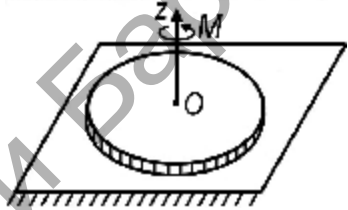
### Задача 5.16

Выкарыстоўваючы ўмову задачы 2.7, вызначыць, які момант  $M$  неабходна прыкладзі да стрыжня, каб інтэнсіўнасць сілы трэння размяркоўвалася паводле рысунка 2.15, б, дзе  $t_A = t_B = t_{тр}$ ,  $AA_1 = BB_1 = l/4$ .

Адказ:  $M = \frac{11}{48} fPl$ .

### Задача 5.17

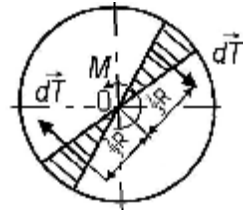
Аднародны суцэльны дыск радыусам  $R$  ляжыць на шурпатай гарызонтальнай плоскасці (рыс. 5.16). Які па модулю момант  $M$  здольны выклікаць вярчэнне дыска вакол восі  $Oz$ , перпендыкулярнай да плоскасці і праведзенай праз яго цэнтр  $O$ , калі ціск дыска на плоскасць размеркаваны раўнамерна, а каэфіцыент трэння слізгання роўны  $f$ ?



Рысунак 5.16

#### Указанне

Тут, як і ў задачы 2.7, інтэнсіўнасць сілы трэння ў стане гранічнай раўнавагі дыска размяркоўваецца раўнамерна ўздоўж радыуса. Аднак пры вылічэнні моманту сіл трэння неабходна ўлічваць, што раўнадзейная сіла трэння  $dT$ , прыкладзеная да элементарнага сектара дыска (рыс. 5.17), адрасна на адлегласць  $2R/3$  ад яго цэнтра  $O$ .

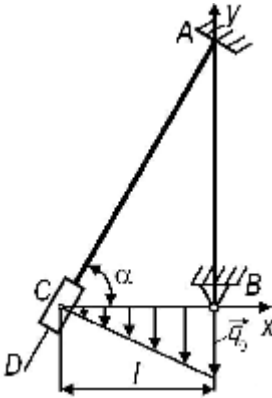


Рысунак 5.17

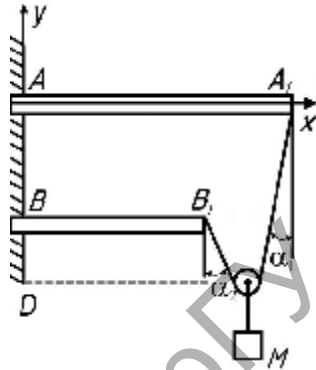
Адказ:  $M > 2fRP / 3$ .

### Задача 5.18

Замацаваны адным канцом у сцяну стрыжань  $AD$  злучаны з дапамогай слізгальнага шарніра  $C$  са стрыжнем  $CB$ , нагружаным лінейна размеркаванай нагрузкай максімальнай інтэнсіўнасці  $q_0$  (рыс. 5.18). Вызначыць апорныя рэакцыі.



Рисунак 5.18



Рисунак 5.19

*Указанне*

Пры раздзяленні сістэмы на дзве часткі, рэакцыі ў слізгальным шарніры C прыкладваюцца да стрыжняў AC і CB паралельна нармалі прамой AD.

$$\text{Адказ: } X_A = -q_0 l \operatorname{tg} \alpha / 5, \quad Y_A = q_0 l / 6, \quad M_A = -q l^2 / (6 \cos^2 \alpha), \\ X_B = q_0 l \operatorname{tg} \alpha / 6, \quad Y_B = q_0 l / 3.$$

### Задача 5.19

Вызначыць рэакцыі жорсткіх замацаванняў A і B кансольных бэлек AA<sub>1</sub> і BB<sub>1</sub>, да якіх падвешаны з дапамогай троса і блока груз M вагаю P (рыс. 5.19), калі AA<sub>1</sub> = l<sub>1</sub>, BB<sub>1</sub> = l<sub>2</sub>, AB = h<sub>1</sub>, AD = h<sub>2</sub>. Размерамі блока ігнараваць.

*Указанне*

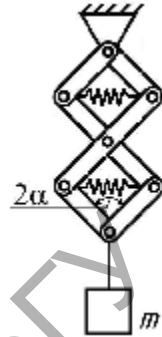
Неабходна спачатку знайсці сілы, прыкладзеныя ў пунктах A<sub>1</sub> і B<sub>1</sub>. Яны роўныя нацяжэнню троса. Для вызначэння апошняга можна скарыстацца ўказаннямі да задачы 5.5. Ролю гладкага кольца тут выконвае блок з грузам M. Разважанні прыводзяць да высновы, што α<sub>1</sub> = α<sub>2</sub> = α, T<sub>A1</sub> = T<sub>B1</sub>.

$$\text{Адказ: } Y_A = Y_B = P / 2, \quad X_B = -X_A = P \operatorname{tg} \alpha / 2, \quad M_A = -P l / 2, \\ M_B = -P l_2 / 2, \quad \operatorname{tg} \alpha = (l_1 - l_2) / (2h_2 - h_1).$$

### Задача 5.20

Да бязважкай рабмічнай шарнірнай канструкцыі падвешаны груз масай  $m$ . Шарніры, размешчаныя на адной гарызанталі, злучаны спружынамі (рыс. 5.20). Вызначыць сілу  $P$ , з якой сціскаюцца спружыны, калі  $2\alpha = 60^\circ$  і вядома, што пры зняцці грузу ромбы ператвараюцца ў квадраты.

Адказ:  $P = mgtg\alpha$ .



Рысунк 5.20

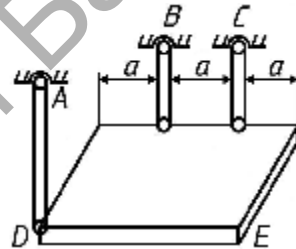
### Задача 5.21

Аднародная прамавугольная пліта вагаю  $G = 180$  Н утрымліваецца ў гарызантальным становішчы з дапамогай трох бязважкіх стрыжняў (рыс. 5.21). Вызначыць унутраныя сілы ў стрыжнях.

Указанні:

1. Знайдзіце ўсе сілы, не складаючы суму праекцый на вертыкальную вось. Выкарыстайце гэтую ўмову для праверкі выніку.

2. Звярніце ўвагу, што велічыня сілы  $S_A$  не залежыць ад пункта замацавання стрыжня  $AD$  на старане  $DE$  (пры ўмове, што стрыжань застаецца вертыкальным).



Рысунк 5.21

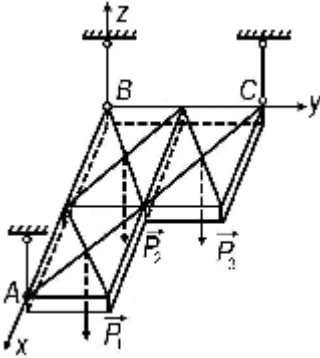
Адказ:  $S_A = -S_B = 90$  Н,  $S_C = 180$  Н.

### Задача 5.22

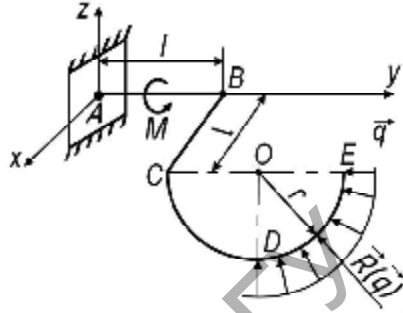
Аднародная пліта, якая складаецца з трох роўных прамавугольнікаў, падтрымліваецца ў гарызантальным становішчы трыма бязважкімі вярвоўкамі, прымацаванымі ў п.  $A, B, C$ . Вызначыць нацяжэнне вярвовак, калі вага пліты роўна  $0,96$  кН.

Указанне

Гэтую задачу рашаюць проста тыя, хто не паддаецца спакусе вызначыць цэнтр цяжару пліты, каб прыкласці ў ім сілу цяжару. Больш натуральна прадставіць вагу ў выглядзе трох аднолькавых складнікаў  $P_1, P_2$  і  $P_3$  (рыс. 5.22). Умову раўнавагі



Рисунак 5.22



Рисунак 5.23

$\sum Y_i = 0$  мэтазгодна не выкарыстоўваць для атрымання выніку, а захаваць для яго праверкі. Ці можна было прадбачыць роўнасць напярэжэнняў  $T_A$  і  $T_C$  да рашэння задачы? Паспрабуйце даказаць яе шляхам разважанняў.

Адказ:  $T_A = T_C = 0,4$  кН,  $T_B = 0,16$  кН.

### Задача 5.23

Стрыжань канцом  $A$  замацаваны ў сцяну. Участак  $ABC$  і прыкладзеная да яго пара сіл з момантам  $M = 4qr^2$  размешчаны ў гарызантальнай плоскасці, участак  $CDE$ , што мае форму дугі акружнасці радыуса  $r$  і прыкладзеная да яго раўнамерна размеркаваная радыяльная нагрузка інтэнсіўнасці  $q$  паралельная да плоскасці  $Ay_z$ . Вугал  $ABC$  роўны  $90^\circ$  (рыс. 5.23). Вызначыць рэакцыю замацавання, калі  $l = r$ .

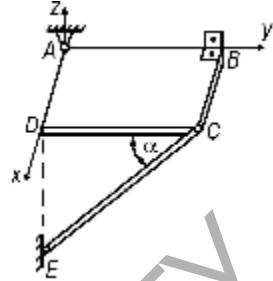
Указанне

Лінія дзеяння раўнадзейнай нагрузкі  $q$  супадае з бісектрасай вугла  $EOD$ . Яе велічыню можна знайсці па формуле  $R(\vec{q}) = 2 \int_0^{\pi/4} qr \cos(\pi/4 - \varphi) d\varphi$ . Выканаўшы інтэграванне, атрымаем:  $R(\vec{q}) = qr\sqrt{2}$ .

Адказ:  $X_A = 0$ ,  $Y_A = qr$ ,  $Z_A = -qr$ ,  $M_x = -2qr^2$ ,  $M_y = qr^2$ ,  $M_z = -3qr^2$ .

### Задача 5.24

Квадратная однородная палица вагою  $Q = 80$  Н, прымацаваная да сцяны з дапамогай шаравога шарніра  $A$  і цыліндрычнага шарніра  $B$ , утрымліваецца ў гарызантальным становішчы аднародным стрыжнем  $CE$  вагою  $P = 20$  Н, які злучаны з паліцай і сцяной сферычнымі шарнірамі  $C$  і  $E$  (рыс. 5.24). Вызначыць рэакцыі шарніраў  $A$ ,  $B$  і  $E$ , калі  $\alpha = 60^\circ$ .



Рысунк 5.24

Адказ:  $X_B = -X_A = 28,8$  Н,  $Y_A = -28,8$  Н,  $Z_A = 40$  Н,  $X_E = Z_B = 0$ ,  
 $Y_E = 28,8$  Н,  $Z_E = 60$  Н.

## ЗАКЛЮЧЭННЕ

Скончыўшы нялёгкаю працу з метадычным дапаможнікам, карысна яшчэ раз вярнуцца да задач, якія выклікалі найбольшыя цяжкасці. Студэнт, які цярпліва здолеў прааналізаваць рашэнні ўсіх змешчаных задач, не толькі істотна павысіў свой інтэлектуальны ўзровень, але і набыў яшчэ адну вельмі карысную ў навучанні і інжынернай творчасці рысу — настойлівасць у дасягненні мэты. Не да канца асэнсаваныя палажэнні варта разгледзець разам з выкладчыкам.

Заўважым, што ўсе задачы статьикі можна рашаць часам больш рацыянальна, прыныцова адменным метадам, заснаваным на *агульным ураўненні статьикі*. Яно вывучаецца напрыканцы курса тэарэтычнай механікі. Каб яшчэ больш свабодна арыентавацца ў задачах статьикі, рашаць іх хутка, «у галаве», карысна азнаёміцца з дапаможнікамі [8; 9].

## СПИС КРЫНІЦ

1. *Бать, М. И.* Теоретическая механика в примерах и задачах : в 2 т. / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. — М. : Наука, 1984. — Т. 1. — 504 с.
2. *Березова, О. А.* Сборник задач по теоретической механике / О. А. Березова, Т. Е. Друшляк, Р. В. Солодовников. — Киев : Вища школа, 1980. — 400 с.
3. Сборник задач по теоретической механике / Н. А. Бражниченко [и др.]. — М. : Высш. шк., 1986. — 480 с.
4. *Будник, Ф. Г.* Сборник задач по теоретической механике / Ф. Г. Будник, Ю. М. Зингерман, Е. И. Селенский. — М. : Высш. шк., 1987. — 176 с.
5. Сборник задач по теоретической механике / К. С. Колесников [и др.]. — М. : Наука, 1983. — 318 с.
6. *Мещерский, И. В.* Сборник задач по теоретической механике / И. В. Мещерский. — М. : Наука, 1986. — 447 с.
7. *Файн, А. М.* Сборник задач по теоретической механике / А. М. Файн. — М. : Высш. шк. 1978. — 189 с.
8. *Русан, С. І.* Раўнавага плоскіх механічных сістэм : (нетрадыцыйная методыка вывучэння) : вучэб.-метад. дапаможнік для студэнтаў выш. навуч. устаноў / С. І. Русан. — Баранавічы : РВА БарДУ, 2005. — 44 с.
9. *Русан, С. І.* Структура плоскіх статычна вызначальных сістэм : вучэб.-метад. дапаможнік для студэнтаў выш. навуч. устаноў / С. І. Русан. — Баранавічы : РВА БарДУ, 2007. — 70 с.

*Вучэбнае выданне*

**Русан Сяргей Іванавіч**

**ТЭАРЭТЫЧНАЯ МЕХАНІКА**

**СТАТЫКА**

**(Рашэнне задач павышанай складанасці)**

**Вучэбна-метадычны дапаможнік  
для студэнтаў тэхнічных спецыяльнасцей  
вышэйшых навучальных устаноў**

*Карэктар В. М. Майсюк*

*Тэхнічны рэдактар М. Л. Патапчык*

*Камп'ютарная вёрстка Н. В. Івановай*

*Адказны за выпуск А. Г. Хахол*

Падпісана ў друк 17.03.2011.

Фармат 60 × 84 1/16. Папера афсетная.

Гарнітура Таймс. Аддрукавана на рызографе.

Ум. друк. арк. 7,67. Ул.-выд. арк. 5,34.

Заказ 52. Тыраж 90 экз.

ЛИ 02330/0552803 ад 09.02.2010

Выдавец і паліграфічнае выкананне:  
установа адукацыі

«Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт»,  
225404, г. Баранавічы, вул. Войкава, 21.