

УДК 539.3

ЦИКЛИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ
ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С МЕРИДИОНАЛЬНЫМИ РЕБРАМИ

С. И. Волк

(Киев)

§ 1. Рассматриваются упругие оболочки вращения переменной толщины с регулярно расположенными ребрами переменной жесткости при симметричных относительно ребер силовых и температурных воздействиях. Предполагается, что оболочка связана с ребрами по линиям пересечения ее срединной поверхности с плоскостями симметрии ребер, проходящими через их геометрические оси и ось вращения оболочки. Условия совместности работы оболочки и ребер предусматривают равенство их перемещений и реактивных сил взаимодействия, приложенных дискретно по линиям сопряжения. В такой постановке задача рассмотрена в статье [3].

Учет дискретного характера приложения сил взаимодействия вдоль окружности оболочки при исследовании напряженно-деформированного состояния вызывает большие математические трудности, поэтому в расчетах задаются недискретным распределением указанных сил. В зависимости от

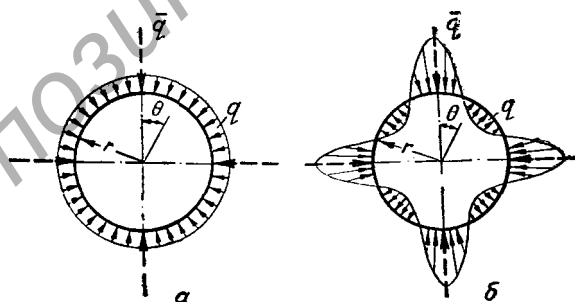


Рис. 1.

принятого закона их распределения возможны различные расчетные схемы ребристых оболочек. В наиболее простой конструктивно ортотропной схеме усилия взаимодействия распределяются равномерно в окружном направлении.

На рис. 1,а показано поперечное сечение оболочки. Здесь штриховыми стрелками условно представлены усилия взаимодействия \bar{q} , сплошными — закон их распределения согласно теории конструктивно ортотропных оболочек $q = \frac{nq}{2\pi r}$; рисунок соответствует оболочке с четырьмя ребрами ($n = 4$). В предлагаемой расчетной схеме (рис. 1,б) силы взаимодействия при-

ложены вдоль параллели оболочки по циклически симметричному закону $q = \frac{n\bar{q}}{\pi r} \left(\frac{1}{2} + \cos n\theta \right)$. В отличие от первой схемы они представлены не одним членом, а отрезком из двух членов ряда Фурье. Поэтому расчет по второй схеме можно рассматривать как уточнение расчета по конструктивно ортотропной схеме. Строгая оценка такого уточнения является весьма сложной. Некоторые представления о ней можно получить из анализа механически родственных задач, допускающих более простые математические решения, чем оребренные оболочки.

В качестве примера рассмотрим коническую оболочку постоянной толщины [1], нагруженную вдоль восьми образующих распределенными нагрузками $\bar{q}_r = \text{const}$. На рис. 2 показаны графики изменения перемещений v и w вдоль образующих, полученные для отрезков ряда, представляющего нагрузку \bar{q}_r , с различным числом членов m . Из графиков видно, что сумма двух первых членов разложения ($m = 1$) вносит основной вклад в окончательные значения перемещений; при этом учет второго члена ряда существенно влияет на результат.

§ 2. В работе [3] для оболочек вращения переменной толщины приведена бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений в амплитудных значениях перемещений. При этом все компоненты напряженно-деформированного состояния, внешние воздействия и реактивные силы представлялись тригонометрическими рядами. Путем ограничения числа членов ряда некоторым значением m из этой системы получают конечные усеченные системы порядка $p = 8m + 6$. Принимая $m = 1$ и сохраняя принятые в работе [3] обозначения величин и операторов, запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для предложенной расчетной схемы

$$L_{su}(u_0) + L_{sw}(w_0) + \frac{n}{2\pi r} [\bar{L}_{su}(u_0 + u_1) + \bar{L}_{sw}(w_0 + w_1)] +$$

$$+ q_{s0}^* + \Phi_{s0}^0 + \frac{n}{2\pi r} (\bar{F}_s^* + \bar{\Phi}_s^0) = 0;$$

$$L_{zu}(u_0) + L_{zw}(w_0) + \frac{n}{2\pi r} [\bar{L}_{zu}(u_0 + u_1) + \bar{L}_{zw}(w_0 + w_1)] +$$

$$+ q_{z0}^* + \Phi_{z0}^0 + \frac{n}{2\pi r} (\bar{F}_z^* + \bar{\Phi}_z^0) = 0;$$

$$L_{su}(u_1) + L_{sv}(v_1) + L_{sw}(w_1) + \frac{n}{\pi r} [\bar{L}_{su}(u_0 + u_1) +$$

$$+ \bar{L}_{sw}(w_0 + w_1)] + q_{s1}^* + \Phi_{s1}^0 + \frac{n}{\pi r} (\bar{F}_s^* + \bar{\Phi}_s^0) = 0; \tag{2.1}$$

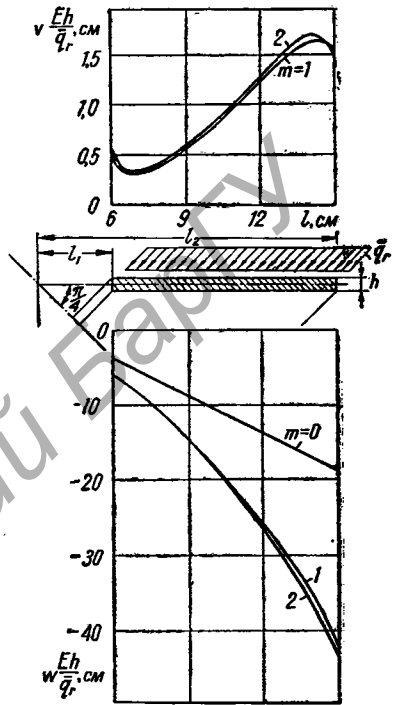


Рис. 2.

$$L_{\theta u}(u_1) + L_{\theta v}(v_1) + L_{\theta w}(\omega_1) + q_{\theta 1}^* + \Phi_{\theta 1}^0 = 0;$$

$$L_{zu}(u_1) + L_{zv}(v_1) + L_{zw}(\omega_1) + \frac{n}{\pi r} [\bar{L}_{zu}(u_0 + u_1) +$$

$$+ \bar{L}_{zw}(\omega_0 + \omega_1)] + q_{z1}^* + \Phi_{z1}^0 + \frac{n}{\pi r} (\bar{F}_z^* + \bar{\Phi}_z^0) = 0.$$

Системе (2.1) соответствуют граничные условия в статических и кинематических факторах

$$N_{s0} + \frac{n}{2\pi r} \bar{N}_s = N_{s0}^* + \frac{n}{2\pi r} \bar{N}_s^*; \quad N_{s1} + \frac{n}{\pi r} \bar{N}_s = N_{s1}^* + \frac{n}{\pi r} \bar{N}_s^*;$$

$$N_{s\theta 1} + \frac{1}{R} M_{s\theta 1} = N_{s\theta 1}^* + \frac{1}{R} M_{s\theta 1}^*; \quad M_{s0} + \frac{n}{2\pi r} \bar{M}_s = M_{s0}^* + \frac{n}{2\pi r} \bar{M}_s^*;$$

$$M_{s1} + \frac{n}{\pi r} \bar{M}_s = M_{s1}^* + \frac{n}{\pi r} \bar{M}_s^*; \quad Q_{s0} + \frac{n}{2\pi r} \bar{Q}_s = Q_{s0}^* + \frac{n}{2\pi r} \bar{Q}_s^*;$$

(2.2)

$$Q_{s1} + \frac{n}{r} M_{s\theta 1} + \frac{n}{\pi r} \bar{Q}_s = Q_{s1}^* + \frac{n}{r} M_{s\theta 1}^* + \frac{n}{\pi r} \bar{Q}_s^*;$$

$$u_0 = u_0^*; \quad u_1 = u_1^*; \quad v_1 = v_1^*; \quad \omega_0 = \omega_0^*;$$

(2.3)

$$\omega_1 = \omega_1^*; \quad \vartheta_0 = -\frac{d\omega_0}{ds} = \vartheta_0^*; \quad \vartheta_1 = -\frac{d\omega_1}{ds} = \vartheta_1^*$$

(звездочками отмечены заданные на торцах оболочки и ребер величины усилий, моментов и перемещений).

Граничные условия (2.2) для оболочки и стержней удовлетворяются суммарно: в каждое уравнение входят статические факторы, относящиеся к оболочке и стержням. Интегральное удовлетворение граничным условиям с учетом гипотезы плоских сечений при расчетах приводит к появлению дополнительных усилий и моментов, сосредоточенных на концах ребер и распределенных по торцам оболочки согласно циклически симметричному закону. Их величина определяется из решения задачи в целом.

Заметим, что большие дополнительные усилия могут приводить к сильному искажению напряженно-деформированного состояния у края оболочки. Такой случай, например, может иметь место, когда оболочка подкреплена небольшим числом весьма жестких ребер, а внешняя нагрузка вызывает на краю оболочки у линий сопряжения большие окружные усилия и моменты. Для устранения причин появления дополнительных воздействий можно при расчете подкрепленной оболочки у края принимать жесткость ребер переменной, сводя ее на торце к нулю; дополнительные усилия при этом не будут возникать. Такое предположение о жесткости подкреплений лучше соответствует их действительной работе. Можно также без нарушения точности расчета (поскольку при $m = 1$ расчет является приближенным) принимать равным нулю коэффициент Пуассона материала, как это иногда делают в теории гладких оболочек. При $\nu = 0$ дополнительные усилия и моменты будут незначительными.

§ 3. Аналитическое решение системы (2.1) 14-го порядка с переменными коэффициентами сложной структуры в общем случае весьма затруднительно. В настоящее время в связи с развитием ЭЦВМ все больше внимания уделяется численным методам интегрирования дифференциальных уравнений. При выборе численного метода следует учитывать свойственную уравнениям для оболочек (особенно в случае циклической деформации) быструю изменчивость решений задач Коши, к которым сводится рассматриваемая краевая задача. Это приводит к квазилинейной зависимости векторов частных решений на интервале интегрирования, а вследствие этого — к быстрой потере точности счета. Для преодоления указанной трудности использован численный метод с дискретным ортонормированием С. К. Годунова [2]. Возникающее в процессе пошагового интегрирования различие в величинах векторов частных решений и их «сплющивание» устраняются посредством нормирования и ортогонализации.

Для применения численного метода систему (2.1) и условия (2.2), (2.3) необходимо привести к нормальному виду. Перед этим следует выполнить указанное в операторах (2.1) дифференцирование.

Обозначим полученную систему (2.1)'. Из первого уравнения этой системы исключим производную $\frac{d^2 u_1}{ds^2}$; из второго — $\frac{d^2 u_0}{ds^2}$, $\frac{d^3 u_0}{ds^3}$, $\frac{d^2 u_1}{ds^2}$, $\frac{d^3 u_1}{ds^3}$, $\frac{d^4 w_1}{ds^4}$; из третьего — $\frac{d^2 u_0}{ds^2}$; из пятого — $\frac{d^2 u_0}{ds^2}$, $\frac{d^3 u_0}{ds^3}$, $\frac{d^2 u_1}{ds^2}$, $\frac{d^3 u_1}{ds^3}$, $\frac{d^2 v_1}{ds^2}$, $\frac{d^4 w_0}{ds^4}$. Указанные преобразования выполняются на основании этих же уравнений и полученных из них описанным путем. Например, для исключения производной $\frac{d^2 u_1}{ds^2}$ из первого уравнения (2.1)' достаточно подставить в него выражение $\frac{d^2 u_1}{ds^2}$, найденное из третьего уравнения системы и т. д. Чтобы получить некоторые производные, необходимо дифференцировать уравнения. В результате система (2.1) примет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^2 A_{iu_0} \frac{d^i u_0}{ds^i} + \sum_{i=0}^1 \left(A_{iu_1} \frac{d^i u_1}{ds^i} + A_{iv_1} \frac{d^i v_1}{ds^i} \right) + \sum_{i=0}^3 \left(A_{iw_0} \frac{d^i w_0}{ds^i} + A_{iw_1} \frac{d^i w_1}{ds^i} \right) + Q_1 = 0; \\ & \sum_{i=0}^1 \left(B_{iu_0} \frac{d^i u_0}{ds^i} + B_{iu_1} \frac{d^i u_1}{ds^i} + B_{iv_1} \frac{d^i v_1}{ds^i} \right) + \sum_{i=0}^4 B_{iw_0} \frac{d^i w_0}{ds^i} + \sum_{i=0}^3 B_{iw_1} \frac{d^i w_1}{ds^i} + Q_2 = 0; \\ & \sum_{i=0}^2 C_{iu_1} \frac{d^i u_1}{ds^i} + \sum_{i=0}^1 \left(C_{iu_0} \frac{d^i u_0}{ds^i} + C_{iv_1} \frac{d^i v_1}{ds^i} \right) + \sum_{i=0}^3 \left(C_{iw_0} \frac{d^i w_0}{ds^i} + \right. \\ & \quad \left. + C_{iw_1} \frac{d^i w_1}{ds^i} \right) + Q_3 = 0; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\sum_{i=0}^1 D_{iu_1} \frac{d^i u_1}{ds^i} + \sum_{i=0}^2 \left(D_{iv_1} \frac{d^i v_1}{ds^i} + D_{iw_1} \frac{d^i w_1}{ds^i} \right) + Q_4 = 0;$$

$$\sum_{i=0}^1 \left(E_{iu_0} \frac{d^i u_0}{ds^i} + E_{iu_1} \frac{d^i u_1}{ds^i} + E_{iv_1} \frac{d^i v_1}{ds^i} \right) + \sum_{i=0}^3 E_{i\omega_0} \frac{d^i \omega_0}{ds^i} + \\ + \sum_{i=0}^4 E_{i\omega_1} \frac{d^i \omega_1}{ds^i} + Q_5 = 0,$$

где i — порядок производных; $\frac{d^0 f}{ds^0} = f$ ($f = u_0, u_1, \dots$).

Граничные условия (2.2) записываются в перемещениях, после чего из них исключаются производные $\frac{d^2 u_0}{ds^2}$, $\frac{d^2 u_1}{ds^2}$, найденные из первого и третьего уравнений системы (3.1).

Уравнения (3.1) и преобразованные граничные условия приводятся к нормальному виду

$$\frac{d\bar{y}}{ds} = A(s)\bar{y} + \bar{f}(s), \quad B(s)\bar{y} = \bar{b}(s). \quad (3.2)$$

Здесь \bar{y} — неизвестный вектор размерности $p = 14$ с компонентами

$$y_1 = u_0; \quad y_2 = u_1; \quad y_3 = v_1; \quad y_4 = \omega_0; \quad y_5 = \frac{d\omega_0}{ds}; \\ y_6 = \omega_1; \quad y_7 = \frac{d\omega_1}{ds}; \quad y_8 = \frac{d^2 \omega_1}{ds^2}; \quad y_9 = \frac{d^3 \omega_1}{ds^3}; \quad y_{10} = \frac{du_0}{ds}; \\ y_{11} = \frac{du_1}{ds}; \quad y_{12} = \frac{dv_1}{ds}; \quad y_{13} = \frac{d^2 \omega_0}{ds^2}; \quad y_{14} = \frac{d^3 \omega_0}{ds^3};$$

$\bar{f}(s)$ — заданный вектор (функция внешних воздействий на оболочку) той же размерности; $A(s) = \|a_{ij}\|$ и $B(s) = \|b_{ij}\|$ — квадратная ($i, j = 1, 2, \dots, 14$) и прямоугольная ($i = 1, 2, \dots, 7; j = 1, 2, \dots, 14$) матрицы коэффициентов, зависящих от геометрии оребренной оболочки и упругих постоянных материала; $\bar{b}(s)$ — заданный на граничном контуре оболочки вектор.

§ 4. В качестве примера по предложенной и конструктивно ортотропной схемам рассчитана усеченная коническая оболочка постоянной толщины, подкрепленная с внешней стороны ребрами постоянного прямоугольного сечения. Вычисления проведены для четырех вариантов оболочки, отличающихся количеством ребер ($n = 6, 9, 12, 24$). При этом суммарная жесткость ребер на изгиб и растяжение во всех вариантах сохраняется постоянной; их сечения в разных вариантах отличаются лишь толщиной δ .

Принятые размеры подкреплений позволяют при $k = 0$ ограничиться рассмотрением только одной оболочки, так как все варианты согласно теории конструктивно ортотропных оболочек эквивалентны. Размеры оболочки в сантиметрах приняты такими: расстояния от вершины конуса $l_1 = 7,5$; $l_2 = 25$; толщина оболочки $h = 1$; высота ребра $H = 4,8$; толщина $\delta = 2, \frac{4}{3}, 1, \frac{1}{2}$ при $n = 6, 9, 12, 24$ соответственно. Угол раствора конуса $2\alpha = \frac{8}{9}\pi$. Коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; модули упругости материала

оболочки и ребер приняты одинаковыми ($E = \bar{E}$); решения получаются с точностью до множителя E .

Оребренная оболочка жестко заделана по контуру $l = l_1$ и нагружена вдоль края $l = l_2$ нагрузкой p^* , параллельной оси оболочки и распределенной либо равномерно $p^* = p_0^*$, либо по циклически симметричному закону

$$p^* = p_0^* + p_1^* \cos n \theta, \text{ где } p_0^* = \frac{1}{2\pi r_2} P, \quad p_1^* = \frac{1}{\pi r_2} P; \quad r_2 = l_2 \sin \alpha; \quad P - \text{равнодействующая осевая сила.}$$

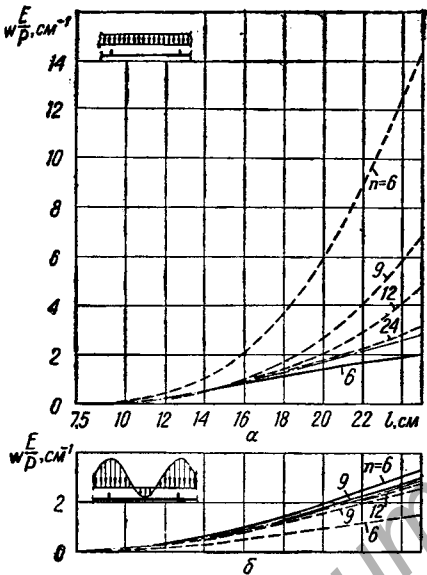


Рис. 3.

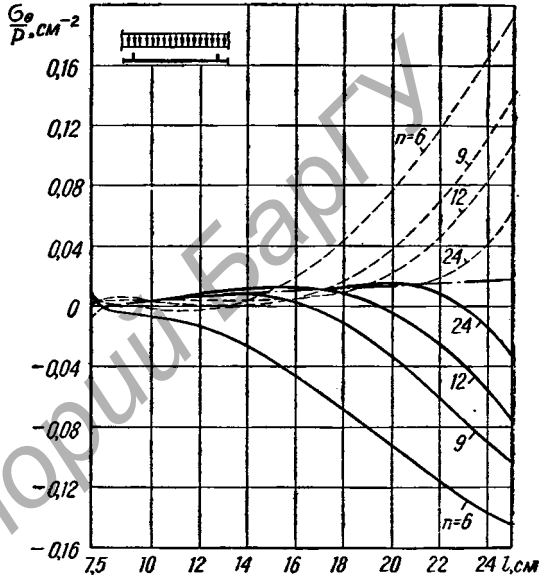


Рис. 4.

В граничных условиях (2.2), (2.3) следует положить: на контуре $l = l_1$

$$u_0^* = w_0^* = \vartheta_0^* = u_1^* = v_1^* = w_1^* = \vartheta_1^* = 0;$$

на контуре $l = l_2$

$$N_{i01}^* = M_{i01}^* = M_{i0}^* = M_{i1}^* = \bar{N}_i^* = \bar{M}_i^* = \bar{Q}_i^* = 0;$$

в случае равномерно распределенной нагрузки

$$N_{i0}^* = -p_0^* \cos \alpha; \quad N_{i1}^* = 0; \quad Q_{i0}^* = p_0^* \sin \alpha; \quad Q_{i1}^* = 0;$$

в случае циклически симметричной нагрузки

$$N_{i0}^* = -p_0^* \cos \alpha; \quad N_{i1}^* = -p_1^* \cos \alpha; \quad Q_{i0}^* = p_0^* \sin \alpha; \quad Q_{i1}^* = p_1^* \sin \alpha.$$

На рисунках 3, 4, 5, 6 представлены графики перемещений и окружных напряжений для всех вариантов подкреплений оболочки при двух видах нагружения, показанных прямыми линиями или косинусоидами. Результаты, полученные по теории конструктивно ортотропных оболочек, приведены штрих-пунктирной линией. Для перемещений ординаты на графиках имеют размерность 1 см , для напряжений — 1 см^2 .

На рис. 3 а, б представлены нормальные перемещения w в плоскости ребер (сплошные линии) и между ними (штриховые линии). Первые из них, начиная с $n = 9$ при равномерной нагрузке и с $n = 12$ при циклической, в принятом масштабе совпадают с перемещениями конструктивно ортотропной оболочки.

На рисунках 4 и 6, а даны графики окружных напряжений на внешней поверхности оболочки; те же величины для внутренней поверхности пред-

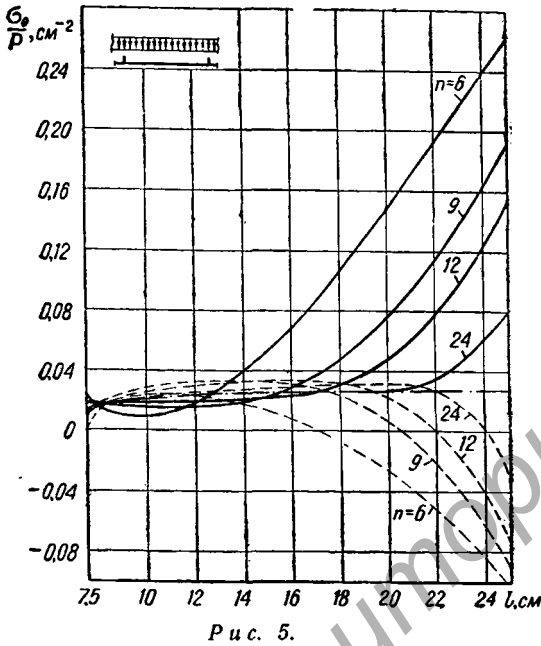


Рис. 5.

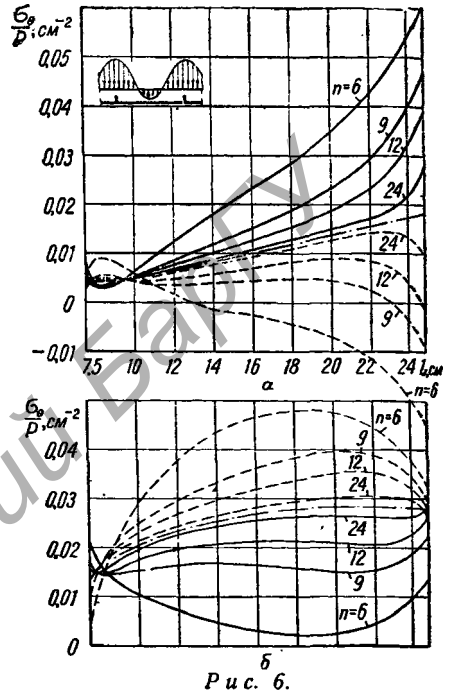


Рис. 6.

ставлены на рисунках 5 и 6, б. При этом сплошные линии относятся к сечениям в плоскости ребер, штриховые — к средним сечениям между ребрами.

Сравнение перемещений и напряжений для сечений оболочки в плоскости ребер и между ними показывает большое отклонение в ее напряженно-деформированном состоянии от осесимметричного. Величина этого отклонения, характеризующая возможность применения теории конструктивно ортотропных оболочек, зависит как от числа ребер, так и от вида нагрузки. С увеличением числа ребер напряженно-деформированное состояние ребренной оболочки приближается к осесимметричному, а результаты, найденные по теории конструктивно ортотропных оболочек, лучше согласуются с результатами, полученными при использовании уточненной расчетной схемы.

Отмечая большое различие в величинах перемещений и напряжений в оболочке с изменением числа подкреплений, следует иметь в виду, что в данном примере вместе с числом ребер изменяется и их жесткость (при уменьшении n жесткость возрастает). Напряжения в ребрах при изменении n остаются более стабильными.

§ 5. Описанный метод позволяет приближенно учитывать дискретное расположение ребер. Пределы его применимости зависят как от геометрических параметров ребренной оболочки, так и от характера внешних воздействий.

До настоящего времени нет работ, в которых был бы всесторонне исследован вопрос о точности и пределах применимости теории конструктивно ортотропных оболочек, несмотря на ее широкое использование в инженерных расчетах. Те же трудности остаются и при оценке точности предлагаемого метода.

Во всех случаях, когда применяется теория конструктивно ортотропных оболочек, использование нового метода позволит получить более точный результат. Кроме того, с помощью этого метода в каждом конкретном случае путем сопоставления результатов можно оценить точность расчета по конструктивно ортотропной схеме: если различие в решениях по двум расчетным схемам велико, то конструктивно ортотропная схема непригодна.

Такое сравнение может служить и для оценки уточненного метода. Чтобы установить погрешность более строго, необходимо удержать в уравнениях статьи [3] три члена разложения, что связано с решением уравнений 22-го порядка.

В заключение отметим, что опыт составления программ для решения дифференциальных уравнений высоких порядков позволяет оценивать перспективы дальнейшего уточнения расчета ортотропных оболочек на основании изложенного здесь подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волк С. И., Упругие конические оболочки, нагруженные по образующим и в точках контурных окружностей, Прикладная механика, т. 1, в. 11, 1965.
2. Годунов С. К., О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, Успехи матем. наук, т. XVI, в. 3, 1961.
3. Ільїн Л. О., Диференціальні рівняння пружної рівноваги оболонок обертання з меридіональними ребрами при силових і температурних навантаженнях, Прикладна механіка, т. X, в. 3, 1964.

Поступила
27.І 1970 г.

Институт механики
АН УССР