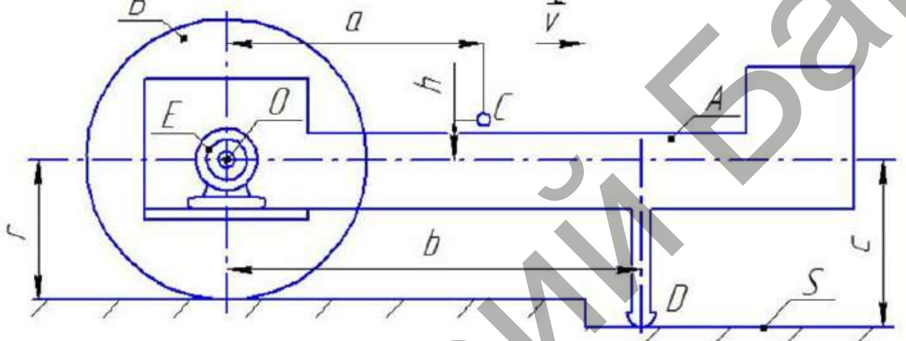
УДК 531.8

С. І. Русан, І. М. Дыдышка
Установа адукацыі «Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт», Баранавічы

ДАСЛЕДАВАННЕ РУХУ МАБІЛЬНАЙ СІСТЭМЫ Ў ПЕРАХОДНЫМ РЭЖЫМЕ

Уводзіны. Тэрмін «мабільны» ў перакладзе з французскага «mobile» азначае «рухомы». Пад мабільнымі сістэмамі будзем разумець складаныя механічныя сістэмы, здольныя самастойна змяняць сваё становішча ў прасторы. Такія сістэмы шырока выкарыстоўваюцца ў самых разнастайных галінах вытворчасці. Для поўнага разліку мабільных сістэм патрэбна сукупнасць звестак з многіх тэхнічных навук. Наша мэта абмежаваная — паказаць магчымасць даследавання толькі асноўных механічных параметраў сістэмы, не выходзячы за межы адной-дзвюх вучэбных дысцыплін. Выбар аб'екта даследавання абумоўлены мэтазгоднасцю канкрэтызацыі абстрактнай дысцыпліны — тэарэтычнай механікі — і ілюстрацыі яе эфектыўнага прыкладнога накірунку.

Асноўная частка. Пакажам абстрактную мадэль мабільнай механічнай сістэмы (рысунак 1). Яна складаецца з цела A масы m_A, кола B масы m_B і электрарухавіка E, якія прыводзіць сістэму ў рух. Ротар рухавіка жорстка змацаваны з колам B; яго маса і момант інерцыі ўлічваюцца ў інерцыйных характарыстыках кола B. Корпус электрарухавіка прымацаваны да цела A.



Рысунак 1 — Агульны выгляд мабільнай механічнай сістэмы

Цэнтры цяжару цела A і кола B абазначаны на рысунку літарамі C і O адпаведна. Кола коціцца без слізгання. Прыняты абазначэнні: r — радыус кола; i_ξ — яго радыус інерцыі; f — каэфіцыент трэння ў пункце D; $M = M(t)$ — момант, прыкладзены да кола B. Дэфармацыя цел не ўлічваецца.

Да нерухомай механічнай сістэмы прыкладваецца момант $M(t)$, ствараемы рухавікам. Праз τ секунд пачынаецца яе рух. На працягу t_y секунд скорасць руху сістэмы ўзрастае да некаторага ўсталяванага (пастаяннага) значэння ϑ_y. У прамежак часу $\tau \le t \le t_y$ сістэма знаходзіцца ў стане пераходнага рэжыму руху, які неабходна даследаваць.

Скорасць і паскарэнне паступальнага руху сістэмы вызначаюцца ўласцівасцямі электрарухавіка і інерцыйнымі характарыстыкамі механічнай сістэмы. Будзем лічыць, што механічная характарыстыка рухавіка E ўстанаўліваецца наступным дыферэнцыяльным ураўненнем:

$$b_1\frac{dM}{dt} + b_2 M = b_3 - \alpha\omega, \qquad (1)$$

дзе b_1, b_2, b_3, α — пастаянныя каэфіцыенты; ω — вуглавая скорасць вярчэння ротара і кола B.

Велічыня моманту $M(t)$ у прамежак часу $0 \le t \le \tau$ знаходзіцца шляхам інтэгравання ўраўнення (1) пры $\omega = 0$:

$$M(t) = b_3\left(1 - e^{-\left(\frac{b_2}{b_1}\right)t}\right)/\, b_2. \qquad (2)$$

Далей сілы і скорасці будзем абазначаць агульнапрынятымі ў курсе тэарэтычнай механікі літарамі. Знаходзім кінетычную энергію сістэмы $T = m_{\text{пр}}\dot{x}^2/\,2$ і суму магутнасцей сіл $\sum N_i = (M/\,r - X_D)\dot{x}$. На падставе тэарэмы аб змяненні кінетычнай энергіі $dT/\,dt = \sum N_i$ атрымліваем:

$$m_{\text{пр}}\ddot{x} = M/\,r - fY_D, \qquad (3)$$

дзе $m_{\text{пр}} = m_A + (1 + \frac{i_\xi^{\,2}}{r^2})m_B$ — прыведзеная маса сістэмы.

Пасля выключэння з роўнасці (3) невядомай рэакцыі Y_D, атрыманай з ураўнення кінетастатыкі для цела A, знойдзем:

$$a_3\ddot{x} = a_1 M - a_2. \tag{4}$$

Тут $a_1 = f + d/r$; $a_2 = fam_A g$; $a_3 = m_{\text{пр}} d - fhm_A$; $d = b - fc$.

Паколькі рух сістэмы пачынаецца пры паскарэнні $\ddot{x} > 0$, то з роўнасці (4) вызначаецца неабходны пачатковы момант $M_n = a_2 / a_1$. Каб знайсці скорасць $\vartheta = \dot{x}$ пастýпальнага руху сістэмы, пераўтворым сумесна ўраўненні (1) і (4). Вынік запішам у выглядзе дыферэнцыяльнага ўраўнення другога парадку з пастаяннымі каэфіцыентамі:

$$\ddot{\vartheta} + 2n\dot{\vartheta} + k^2\vartheta = D, \tag{5}$$

дзе $n = b_2 / 2b_1$; $k = \sqrt{\alpha a_1 / r a_3 b_1}$; $D = (a_1 b_3 - a_2 b_2) / a_3 b_1$.

Паводле тыпавой методыкі рашэнне ўраўнення (5) неабходна шукаць у выглядзе сумы $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$. Для вызначэння ϑ_1 складаецца характарыстычнае ўраўненне $z^2 + 2nz + k^2 = 0$. Пры $n > k$ яго карані сапраўдныя: $z_{1,2} = -n \pm k_1$, дзе $k_1 = \sqrt{n^2 - k^2}$. А рашэнне ϑ_2 пры $D = \text{canst}$ трэба шукаць у выглядзе пастаяннай. У выніку атрымаем: $\vartheta = \vartheta(t) = C_1 e^{-(n-k_1)t} + C_2 e^{-(n+k_1)t} + D/k^2$, дзе C_1, C_2 — пастаянныя інтэгравання, што вызначаюцца з пачатковых умоў: пры $t = \tau$, $\vartheta(\tau) = 0$, $\dot{\vartheta}(\tau) = 0$.

Пасля вызначэння пастаянных скорасць сістэмы пры $t \geq \tau$ знаходзіцца па формуле

$$\vartheta(t) = \left(D/2k_1k^2\right)\left[-(n + k_1)e^{-(n-k_1)(t-\tau)} + (n - k_1)e^{-(n+k_1)(t-\tau)} + 2k_1\right]. \tag{6}$$

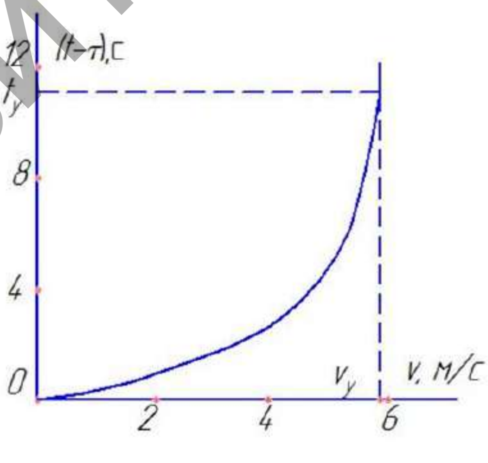
Для даследавання скорасці пастýпальнага руху сістэмы выкарыстаем формулу (6), у якой $(t - \tau)$ — час руху механічнай сістэмы.

Прыклад. Дадзена: $m_A = 40$ кг; $m_B = 90$ кг; $r = 0{,}45$ м; $i_\xi = 0{,}4$ м; $f = 0{,}4$ м; $a = 1{,}6$ м; $h = 0{,}1$ м; $b = 1{,}7$ м; $c = 0{,}6$ м; $\alpha = 3{,}5$; $b_1 = 2{,}28 \cdot 10^{-2}$; $b_2 = 0{,}20$; $b_3 = 60$.

Рашэнне. Аналіз формулы (6) паказвае, што праз пэўны час t_y першыя два складаемыя набліжаюцца да нуля, а скорасць сістэмы вызначаецца толькі трэцім складаемым — усталяванай скорасцю $\vartheta_y = D/k^2$.

Па атрыманых вышэй формулах знаходзім: $m_{\text{пр}} = 201{,}11$ кг; $d = 1{,}46$ м; $a_1 = 3{,}64$; $a_2 = 251{,}136$ Н · м; $a_3 = 292{,}02$ кг · м; $\tau = 0{,}0296$ с; $n = 5{,}482$ с$^{-1}$; $k = 2{,}062$ с$^{-1}$; $D = 25{,}258$ м / с^3; $\vartheta_y = 5{,}940$ м / с; $k_1 = 5{,}079$ с$^{-1}$; $n + k_1 = 10{,}561$ с$^{-1}$; $n - k_1 = 0{,}403$ с$^{-1}$; $2k_1 = 10{,}158$ с$^{-1}$. Паводле формулы (6): $\vartheta(t) = 0{,}5848[-10{,}561e^{-0{,}403(t-0{,}0296)} + 0{,}403e^{-10{,}561(t-0{,}0296)} + 10{,}158$.

Пакажам графік змянення скорасці пастýпальнага руху сістэмы ў пераходным рэжыме (рысунак 2).



Рысунак 2 — Графік скорасці ў пераходным рэжыме руху

Час руху сістэмы ў пераходным рэжыме t_y можна набліжана вызначыць з першага складаемага формулы (6), прыняўшы яго дастаткова малым у выглядзе $(D/2k_1k^2)(n + k_1)e^{-(n-k_1)t_y} = \mu\vartheta_y$. Для нашага прыкладу пры $\mu = 0{,}01$ атрымаем $t_y = 11{,}524$ с.

Заключэнне. Узрастаючы момант (2), ствараемы рухавіком, затым пры $t > \tau$ стабілізуецца. Паказана, што і павелічэнне скорасці руху сістэмы ў пераходным рэжыме таксама запавольваецца, дасягаючы ўсталяванага значэння ϑ_y. Пабудаваны адпаведны графік.