Список цитируемых источников

1. *Гельфанд, И. М.* Об эллиптических уравнениях / И. М. Гельфанд // Успехи мат. наук. — 1960. — Т. 15. — Вып. 3. — С. 121—132.
2. *Агранович, М. С.* Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М. С. Агранович // Успехи мат. наук. — 1965. — Т. 20. — Вып. 5. — С. 3—120.
3. *Шевченко, В. И.* Гомотопическая классификация задач Римана—Гильберта для голоморфного вектора / В. И. Шевченко // Мат. физика : Респ. межвед. сб. — Киев, 1975. — Вып. 17. — С. 184—186.
4. *Усс, А. Т.* Краевая задача Римана—Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши—Римана / А. Т. Усс // Докл. НАН Беларуси. — 2003. — Т. 47. — № 6. — С. 10—15.
5. *Басик, А. И.* Условие регуляризуемости краевой задачи Римана—Гильберта для кососимметрических эллиптических систем в $\mathbf{R}^3$ / А. И. Басик, О. А. Гацкевич // Содружество наук. Барановичи-2016 : сб. материалов XII Междунар. науч.-практ. конф. молодых исследователей, Барановичи, 19 мая 2016 г. — Барановичи, 2016. — С. 25—26.
6. *Александров, П. С.* Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры : [для ун-тов] / П. С. Александров ; с приложением собрания задач, снабженных решениями, сост. А. С. Пархоменко. — М. : Наука, 1968. — 911 с.
7. *Шевченко, В. И.* О некоторых краевых задачах для голоморфного вектора / В. И. Шевченко // Мат. физика : Респ. межвед. сб. — Киев, 1970. — Вып. 8. — С. 172—186.

УДК 517.946

А. И. Басик[1], Т. В. Копайцева[2]

[1]*Учреждение образования «Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина», Брест*
[2]*Учреждение образования «Брестский государственный технический университет», Брест*

ЗАДАЧА ТИПА НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Введение. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ — ограниченная область, границей которой является гладкая кривая Ляпунова $\partial\Omega$. Задача отыскания решения

$$u(x_1, x_2) = (u_1(x_1, x_2),\ u_2(x_1, x_2)) \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$$

равномерно эллиптической системы двух дифференциальных уравнений второго порядка

$$\sum_{j,\,k=1}^{2} A_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{2} A_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + A(x)u = 0\,, \tag{1}$$

удовлетворяющего на границе краевым условиям

$$p_k \langle l_1; grad\ u_1 \rangle + q_k \langle l_2; grad\ u_2 \rangle = f_k,\ k = 1, 2, \tag{2}$$

называется задачей типа наклонной производной. Здесь $A_{jk}(x)$, $A_j(x)$ и $A(x)$ — достаточно гладкие квадратные вещественные матрицы-функции второго порядка; $p_k, q_k, f_k : \partial\Omega \to \mathbf{R}$ — заданные функции класса $C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$; l_1, l_2 — некасательные к $\partial\Omega$ векторные поля; $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ — скалярное произведение на плоскости; $C^{n,\alpha}(\Omega)$ — множество всех непрерывно дифференцируемых в области Ω функций до порядка n включительно, частные производные порядка n которых непрерывны по Гельдеру с показателем α в этой области.

Для произвольной эллиптической системы (1) краевая задача типа наклонной производной, вообще говоря, не является нетеровой. Например, в случае $l_1 = l_2$ задача не будет нетеровой [1], если в качестве системы (1) рассматривается известная система А. В. Бицадзе [2].

В работе [3, с. 74] доказывается, что если (1) является системой ортогонального типа и векторы l_1 и l_2 не коллинеарны в каждой точке границы $\partial\Omega$, то задача (1) — (2) при $p_1 = q_2 = 1$ и $p_2 = q_1 = 0$ является нетеровой независимо от того, какой компоненте гомотопической связности принадлежит система (1).

В настоящей работе приводится пример эллиптической системы двух дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка на плоскости неортогонального типа, для которой краевая задача типа наклонной производной не является нетеровой.

Основная часть. В области Ω рассмотрим систему

$$\begin{cases} 4\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^{\ 2}} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^{\ 2}} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^{\ 2}} = 0, \\ -3\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^{\ 2}} + 3\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^{\ 2}} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^{\ 2}} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^{\ 2}} = 0, \end{cases} \qquad (x_1, x_2) \in \Omega. \tag{3}$$

Характеристическая матрица этой системы имеет вид

$$A(\xi) = \begin{bmatrix} 4\xi_1^{\ 2} + \xi_1\xi_2 + \xi_2^{\ 2} & -\xi_1^{\ 2} \\ -3\xi_1^{\ 2} + 3\xi_1\xi_2 - 2\xi_2^{\ 2} & \xi_1^{\ 2} - \xi_1\xi_2 + \xi_2^{\ 2} \end{bmatrix}.$$

Так как $\det A(\xi) = \left(\xi_1^{\ 2} + \xi_2^{\ 2}\right)^2 \neq 0$ при $\xi \neq 0$, то система (3) является равномерно эллиптической в Ω.

Отметим, что система (3) гомотопна паре уравнений Лапласа, так как корни уравнения

$$\frac{29}{4}\lambda^2 - \lambda\left(\frac{3}{2} + \frac{15i}{4}\right) + \frac{7+3i}{2} = 0,$$

построенного по коэффициентам характеристической матрицы системы (3), имеют мнимые части противоположного знака [4].

Рассмотрим задачу отыскания решения системы (3), удовлетворяющего граничным условиям

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial l}\right|_{\partial\Omega} = f_1, \qquad \left.\frac{\partial u_2}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = f_2\,, \tag{4}$$

где ν — единичное поле внутренних нормалей на $\partial\Omega$;

l — единичное поле на $\partial\Omega$, составляющее с нормалью ν угол 45° в каждой точке $\partial\Omega$;

$f_1, f_2 : \partial\Omega \to \mathbf{R}$ — заданные непрерывные по Гельдеру функции.

Теорема. *Задача* (3), (4) *не является нетеровой*.

Для доказательства достаточно показать невыполненность условия Я. Б. Лопатинского, обеспечивающего нетеровость краевой задачи как в классических пространствах, так и в широком классе гильбертовых пространств [5]. Это условие известно как условие регуляризуемости краевой задачи и представляет собой дополнительное ограничение на матрицу граничного оператора. Для задачи (3), (4) условие регуляризуемости состоит в том, что в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом единичном векторе τ, касательном к $\partial\Omega$ в точке y, ранг матрицы Я. Б. Лопатинского является максимальным, т. е. равным двум:

$$L(y,\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma B(y, \lambda\nu + \tau)\mathrm{A}^{-1}(y, \lambda\nu + \tau)(E, \lambda E)\,d\lambda\,, \tag{5}$$

где $A(\xi)$ — характеристическая матрица системы (3);

$B = \begin{bmatrix} \lambda+\gamma & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ — символ старшей части граничного оператора (4), где $\gamma = \langle l, \tau\rangle / \langle l, \nu\rangle$;

E — единичная матрица размерности 2×2; ν — внутренняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке y;

Γ — простой замкнутый контур, лежащий в верхней λ-полуплоскости и охватывающий находящиеся там λ-корни уравнения $\det A(y, \lambda\nu + \tau) = 0$.

Покажем, ранг матрицы Лопатинского для задачи (3), (4) не является максимальным.

В точке кривой $\partial\Omega$, в которой нормаль ν параллельна оси Ox_2, матрица Лопатинского задачи (3), (4) имеет вид

$$L(y,\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \begin{bmatrix} \lambda+\gamma & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda^2 - \lambda + 1}{\left(\lambda^2+1\right)^2} & \dfrac{1}{\left(\lambda^2+1\right)^2} \\ \dfrac{2\lambda^2 - 3\lambda + 3}{\left(\lambda^2+1\right)^2} & \dfrac{\lambda^2 + \lambda + 4}{\left(\lambda^2+1\right)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} d\lambda\,, \tag{6}$$

где Γ — простой замкнутый контур, лежащий в верхней λ-полуплоскости и охватывающий точку $\lambda = i$. Выберем касательный вектор τ так, чтобы $\left(\tau \hat{,} l\right) = 45^\circ$, тогда матрица (6) примет вид

$$\begin{bmatrix} i-2 & i & -3i & i \\ -4-3i & -2+i & -3i+6 & i-2 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что все миноры второго порядка этой матрицы равны нулю. Следовательно, задача (3), (4) нерегуляризуема. Теорема доказана.

Заключение. В работе доказывается невыполненность условия регуляризуемости краевой задачи типа наклонной производной для одной эллиптической системы второго порядка на плоскости. Последнее означает, что либо однородная задача имеет бесконечно много линейно независимых решений, либо для разрешимости неоднородной задачи требуется бесконечно много линейно независимых условий разрешимости.

Список цитируемых источников

1. *Жадан, М. И.* Задача типа наклонной производной для эллиптических систем второго порядка / М. И. Жадан, А. Т. Усс // Доклады АН БССР. — 1983. — Т. XXVII. — № 6. — С. 489—491.

2. *Бицадзе, А. В.* О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными / А. В. Бицадзе // Успехи мат. наук. — 1948. — Т. 3. — Вып. 6. — С. 211—212.

3. *Жадан, М. И.* Гомотопическая классификация и регуляризуемость некоторых классов эллиптических систем и краевых задач : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / М. И. Жадан ; Ин-т математики АН БССР. — Минск, 1983. — 111 л.

4. *Боярский, Б. В.* О первой краевой задаче для систем уравнений эллиптического типа второго порядка на плоскости / Б. В. Боярский // Bull. del'Acad. Pol. des Sciences. Ser. des Sciences Math., Astron. et Phys. — 1959. — Vol. 7. — № 9. — P. 565—570.

5. *Агранович, М. С.* Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М. С. Агранович // Успехи мат. наук. — 1965. — Т. 20. — Вып. 5. — С. 3—120.

УДК 539.612

Т. И. Болашенко
Учреждение образования «Могилевский государственный университет продовольствия», Могилев

СОЗДАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ СВОЙСТВАМИ ПЕРЕСЫЩЕННЫХ СРЕД В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С СЕТЧАТЫМ НАГРЕВАТЕЛЬНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

Введение. В физике аэродисперсных систем для изучения процессов гомогенной и гетерогенной конденсации, создания наноразмерных частиц важно иметь возможность не только создавать и поддерживать среду в состоянии пересыщения, но и осуществлять контроль и по мере необходимости управлять величиной пересыщения. Можно выделить несколько методов получения устойчивых пересыщений: адиабатическое расширение газовой смеси, турбулентное смешение газов, использование особенностей молекулярной диффузии и теплопроводности в каналах различной формы [1, с. 767]. При адиабатическом расширении смеси газов возникающее пересыщение зависит от степени и скорости расширения, а также характеристик инертного газа и активной компоненты. Если пересыщенная среда создается смешением разнотемпературных потоков, то изменение величины пересыщения реализуется путем изменения температуры или скоростей смешивающихся потоков, а также увеличением или уменьшением концентрации активной компоненты. При использовании плоского или цилиндрического каналов управление пересыщением основано на различии в скоростях молекулярного переноса тепла и массы. Если температура стенок плоского или цилиндрического канала, на стенках которого вещество активной компоненты газового потока находится в состоянии насыщения, линейно возрастает по направлению течения газовой смеси, то пересыщение внутри канала монотонно возрастает. Замена линейного профиля температуры стенок кусочно-линейной функцией с изотермическим участком позволяет получать постоянные вдоль оси каналов пересыщения. Меняя темп нагрева на линейных участках, можно управлять величиной пересыщения.

Основная часть. Устройством для образования пересыщенной среды в результате молекулярной диффузии и теплопроводности может служить плоский канал, стенки которого находятся при различных температурах и покрыты насыщенным раствором одной из компонент газовой смеси. Температуры стенок канала поддерживаются постоянными, а пространство между снеками заполнено неконденсирующимся газом. При этом жидкость и неконденсирующийся газ выбраны таким образом, что плотность газовой смеси уменьшается от нижней поверхности к верхней. Это способствует исключению конвекции. Вместе с тем изменить профиль и величину пересыщения в таком канале можно только путем нагревания или охлаждения стенок канала. Такой