УДК 004.02

ГЛАВА 16. ПОДБОР ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ И АНАЛИЗА ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

НАРАНОВИЧ ОКСАНА ИВАНОВНА,
к. ф.-м. н., доцент, доцент
УО «Барановичский государственный университет», Беларусь
КРАВЧУК ОЛЬГА ДМИТРИЕВНА,
м. т. н., преподаватель
УО «Барановичский государственный университет», Беларусь

Аннотация: В данной статье рассматриваются способы решения задач оптимизации сложных объектов. Произведен программный статистический анализ эффективности алгоритма случайного поиска в зависимости от вида целевой функции, а также подбор параметров оптимизации. Результаты обоснованы и представлены в виде графиков и числовых данных.
Ключевые слова: алгоритм случайного поиска, метод анализа иерархий, параметры оптимизации

THE SELECTION OF PARAMETERS FOR THE SOLUTION AND ANALYSIS OPTIMIZATION PROBLEMS

Naranovich Aksana Ivanovna,
Kravchuk Olga Dmitrievna

Abstract: This article discusses how to solve optimization problems of complex objects. Produced software for the statistical analysis of the effectiveness of the algorithm random search depending on the form of the objective function and the selection of optimization parameters. The results are presented and justified in the form of graphs and numerical data.
Key words: the algorithm is a random search, method of analysis of hierarchies, optimization settings

ВВЕДЕНИЕ

Широкое применение методов оптимизации в науке и технике началось с конца 50-х – начала 60-х гг. XX в., что было связано с массовым внедрением вычислительной техники. Дальнейшее совершенствование вычислительной техники и существенное развитие теории оптимизации в настоящее время позволяют решать задачи, которые раньше считались нерешаемыми. Сейчас трудно найти отрасль науки и техники, где не используются методы оптимизации. С их помощью решаются задачи планирования, проектирования, управления техническими системами, многие научные задачи [1, с. 7].

Проблема выбора рационального решения возникает во многих областях человеческой деятельности, где из множества имеющихся альтернатив нужно выбрать в каком-то смысле наилучшую.

В случаях, когда имеется некоторая математическая модель, позволяющая ввести функцию полезности и оценить альтернативы количественным образом, используются методы математической теории оптимизации. На практике оптимизируемая функция часто имеет достаточно сложную природу (является многоэкстремальной, имеет разрывы, не дифференцируема и пр.), не всегда известен и вид функции, возможно только вычисление её значений в задаваемых точках.

Используемые методы оптимизации в современных системах автоматизированного проектирования требуют наличия строгой математической модели и исследуемых параметров оптимизации.

Выявление наилучших значений параметров алгоритма для дальнейшего их использования при решении практических задач по-прежнему является актуальной задача. В случае, если решаемая задача оптимизации не может быть представлена с использованием количественных характеристик, применяются методы, оперирующие качественными характеристиками рассматриваемых альтернатив. Одним из наиболее распространённых методов подобного рода является метод анализа иерархий (МАИ), разработанный Т. Л. Саати [2, с. 3].

Помимо исследования глобального случайного поиска (СП) и МАИ интерес вызывает задача оптимизации через совместное использование рассматриваемых методов. Так, параметры случайного поиска для решения конкретной задачи могут выбираться с помощью МАИ. Подобные методики использования СП и МАИ описаны ранее [2, с. 10; 3, с. 8], нами предпринята попытка разработки программного приложения для проведения численного компьютерного эксперимента исследования и дальнейшего изучения данных методов оптимизации.

16.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОГРАММНОГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Программный проект анализа и решения задач глобальной оптимизации включает в себя:

– решение задачи несколькими методами случайного поиска с возможностью сравнения результатов;
– выбор для решения одной из предложенных тестовых функций с возможностью установления количества переменных или ввод функции пользователем;
– поиск экстремумов с использованием показательного закона сужения перспективной области;
– поиск экстремумов с использованием логистического закона сужения перспективной области;
– графическое решение оптимизационной задачи;
– отображение исходной функции в двумерном и трехмерном пространствах;
– возможность сохранения результатов и хода решения в файл;
– встроенный метод анализа иерархий.

Общая последовательность операций при работе с программным проектом представлена на рис. 1.

Для наглядности представления наследования и структуры проекта разработана диаграмма классов (рис. 2). Диаграмма классов служит для представления статической структуры модели системы в терминологии классов объектно-ориентированного программирования.

Программа состоит из 10 классов:

1. Класс MethodsRandomSearch предназначен для выбора функции и изменяемых параметров, который может использовать объекты класса Data и ExportExcel.

2. Класс Data с помощью средств библиотеки ELW.Library.Math предоставляет пользователю возможность самостоятельно вводить целевую функцию в виде уравнения, что делает данное приложение универсальным.

3. Класс ExportExcel – предоставляет возможность экспортировать промежуточные данные в электронные таблицы и содержит два простых в реализации метода: OpenExcel и WriteExcel.

4. Класс MAI предназначен для реализации метода анализа иерархий и соединен связью агрегирования с классом MethodsRandomSearch.

5. Класс BaseAlgoritm является базовым и абстрактным классом, содержащим общие методы алгоритмов, а также определения абстрактных методов для их последующей обязательной реализации в производных классах.

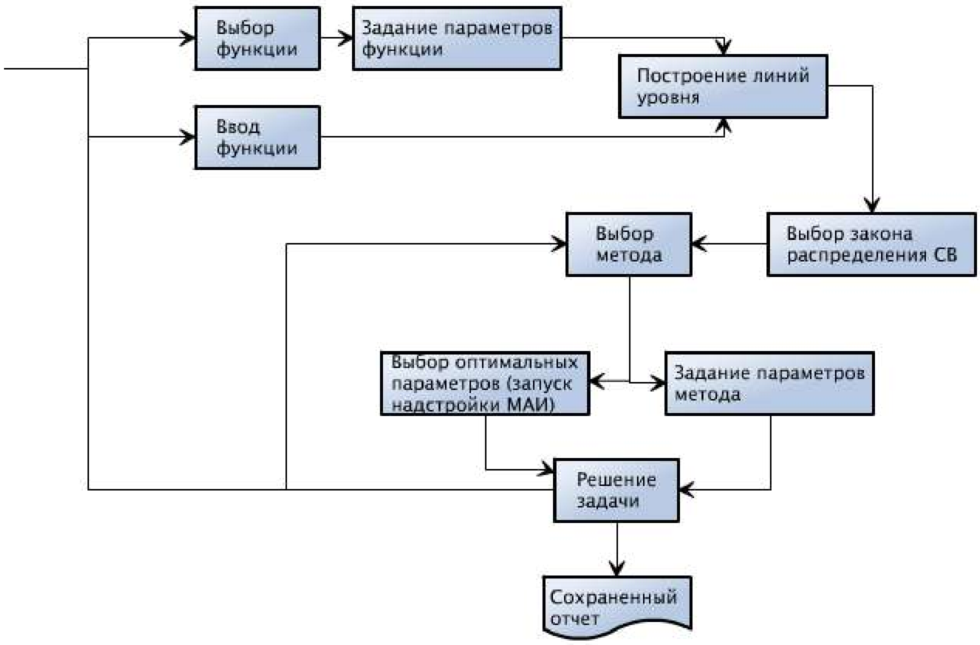

Рис. 1. Функциональная схема приложения

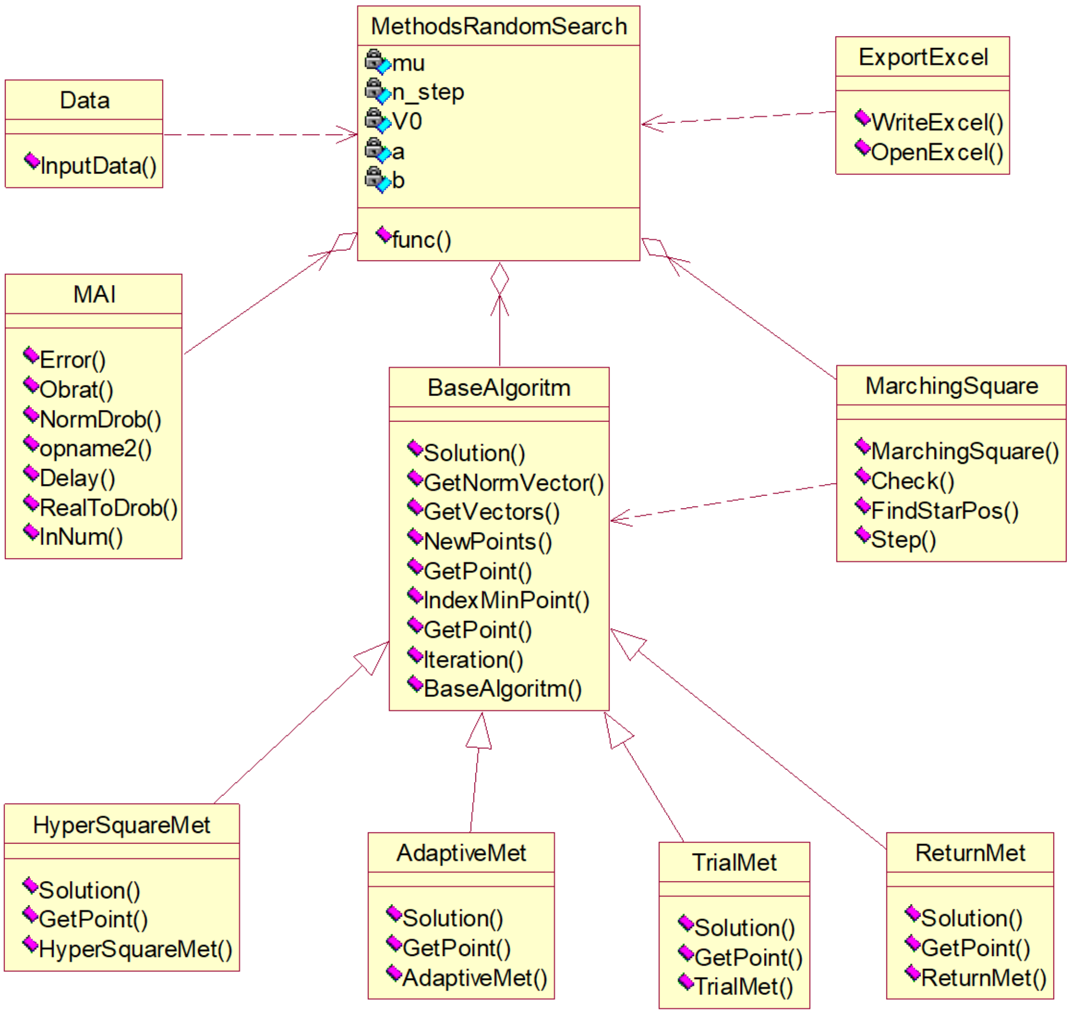

Рис. 2. Диаграмма классов приложения

Общими являются следующие методы:

– GetVectors - получает случайные векторы;
– GetNormVector - возвращает норму вектора;
– NewPoints - вычисляет новые точки;
– IndexMinPoint - находит точку с экстремальным значением функции;
– Iteration - проверяет условия окончания поиска решения.

6. Классы HyperSquareMet, AdaptiveMet, TrialMet, ReturnMet являются производными класса BaseAlgorithm и определяют абстрактные методы: GetPoint и Solution.

7. Класс MarchingSquare служит для генерации изолиний на двумерном скалярном поле.

Такой подход построения архитектуры предоставляет дополнительные возможности, такие как:

– расширение функционала приложения;
– простота в использовании;
– использование данного кода сторонними приложениями;
– добавление в данное решение проектов на другой .NET- совместимой технологии.

16.2. ОПИСАНИЕ РАБОТЫ ПРОГРАММНОГО ПРИЛОЖЕНИЯ

В главном окне программного комплекса находится координатная плоскость, поле вывода результатов оптимизации и меню для решения задачи.

Программный продукт предусматривает оптимизацию нескольких тестовых функций. Прежде чем начать поиск экстремума необходимо выбрать конкретную функцию, также количество переменных и закон сужения области поиска (рис. 3).

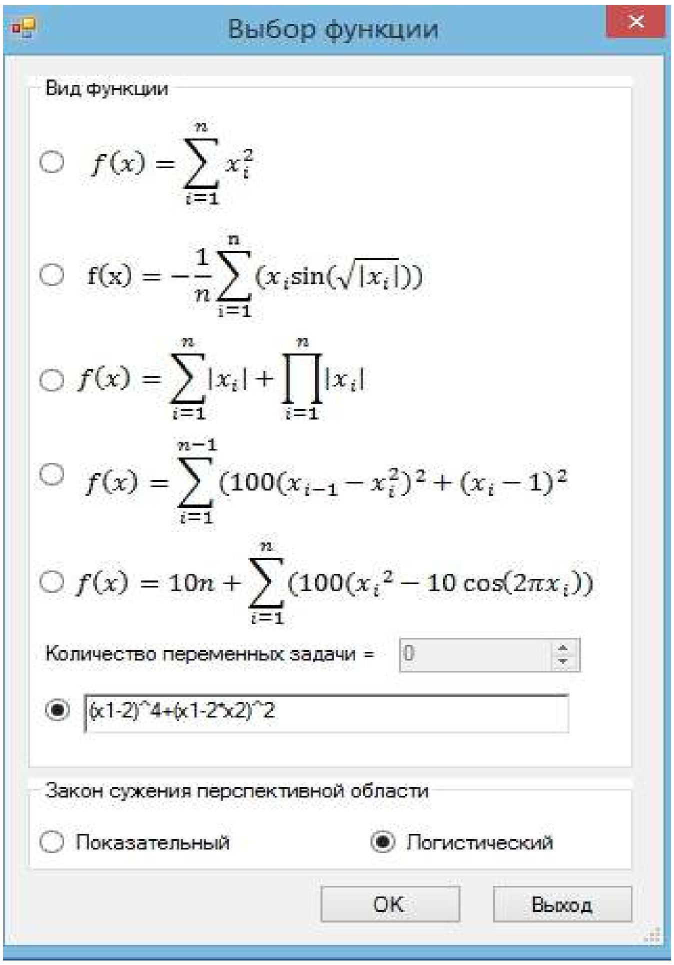

Рис 3. Выбор функции

После выбора функции и сопутствующих параметров, необходимо ввести параметры случайного поиска (либо заполнить оптимальными параметрами автоматически), которые может изменять пользователь, а именно: число испытаний $nstep$, коэффициент сжатия $\mathrm{p_{min}}$, минимальная величина шага, которая определяет $\mathrm{q_{min}}$ – минимальный радиус перспективной области и параметры, необходимые для определения рассматриваемых методов случайного поиска (рис. 4).

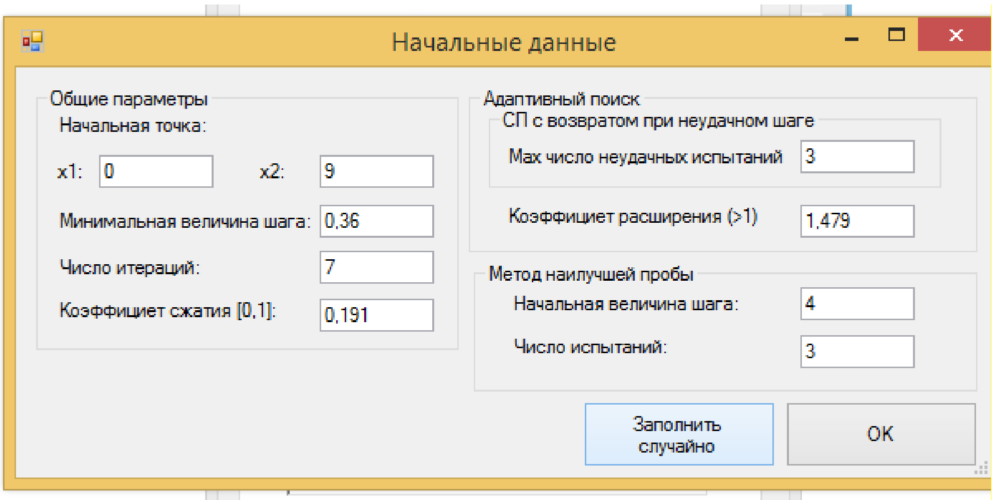

Рис. 4 Ввод параметров случайного поиска

После ввода всех необходимых параметров в координатной плоскости отображается график выбранной функции, который можно масштабировать при помощи соответствующих кнопок и вращать при помощи мыши (рис. 5, рис.6).

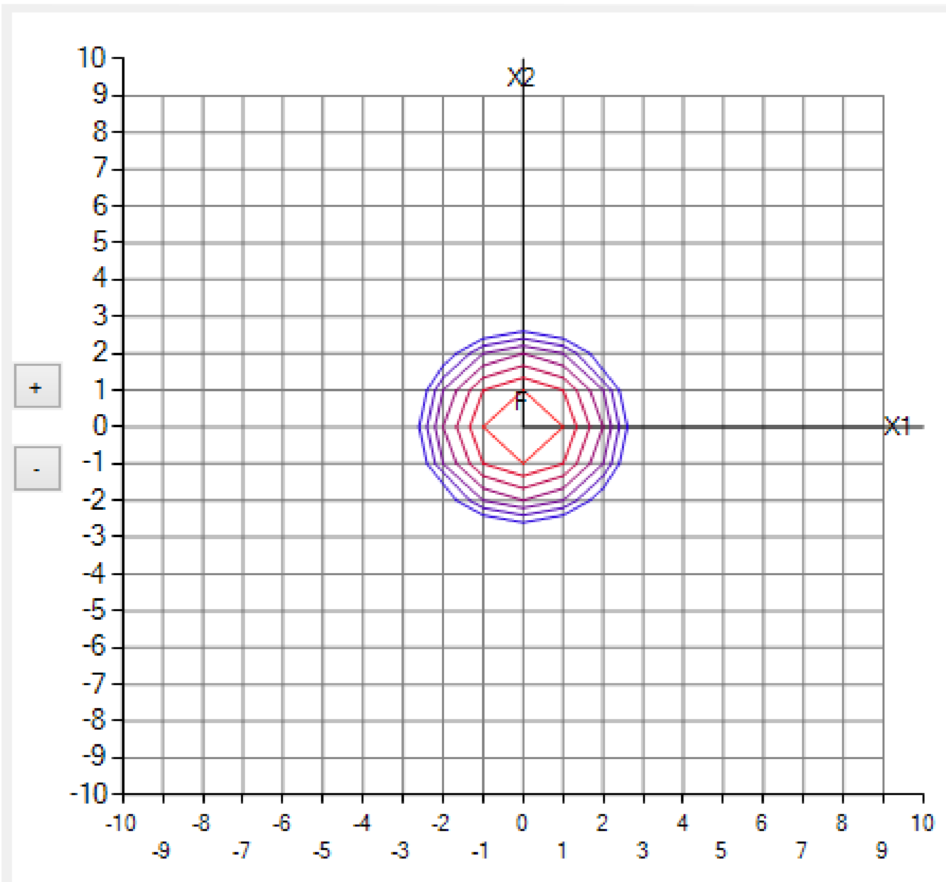

Рис. 5. Двумерное отображение функции

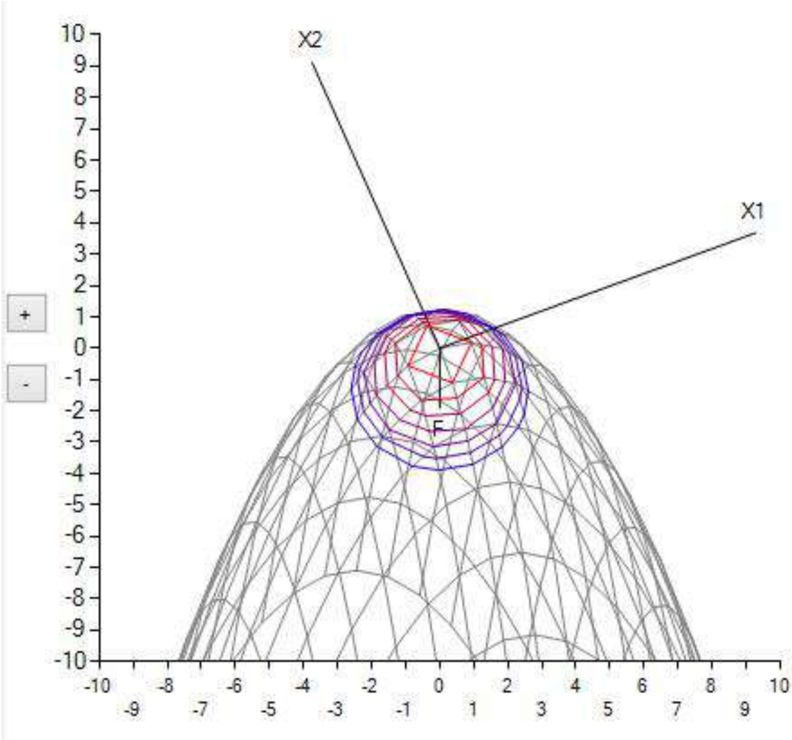

Рис. 6. Трёхмерное увеличенное отображение функции

Далее необходимо выбрать один из предложенных методов случайного поиска для решения. Результаты решения отображаются в трех вариантах:

–в графическом (рис. 7);

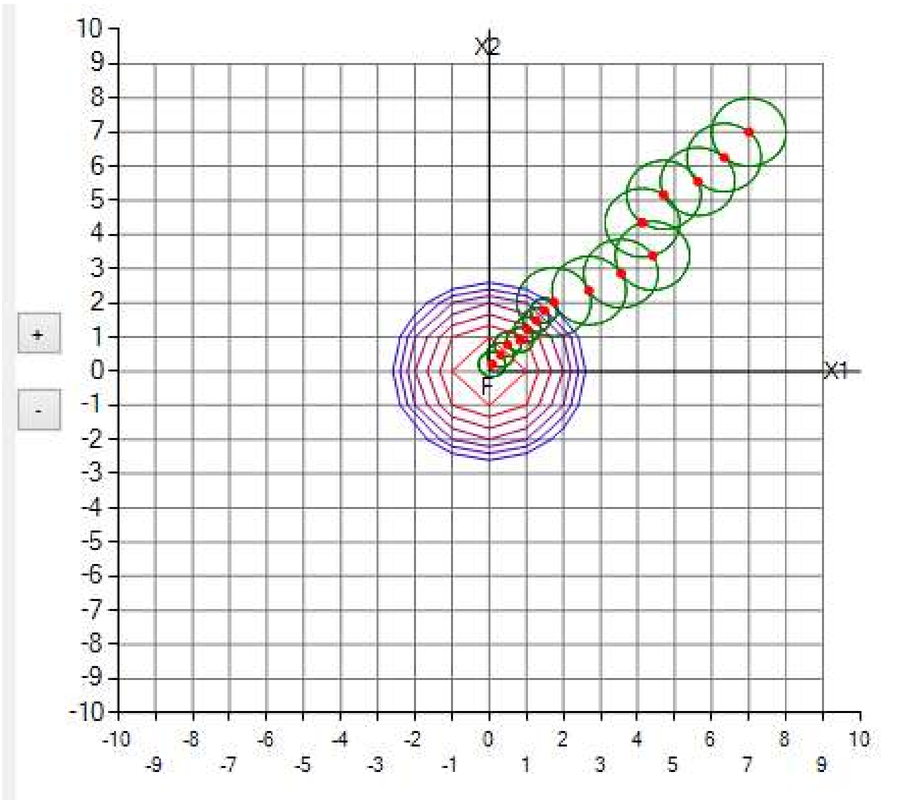

Рис. 7. Решение в графическом варианте

–в итерационном (рис.8);

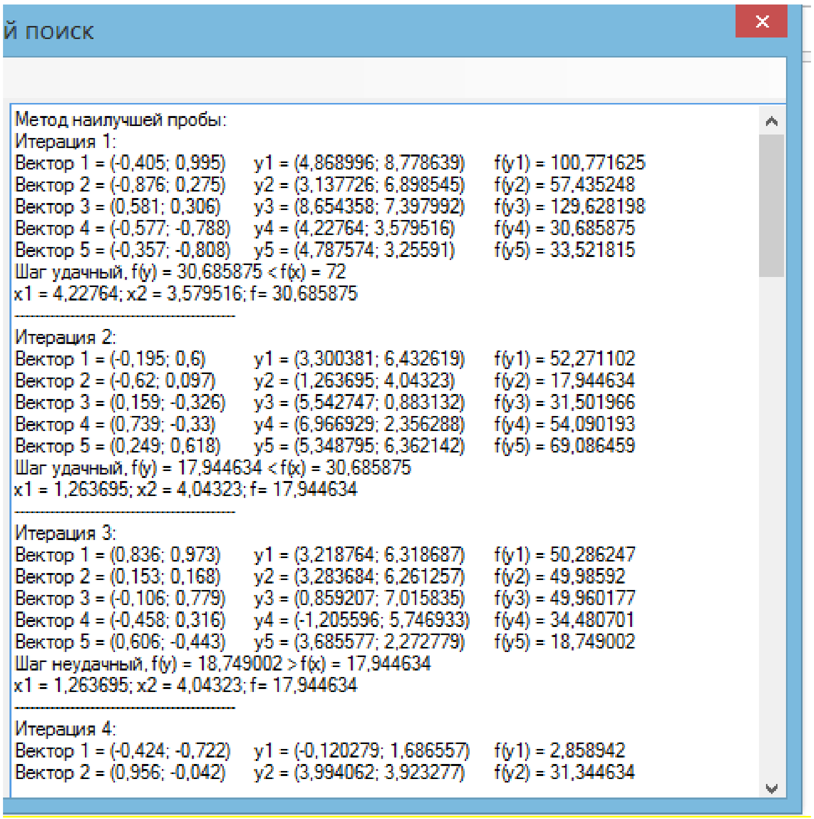

Рис.8. Решение в итерационном варианте

–итерационный вариант в виде сравнительной диаграммы (рис.9).

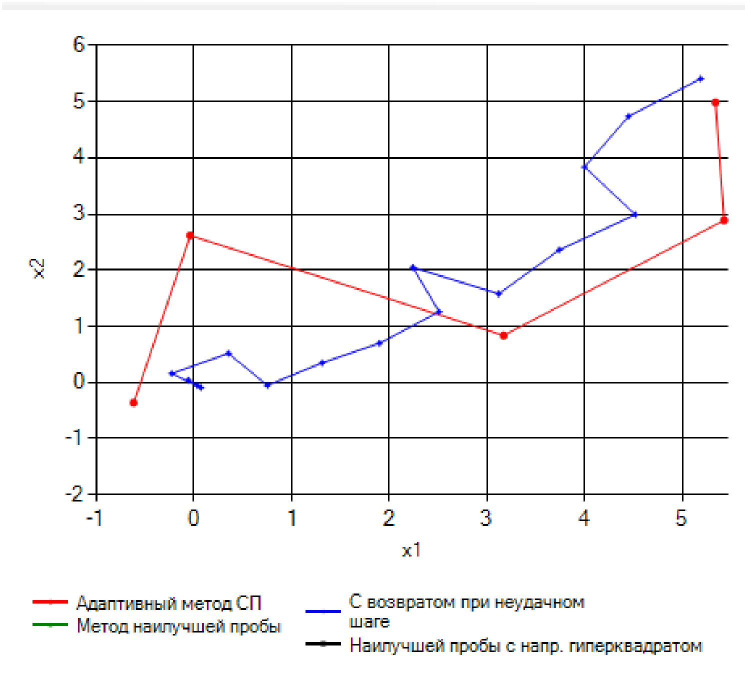

Рис. 9 Сравнительная диаграмма решения

Также предусмотрен экспорт данных полученного решения в MS Excel.

16.3. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА

При помощи разработанного программного продукта принято решение оценить эффективность случайного поиска (СП), используя показательный закон.

При тестировании случайного поиска были использованы различные тестовые функции, отличающиеся друг от друга такими характеристиками, как многоэкстремальность, овражность и унимодальность [4, с. 180].

Для исследования выбран адаптивный метод случайного поиска, который характеризуется тем, что в процессе работы накапливает информацию о целевой функции и использует ее для увеличения вероятности сходимости к оптимуму.

В качестве критерия эффективности выбрана зависимость вероятности нахождения глобального минимума от числа обращений к функции цели.

Параметрами случайного поиска, которыми может управлять пользователь, являются: n_{step} – число шагов, ε – точность, с которой ищется минимум, а также параметры p_{min} и q_{min}.

Параметр q_{min} определяет n-мерную площадь перспективной области s_{min} такую, что на всем протяжении процесса поиска, пока $s_k > s_{min}$, плотность моделирования вне “перспективной” области h_k не меняется. Когда же s_k становится меньше s_{min}, то h_k начинает стремиться к нулю, т. е. поиск с нарастающей интенсивностью ведется внутри I^j.

От величины p_{min} во многом зависит вероятность того, что минимум в процессе поиска окажется внутри I^j и значение высоты h_k.

Таким образом, параметры p_{min} и q_{min} в некотором смысле позволяют задать соотношение “локальных” и “глобальных” шагов к их общему количеству и тем самым определить общее поведение СП [5, с 182].

За оценку вероятности нахождения глобального минимума от числа обращений к функции выбран предел частоты наблюдений сходимости СП, предполагая однородность наблюдений:

$$P = \lim_{n_{step} \to \infty} \frac{N}{n_{step}}, \qquad (1)$$

где n_{step} — количество наблюдений;

N — количество наступлений события сходимости СП.

Поиск осуществляется в единичном n-мерном гиперкубе.

Для тестирования описанных алгоритмов использовались: функция Швефеля, функция Розенброка, функция Растригина и функция Де Джонга, которую рассмотрим подробно.

Функция Де Джонга – непрерывная, выпуклая и унимодальная функция. Она также известна как модель сферы (2). Рекомендуемый интервал поиска оптимального решения по каждой переменной (–10; 10). Функция имеет глобальный минимум, равный 0, при $x_i = 0 \; \forall \, i = \overline{1, n}$.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \qquad (2)$$

На рис. 10 представлены графики, демонстрирующие сходимость случайного поиска для функции (2) от двух переменных в зависимости от числа обращений к вычислению целевой функции. Параметры случайного поиска, соответствующие пронумерованным кривым, приведены в таб. 1.

Таблица 1

Параметры случайного поиска к рис. 10

Номер графика	Параметры СП	
	q_{min}	p_{min}
1	0,3	0,9
2	0,01	0,9
3	0,01	0,75
4	0,01	0,5

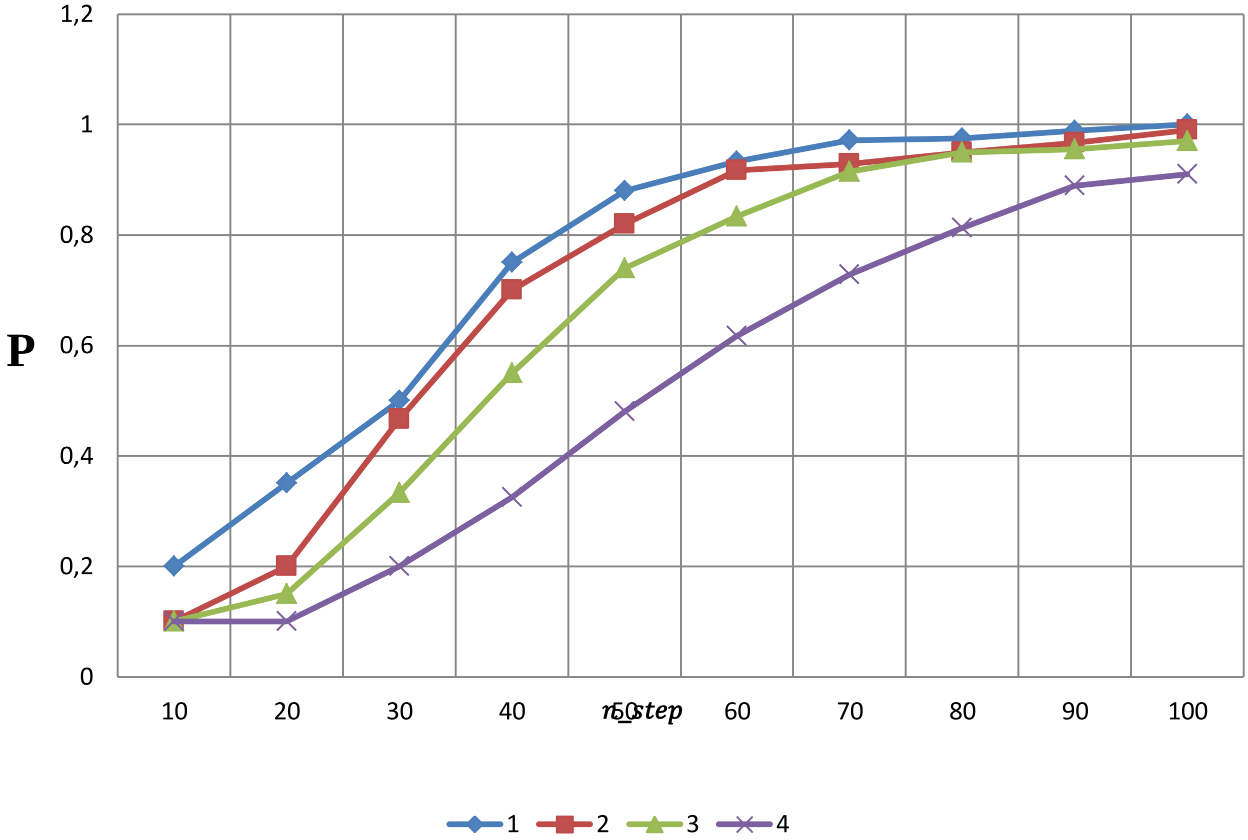

Рис. 10. Сходимость СП для функции Де Джонга в зависимости от n_{step}

Из таб. 1 и рис. 10 видно, что наилучшую сходимость обеспечивают параметры p_{min} = 0.9 и q_{min} = 0.3. Так как функция (2) унимодальна, то логично относительно немного шагов потратить на нащупывание минимума, а остальное число шагов использовать для уточнения найденного минимума. Именно такое поведение обеспечивают случайному поиску параметры СП, соответствующие кривой 1. Для выбранных p_{min} = 0.9, q_{min} = 0.3, s_{min} = 0.36, а h = 0.156, это позволяет, моделировать внутри эффективной области I^j с большей вероятностью и увеличить эту вероятность после того, как s_j станет меньше 0.36. [6, с. 11].

16.4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАИ ДЛЯ ВЫБОРА ПАРАМЕТРОВ АЛГОРИТМА СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА

В качестве критерия эффективности выбрана вероятность нахождения глобального минимума в зависимости от значений параметра крутизны логистической кривой μ. За оценку вероятности P сходимости случайного поиска к целевой функции выбрано отношение числа случаев, в которых найденные значения переменных целевой функции отличаются от оптимальных менее, чем на 0.01 [7, с. 69].

Требуется выявить множество параметров, универсальных для всех рассматриваемых видов функций, при которых вероятность нахождения минимума максимальна.

Для каждой тестовой функций проводится вычисление вероятности при разных значениях параметра крутизны логистической кривой μ. Было установлено, что для унимодальной функции Де Джонга (2) и модифицированной версии функции Де Джонга (3) оптимальный параметр μ=4 (рис. 11).

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{int}(x_i))^2, \text{если } \sum_{i=1}^{n}|\mathrm{int}(x_i)| \neq 0; \\ \sum_{i=1}^{n}|x_i| - 1, \text{иначе} \end{cases} \quad (3)$$

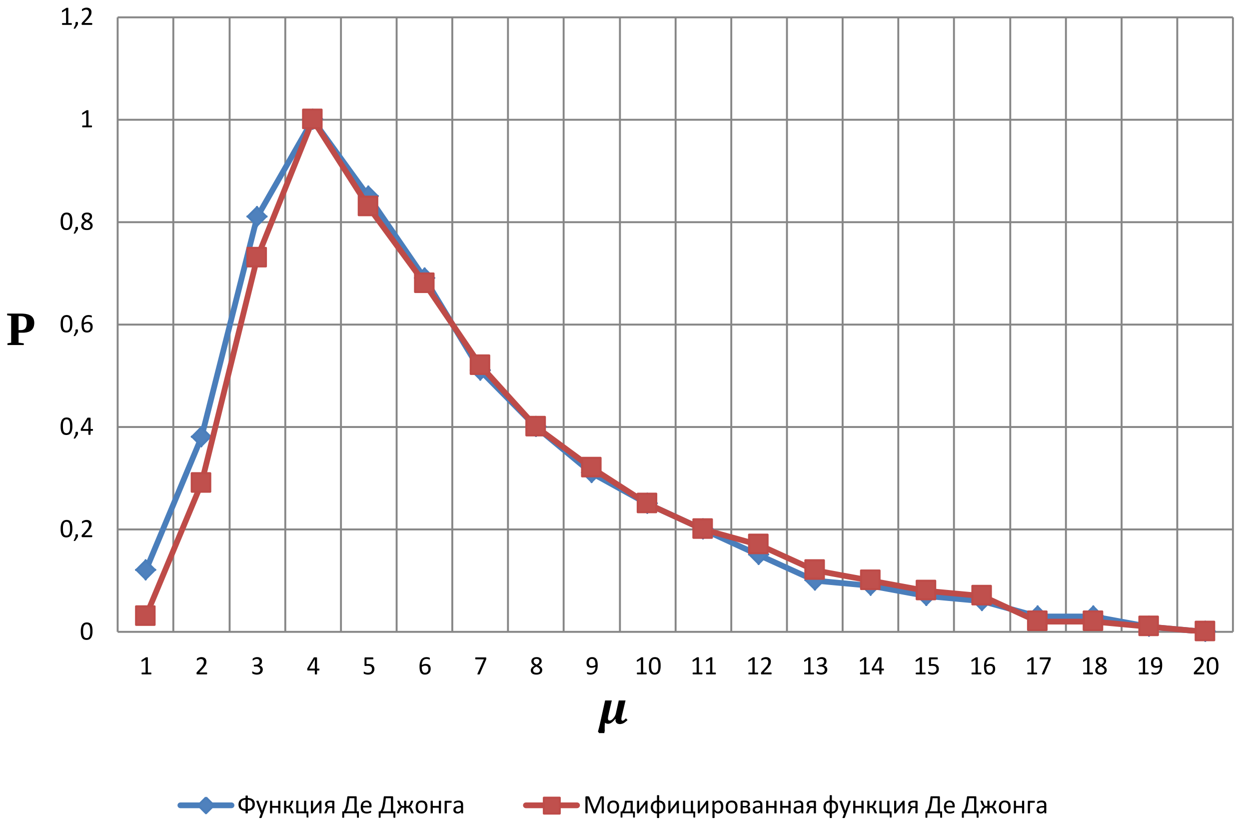

Рис. 11 Вероятность P для функций Де Джонга

Также проанализированы овражные и многоэкстремальные функции и выявлено, что каждый вид функции ведет себя своим особенным образом и подходят для него свои особенные параметры. Следовательно, ставится задача о подборе универсального параметра для всех видов функций. Задача принятия решения здесь является несложной, т. к., во-первых, количество альтернатив не слишком велико, а во-вторых, для альтернатив прослеживаются некоторые общие тенденции относительно их значений.

Далее происходит упорядочение значений параметра μ внутри каждого вида функций. На последнем этапе осуществляется поиск наиболее подходящих параметров для всех видов функций с помощью метода анализа иерархий (МАИ).

Критериями в данном случае будут выступать виды функций: F1 – унимодальные функции, F2 – многоэкстремальные функции, F3 – овражные функции. Альтернативами служат значения параметра μ.

Таким образом, отдав предпочтение тому или иному виду функций, имеем соответствующие значения параметра μ. Далее для каждой конкретной задачи оптимизации производится подбор оптимальных значений параметров случайного поиска в зависимости от полученного значения μ.

В разработанном программном приложении для каждой выбранной функции вычисляется оптимальный параметр. Если рассматривать общее решение, то, после анализа функций разных видов можно сделать вывод, что оптимальные параметры следующие:

– для унимодальных функций μ=4;
– для многоэкстремальных функций μ=4;
– для овражных функций μ=3.

Для унимодальных функций использование логистической кривой оказалось практически равносильно показательному закону, что представлено на рис.12.

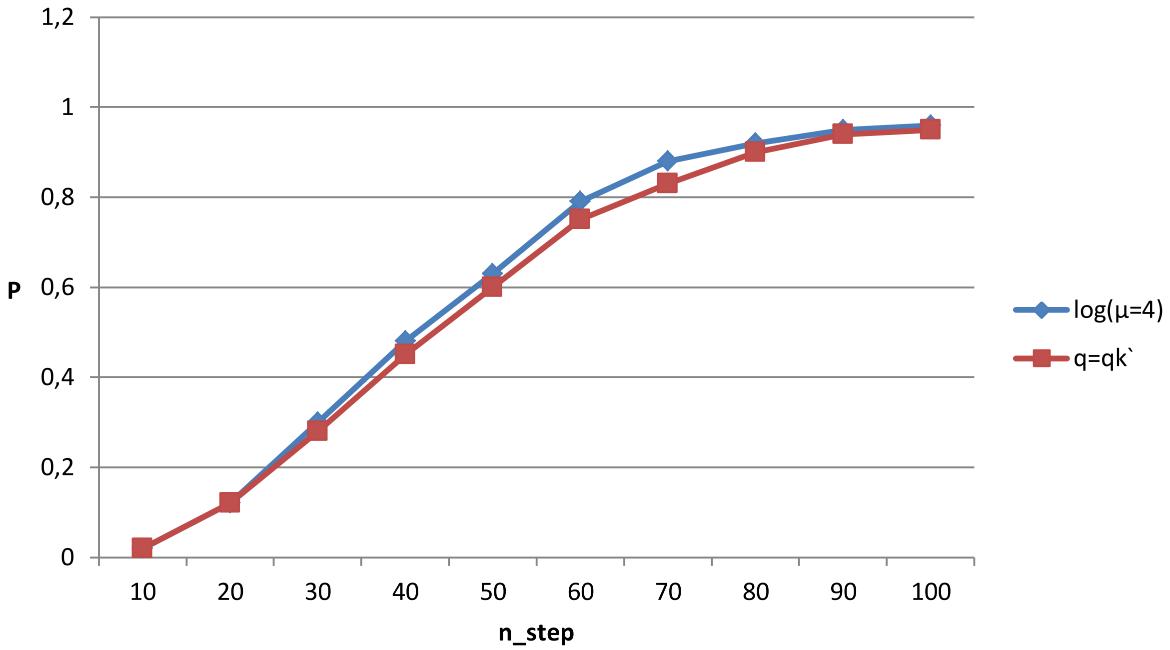

Рис. 12 График вероятности для оптимального μ и q=qk` унимодальной функции Де Джонга

Для многоэкстремальных и овражных функций наилучшим оказался также логистический закон с соответствующими им наилучшими параметрами.

1.5 Сравнительный анализ рассмотренных методов случайного поиска

Для сравнения методов выбраны основные критерии, а именно эффективность, время поиска и устойчивость (стабильность алгоритма в получаемых результатах). Так как случайный поиск с использованием логистического закона распределения перспективной области имеет преимущества перед поиском на базе показательного закона, то для исследования выбран именно он.

1. Зададим начальные параметры: $nstep$=40; μ=4; ε=0,0001; начальная величина шага =4.

Для целевой функции (2) от двух переменных, имеющей точное решение $x_1 = 0, x_2 = 0, f(x_1, x_2)$ =0, получаем численное решение (табл. 2).

Таблица 2

Численное решение функции (2) с $nstep$=40

Метод	Время вычисления, с (разброс, с)	Полученные значения		
		x1 (разброс)	x2 (разброс)	F (разброс)
Адаптивный метод	0,2918 (0,0232)	0,1684 (0, 3791)	0,2105 (0,2009)	0,1319 (0,1797)
Случайный поиск с возвратом при неудачном шаге	0,1971 (0,0511)	0,1445 (0,3028)	0,089 (0,1193)	0,197 (0,051)
Метод наилучшей пробы	0,2794 (0,0186)	0,0792 (0,0569)	0,0081 (0,0091)	0,2794 (0,0186)
Метод наилучшей пробы с направляющим гиперквадратом	0,1654 (0,0086)	0,0156 (0,0155)	0,0022 (0,0036)	0,1654 (0,0086)

2. Зададим начальные параметры: $nstep$=100; μ=4; ε=0,0001; начальная величина шага =4.
При помощи программного продукта получаем численное решение, приведённое в таб. 3.

Таблица 3

Численное решение функции (2) с $nstep$=100

Метод	Время вычисления, с (разброс, с)	Полученные значения		
		x1 (разброс)	x2 (разброс)	F (разброс)
Адаптивный метод	2,02 (0,2)	-0,0019 (0,0005)	0,0005 (0,0008)	0 (0,00002)
Случайный поиск с возвратом при неудачном шаге	1,477 (0,13)	0,0007 (0,0003)	0,0003 (0,0002)	0 (0,00001)
Метод наилучшей пробы	1,834 (0,19)	-0,0002 (0,0003)	0,0002 (0,0001)	0 (0)
Метод наилучшей пробы с направляющим гиперквадратом	0,83 (0,01)	0 (0,000001)	0 (0)	0 (0)

Исходя из сравнения скорости вычисления и сходимости метода наилучшими показателями обладает метод наилучшей пробы с направляющим гиперквадратом. Также он имеет наименьшее отклонение в результатах при повторяющихся вычислениях [8, с. 92].

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод о том, что рассмотренные методы применимы для поиска глобального минимума многомерных функций, так как они дают результат, достаточно близкий к истинному, а с помощью изменения параметров методов данный результат можно еще улучшить.

На практике оценено совместное использование МАИ и случайного поиска, получены оптимальные результаты крутизны логистической шкалы, используемой для моделирования случайных величин в методе анализа иерархий [9, с. 155].

Проведя сравнительный анализ описанных методов выбран наилучший, который имеет высокую скорость сходимости – метод случайного поиска с направляющим гиперквадратом. Его превосходство можно объяснить следующим:

– при одинаково заданном радиусе перспективной области, площадь поиска в методе наилучшей пробы с направляющим гиперквадратом больше, чем в методах, использующих в качестве площади для поиска круг;

– поиск в методе с направляющим гиперквадратом производится внутри области, а не только на ее контурах, как в других описанных выше методах, что дает возможность увеличить вероятность нахождения удачной точки.

Все расчеты сравнительного характера производились в разработанной программе глобальной оптимизации методами случайного поиска [10, с. 157].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в ходе проведенного исследования были решены следующие задачи:

– проведено тестирование данного проекта, по результатам которого разработанные модули, прошедшие проверку, показали корректную работу;

– с помощью программного приложения произведено сравнение методов случайного поиска;

– найдены универсальные значения параметров алгоритма СП для трёх рассмотренных видов тестовых функций (унимодальных, многоэкстремальных, овражных).

В разработанном программном продукте, пользователь выбирая из тестовых функций или вводя свою функцию, на основе эмпирических данных может сделать предположение о виде функции, т. е.

установить её принадлежность какому-либо классу задач; затем с помощью МАИ выбрать наиболее подходящие параметры случайного поиска для этой функции и решить исходную задачу наиболее рациональным способом.

Программный продукт предназначен для решения задач математического программирования, при наличии большого числа случайных факторов функций безусловной оптимизации. Также программный продукт содержит набор классов методов случайного поиска, которые могут быть использованы для целевой функции с малой чувствительностью к нерегулярностям.

Результаты проведенного исследования внедрены в учебный процесс, в виде программного модуля поиска глобального экстремума для демонстрации в лекционном и изучении в лабораторном курсах по дисциплине «Оптимизация проектных решений», на кафедре информационных систем и технологий инженерного факультета Барановичского государственного университета.

Список литературы

1. Островский Г.М. Оптимизация технических систем: учебное пособие / Г.М. Островский, Н.Н, Зиятдинов, Т.В. Лаптева. – М. : КНОРУС, 2016. – 432 с.
2. Кушербаева В.Т. Теоретическое и статистическое исследование методов принятия решений с использованием алгоритма случайного поиска: автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук. – СПб., 2011. – 16 с.
3. Абакаров, А. Ш., Сушков, Ю. А. Статистическое исследование одного алгоритма глобальной оптимизации / А.Ш. Абакаров, Ю.А. Сушков, // Труды ФОРА. – С.-Петерб. гос. ун-т. - Санкт-Петербург, №9, 2004 – С. 8-19.
4. Кравчук О.Д., Наранович О.И., Статистическое исследование алгоритма случайного поиска // Информационные технологии и системы 2015 (ИТС 2015) : материалы международной научной конференции (БГУИР, Минск,Беларусь, 28 октября 2015)=Information Technologies and Systems2015 (ITS 2015) : Proceeding of the International Conference(BSUIR, Minsk, Belarus, 28th October 2015) / редкол. : Л. Ю. Шилин [идр.]. –Минск : БГУИР, 2015. – С 180-181.
5. Сушков, Ю.А. Об одном способе организации случайного поиска / Ю.А. Сушков // Исследование операций и статистическое моделирование. – Вып.1.Л.: Изд-во ЛГУ, 1972. – С. 180-186.
6. Абакаров, А. Ш.. Программные комплексы оптимизации и синтез систем со структурным управлением : автореферат дис. кандидата физико-математических наук : 05.13.18 / С.-Петерб. гос. ун-т. - Санкт-Петербург, 2002. - 14 с.
7. Абакаров, А. Ш., Сушков, Ю. А. Адаптация случайного поиска с использованием логистической кривой / А.Ш. Абакаров, Ю.А. Сушков, // Математические модели. Теория и приложения. – СПб.: СПбГУ, 2005, – С. 67-75.
8. Кравчук О. Д. Нелинейная оптимизация методами случайного поиска /О.Д. Кравчук// Техника и технологии: инновации и качество: III Международная научно-практическая конференция, 18-19 декабря 2015 г., г. Барановичи, Респ. Беларусь / редкол.: А. В. Никишова (гл. ред.) [и др.]. – Барановичи : РИО БарГУ, 2015. – с. 91-93.
9. Мазалевич О.Д. Использование метода анализа иерархий для принятия решений / О.Д. Мазалевич // Специалист XXI века [Текст] : материалы III Междунар. науч.-практ. конф., посвященной 10-летию со дня образования ун-та, 4-5 июня 2014 г ., г. Барановичи, Респ. Беларусь : в 2 кн. / редкол.: А. В. Никишова (гл. ред.), Е.В Панчук, А.К. Гавриленя, А.В. Прадун (отв. ред.) [и др.]. – Барановичи : РИО БарГУ, 2014. – Кн. 2. – С. 153-156.
10. Мазалевич О.Д., Наранович О.И. Решение задач оптимизации адаптивным методом случайного поиска / О.Д. Мазалевич, О.И. Наранович // Специалист XXI века [Текст] : материалы III Междунар. науч.-практ. конф., посвященной 10-летию со дня образования ун-та, 4-5 июня 2014 г ., г. Барановичи, Респ. Беларусь : в 2 кн. / редкол.: А. В. Никишова (гл. ред.), Е.В Панчук, А.К. Гавриленя, А.В. Прадун (отв. ред.) [и др.]. – Барановичи : РИО БарГУ, 2014. – Кн. 2. – С. 156-158.