УДК 517.518.456

И. Н. Бруй
Учреждение образования «Барановичский государственный университет»,
Барановичи, Республика Беларусь

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕОРЕМ Д. АЛЕКСИЧА И М. ЗАМАНСКОГО НА МАТРИЧНЫЕ СРЕДНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Введение. Обозначения двухтомника Р. Эдвардса [1; 2].

Для функции $f \in \mathbf{L}^1(T)$ функциональный ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \right] \cdot e^{inx} \tag{1}$$

называют её тригонометрическим рядом Фурье, а функциональный ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(-i \cdot \operatorname{sgn} n\right) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \right] \cdot e^{inx} \tag{2}$$

называют сопряжённым с рядом (1).

Если существует функция $f^{\sim} \in \mathbf{L}^1(T)$, для которой ряд (2) является её тригонометрическим рядом Фурье, т. е.

$$\forall n \in Z \equiv \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\} \ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\sim}(t)\, e^{-int}\, dt = \left(-i \cdot \operatorname{sgn} n\right) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \right],$$

то она называется сопряжённой к функции f.

Настоящая работа посвящена проблеме Ж. Фавара отыскания классов насыщения матричных средних тригонометрических рядов Фурье (1) в банаховом пространстве $\mathbf{C}(T)$ всех непрерывных на вещественной прямой R и периодических с периодом 2π функций с равномерной нормой на отрезке длины периода $\| f \|_{\mathbf{C}(T)} \equiv \max_{-\pi \le x \le \pi} | f(x) |$.

Историческая справка имеется, например, в большой (32 стр.) работе А. Х. Турецкого [3].

С помощью комплексной двойной последовательности $\left(d_\nu(N)\right)_{(N,\nu) \in Z_+ \times Z_1}$, где номер строки N принимает неотрицательные целые значения $Z_+ \equiv \{0, 1, 2, \ldots\}$, а номер столбца ν принимает натуральные значения $Z_1 \equiv \{1, 2, 3, \ldots\}$:

$$\left(d_\nu(N)\right)_{(N,\nu) \in Z_+ \times Z_1} \equiv \begin{pmatrix} d_1(0) & d_2(0) & d_3(0) & \ldots \\ d_1(1) & d_2(1) & d_3(1) & \ldots \\ d_1(2) & d_2(2) & d_3(2) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}_{Z_+ \times Z_1}, \tag{3}$$

образуем матричные средние

$$\forall N \in Z_+ \ M_N f(x) \equiv \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(N) \left| \frac{n}{N+1} \right|^{\nu} \right) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt \right] \cdot e^{inx} \tag{4}$$

тригонометрического ряда Фурье (1) функции $f \in \mathbf{L}^1(T)$.

Когда все члены двойной последовательности (3) равны нулю: $\forall N \in Z_+ \quad \forall \nu \in Z_1 \quad d_\nu(N) = 0$, то матричные средние (4) суть (симметричные) частичные суммы

$$\forall N \in Z_+ \;\; s_N f(x) \equiv \sum_{n=-N}^{N} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \right] \cdot e^{inx} \,. \tag{5}$$

Если первый столбец двойной последовательности (3) состоит из единиц, а остальные столбцы двойной последовательности (3) состоят из нулей, то матричные средние (4) суть средние Л. Фейера

$$\forall N \in Z_+ \;\; \sigma_N f(x) \equiv \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \left| \frac{n}{N+1} \right| \right) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \right] \cdot e^{inx} \,. \tag{6}$$

Одним из обобщений средних Л. Фейера (6) являются средние А. Зигмунда натурального порядка $r = 1, 2, 3, \ldots$ тригонометрического ряда Фурье (1) функции $f \in \mathbf{L}^1(T)$, когда члены двойной последовательности (3) таковы, что в r-том столбце единицы: $\forall N \in Z_+ \;\; d_r(N) = 1$, а в остальных столбцах нули: $\forall N \in Z_+ \;\; \forall \nu \in Z_1 \setminus \{r\} \;\; d_\nu(N) = 0$:

$$\forall N \in Z_+ \;\; Z_N^r f(x) \equiv \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \left| \frac{n}{N+1} \right|^r \right) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \right] \cdot e^{inx} \,. \tag{7}$$

Теорема 1 Д. Алексича [4, с. 50, VII]. *Средние Л. Фейера (6) тригонометрических рядов Фурье (1) насыщаемы в банаховом пространстве* $\mathbf{C}(T)$ *с порядком насыщения* $O\left(\frac{1}{N}\right)$ *и классом насыщения* $\mathbf{F}[\mathbf{C}(T), \sigma_N f(x)]$, *состоящим из всех тех функций* $f \in \mathbf{C}(T)$, *для которых сопряжённые к* f *функции* $f^{\sim}$ *абсолютно непрерывны и их производные* $\left(f^{\sim}\right)'$ *существенно ограничены:* $\left(f^{\sim}\right)' \in \mathbf{L}^\infty(T)$.

Теорема 2 М. Заманского [5, с. 170, теорема 2]. *При натуральном порядке* $r = 1, 2, 3, \ldots$ *средние А. Зигмунда (7) тригонометрических рядов Фурье (1) насыщаемы в банаховом пространстве* $\mathbf{C}(T)$ *с порядком насыщения* $O\left(\frac{1}{N^r}\right)$ *и классом насыщения* $\mathbf{F}\left[\mathbf{C}(T), Z_N^r f(x)\right]$

в случае нечётного натурального порядка $r = 2k - 1$, *где* $k \in Z_1$, *состоящим из всех тех функций* $f \in \mathbf{C}(T)$, *для которых сопряжённые к* f *функции* $f^{\sim}$ *абсолютно непрерывно дифференцируемы* $2k-2$ *раз и их производные* $\left(f^{\sim}\right)^{(2k-1)}$ *существенно ограничены:* $\left(f^{\sim}\right)^{(2k-1)} \in \mathbf{L}^\infty(T)$,

в случае чётного натурального порядка $r = 2k$, *где* $k \in Z_1$, *состоящим из всех тех функций* $f \in \mathbf{AC}(T)$, *которые абсолютно непрерывно дифференцируемы* $2k-1$ *раз и их производные* $f^{(2k)}$ *существенно ограничены:* $f^{(2k)} \in \mathbf{L}^\infty(T)$.

Цель данной работы — указать матричные средние (4) тригонометрических рядов Фурье (1), которые насыщаемы в банаховом пространстве $\mathbf{C}(T)$ с порядком насыщения $O\left(\frac{1}{N^r}\right)$ и классом насыщения $\mathbf{F}[\mathbf{C}(T), M_N f(x)]$, описанном выше в теоремах Д. Алексича и М. Заманского.

Основная часть. Следуя монографии П. Л. Бутцера и Р. Й. Несселя [6, с. 434, определение 12.0.1] введём понятие “strong approximation process on $\mathbf{C}(T)$”.

Определение 1. *Матричные средние (4) тригонометрических рядов Фурье (1) назовём сильным процессом приближения в банаховом пространстве* $\mathbf{C}(T)$, *если для любой функции* $f \in \mathbf{C}(T)$, *во-первых, выполняются неравенства*

$$\forall N \in Z_+ \;\; \left\| M_N f(x) \right\|_{\mathbf{C}(T)} \le A_1 \left\| f(x) \right\|_{\mathbf{C}(T)} , \tag{8}$$

где постоянная A_1 *не зависит от номера строки* N *и функции* $f(x)$, *и, во-вторых, имеет место равномерная сходимость матричных средних (4) к функции* $f(x)$ *на отрезке длины периода:* $\lim_{N \to +\infty} \left\| f(x) - M_N f(x) \right\|_{\mathbf{C}(T)} = 0$.

В силу принципа равномерной ограниченности [6, с. 18, утверждение 0.7.2; 7, с. 265, теорема (9.5)] в предыдущем определении выполнение условия «во-вторых» влечёт выполнение условия «во-первых» лишь для всех достаточно больших номеров строк N.

Теорема 3. *Пусть члены комплексной двойной последовательности (3) удовлетворяют двум условиям: конечна верхняя грань*

$$\sup_{N\in Z_+} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu \left| d_\nu(N) \right| \equiv A_2 \in [0, +\infty) \tag{9}$$

и ряд $\sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(N)$ *сходится к* 1 *со скоростью*

$$1-\sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(N) = O\left(\frac{1}{\ln N}\right),\ N \to +\infty\ . \tag{10}$$

Тогда имеет место равномерная сходимость матричных средних (4) к функции $f(x)$ *на отрезке длины периода:* $\lim_{N\to+\infty} \left\| f(x) - M_N f(x) \right\|_{\mathbf{C}(T)} = 0$.

Для доказательства теоремы 3 используются неравенства автора [8, с. 7–8, теорема 1] для номеров строк $N \geq 3$.

Приводим адаптированный частный случай общего определения из монографии П. Л. Бутцера и Р. Й. Несселя [6, с. 434, определение 12.0.2].

Определение 2. *Сильный процесс приближения матричными средними (4) тригонометрических рядов Фурье (1) в банаховом пространстве* $\mathbf{C}(T)$ *назовём насыщаем в банаховом пространстве* $\mathbf{C}(T)$ *с порядком насыщения* $O\left(\frac{1}{N^r}\right)$ *и классом насыщения* $\mathbf{F}\left[\mathbf{C}(T), M_N f(x)\right]$, *если любая функция* $f \in \mathbf{C}(T)$ *со свойством*

$$\left\| f(x) - M_N f(x) \right\|_{\mathbf{C}(T)} = o\left(\frac{1}{N^r}\right),\ N \to +\infty\ , \tag{11}$$

необходимо есть тождественная постоянная на вещественной прямой R *и множество*

$$\mathbf{F}\left[\mathbf{C}(T), M_N f(x)\right] \equiv \left\{ f \in \mathbf{C}(T) : \left\| f(x) - M_N f(x) \right\|_{\mathbf{C}(T)} = O\left(\frac{1}{N^r}\right),\ N \to +\infty \right\}$$

содержит в себе по крайней мере одну непостоянную функцию.

Основной результат настоящей работы выражает формулируемая ниже теорема.

Теорема 4. *Пусть члены комплексной двойной последовательности (3) удовлетворяют следующим условиям: конечна верхняя грань (9), ряд* $\sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(N)$ *сходится к* 1 *со скоростью (10), при натуральном* $r \in Z_1$ *для всех отличных от нуля целых значений* n *алгебраическими многочленами степени точно* r *от* $|n|$ *являются пределы* $\lim\limits_{N\to+\infty} N^r \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(N) \left(\frac{n}{N+1}\right)^\nu$, *т. е.*

$$\forall n \in Z \setminus \{0\}\ \ \exists a_0 \neq 0\ \ \lim_{N\to+\infty} N^r \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(N) \left(\frac{n}{N+1}\right)^\nu \equiv$$
$$\equiv a_0|n|^r + a_1|n|^{r-1} + a_2|n|^{r-2} + a_3|n|^{r-3} + \ldots + a_{r-1}|n| + a_r. \tag{12}$$

Тогда матричные средние (4) тригонометрических рядов Фурье (1) насыщаемы в банаховом пространстве $\mathbf{C}(T)$ *с порядком насыщения* $O\left(\frac{1}{N^r}\right)$ *и из соотношения* $\left\| f(x) - M_N f(x) \right\|_{\mathbf{C}(T)} = O\left(\frac{1}{N^r}\right)$, $N \to +\infty$, *следует, что функция* f *в зависимости от нечётности или чётности натурального порядка* r *обладает свойствами, описанными выше в теоремах Д. Алексича и М. Заманского.*

При дополнительном условии: для любой функции $f \in \mathbf{C}(T)$ *выполняются неравенства (8), где постоянная* A_1 *не зависит от номера строки* N *и функции* $f(x)$, *последнее условие обратимо, т. е.*

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathbf{C}(T) :\ f^{\sim}, \left(f^{\sim}\right)', \ldots, \left(f^{\sim}\right)^{(2k-2)} \in \mathbf{AC}(T)\ \wedge\ \left(f^{\sim}\right)^{(2k-1)} \in \mathbf{L}^\infty(T), k \in Z_1 \\ f \in \mathbf{AC}(T) :\ f', f'', \ldots, f^{(2k-1)} \in \mathbf{AC}(T)\ \wedge\ f^{(2k)} \in \mathbf{L}^\infty(T), k \in Z_1 \end{array}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\| f(x) - M_N f(x) \right\|_{\mathbf{C}(T)} = O\left(\frac{1}{N^r}\right),\ N \to +\infty\ . \tag{13}$$

Ради логической прозрачности условий на члены комплексной двойной последовательности (3) разобьём теорему 4 на четыре подтеоремы.

Теорема 4.1. *Пусть члены комплексной двойной последовательности (3) удовлетворяют одному условию: конечна верхняя грань*

$$\sup_{N\in Z_+} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left|d_\nu(N)\right| \equiv A_3 \in [0, +\infty) . \tag{14}$$

Тогда любая функция $f \in \mathbf{C}(T)$ *со свойством (11) тождественно равна интегральному среднему этой функции на отрезке длины периода:* $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$.

Доказательство основывается на следующем факте: $\forall N \in Z_1 \quad \forall n \in \{[-N,-1]\bigcup[1,N]\}\bigcap Z$ модули комплексных коэффициентов Фурье функции $f \in \mathbf{C}(T)$

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-int}\,dt\right| = \frac{\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-M_N f(x)\right]e^{-inx}\,dx\right|}{2N\left|1-\frac{1}{2N}\left(\sum\limits_{n=-N}^{-1}+\sum\limits_{n=1}^{N}\right)\sum\limits_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(N)\left|\frac{n}{N+1}\right|^{\nu}\right|} . \tag{15}$$

При $N \to +\infty$ из (15) следует, что все комплексные коэффициенты Фурье функции $f \in \mathbf{C}(T)$ с номерами $n \in Z\setminus\{0\}$ равны нулю. На основании теоремы единственности [1, с. 54, теорема 2.4.1(1); 7, с. 28, теорема (6.3)] всюду на вещественной прямой R функция $f(x)$ тождественно равна 0-му комплексному коэффициенту Фурье $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-i\cdot n=0\cdot t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$.

В силу признака сравнения предположение (9) влечёт предположение (14).

Теорема 4.2. *Пусть члены комплексной двойной последовательности (3) удовлетворяют одному условию: конечна верхняя грань*

$$\sup_{N\in Z_+}\left|\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu}\right| \equiv A_4 \in [0, +\infty) . \tag{16}$$

Тогда множество функций $f \in \mathbf{C}(T)$ *со свойством (13) содержит в себе по крайней мере одну непостоянную функцию.*

Доказательство осуществляется путём указания непостоянной функции $f(x) \equiv \frac{e^{ix}}{N^r}$, обладающей свойством (13).

Поскольку

$$\left|\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu}\right| \le \sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{\left|d_\nu(N)\right|}{(N+1)^\nu} \le \sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{\left|d_\nu(N)\right|}{N+1} = \frac{1}{N+1}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left|d_\nu(N)\right| \le \frac{A_3}{N+1} ,$$

то предположение (14) влечёт предположение (16).

Теорема 4.3. *Пусть члены комплексной двойной последовательности (3) удовлетворяют следующим условиям: для любой функции* $f \in \mathbf{C}(T)$ *выполняются неравенства (8), где постоянная* A_1 *не зависит от номера строки* N *и функции* $f(x)$*, при натуральном* $r \in Z_1$ *имеют место тождества (12). И пусть функция* f *в зависимости от нечётности или чётности натурального порядка* r *обладает свойствами, описанными в теоремах Д. Алексича и М. Заманского. Тогда тригонометрический ряд Фурье (1) функции* $f(x)$ *суммируется его матричными средними (4) со скоростью (13).*

Доказательство опирается на результаты А. Зигмунда [9, с. 697, теорема 1, (1.4), теорема 2, (1.8); 10, с. 591, п. 8.7.27(15), п. 8.7.27(18)] о скорости приближения функции $f(x)$ носящими сейчас его имя средними (7).

Теорема 4.4. *Пусть члены комплексной двойной последовательности (3) удовлетворяют двум условиям: (9) и (10). И пусть для натурального* $r \in Z_1$ *имеет место скорость (13). Тогда функция* f *обладает свойствами, описанными в теоремах Д. Алексича и М. Заманского.*

Доказательство проводится по стандартной схеме.

Заключение. В работе дан план доказательства нашего основного результата: теоремы 4. Её полное доказательство не приводится по причине редакционных ограничений на объём публикации.

Новизна статьи заключается в привлечении в рассматриваемую теорию вышеупомянутых результатов А. Зигмунда [9, с. 697, теорема 1, (1.4), теорема 2, (1.8); 10, с. 591, п. 8.7.27(15), п. 8.7.27(18)].

Список цитируемых источников

1. *Эдвардс, Р.* Ряды Фурье в современном изложении : в 2 т. / Р. Эдвардс. – М. : Мир, 1985. – Т. 1. – 264 с.
2. *Эдвардс, Р.* Ряды Фурье в современном изложении : в 2 т. / Р. Эдвардс. – М. : Мир, 1985. – Т. 2. – 400 с.
3. *Турецкий, А. Х.* О классах насыщения в пространстве C / А. Х. Турецкий // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1961. – Т. 25, № 3. – С. 411–442.
4. *Alexits, G.* On the order of approximation by the Cesàro means of Fourier series / G. Alexits // Approximation theory : (Selected papers) / G. Alexits. – Budapest : Académiai kiadó, 1983. – P. 41–50.
5. *Zamansky, M.* Classes de saturation des procédés de sommation des séries de Fourier et applications aux séries trigonométriques / M. Zamansky // Annales scientifiques de l'École normale supérieure. 3 série. – 1950. – T. 67, № 2. – P. 161–198.
6. *Butzer, P. L.* Fourier Analysis and Approximation / P. L. Butzer, R. J. Nessel. – Basel; Stuttgart : Birkhäuser, 1971. – XVI+533 p.
7. *Зигмунд, А.* Тригонометрические ряды : в 2 т. / А. Зигмунд. – М. : Мир, 1965. – Т. I. – 615 с.
8. *Бруй, И. Н.* К суммируемости со скоростью средними С. Н. Бернштейна тригонометрических рядов Фурье / И. Н. Бруй // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. – 2022. – Т. 12, № 2. – С. 6–12.
9. *Zygmund, A.* The approximation of functions by typical means of their Fourier series / A. Zygmund // Duke Math. J. – 1945. – Vol. 12. – P. 695–704.
10. *Тиман, А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного / А. Ф. Тиман. – М. : ГИФМЛ, 1960. – 624 с.

УДК 517.542

И. Н. Бруй, А. Д. Рыбак

Учреждение образования «Барановичский государственный университет», Барановичи, Республика Беларусь

НЕВЫПУКЛЫЕ ЛИНИИ УРОВНЯ ФУНКЦИИ, ОБРАТНОЙ К ФУНКЦИИ Н. Е. ЖУКОВСКОГО

Введение. Функция Н. Е. Жуковского

$$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \tag{1}$$

конформно и однолистно отображает как внутренность, так и внешность единичной окружности $|z|=1$ в комплексной z-плоскости на внешность отрезка $[-1, 1]$ в комплексной w-плоскости. В. К. Дзядык [1, с. 350] с внешностью единичной окружности связывает большую заглавную букву Ψ. Обратной к функции Н. Е. Жуковского (1) является функция $z=\Psi(C\setminus[-1,1], w)\equiv w+\sqrt{w^2-1}$, где выбрана та ветвь двузначной функции корня квадратного, для которой $\sqrt{1}=1$. Она проходимую против хода часовой стрелки (counterclockwise) единичную окружность

$$w=e^{it},\ -\pi\le t\le\pi, \tag{2}$$

в комплексной w-плоскости переводит в проходимую также против хода часовой стрелки кривую

$$\Gamma_{\text{Apple}}\equiv\left\{z=e^{it}+\sqrt{e^{i2t}-1} : -\pi\le t\le\pi\right\}, \tag{3}$$

которая напоминает контур осевого сечения яблока и которая имеет в z-плоскости в качестве осей симметрии как вещественную ось $\operatorname{Re} z$, так и мнимую ось $i\operatorname{Im} z$, и, следовательно, начало системы координат $z_0\equiv 0$ в качестве центра симметрии.

Параметру $t_1=0$ соответствует точка $z_1=e^{i\cdot 0}+\sqrt{e^{i2\cdot 0}-1}=1$ на вещественной оси $\operatorname{Re} z$, а параметру $t_2=\pi/2$ соответствует точка $z_2=e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}+\sqrt{e^{i2\cdot\frac{\pi}{2}}-1}=i\left(1+\sqrt{2}\right)$ на мнимой оси $i\operatorname{Im} z$. Для значения параметра $t_3=\pi/4$ имеем точку $z_3=e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}+\sqrt{e^{i2\cdot\frac{\pi}{4}}-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{-1+i}$. Так как по выбору ветви $\sqrt{1}=1$, то