И. Н. Бруй
Учреждение образования «Барановичский государственный университет», Барановичи

О ВКЛЮЧЕНИИ МЕТОДА ФЕЙЕРА В ОДНУ СОВОКУПНОСТЬ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Указаны условия, при которых метод Фейера включается в одну совокупность методов суммирования числовых рядов. Даны применения полученного результата к суммированию тригонометрических рядов Фурье.

The main result of this work is the conditions for A. K. Pokalo methods includes L. Fejér method. Article results used for trigonometric Fourier series.

Ключевые слова: числовые ряды, метод Фейера, включение.
Key words: numerical series, Fejér method, inclusion.

Введение. Л. Фейер [1] первым применил теорию суммируемости числовых рядов к тригонометрическим рядам Фурье. Он положил начало [2] теории суммируемости тригонометрических рядов Фурье и их разных аналогов.

Для ряда известных методов суммирования исторический процесс был обратным. Например, метод Римана и метод Валле-Пуссена (метод запаздывающих первыми средних арифметических частичных сумм) сначала были введены в теории тригонометрических рядов Фурье, а позже рассматривались как методы суммирования произвольных числовых рядов [3, с. 118], [4, с. 106, упражнение 5.7], [4, с. 130, упражнение 6.14].

С. Б. Стечкин в обзорной статье [5] редактора перевода [3] на русский язык монографии Г. Харди изложил общие свойства методов суммирования числовых рядов, впервые рассмотренных В. Рогозинским и С. Н. Бернштейном применительно к тригонометрическим рядам Фурье.

Аналогично в настоящей работе доказываются теорема 1 (о регулярности) и теорема 2 (о включении метода Фейера) для одной совокупности методов суммирования числовых рядов, которые возникли ранее при рассмотрении следующих трёх проблем: 1) нахождение эффективных условий на метод суммирования тригонометрических рядов Фурье, достаточных для ограниченности последовательности констант Лебега этого метода [6, с. 25, неравенство (10)]; 2) получение асимптотических формул для уклонения функций от приближающих средних их тригонометрических рядов Фурье (иными словами, получение асимптотических формул типа С. Н. Бернштейна — Е. В. Вороновской — И. П. Натансона) [7, с. 44], [8, с. 318], [9, с. 516], [10, с. 168]; 3) сравнение методов суммирования тригонометрических рядов Фурье [11, с. 162, 165], [12, с. 14].

В обозначениях мы стремимся следовать монографии Р. Эдвардса [4]. В выделяемой ниже курсивом терминологии мы следуем монографии Г. Харди [3].

Регулярность. Для данного числового ряда

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

через

$$s_N := \sum_{n=0}^{N} a_n \tag{2}$$

обозначим N-ю частичную сумму этого ряда, где $N \in Z_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$. Если существует конечный предел s последовательности $(s_N)_{N=0}^{\infty}$, то ряд (1) называют сходящимся, число s называют суммой ряда (1) и пишут $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$. Если последовательность частичных сумм $(s_N)_{N=0}^{\infty}$ не имеет конечного предела, то говорят, что числовой ряд (1) расходится.

Теории суммируемости расходящихся числовых рядов на русском языке посвящены монографии Г. Харди [3], Р. Кука [13] и С. А. Барона [14].

Метод суммирования числовых рядов называется *регулярным* [3, с. 24, параграф 1.4], если он суммирует каждый сходящийся числовой ряд к его обыкновенной сумме.

Теорема 1. *Пусть двойная комплексная последовательность $(d_\nu(N))$, где номер строки N принимает значения 0, 1, 2, …, а номер столбца ν принимает значения 1, 2, 3, …, такова, что ограничены в совокупности все суммы рядов из модулей членов каждой строки:*

$$c_1 := \sup_{N \in Z_0} \sum_{\nu=1}^{\infty} |d_\nu(N)| < \infty . \tag{3}$$

И пусть числовой ряд (1) сходится, т. е.

$$\exists \lim_{N \to \infty} s_N =: s \in C . \tag{4}$$

Тогда средние

$$M_N := \sum_{n=0}^{N}\left[1-\sum_{n=1}^{\infty} d_n(N)\left(\frac{n}{N+1}\right)^n\right]a_n \tag{5}$$

ряда (1) регулярны, т. е. $\lim\limits_{N\to\infty} s_N = s\in C \;\Rightarrow\; \lim\limits_{N\to\infty} M_N = s$.

Доказательство. *Шаг 1.* В силу условия (3) при всех $N\in Z_0$ и каждом $n\in[0,N]$ абсолютно сходятся ряды $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} d_\nu(N)\left[n/(N+1)\right]^\nu$. Поэтому для средних (5) имеем представления

$$M_N = s_N - \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu}\sum_{n=0}^{N} n^\nu a_n. \tag{6}$$

Поскольку согласно определению (2) общий член числового ряда $a_n = s_n - s_{n-1}$, где $s_{-1} := 0$, то с использованием техники суммирования по частям [4, с. 135, формула (7.1.12)] из выражений (6) получаем представления

$$M_N = s_N\left[1-\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu(N)\left(\frac{N}{N+1}\right)^\nu\right]+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu}\sum_{n=0}^{N-1}\left[(n+1)^\nu - n^\nu\right]s_n. \tag{7}$$

В тех случаях, когда верхний индекс суммирования строго меньше $(<)$ нижнего индекса, соответствующие суммы считаются пустыми.

Шаг 2. Для ряда $1+0+0+\ldots+0+\ldots$ все $(N\in Z_0)$ частичные суммы $s_N = 1$ и все средние $M_N = 1$. Поэтому из ключевых представлений (7) имеем числовые тождества

$$1 = 1-\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu(N)\left(\frac{N}{N+1}\right)^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu}\sum_{n=0}^{N-1}\left[(n+1)^\nu - n^\nu\right]. \tag{8}$$

Шаг 3. Умножаем последние тождества (8) на сумму s числового ряда (1) и из полученных результатов вычитаем представления (7):

$$s - M_N = (s-s_N)\left[1-\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu(N)\left(\frac{N}{N+1}\right)^\nu\right]+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu}\sum_{n=0}^{N-1}\left[(n+1)^\nu - n^\nu\right](s-s_n). \tag{9}$$

Согласно определению (4) предела s последовательности частичных сумм $\left(s_N\right)_{N=0}^{\infty}$ для каждого действительного числа $0<\varepsilon<1$ существует такое неотрицательное целое число $N_0(\varepsilon)$, что для любого номера $N>N_0(\varepsilon)$ верно неравенство $\left|s-s_N\right|<\varepsilon$. Поэтому из рабочих равенств (9) при всех номерах $N>N_0(\varepsilon)$ с учётом предположения (3) получаем неравенства

$$\left|s-M_N\right| \leq \varepsilon\left(1+c_1\right)+\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left|d_\nu(N)\right|}{(N+1)^\nu}\left\{\sum_{n=0}^{N_0(\varepsilon)}\left[(n+1)^\nu-n^\nu\right]\left|s-s_n\right|+\varepsilon\left[N^\nu-\left(N_0(\varepsilon)+1\right)^\nu\right]\right\}. \quad (10)$$

При всех номерах $N>N_0(\varepsilon)$ в силу предположения (3) справедливы неравенства

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{N^\nu-\left(N_0(\varepsilon)+1\right)^\nu}{(N+1)^\nu}\left|d_\nu(N)\right| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{N}{N+1}\right)^\nu\left|d_\nu(N)\right| \leq c_1. \quad (11)$$

Таким образом, из неравенств (10) благодаря последним оценкам (11) получаем, что при всех номерах $N>N_0(\varepsilon)$

$$\left|s-M_N\right| \leq \varepsilon\left(1+c_1\right)+\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left|d_\nu(N)\right|}{(N+1)^\nu} \sum_{n=0}^{N_0(\varepsilon)}\left[(n+1)^\nu-n^\nu\right]\left|s-s_n\right|+\varepsilon c_1. \quad (12)$$

Шаг 4. Так как по предположению числовой ряд (1) сходится, то конечна верхняя грань $c_2:=\sup\limits_{n \in Z_0}\left|s-s_n\right|<\infty$. Поэтому из последних неравенств (12) при всех номерах $N>N_0(\varepsilon)$ имеем

$$\left|s-M_N\right| \leq \varepsilon\left(1+c_1\right)+\frac{N_0(\varepsilon)+1}{N+1} c_2 \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{N_0(\varepsilon)+1}{N+1}\right)^{\nu-1}\left|d_\nu(N)\right|+\varepsilon c_1. \quad (13)$$

Ясно, что существует такое неотрицательное целое число $N_1(\varepsilon)$, что для любого номера $N>N_1(\varepsilon)$ верно неравенство $\dfrac{N_0(\varepsilon)+1}{N+1}<\varepsilon<1$. Тогда при всех номерах $N>N_2(\varepsilon):=\max\left(N_0(\varepsilon), N_1(\varepsilon)\right)$ из неравенств (13) с учётом предположения (3) получаем

$$\left|s-M_N\right| \leq \varepsilon\left(1+c_1\right)+\varepsilon c_2 \sum\nolimits_{\nu=1}^{\infty}\left|d_\nu(N)\right|+\varepsilon c_1 \leq\left(1+2 c_1+c_2 c_1\right) \varepsilon. \quad (14)$$

Неравенства (14) ввиду произвола в выборе $0<\varepsilon<1$ означают, что имеет место предельное равенство $\lim\limits_{N\to\infty} M_N = s$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. В случае средних Фейера

$$\forall N \in Z_0 \ \ \sigma_N := \sum_{n=0}^{N}\left(1-\frac{n}{N+1}\right)a_n \tag{15}$$

очевидно, что член $d_1(N)=1$ и при натуральных $\nu\ge 2$ члены $d_\nu(N)=0$. Поэтому из вышеприведённого доказательства теоремы 1 в частном случае средних Фейера получаем доказательство известной теоремы О. Коши [4, с. 103]: $\lim\limits_{N\to\infty} s_N = s\in C \ \Rightarrow \ \lim\limits_{N\to\infty}\sigma_N = s.$ Иными словами, получаем доказательство регулярности метода Фейера (15) суммирования числовых рядов (1).

Замечание 2. Метод Фейера (15) в теории суммируемости числовых рядов называют также методом первых средних арифметических частичных сумм, методом Чезаро первого порядка, методом Гёльдера первого порядка.

О включении метода Фейера. Говорят, что метод суммирования (5) числовых рядов (1) *включает* [3, с. 91, параграф 4.3] метод Фейера (15) суммирования этих рядов, если $\lim\limits_{N\to\infty}\sigma_N = \sigma\in C \ \Rightarrow \ \lim\limits_{N\to\infty} M_N = \sigma$.

Теорема 2. *Пусть двойная комплексная последовательность* $\left(d_\nu(N)\right)$, *где номер строки N принимает значения 0, 1, 2, …, а номер столбца* ν *принимает значения 1, 2, 3, …, такова, что конечна верхняя грань*

$$c_3 := \sup_{N\in Z_0}\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu\left|d_\nu(N)\right| < \infty . \tag{16}$$

И пусть числовой ряд (1) суммируем методом Фейера, т. е.

$$\exists\lim_{N\to\infty}\sigma_N =: \sigma\in C . \tag{17}$$

Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\sigma - M_N = \mu_{N+1}^{(N)}\left(\sigma - s_N\right) + o(1)\,,\ N\to\infty, \tag{18}$$

в которой элементы $\mu_{N+1}^{(N)}$ *определены соглашениями*

$$\forall N \in Z_0 \ \ \mu_{N+1}^{(N)} := 1-\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu(N)\,. \tag{19}$$

Замечание 3. Очевидно, что предположение (16) влечёт $(\Rightarrow)$ предположение (3): $c_1 \le c_3$. Иными словами, все рассматриваемые в теореме 2 методы суммирования (5) числовых рядов (1) заведомо являются регулярными.

Замечание 4. Для расходящегося (ограниченно колеблющегося) ряда Эйлера $1-1+1-...+(-1)^n+...$ все $(N \in Z_0)$ частичные суммы с чётными номерами $s_{2N}=1$ и с нечётными номерами $s_{2N+1}=0$, все средние Фейера с чётными номерами $\sigma_{2N}=\dfrac{N+1}{2N+1}$ и с нечётными номерами $\sigma_{2N+1}=\dfrac{1}{2}$, сумма Фейера $\sigma=\dfrac{1}{2}$.

Доказательство теоремы 2. *Шаг 1.* В силу определений (19)

$$1-\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu(N)\left(\frac{N}{N+1}\right)^\nu = \mu_{N+1}^{(N)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu(N)\left[1-\left(\frac{N}{N+1}\right)^\nu\right]. \tag{20}$$

Поскольку средние Фейера (15) выражаются через частичные суммы (2) ряда (1) следующим образом: $\sigma_N=\dfrac{1}{N+1}\sum\limits_{n=0}^{N} s_n$, то очевидно, что n-я $(n \in Z_0)$ частичная сумма этого ряда $s_n=(n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1}$, где по определению $\sigma_{-1}:=0$. Поэтому применением техники суммирования по частям (являющейся сумматорным аналогом формулы интегрирования по частям) получаем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu}\sum_{n=0}^{N-1}\left[(n+1)^\nu-n^\nu\right]s_n = N\sigma_{N-1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{N^\nu-(N-1)^\nu}{(N+1)^\nu}d_\nu(N)-$$

$$-\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu}\sum_{n=0}^{N-2}\left[(n+2)^\nu-2(n+1)^\nu+n^\nu\right](n+1)\sigma_n . \tag{21}$$

Подстановка выражений (20) и (21) в ключевые представления (7) приводит ко вторым ключевым представлениям

$$M_N=\mu_{N+1}^{(N)}s_N+s_N\sum_{\nu=1}^{\infty}d_\nu(N)\left[1-\left(\frac{N}{N+1}\right)^\nu\right]+N\sigma_{N-1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{N^\nu-(N-1)^\nu}{(N+1)^\nu}d_\nu(N)-$$

$$-\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu}\sum_{n=0}^{N-2}\left[(n+2)^\nu-2(n+1)^\nu+n^\nu\right](n+1)\sigma_n\,. \qquad (22)$$

Для уже встречавшегося на шаге 2 доказательства теоремы 1 ряда $1+0+0+...+0+...$ все $(N\in Z_0)$ средние Фейера $\sigma_N=1$. Поэтому из последних представлений (22) имеем числовые тождества

$$1=\mu_{N+1}^{(N)}+\sum_{\nu=1}^{\infty}d_\nu(N)\left[1-\left(\frac{N}{N+1}\right)^\nu\right]+N\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{N^\nu-(N-1)^\nu}{(N+1)^\nu}d_\nu(N)-$$

$$-\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu}\sum_{n=0}^{N-2}\left[(n+2)^\nu-2(n+1)^\nu+n^\nu\right](n+1)\,. \qquad (23)$$

Умножаем последние тождества (23) на сумму Фейера σ числового ряда (1) и из полученных результатов вычитаем вторые ключевые представления (22):

$$\sigma-M_N=\mu_{N+1}^{(N)}(\sigma-s_N)+(\sigma-s_N)\sum_{\nu=1}^{\infty}d_\nu(N)\left[1-\left(\frac{N}{N+1}\right)^\nu\right]+\ N\left(\sigma-\sigma_{N-1}\right)\times$$

$$\times\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{N^\nu-(N-1)^\nu}{(N+1)^\nu}d_\nu(N)-\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu}\sum_{n=0}^{N-2}\left[(n+2)^\nu-2(n+1)^\nu+n^\nu\right](n+1)\left(\sigma-\sigma_n\right). \quad (24)$$

Шаг 2. В силу определения (17) предела σ последовательности средних Фейера $\left(\sigma_N\right)_{N=0}^{\infty}$ для каждого действительного числа $0<\varepsilon<1$ существует такое неотрицательное целое число $N_3(\varepsilon)$, что для любого номера $N>N_3(\varepsilon)$ верно неравенство $\left|\sigma-\sigma_N\right|<\varepsilon$.

Обозначим вторую компоненту правой части рабочих равенств (24) через $c_4(N)$. Воспользуемся следующим неравенством Я. Бернулли: $\forall\nu\in Z_1:=\{1,2,3,...\}$ $\forall x\in[-1,\infty)$ $(1+x)^\nu\geq 1+\nu x$. Тогда $\forall n\in Z_1$ $\forall N\in Z_0$ $1-\left(\frac{N}{N+1}\right)^\nu=1-\left(1-\frac{1}{N+1}\right)^\nu\leq\frac{\nu}{N+1}$ и

$$\left|c_4(N)\right|\leq\left|\sigma-s_N\right|\frac{1}{N+1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu\left|d_\nu(N)\right|,\ N=0,1,2,.... \qquad (25)$$

Для всякого числового ряда (1), который суммируем методом Фейера (15) к конечной сумме σ, т. е. для которого имеет место предельное равенство (17), выполняется (*см.* [3, с. 132, теорема 46, $k=1$, $k'=0$] или [4, с. 105, упражнение 5.3]) соотношение $s_N = o(N)$, $N \to \infty$. Поэтому из неравенств (25) с учётом предположения (16) получаем, что $c_4(N) = o(1)$, $N \to \infty$.

Шаг 3. Третью компоненту правой части рабочих равенств (24) обозначим через $c_5(N)$. Как известно, из справедливой для любого $\nu \neq 0$ формулы Ньютона—Лейбница $N^\nu - (N-1)^\nu = \nu \int\limits_{N-1}^{N} t^{\nu-1}\,dt$ вытекают справедливые для всех действительных $\nu \geq 1$ неравенства $N^\nu - (N-1)^\nu \leq \nu N^{\nu-1}$. Поэтому при всех номерах $N > N_3(\varepsilon)$ в силу предположения (16) имеем следующую оценку: $|c_5(N)| < \varepsilon \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu \left(\dfrac{N}{N+1}\right)^\nu |d_\nu(N)| < \varepsilon \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu |d_\nu(N)| \leq c_3 \varepsilon$, которая ввиду произвола в выборе $0 < \varepsilon < 1$ означает, что $c_5(N) = o(1)$, $N \to \infty$.

Шаг 4. Через $c_6(N)$ обозначим последнюю четвёртую компоненту правой части рабочих равенств (24). Из справедливого для любых $\nu \neq 0$ и $\nu \neq 1$ интегрального представления $(n+2)^\nu - 2(n+1)^\nu + n^\nu = \nu(\nu-1) \times$ $\times \int\limits_{n}^{n+1} \left(\int\limits_{t}^{t+1} \theta^{\nu-2}\,d\theta \right) dt$ вытекают справедливые для всех действительных $\nu \geq 2$ неравенства $(n+2)^\nu - 2(n+1)^\nu + n^\nu \leq \nu(\nu-1)(n+2)^{\nu-2}$.

Тогда $|c_6(N)| < \sum\limits_{\nu=2}^{\infty} \dfrac{\nu(\nu-1)|d_\nu(N)|}{(N+1)^\nu} \sum\limits_{n=0}^{N-2} (n+2)^{\nu-2}(n+1)(\sigma - \sigma_n)$. И при всех номерах $N > N_3(\varepsilon)$ будет $|c_6(N)| < \sum\limits_{\nu=2}^{\infty} \dfrac{\nu(\nu-1)|d_\nu(N)|}{(N+1)^\nu} \left[\sum\limits_{n=0}^{N_3(\varepsilon)} (n+2)^{\nu-1} |\sigma - \sigma_n| + \varepsilon \sum\limits_{n=N_3(\varepsilon)+1}^{N-2} (n+2)^{\nu-1} \right]$. В силу предположения (17) последовательность средних Фейера $(\sigma_N)_{N=0}^{\infty}$ сходится; поэтому конечна верхняя грань $c_7 := \sup\limits_{n \in Z_0} |\sigma - \sigma_n| < \infty$. Тогда при всех номерах $N > N_3(\varepsilon)$ будет $|c_6(N)| < \sum\limits_{\nu=2}^{\infty} \dfrac{\nu(\nu-1)|d_\nu(N)|}{(N+1)^\nu} \left[c_7 \sum\limits_{n=0}^{N_3(\varepsilon)} (n+2)^{\nu-1} + \varepsilon \sum\limits_{n=N_3(\varepsilon)+1}^{N-2} (n+2)^{\nu-1} \right]$. Так как $\sum\limits_{n=0}^{N_3(\varepsilon)} (n+2)^{\nu-1} < \int\limits_{0}^{N_3(\varepsilon)+1} (t+2)^{\nu-1}\,dt < \dfrac{1}{\nu}(N_3(\varepsilon)+3)^\nu$ и $\sum\limits_{n=N_3(\varepsilon)+1}^{N-2} (n+2)^{\nu-1} < \dfrac{1}{\nu}(N+1)^\nu$, то

$$|c_6(N)| < \frac{N_3(\varepsilon)+3}{N+1}\, c_7 \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu-1)\left(\frac{N_3(\varepsilon)+3}{N+1}\right)^{\nu-1} |d_\nu(N)| + \varepsilon \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu-1)|d_\nu(N)|. \quad (26)$$

Очевидно, что существует такое неотрицательное целое число $N_4(\varepsilon)$, что для любого номера $N > N_4(\varepsilon)$ верно неравенство $\frac{N_3(\varepsilon)+3}{N+1} < \varepsilon < 1$. Тогда при всех номерах $N > N_5(\varepsilon) := \max\left(N_3(\varepsilon), N_4(\varepsilon)\right)$ из неравенств (26) с учётом предположения (16) получаем $|c_6(N)| < \varepsilon c_7 \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu-1)|d_\nu(N)| +$ $+\varepsilon \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu-1)|d_\nu(N)| < \varepsilon\left(c_7+1\right)c_3$. Последнее неравенство ввиду произвола в выборе $0 < \varepsilon < 1$ означает, что $c_6(N) = o(1)$, $N \to \infty$.

Таким образом, $c_4(N) + c_5(N) + c_6(N) = o(1)$, $N \to \infty$. И из рабочих равенств (24) имеем асимптотическую формулу (18). Теорема 2 доказана.

Средние Зигмунда числового ряда (1) являются одним из обобщений средних Фейера (15) этого ряда и определяются следующим образом:

$$\forall N \in Z_0 \quad Z_N^r := \sum_{n=0}^{N}\left[1-\left(\frac{n}{N+1}\right)^r\right]a_n, \quad (27)$$

где порядок средних $r \in \{1,\ 2,\ 3,\ ...\}$. В частности, $Z_N^1 = \sigma_N$. Очевидно, что член $d_r(N) = 1$ и при натуральных $\nu \in Z_1 \setminus \{r\}$ члены $d_\nu(N) = 0$. Тогда верхняя грань $c_3 = r$ и из определений (19) следует, что все $(N \in Z_0)$ элементы $\mu_{N+1}^{(N)} = 0$. Поэтому из теоремы 2 в частном случае средних Зигмунда (27) получаем следующую импликацию:

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N = \sigma \in C \quad \overset{r=1,2,3,...}{\Rightarrow} \quad \lim_{N\to\infty} Z_N^r = \sigma. \quad (28)$$

Говорят, что методы Фейера (15) и Зигмунда (27) суммирования числовых рядов (1) *равносильны* [3, с. 91, параграф 4.3], если каждый из них включает другой.

В работе А. Зигмунда [15, с. 696] со ссылкой на монографию Г. Х. Харди и Марселя Рисса [16] используется тот факт, что средние (15) и (27) равносильны. Это значит, что импликация (28) обратима. (Про равносильность методов Фейера и Зигмунда суммирования числовых рядов смотрите также [14, с. 118, теорема 17.5].)

Замечание 5. Средние Зигмунда (27) в литературе называют ещё нормальными средними, типическими средними, эталонными средними, средними М. Рисса.

Средние С. Н. Бернштейна и В. Рогозинского. Для средних

$$\forall N \in Z_0 \quad BR_N^{\text{ч}} := \sum_{n=0}^{N} \left[\cos \frac{\pi n}{2(N+1)} \right] a_n \tag{29}$$

числового ряда (1) с помощью канонического разложения функции косинус в степенной ряд получаем, что все $(\nu \in Z_1)$ члены с нечётными номерами $d_{2\nu-1}(N) = 0$ и с чётными номерами $d_{2\nu}(N) = (-1)^{\nu-1} \times \times \{1/[(2\nu)!]\}(\pi/2)^{2\nu}$. Тогда верхняя грань $c_3 = (\pi/2)\operatorname{sh}(\pi/2)$, и из определений (19) следует, что все $(N \in Z_0)$ элементы $\mu_{N+1}^{(N)} = \cos(\pi/2) = 0$. Поэтому из теоремы 2 в частном случае средних (29) получаем следующую импликацию: $\lim\limits_{N\to\infty} \sigma_N = \sigma \in C \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{N\to\infty} BR_N^{\text{ч}} = \sigma$. Обратимость последней импликации следует из доказанной В. Рогозинским (*см.* [17, с. 120, теоремы 4 и 5] или [5, с. 488, теорема IX]) равносильности средних Фейера (15) и средних (29).

В случае же средних

$$\forall N \in Z_0 \quad BR_N^{\text{нч}} := \sum_{n=0}^{N} \left(\cos \frac{\pi n}{2N+1} \right) a_n \tag{30}$$

ряда (1) аналогично предыдущему получаем, что все $(\nu \in Z_1)$ члены с нечётными номерами $d_{2\nu-1}(N) = 0$ и с чётными номерами $d_{2\nu}(N) = \dfrac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu)!} \left[\dfrac{\pi}{2} \left(1 + \dfrac{1}{2N+1} \right) \right]^{2\nu}$. Тогда верхняя грань $c_3 < \pi \operatorname{sh} \pi$, и из определений (19) следует, что все $(N \in Z_0)$ элементы

$$\mu_{N+1}^{(N)} = \cos \frac{\pi(N+1)}{2N+1} = -\sin \frac{\pi}{2(2N+1)} \sim -\frac{\pi}{2(2N+1)}, \; N \to \infty. \tag{31}$$

На шаге 2 доказательства теоремы 2 уже отмечалось, что для всякого числового ряда (1), суммируемого методом Фейера (15) к конечной сумме σ, выполняется соотношение $s_N = o(N),\quad N \to \infty$. Поэтому с учётом эквивалентности (31) получаем $\mu_{N+1}^{(N)}(\sigma - s_N) = -\frac{\pi}{2(2N+1)}[\sigma + o(N)] =$ $= -\frac{\pi\sigma}{2(2N+1)} + o(1),\quad N \to \infty$. Тогда асимптотическая формула (18) примет вид $\sigma - BR_N^{\text{нч}} = -\frac{\pi\sigma}{2(2N+1)} + o\ (1)$, $N \to \infty$. И из теоремы 2 в частном случае средних (30) имеем следующую импликацию: $\lim\limits_{N\to\infty} \sigma_N = \sigma \in C \ \Rightarrow\ \lim\limits_{N\to\infty} BR_N^{\text{нч}} = \sigma$.

Говорят, что метод (30) суммирования числовых рядов (1) *сильнее* [3, с. 91, параграф 4.3] метода Фейера (15) суммирования этих рядов, если метод (30) включает метод Фейера (15), но не равносилен ему.

Ф. И. Харшиладзе доказал (*см.* [18], [19] или [5, с. 488, теорема X]), что метод (30) сильнее метода Фейера (15), т. е. доказал не только предыдущую импликацию, но и указал расходящийся (неограниченно колеблющийся) ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n n$, который суммируем методом (30) и не суммируем методом Фейера (15).

Применения к тригонометрическим рядам Фурье, т. е. к функциональным рядам (1), члены a_n которых порождены функцией $f \in \mathbf{L}^1(T)$ следующим образом:

$$a_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$$

и

$$\forall n \in Z_1\ \ a_n := \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt\right)\cos nx + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt\right)\sin nx.$$

Ниже $s_N f(x)$ и $\sigma_N f(x)$ суть соответственно *N*-я $(N \in Z_0)$ частичная сумма и *N*-е среднее Фейера тригонометрического ряда Фурье функции $f \in \mathbf{L}^1(T)$. Аналогичный смысл имеют $M_N f(x)$.

Теорема 3. *Пусть двойная комплексная последовательность* $(d_n(N))$ *такова, что ограничены в совокупности все суммы рядов из* *модулей членов каждой строки; см. определение (3). И пусть функция* $f \in \mathbf{L}^p(T)$ *при некотором действительном* $p > 1$. *Тогда средние (5) тригонометрического ряда Фурье функции* f *сходятся для почти всех* x *к* $f(x)$*:* $f \in \mathbf{L}^p(T) \overset{p>1}{\Rightarrow} \lim\limits_{N\to\infty} M_N f(x) \overset{\text{п.в}}{=} f(x).$

Доказательство. По предположению функция $f \in \mathbf{L}^p(T)$, где $p > 1$. Тогда в силу теоремы Карлесона—Ханта (*см.* [4, с. 201] или [20, с. 161]) тригонометрический ряд Фурье функции f сходятся для почти всех x к $f(x)$, т. е. почти всюду $s = f(x)$. Отсюда согласно теореме 1 следует суммируемость тригонометрического ряда Фурье функции f для почти всех x методом (5). Теорема 3 доказана.

Говорят, что метод (5) F-эффективен [3, с. 443], если он суммирует любой тригонометрический ряд Фурье почти всюду к порождающей его функции, т. е. $f \in \mathbf{L}^1(T) \Rightarrow \lim\limits_{N\to\infty} M_N f(x) \overset{\text{п.в}}{=} f(x).$ Положительные примеры: метод Фейера (15) в силу теоремы А. Лебега [4, с. 119, теорема 6.4.4] является F-эффективным; метод (29) согласно В. Рогозинскому (*см.* [17, с. 133, определение (14)] или [5, с. 489, теорема XI]) также является F-эффективным. Отрицательный пример: метод сходимости (единичный метод) не является F-эффективным; это следует из теоремы А. Н. Колмогорова [4, с. 195, пункт 10.3.4 или с. 218, упражнение 10.21] о существовании функции $f \in \mathbf{L}^1(T)$ с расходящимся почти всюду её тригонометрическим рядом Фурье. *См.* также [20, с. 161] и [21, с. 111, лемма 1, b, с. 113, b].

Теорема 4. *Пусть двойная комплексная последовательность* $(d_\nu(N))$ *такова, что конечна верхняя грань (16) и, кроме того, элементы* $\mu_{N+1}^{(N)} = O\left(\frac{1}{\ln N}\right)$, $N \to \infty$. *Тогда метод (5) суммирования тригонометрических рядов Фурье является F-эффективным.*

Доказательство. Пусть функция $f \in \mathbf{L}^1(T)$. Тогда [4, с. 198, теорема 10.4.1, утверждение (2)] для почти всех x частичные суммы $s_N f(x) = o_x(\ln N)$, $N \to \infty$, и в силу упоминавшейся выше теоремы А. Лебега [4, с. 119, теорема 6.4.4] для почти всех x отклонение функции $f(x)$ от приближающих средних Фейера $\sigma_N f(x)$ её тригонометрического ряда Фурье $f(x) - \sigma_N f(x) = o_x(1)$, $N \to \infty$. Отсюда на основании теоремы 2 для почти всех x отклонение $f(x)-M_N f(x)=o_x(1)$, $N\to\infty$. Теорема 4 доказана.

Перейдём сейчас к рассмотрению множества $\mathbf{C}(T)$ всех непрерывных и 2π-периодических комплекснозначных функций.

Говорят, что метод (5) *перманентен* [5, с. 489], если для любой функции $f\in\mathbf{C}(T)$ средние (5) её тригонометрического ряда Фурье равномерно сходятся к функции f, т. е.

$$f\in\mathbf{C}(T)\ \Rightarrow\ \lim_{N\to\infty}\max_{-\pi\le x\le\pi}\left|f(x)-M_N f(x)\right|=0.$$

Положительные примеры: метод Фейера (15) в силу аппроксимационной теоремы Л. Фейера [4, с. 108, теорема 6.1.1, $k=0$] является перманентным; метод (29) согласно А. Ф. Тиману (*см.* [22] или [5, с. 489, теорема XII]) также перманентен. Отрицательный пример: метод сходимости не является перманентным; это следует из примера Дюбуа-Реймона (*см.* [4, с. 195] или [20, с. 141]) функции $f\in\mathbf{C}(T)$ с расходящимся в отдельной точке её тригонометрическим рядом Фурье. Отсюда заключаем, что метод суммирования может быть регулярным, но не перманентным.

Теорема 5. *Пусть двойная комплексная последовательность* $\left(d_\nu(N)\right)$ *такова, что конечна верхняя грань (16) и, кроме того, элементы* $\mu_{N+1}^{(N)}=O\left(\dfrac{1}{\ln N}\right)$, $N\to\infty$. *Тогда метод (5) суммирования тригонометрических рядов Фурье перманентен.*

Доказательство. Для любой непрерывной и 2π-периодической комплекснозначной функции f в силу упоминавшейся выше аппроксимационной теоремы Л. Фейера [4, с. 108, теорема 6.1.1, $k=0$] всюду $\sigma=f(x)$. Поэтому асимптотическая формула (18) принимает вид

$$f(x)-M_N f(x)=\mu_{N+1}^{(N)}\left[f(x)-s_N f(x)\right]+o_x(1),\ \ N\to\infty, \tag{32}$$

где бесконечно малая функция $o_x(1)$, как видно из шага 2 доказательства теоремы 2, равномерно сходится к нулю при $N\to\infty$. Поскольку для $f\in\mathbf{C}(T)$ равномерно по x выполняется [4, с. 213, упражнение 10.3] соотношение $s_N f(x)=o_x(\ln N)$, $N\to\infty$, т. е. $\max\limits_{-\pi\le x\le\pi}\left|s_N f(x)\right|=o(\ln N)$,

$N \to \infty$, то из асимптотической формулы (32) имеем $\lim\limits_{N\to\infty} \max\limits_{-\pi\le x\le\pi} \left| f(x) - M_N f(x) \right| = 0.$ Теорема 5 доказана.

Замечание 6. Иным способом теорему 5 доказал ранее А. К. Покало [6, с. 24—25, теорема]. Доказательство А. К. Покало основывалось [6, с. 25, пункт 3] на работе С. М. Никольского [23, с. 259—260], в которой средствами функционального анализа (теорема о слабой сходимости линейных функционалов) вопрос о перманентности сводился в трудной его части к вопросу об ограниченности последовательности констант Лебега рассматриваемого метода суммирования тригонометрических рядов Фурье. Поиску эффективных условий на метод суммирования, при выполнении которых ограничена последовательность констант Лебега этого метода, посвящали свои глубокие (оценка В. К. Дзядыка [8, с. 282]) исследования многие математики: [23, с. 265, теорема 4, свойства 1 и 3 и с. 268, лемма, импликация 1], [24], [25, с. 182—183, теорема 5], [26, с. 752], [27, с. 1227—1228], [28, с. 210—211, теорема 5.2], [29, с. 65, предложение], [30, с. 178, теорема 32], [31, с. 168—169]. В настоящей же работе теорема 5 получена без обращения к функциональному анализу.

Заключение. В основном результате настоящей работы — теореме 2 — указаны условия, при которых рассматриваемые методы суммирования (5) включают метод Фейера (15). В пунктах 4 и 5 на конкретных модельных методах суммирования А. Зигмунда (27) и С. Н. Бернштейна—В. Рогозинского (*см.* (29) и (30)) показано, как соотносятся соответствующие частные случаи теоремы 2 с результатами предшественников. В теоремах 2, 4 и 5 выяснено, что элементы (19) влияют на аппроксимативные свойства средних (5), хотя и не входят в определение последних. (Аналогия: в комплексной плоскости геометрические свойства границы области влияют на аппроксимацию внутри области; классические примеры — круг и разрезанный по радиусу круг.) Основным применением доказанных теорем 1 и 2 являются в пункте 6 тригонометрические ряды Фурье. Последнее обстоятельство объясняет, почему средние (15) и (27) связываются с именами соответственно Л. Фейера и А. Зигмунда и почему в работе не рассмотрены некоторые естественные для теории суммируемости числовых рядов вопросы (например, необходимость полученных условий).

Список цитируемых источников

1. *Fejér, L.* Sur les fonctions bornées et intégrables / L. Fejér // Gesammelte Arbeiten : in 2 Bd. / L. Fejér. — Budapest : Akadémiai kiadó, 1970. — Bd. I. — S. 37—41.
2. *Turán, P.* Bemerkungen / P. Turán // Gesammelte Arbeiten : in 2 Bd. / L. Fejér. — Budapest : Akadémiai kiadó, 1970. — Bd. I. — S. 41—43.
3. *Харди, Г.* Расходящиеся ряды / Г. Харди. — М. : ИИЛ, 1951. — 504 с.

4. *Эдвардс, Р.* Ряды Фурье в современном изложении : в 2 т. / Р. Эдвардс. — М. : Мир, 1985. — Т. 1. — 264 с.
5. *Стечкин, С. Б.* Методы суммирования С. Н. Бернштейна и В. Рогозинского / С. Б. Стечкин // Расходящиеся ряды / Г. Харди. — М. : ИИЛ, 1951. — С. 479—492.
6. *Покало, А. К.* Об одном классе линейных методов суммирования / А. К. Покало // Вес. акад. навук Беларус. ССР. Сер. фiз.-тэхн. навук. — 1962. — № 1. — С. 24—27.
7. *Покало, А. К.* Об одном классе линейных методов суммирования рядов Фурье дифференцируемых функций / А. К. Покало // Вес. акад. навук Беларус. ССР. Сер. фiз.-мат. навук. — 1969. — № 2. — С. 43—50.
8. *Дзядык, В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В. К. Дзядык. — М. : Наука, 1977. — 512 с.
9. *Baskakov, V. A.* On the degree of approximation of smooth functions by linear saturated operators / V. A. Baskakov // East Journal on Approximations. — 1995. — Vol. 1, № 4. — P. 513—520.
10. *Bruj, I.* Best Approximation and Saturation on Domains Bounded by Curves of Bounded Rotation / I. Bruj, G. Schmieder // J. Approx. Theory. — 1999. — Vol. 100, № 1. — P. 157—182.
11. *Kivinukk, A.* Approximation by typical sampling series / A. Kivinukk // Proc. 1999 Intern. Workshop on Sampling Theory and Appl. Loen (Norway), Aug. 11—14, 1999. — Norwegian Univ. Sci. & Technology, 1999. — P. 161—166.
12. *Kivinukk, A.* Summation methods of trigonometric Fourier series defined by the Zak transform / A. Kivinukk // Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. — 2001. — Vol. 50, № 1. — P. 5—15.
13. *Кук, Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей / Р. Кук. — М. : ГИФМЛ, 1960. — 471 с.
14. *Барон, С. А.* Введение в теорию суммируемости рядов / С. А. Барон. — Таллин : Валгус, 1977. — 280 с.
15. *Zygmund, A.* The approximation of functions by typical means of their Fourier series / A. Zygmund // Duke Mathematical Journal. — 1945. — Vol. 12. — P. 695—704.
16. *Hardy, G. H.* The general theory of Dirichlet's series / G. H. Hardy, M. Riesz. — Cambridge, 1915. — (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, № 18).
17. *Rogosinski, W.* Über die Abschnitte trigonometrischer Reihen / W. Rogosinski // Mathematische Annalen. — 1926. — Band 95. — S. 110—134.
18. *Харшиладзе, Ф. И.* О методе суммирования С. Н. Бернштейна и В. Рогозинского / Ф. И. Харшиладзе // Доклады АН СССР. — 1941. — Т. 30. — С. 692—695.
19. *Харшиладзе, Ф. И.* О методе суммирования С. Н. Бернштейна / Ф. И. Харшиладзе // Мат. сб. — 1942. — Т. 11. — С. 121—148.
20. *Кисляков, С. В.* Классическая проблематика анализа Фурье / С. В. Кисляков // Соврем. проблемы мат. Фундаментальные направления. — М. : ВИНИТИ АН СССР, 1987. — Т. 15. — С. 135—196. — (Итоги науки и техники).
21. *Joó, I.* On the summation of some expansions / I. Joó // Acta Mathematica Hungarica. — 1990. — Vol. 55, № 1—2. — P. 111—123.
22. *Тиман, А. Ф.* Об одном методе приближения непрерывных функций тригонометрическими полиномами / А. Ф. Тиман // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1947. — Т. 11. — С. 263—282.
23. *Никольский, С. М.* О линейных методах суммирования рядов Фурье / С. М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1948. — Т. 12, № 3. — С. 259—278.
24. *Sz. Nagy, B.* Méthodes de sommation des séries de Fourier, I / B. Sz. Nagy // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1950. — T. 12. — P. 204—210.
25. *Тиман, А. Ф.* Несколько замечаний о тригонометрических полиномах и рядах Фурье — Стильтьеса / А. Ф. Тиман // Успехи мат. наук. — 1957. — Т. 12, № 2. — С. 175—183.
26. *Ефимов, А. В.* О линейных методах суммирования рядов Фурье / А. В. Ефимов // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1960. — Т. 24, № 5. — С. 743—757.

27. *Теляковский, С. А.* Условия интегрируемости тригонометрических рядов и их приложение к изучению линейных методов суммирования рядов Фурье / С. А. Теляковский // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1964. — Т. 28, № 6. — С. 1209—1236.

28. *Тригуб, Р. М.* Суммируемость и абсолютная сходимость рядов Фурье в целом / Р. М. Тригуб // Метрические вопросы теории функций и отображений. — Киев : Навук. думка, 1971. — Вып. 2. — С. 165—266.

29. *Тригуб, Р. М.* Суммируемость рядов Фурье и некоторые вопросы теории приближений / Р. М. Тригуб ; Донецкий гос. ун-т. — Донецк, 1980. — 235 с. — Деп. в ВИНИТИ АН СССР 08.12.1980, № 5145—80 Деп.

30. *Тихомиров, В. М.* Теория приближений / В. М. Тихомиров // Соврем. проблемы мат. Фундаментальные направления. — М. : ВИНИТИ АН СССР, 1987. — Т. 14. — С. 103—260. — (Итоги науки и техники).

31. *Теляковский, С. А.* О работах по теории приближения функций, выполненных в МИАНе / С. А. Теляковский // Тр. Матем. ин-та АН СССР. — 1988. — Т. 182. — С. 128—179.

Материал поступил в редакцию 16.06.2013 г.

В. В. Бураковский

Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины», Гомель

НЕСИММЕТРИЧНАЯ МНОГОМАРКЕРНАЯ КОЛЬЦЕВАЯ ЛОКАЛЬНАЯ СЕТЬ

Построена математическая модель несимметричной многомаркерной кольцевой локальной сети с конечными буферами и вентильной дисциплиной обслуживания; получены стационарные вероятности состояний и основные вероятностно-временные характеристики сети.

Mathematical model of nonsymmetric multitoken ring local area network with finite capacity buffers and gated service discipline was described; stationary probabilities and main characteristics of network were obtained.

Ключевые слова: многомаркерная локальная сеть, станция, вентильное обслуживание.
Key words: multitoken local area network, station, gated service.

Введение. Многомаркерные локальные сети [1, с. 117] представляют большой интерес в связи с широким распространением беспроводных сетей передачи данных.

Будем рассматривать несимметричную компьютерную локально-вычислительную сеть с протоколом маркерного доступа, с конечным числом N абонентских станций (далее — АС), с конечными буферами ёмкости m на каждой АС. Количество маркеров меньше числа станций. Моменты приходов и уходов всех маркеров синхронизированы, т. е. даже при поступлении маркера на АС, где нет сообщений для передачи, он может остаться на станции до тех пор, пока не будут переданы все сообщения, подлежащие передаче с других АС кольца согласно действующей в кольце дисциплине обслуживания.